

14 Écoulements compressibles

Dans de nombreuses applications sont employés des dispositifs dont la fonction est de transformer de l'énergie cinétique en énergie interne ou vice-versa, sans échange de travail : tuyères propulsives de turboréacteurs ou de moteurs-fusée, aubages distributeurs de turbines à gaz ou à vapeur, diffuseurs, aubages redresseurs de compresseurs. On les a d'ailleurs mentionnés spécifiquement à la section 7.16 consacrée aux notions de rendement.

Et il en est de même pour les aubages mobiles des pompes, compresseurs et turbines, lorsqu'on se place en repère relatif. C'est d'ailleurs la caractéristique fondamentale des turbomachines comme convertisseurs d'énergie (par rapport aux machines volumétriques) que d'effectuer la transformation d'énergie interne en travail ou vice-versa via le passage par l'énergie cinétique.

On consacra dès lors ce chapitre à l'aspect thermodynamique des écoulements dans de tels dispositifs, en se limitant à l'étude des écoulements unidimensionnels.

Les écoulements compressibles bidimensionnels font l'objet du cours MECA 339
Dynamique des gaz en 5^e MECA.

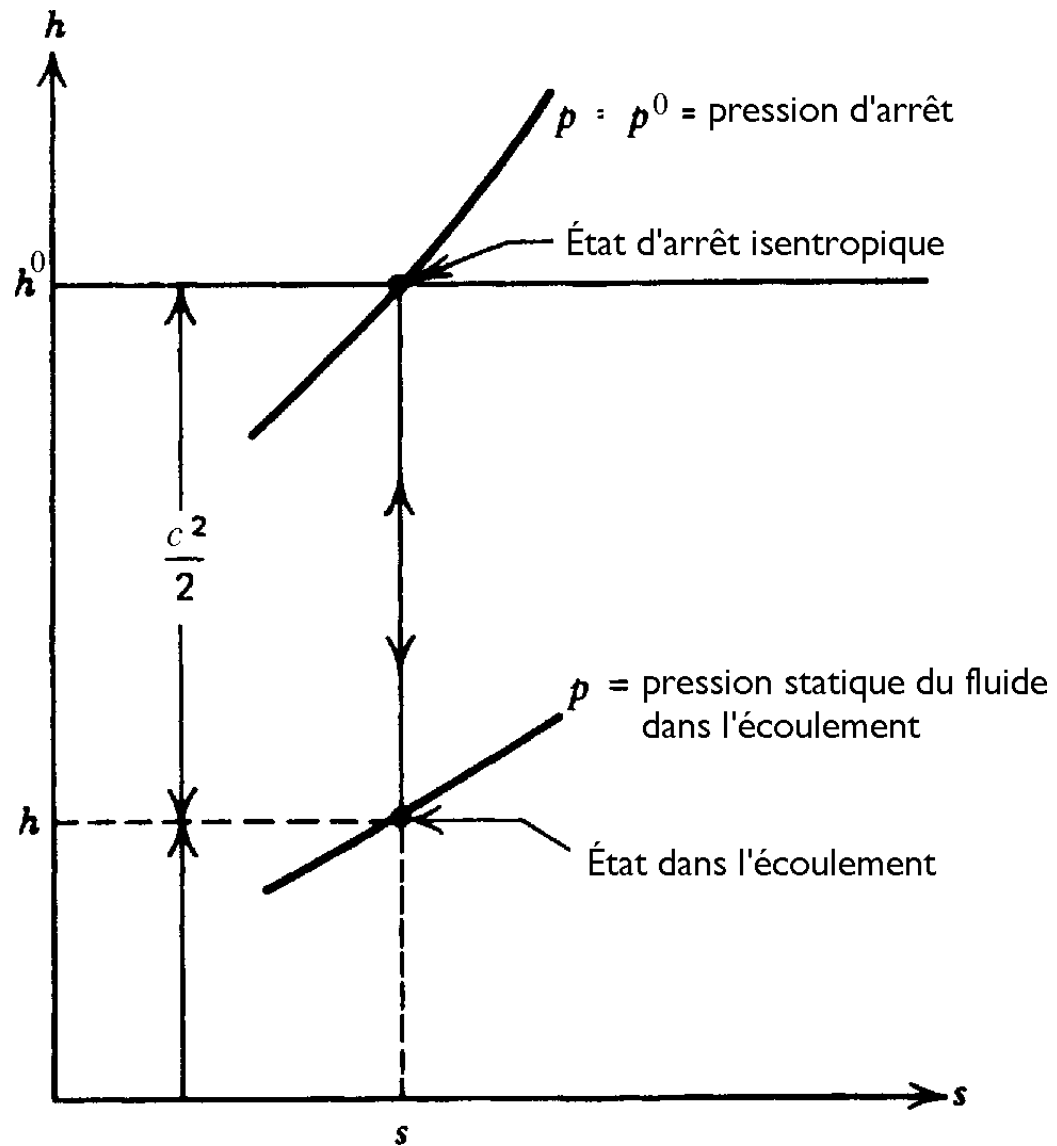
14.1 Variables totales ou d'arrêt

Rappelons le concept de variables totales ou d'arrêt introduites à la section 7.16. On appelle état d'arrêt isentropique d'un fluide qui s'écoule, l'état que ce fluide atteindrait si on l'amenait à l'arrêt de manière adiabatique et réversible (et donc isentropique). En désignant les conditions d'arrêt ou totales par l'indice supérieur 0, on a donc

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} \quad s^0 = s \quad (14.1)$$

