MECA 357 Thermodynamique appliquée - Formulaire

1 Équations de bilan

1.1 Système ouvert en régime transitoire (état uniforme, conditions d'entrée/sortie uniformes et stationnaires)

1.1.1 Équations instantanées

Masse $$\frac{\mathrm{d}m_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \tag{1}$$

1^er principe $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\underbrace{m\left(u + \frac{c^2}{2} + gz\right)}_{U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}}\Bigg]_O + \sum \dot{m}_s\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \sum_k \dot{Q}_k + \dot{W} \tag{2}$$

2^e principe $$\frac{\mathrm{d}S_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum_k \frac{\dot{Q}_k}{T_{S_k}} + \dot{\Sigma} \tag{3}$$

1.1.2 Équations intégrées dans le temps

Masse $$m_2 - m_1 + \sum m_s - \sum m_e = 0 \tag{4}$$

1^er principe $$m_2\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2\right) - m_1\left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1\right) + \sum m_s\left(h_s + \frac{c_s^2}{2} + gz_s\right) - \sum m_e\left(h_e + \frac{c_e^2}{2} + gz_e\right) = \sum_k Q_k + W \tag{5}$$

2^e principe $$m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e = \sum_k \frac{Q_k}{T_{S_k}} + \Sigma \tag{6}$$

1.2 Système ouvert en régime permanent

Masse $$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \tag{7}$$

1^er principe $$\sum \dot{m}_s\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \sum_k \dot{Q}_k + \dot{W} \tag{8}$$

2^e principe $$\sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum_k \frac{\dot{Q}_k}{T_{S_k}} + \dot{\Sigma} \tag{9}$$

1.3 Système fermé

Masse $$m_2 - m_1 = 0 \tag{10}$$

1er principe $$m_2\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2\right) - m_1\left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1\right) = \sum_k Q_k + W \tag{11}$$

2e principe $$m_2 s_2 - m_1 s_1 = \sum_k \frac{Q_k}{T_{S_k}} + \Sigma \tag{12}$$

2 Rendements

2.1 Rendements des machines adiabatiques

2.1.1 Rendement polytyropique — gaz parfaits uniquement

Machines réceptrices

$$\eta_p = \frac{\frac{n}{n-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}}{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \tag{13}$$

Machines motrices

$$\eta_p = \frac{\frac{k}{k-1}(p_e v_e - p_s v_s) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{\frac{n}{n-1}(p_e v_e - p_s v_s) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}} \tag{14}$$

2.1.2 Rendement isentropique

Machines réceptrices

$$\eta_s = \frac{h_{s_*} - h_e + \frac{c_{s*}^2 - c_e^2}{2}}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \tag{15}$$

Machines motrices

$$\eta_s = \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{h_e - h_{s_*} + \frac{c_e^2 - c_{s*}^2}{2}} \tag{16}$$

2.2 Rendements des machines non-adiabatiques, rendement isotherme

Machines réceptrices

$$\eta_T = \frac{w_T}{w} = \frac{h_{s_T} - h_e - T_0(s_{s_T} - s_e)}{h_s - h_e - q} \tag{17}$$

Machines motrices

$$\eta_T = \frac{w^*}{w_T^*} = \frac{h_e - h_s + q}{h_e - h_{s_T} + T_0(s_{s_T} - s_e)} \tag{18}$$

2.3 Rendements des diffuseurs et tuyères

2.3.1 Rendement polytropique — gaz parfaits uniquement

Diffuseurs

$$\eta_p = \frac{\frac{n}{n-1}(p_s v_s - p_e v_e)}{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e)} = \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{k}{k-1}} \tag{19}$$

Tuyères

$$\eta_p = \frac{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e)}{\frac{n}{n-1}(p_e v_e - p_s v_s)} = \frac{\frac{k}{k-1}}{\frac{n}{n-1}} \tag{20}$$

2.3.2 Rendement isentropique

Diffuseurs

$$\eta_s = \frac{h_{s_*} - h_e}{h_s - h_e} \tag{21}$$

Tuyères

$$\eta_s = \frac{h_e - h_s}{h_e - h_{s_*}} \tag{22}$$

2.4 Rendement exergétique

Définition générale :

$$\eta_{ex} = \frac{\text{variation du flux d'exergie onéreuse réversible}}{\text{variation du flux d'exergie onéreuse réelle}} = \frac{\text{variation du flux d'exergie utile réelle}}{\text{variation du flux d'exergie utile réversible}} \tag{23}$$

Machines et cycles récepteurs

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{W}_{\text{rév.}}}{\dot{W}} = \frac{\dot{W} - \dot{I}}{\dot{W}} \tag{24}$$

Machines et cycles moteurs

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{W}^*}{\dot{W}^*_{\text{rév.}}} = \frac{\dot{W}^*}{\dot{W}^* + \dot{I}} \tag{25}$$

3 Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Relation d'état	$pv = RT$	(26)
Lois de Joule	$\mathrm{d}u = c_v(T)\,\mathrm{d}T \qquad \mathrm{d}h = c_p(T)\,\mathrm{d}T$	(27)
Chaleurs massiques	$c_p - c_v = R, \dfrac{c_p}{c_v} = k, c_v = \dfrac{R}{k-1}, c_p = \dfrac{k}{k-1}R$	(28)
Entropie	$\mathrm{d}s = c_v\dfrac{\mathrm{d}T}{T} + R\dfrac{\mathrm{d}v}{v} \qquad \mathrm{d}s = c_p\dfrac{\mathrm{d}T}{T} - R\dfrac{\mathrm{d}p}{p}$	(29)
Transformation polytropique	$pv^n = \text{cte} \rightarrow pT^{-\frac{n}{n-1}} = \text{cte}, vT^{\frac{1}{n-1}} = \text{cte}$	(30)