L'état d'arrêt isentropique se représente aisément sur un diagramme de Mollier (voir page suivante). Dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, la pression totale ou pression d'arrêt se calcule aisément à l'aide des expressions décrivant les transformations isentropiques (7.31)

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{h^0}{h} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$



14.2 Théorème de la résultante cinétique

On rappellera tout d'abord le théorème de la résultante cinétique établi au cours de Mécanique des milieux continus. Pour un système fermé, le théorème de la résultante cinétique (2^e loi de Newton) s'écrit simplement

$$\frac{d\vec{P}_F}{dt} = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

où \vec{P}_F est la quantité de mouvement du système fermé, et \vec{F}_V et \vec{F}_S respectivement les forces de volume et de surface qui s'appliquent sur le système.

La généralisation à un système ouvert s'obtient en suivant exactement la même démarche que pour les premier et second principe (voir sections 5.10 et 7.12). Le taux de variation de la quantité de mouvement du système fermé constitué de la matière initialement contenue dans le système ouvert considéré est relié à celui du système ouvert par

$$\frac{d\vec{P}_F}{dt} = \frac{d\vec{P}_O}{dt} + \oint_S \rho \vec{c} (\vec{c} - \vec{b}_O) \cdot \vec{n} dS = \frac{d\vec{P}_O}{dt} + \sum \dot{m}_s \vec{c}_s - \sum \dot{m}_e \vec{c}_e \quad (14.2)$$

puisque la quantité de mouvement massique n'est rien d'autre que la vitesse \vec{c} . Et comme les forces s'appliquant sur le système ouvert sont identiques à celle s'appliquant sur le système fermé au moment initial où ils coïncident, on a

$$\frac{d\vec{P}_O}{dt} + \sum \dot{m}_s \vec{c}_s - \sum \dot{m}_e \vec{c}_e = \vec{F}_V + \vec{F}_S \quad (14.3)$$

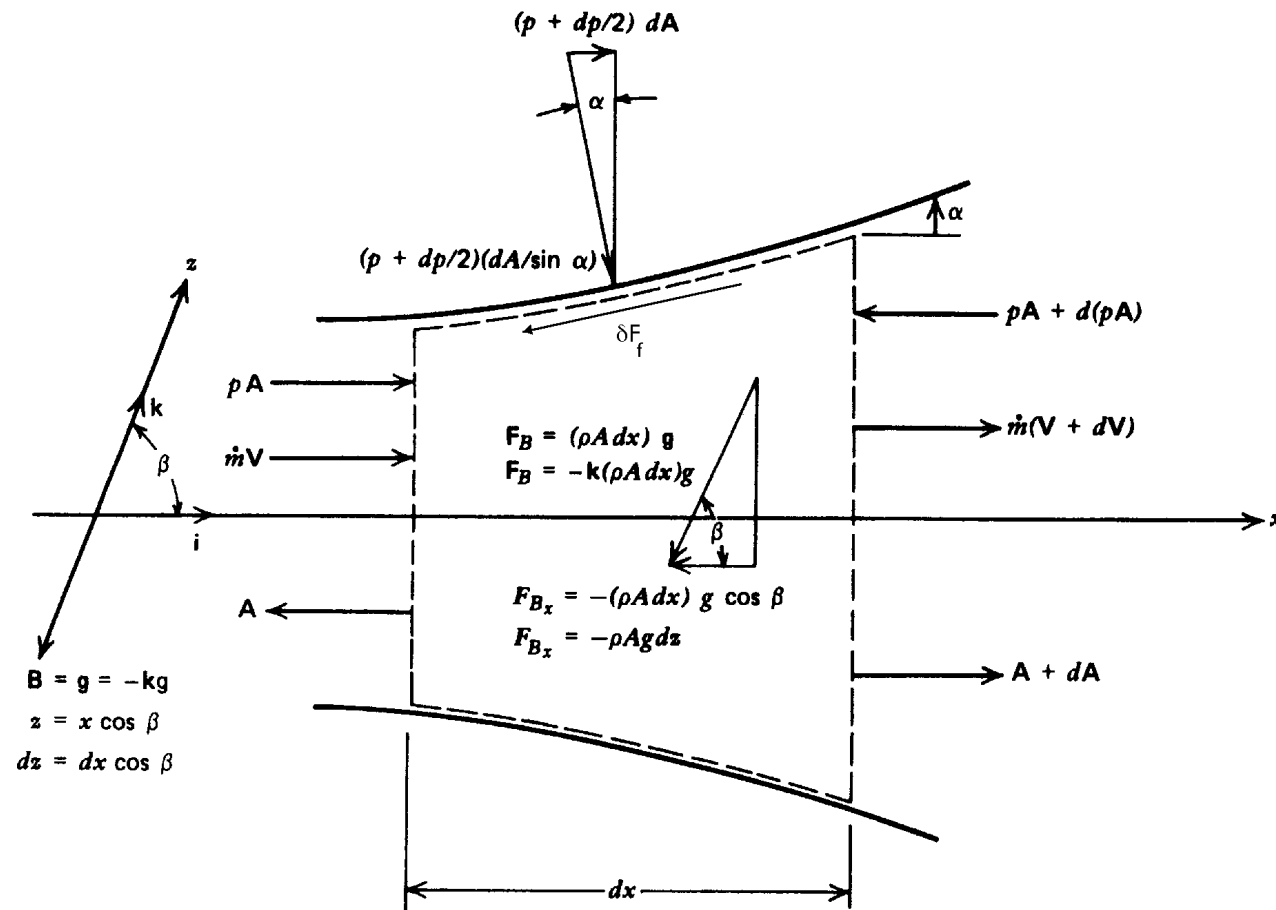
et, dans le cas particulier d'un système en régime stationnaire

$$\sum \dot{m}_s \vec{c}_s - \sum \dot{m}_e \vec{c}_e = \vec{F}_V + \vec{F}_S \quad (14.4)$$

résultat abondamment employé au cours de Phénomènes de transport pour calculer les forces s'appliquant sur des systèmes ouverts (p. ex. sur le coude d'une canalisation).

14.3 L'écoulement (quasi-)unidimensionnel stationnaire

Considérons à présent l'écoulement dans une canalisation droite de section variable $A(x)$, telle que représentée ci-dessous.



On considère l'écoulement **quasi-unidimensionnel**, c.-à-d. qu'on suppose que la variation de section est suffisamment lente pour qu'on puisse faire l'approximation que les variables de l'écoulement (vitesse et variables thermodynamiques) sont uniformes à travers la section, et ne dépendent donc que de la coordonnée x .

Appliquons les équations des systèmes ouverts à une tranche dx de la canalisation.