4 Propriétés thermodynamiques des mélanges de gaz parfaits

4.1 Relations générales

Composition $$y_i = \frac{n_i}{n}, z_i = \frac{m_i}{m} \Rightarrow z_i = \frac{M_i y_i}{\sum_j M_j y_j}, y_i = \frac{z_i / M_i}{\sum_j z_j / M_j} \tag{31}$$

Loi de Dalton $$p = \sum_i p_i = \sum_i \frac{n_i \bar{R} T}{V} = \sum_i \frac{m_i R_i T}{V} \Rightarrow \frac{p_i}{p} = \frac{n_i}{n} = y_i \tag{32}$$

Énergie/enthalpie $$U = \sum_i m_i u_i \rightarrow u = \sum_i z_i u_i, \quad H = \sum_i m_i h_i \rightarrow h = \sum_i z_i h_i \tag{33}$$

Chaleurs massiques $$c_v = \sum_i z_i c_{v,i}, \quad c_p = \sum_i z_i c_{p,i} \tag{34}$$

$$\bar{c}_v = \sum_i y_i \bar{c}_{v,i}, \quad \bar{c}_p = \sum_i y_i \bar{c}_{p,i} \tag{35}$$

Entropie $$s = \sum_i z_i s_i(T, p_i) = \sum_i z_i \left(s_i(T, p_o) - R_i \ln \frac{p_i}{p_o} \right) = \sum_i z_i \left(s_i(T, p_o) - R_i \ln \frac{y_i p}{p_o} \right) \tag{36}$$

$$\bar{s} = \sum_i y_i \bar{s}_i(T, p_i) = \sum_i y_i \left(\bar{s}_i(T, p_o) - \bar{R} \ln \frac{p_i}{p_o} \right) = \sum_i y_i \left(\bar{s}_i(T, p_o) - \bar{R} \ln \frac{y_i p}{p_o} \right) \tag{37}$$

4.2 L'air humide

Humidité relative $$\phi \equiv \frac{p_v}{p_{\text{sat}}(T)} \tag{38}$$

Humidité absolue $$\omega \equiv \frac{m_v}{m_a} \Rightarrow \omega = \frac{z_v}{z_a} = \frac{z_v}{1 - z_v} \tag{39}$$

Relation entre humidités absolue et relative

$$\omega = \frac{M_v}{M_a} \frac{\phi p_{\text{sat}}(T)}{p - \phi p_{\text{sat}}(T)}, \quad \phi = \frac{\frac{M_a}{M_v}\omega}{1 + \frac{M_a}{M_v}\omega} \frac{p}{p_{\text{sat}}(T)} \quad \left(\frac{M_v}{M_a} = 0{,}622 \right) \tag{40}$$

5 Écoulements compressibles unidimensionnels de gaz parfaits à chaleurs massiques contantes

5.1 Vitesse du son et variables d'arrêt

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = kRT = k\frac{p}{\rho} = (k-1)h \tag{41}$$

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} = h(1 + \frac{c^2}{2h}) = h(1 + \frac{k-1}{2}\frac{c^2}{a^2}) = h(1 + \frac{k-1}{2}M^2) \tag{42}$$

$$T^0 = T(1 + \frac{k-1}{2}M^2) \tag{43}$$

$$p^0 = p(1 + \frac{k-1}{2}M^2)^{\frac{k}{k-1}} \tag{44}$$

5.2 Écoulement adiabatique et réversible avec variation de section

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{45}$$

$$\frac{T^0}{T^{0*}} = 1 \qquad \text{(Écoulement adiabatique} \Rightarrow T^0 = \text{cte)} \tag{46}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \tag{47}$$

$$\frac{p^0}{p^{0*}} = 1 \qquad \text{(Écoulement isentropique} \Rightarrow p^0 = \text{cte)} \tag{48}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left[\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{49}$$

5.3 Écoulement adiabatique avec frottement

$$\frac{4\mathfrak{f}L_{\max}}{D_h} = \frac{4\mathfrak{f}L^*}{D_h} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left(\frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right) \tag{50}$$

$$\frac{T^0}{T^{0*}} = 1 \qquad \text{(Écoulement adiabatique} \Rightarrow T^0 = \text{cte)} \tag{51}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \tag{52}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

$$\frac{p^0}{p^{0*}} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad \text{(Écoulement irréversible} \Rightarrow p^0 \neq \text{cte)} \tag{54}$$

5.4 Écoulement avec échange de chaleur

$$\frac{T^0}{T^{0*}} = \frac{2M^2(k+1)(1+\frac{k-1}{2}M^2)}{(1+kM^2)^2} \qquad \text{(Écoulement non-adiabatique} \Rightarrow T^0 \neq \text{cte)} \tag{55}$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)^2 \tag{56}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{57}$$

$$\frac{p^0}{p^{0*}} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{p}{p^*} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1+k}{1+kM^2} \quad (\neq \text{cte}) \tag{58}$$

5.5 Ondes de choc normales

$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{2+(k-1)M_1^2} \tag{59}$$

$$\Pi = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2kM_1^2-(k-1)}{k+1} \tag{60}$$

$$M_2^2 = \frac{2+(k-1)M_1^2}{2kM_1^2-(k-1)} \tag{61}$$