14.3.1 Conservation de la masse

$$\dot{m}(x + dx) - \dot{m}(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\dot{m}}{dx} = 0 \quad (14.5)$$

ou encore, comme $\dot{m} = \rho c A$,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = -\frac{dv}{v} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (14.6)$$

14.3.2 Théorème de la résultante cinétique

$$\dot{m}(c + dc) - \dot{m}c = -[pA + d(pA)] + pA + (p + \frac{dp}{2})dA - \delta F_f - \rho g A dz \quad (14.7)$$

En simplifiant, et en négligeant les termes d'ordre supérieur, il reste

$$\dot{m}dc = \rho A c dc = -A dp - \delta F_{\text{f}} - \rho g A dz \quad (14.8)$$

ou, en divisant par ρA ,

$$c dc + \frac{dp}{\rho} + g dz = -\frac{\delta F_{\text{f}}}{\rho A} \quad (14.9)$$

relation qui, en l'absence de frottement ($\delta F_{\text{f}} = 0$), n'est rien d'autre que la forme différentielle de l'équation de Bernoulli (7.47).

Pour les écoulements de fluides compressibles auxquels on s'intéresse, la contribution de la force de volume est négligeable, et sera ignorée dans la suite.

On exprime la force de frottement au moyen d'un coefficient adimensionnel défini comme suit

$$\delta \mathcal{F} = \frac{\delta F_{\text{f}}}{\frac{1}{2} \rho c^2 A}$$

de sorte qu'on obtient finalement l'expression suivante du théorème de la

résultante cinétique

$$c dc + \frac{dp}{\rho} + \frac{c^2}{2} \delta \mathcal{F} = 0 \quad (14.10)$$

Le frottement $\delta F_{\check{f}}$ comprend tout à la fois le frottement visqueux aux parois et la traînée des corps éventuellement plongés dans l'écoulement. La contribution du frottement visqueux aux parois s'exprime généralement en termes d'un coefficient de frottement \check{f} défini par l'expression

$$\check{f} = \frac{\delta F_{\check{f},p}}{\frac{1}{2} \rho c^2 (PM) dx} = \frac{A}{(PM) dx} \delta \mathcal{F}_p \quad (14.11)$$

où (PM) est le périmètre mouillé. En définissant le diamètre hydraulique $D_h = 4A/(PM)$, on a donc

$$\delta \mathcal{F}_p = 4\check{f} \frac{dx}{D_h}$$

de sorte que, en notant δX la contribution de la traînée des corps immergés, on a

$$\delta \mathcal{F} = 4\check{f} \frac{dx}{D_h} + \frac{\delta X}{\frac{1}{2} \rho c^2 A}$$

14.3.3 Premier principe

En négligeant l'énergie potentielle, le premier principe s'écrit

$$\dot{m}\left(h + \frac{c^2}{2} + d\left(h + \frac{c^2}{2}\right)\right) - \dot{m}\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = \delta\dot{Q} \quad (14.12)$$

et donc,

$$d\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = \frac{\delta\dot{Q}}{\dot{m}} = \delta q = dh^0 \quad (14.13)$$

14.3.4 Second principe

$$\dot{m}(s + ds) - \dot{m}s \geq \frac{\delta\dot{Q}}{T} \quad (14.14)$$

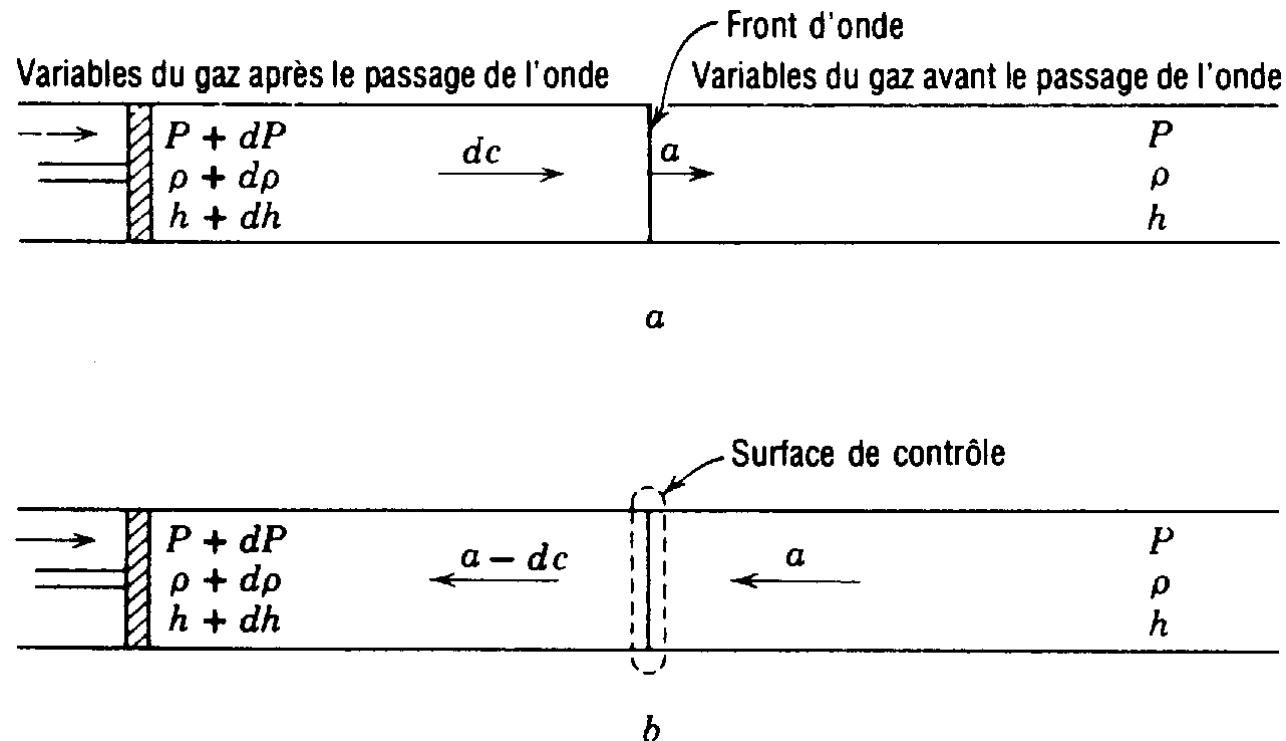
ou, en divisant par le débit massique

$$ds \geq \frac{\delta q}{T} = \frac{dh^0}{T} \quad (14.15)$$

14.4 La vitesse du son et le nombre de Mach

On va à présent appliquer les résultats de la section précédente pour déterminer la vitesse de propagation d'une petite perturbation de pression, c.-à-d. la vitesse du son.

Considérons une perturbation de pression infinitésimale d'amplitude dP créée par le déplacement d'un piston avec une vitesse infinitésimale dc à l'extrémité d'un tube.



La perturbation se propage dans le tube sous la forme d'une onde plane se déplaçant à une vitesse a . Plaçons-nous dans un référentiel lié à l'onde. Comme la surface du tube est constante ($dA = 0$), et en supposant la transformation adiabatique et réversible, les équations s'appliquant à une tranche de tube dx autour de l'onde s'écrivent, en appelant $w = c - a$ la vitesse dans le référentiel choisi

$$d(\rho w) = \rho dw + w d\rho = \rho dc - a d\rho = 0 \quad (14.16)$$

$$cdc + \frac{dp}{\rho} = -adc + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (14.17)$$

$$dh + cdc = dh - adc = 0 \quad (14.18)$$

$$ds = 0 \quad (14.19)$$

On peut remarquer que les trois dernières équations sont évidemment liées entre elles, car l'absence de frottement va de pair avec la réversibilité. En vertu de la relation de Gibbs $dh = Tds + vdp$, $dh = vdp$, et donc les 2^e et 3^e équations sont identiques.

Éliminant dc entre les deux premières équations, on obtient

$$dp - a^2 d\rho = 0 \quad (14.20)$$

dont on déduit l'expression de la vitesse de la perturbation a

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (14.21)$$

que l'on peut également exprimer en fonction du coefficient d'élasticité adiabatique B_s (voir section 11.5). En effet,

$$B_s = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rightarrow a^2 = \frac{B_s}{\rho}$$

Évaluons cette expression dans le cas d'un gaz parfait. En vertu de la relation

$$\frac{ds}{R} = \frac{k}{k-1} \frac{dv}{v} + \frac{1}{k-1} \frac{dp}{p} = -\frac{k}{k-1} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{k-1} \frac{dp}{p}$$

établie à la section 7.10, on déduit

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k \frac{p}{\rho} = kRT \quad (14.22)$$

Un paramètre très important d'un écoulement compressible est le **nombre de Mach**, défini comme le rapport entre la vitesse c et la vitesse du son a

$$M \equiv \frac{c}{a} \quad (14.23)$$

Lorsque $M < 1$, l'écoulement est dit **subsonique**; lorsque $M > 1$, il est dit **supersonique**, et lorsque $M = 1$, l'écoulement est sonique.

14.5 Équations des écoulements unidimensionnels de gaz parfaits en fonction du nombre de Mach

Pour la suite des discussions, il s'avère intéressant de réécrire les équations des écoulements unidimensionnels de gaz parfaits en fonction du nombre de Mach.

Équation de conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (14.24)$$

Équation de quantité de mouvement (résultante cinétique) En divisant l'équation de quantité de mouvement (14.10)

$$cdc + \frac{dp}{\rho} + \frac{c^2}{2} \delta\mathcal{F} = 0$$

par $p/\rho = a^2/k$, on obtient

$$\frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dc}{c} + \frac{kM^2}{2} \delta\mathcal{F} = 0 \quad (14.25)$$

Équation de l'énergie (premier principe) L'équation de l'énergie (14.13)

$$d\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = dh^0$$

s'intègre immédiatement pour donner

$$h + \frac{c^2}{2} = h^0 \quad (14.26)$$

qui n'est rien d'autre que la définition de l'enthalpie totale. Pour un gaz parfait à chaleurs massiques constantes,

$$h = c_p T = \frac{kRT}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} \quad (14.27)$$

de sorte que l'on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$h\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) = h^0 \quad \Leftrightarrow \quad T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) = T^0 \quad (14.28)$$

En en prenant la dérivée logarithmique, on obtient la forme différentielle

$$\frac{dh}{h} + \frac{(k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} = \frac{dh^0}{h^0} \quad (14.29)$$

Équation des gaz parfaits En prenant la dérivée logarithmique de l'équation des gaz parfaits $p = \rho RT$, on obtient la forme logarithmique

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dh}{h} \quad (14.30)$$

Définition du nombre de Mach En prenant la dérivée logarithmique de la définition du nombre de Mach $M = c/a$, on obtient la forme différentielle

$$\frac{dM}{M} = \frac{dc}{c} - \frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dh}{h} \quad (14.31)$$

Résumé En rassemblant les diverses équations, on obtient le système différentiel

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} &= 0 \\
 \frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dc}{c} + \frac{kM^2}{2} \delta\mathcal{F} &= 0 \\
 \frac{dh}{h} + \frac{(k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} &= \frac{dh^0}{h^0} \\
 \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dh}{h} \\
 \frac{dM}{M} &= \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dh}{h}
 \end{aligned}
 \tag{14.32}$$

que l'on peut résoudre pour dM/M , dc/c , dp/p , $d\rho/\rho$ et dh/h en fonction de dA/A (effet de la variation de section), de $\delta\mathcal{F}$ (effet du frottement) et de dh^0/h^0 (effet d'un apport de chaleur). Nous allons étudier chacun de ces effets successivement.

14.6 Écoulement unidimensionnel isentropique avec variation de section

14.6.1 Effet de la variation de section

Examinons l'effet de la variation de section dans le cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. Les équations de conservation de la masse et de l'énergie sont respectivement

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0$$
$$d\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = dh + cdc = 0$$

L'écoulement étant isentropique $dh = vdp = va^2d\rho$. Par conséquent, l'équation de l'énergie peut se réécrire

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + cdc = 0 \quad (14.33)$$

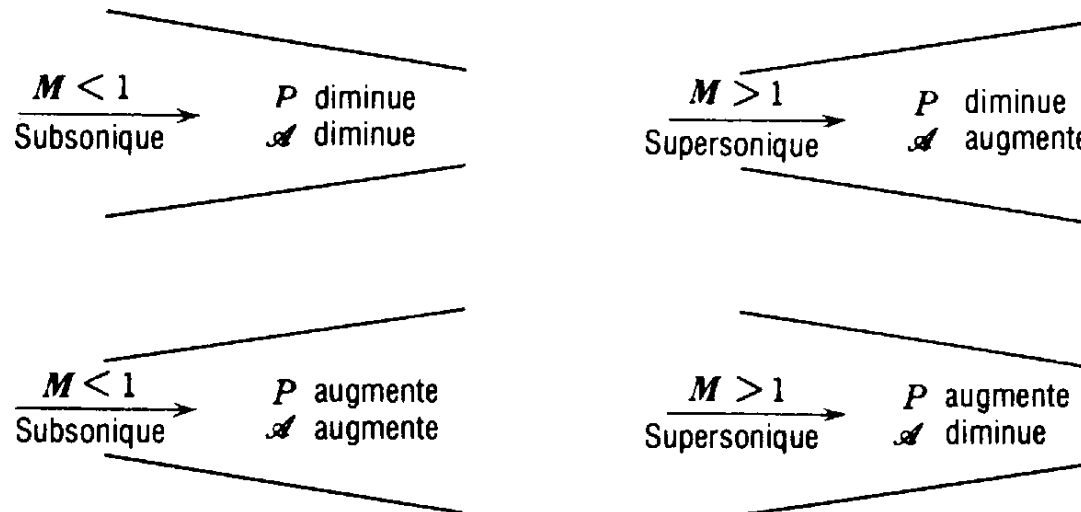
Résolvant pour $d\rho/\rho$ et insérant dans l'équation de conservation de la masse, on

obtient

$$\frac{dc}{c}(1 - M^2) + \frac{dA}{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c}(1 - M^2) = -\frac{dp}{\rho c^2}(1 - M^2) \quad (14.34)$$

Ce résultat a une grande importance, car il permet de déterminer la forme à donner à la conduite pour effectuer une détente (tuyères) ou une compression (diffuseurs).

Pour une tuyère ($dp < 0$), elle doit être convergente ($dA < 0$) si l'écoulement est subsonique ($M < 1$) et divergente ($dA > 0$) si l'écoulement est supersonique ($M > 1$). Inversément, un diffuseur doit être divergent ($dA > 0$) si l'écoulement est subsonique ($M < 1$) et convergent si l'écoulement est supersonique ($M > 1$).



On en déduit également que l'écoulement ne peut être sonique que là où la section passe par un extremum ($dS = 0$) qui, compte tenu de la discussion précédente doit être un minimum, c'est-à-dire en un **col**.

Si l'écoulement est sonique au col, alors l'évolution en aval du col peut être soit subsonique, soit supersonique. C'est la condition aux limites en aval du divergent qui détermine lequel des deux comportements se réalise.

14.6.2 Saturation

Supposons que l'on accélère un écoulement subsonique dans un convergent (ou que l'on décélère un écoulement supersonique dans ce même convergent). Comme pour tous les fluides compressibles, la vitesse du son diminue lorsque la température diminue, le nombre de Mach varie dans le même sens que la vitesse. Il augmente donc pour un écoulement subsonique et diminue pour un écoulement supersonique. Toutefois, en vertu de l'équation (14.34), le nombre de Mach ne peut pas atteindre l'unité à l'intérieur du convergent, seulement à son extrémité. On appelle ce phénomène la **saturation** de la tuyère.

Si l'on accélère un fluide de conditions d'arrêt données au moyen d'une tuyère convergente en diminuant la pression régnant en aval de celle-ci, la vitesse à la section de sortie, et donc aussi le débit, augmentent jusqu'à ce que les conditions soniques y soient atteintes. Ils ne changent plus si on continue à réduire la pression.

On déduit également qu'on ne peut accélérer un écoulement jusqu'à des conditions supersoniques qu'au moyen d'une tuyère convergente-divergente, que l'on appelle **tuyère de Laval**.

14.6.3 Écoulement de gaz parfait

Dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, on peut intégrer les équations (14.32) analytiquement. On a déjà établi la relation

$$T^0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

Comme l'écoulement est isentropique, on en déduit

$$p^0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (14.35)$$

$$\rho^0 = \rho \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (14.36)$$

En particulier, les conditions au point sonique, appelées conditions critiques et désignées par l'indice supérieur *, ont les valeurs suivantes

$$\frac{T^*}{T^0} = \frac{2}{k+1} \quad (14.37)$$

$$\frac{p^*}{p^0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (14.38)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho^0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (14.39)$$

On en déduit les expressions des rapports entre variables locales et critiques

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k + 1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \quad (14.40)$$

$$\frac{p}{p^*} = \left[\frac{k + 1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (14.41)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[\frac{k + 1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (14.42)$$

La vitesse c vaut, elle

$$c = Ma = M \left[\frac{kRT^0}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right]^{\frac{1}{2}} = c^* M \left[\frac{k + 1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14.43)$$

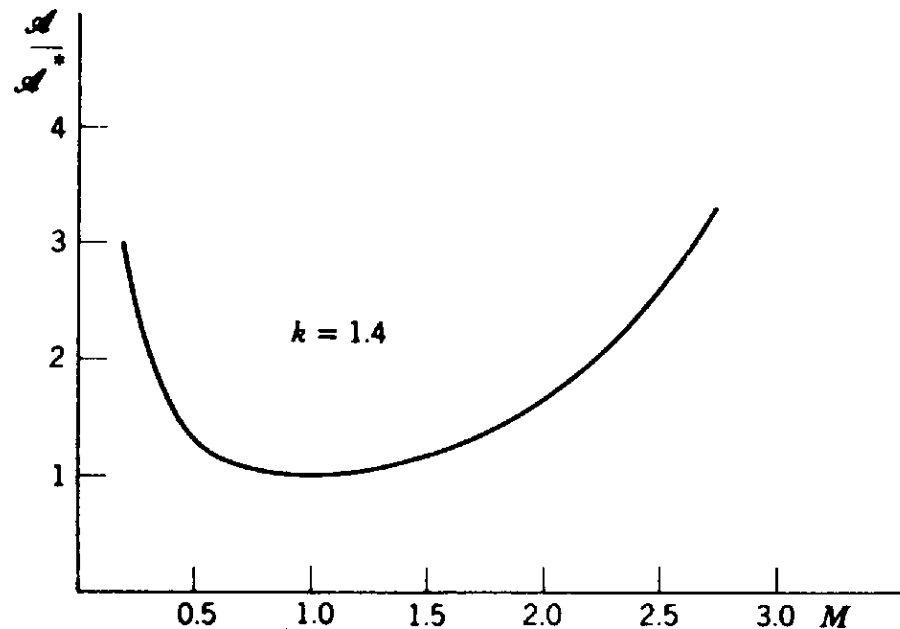
et l'on constate qu'elle tend vers une valeur limite pour $M \rightarrow \infty$

$$c_{\max} = \sqrt{2 \frac{kR}{k-1} T^0} = \sqrt{2c_p T^0} \quad (14.44)$$

Comme le débit massique $\dot{m} = \rho c A$ se conserve, on en déduit

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* c^*}{\rho c} = \frac{1}{M} \left[\frac{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{M} \left[\frac{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (14.45)$$

Cette dernière relation est représentée ci-dessous. Elle confirme la conclusion antérieure que le nombre de Mach d'un écoulement subsonique augmente dans une tuyère convergente et celui d'un écoulement supersonique dans une tuyère divergente.



À partir des expressions précédentes, on peut calculer le débit massique passant par une section donnée

$$\dot{m} = \rho c A = \rho M a A = \rho^0 a^0 M \frac{\rho}{\rho^0} \frac{a}{a^0} = \frac{k p^0}{a^0} M \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{k p^0}{a^0} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{A^*}{A}$$

On peut encore exprimer ce résultat en fonction du rapport de pression p/p^0 .

Comme

$$\frac{p}{p^0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}} \quad \rightarrow \quad M = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p^0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

on obtient finalement

$$\dot{m} = \frac{k p^0}{a^0} \left(\frac{p}{p^0} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p^0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{p^0}{a^0} \left\{ \frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{p}{p^0} \right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{p}{p^0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14.46)$$

Le terme entre accolades est appelé coefficient de débit et est désigné par le symbole ψ . Comme il est proportionnel au rapport A^*/A , il passe par un maximum

lorsque l'écoulement est localement sonique, c.-à-d. pour

$$\frac{p}{p^0} = \frac{p^*}{p^0}$$

Il va de soi que ce débit ne peut être atteint qu'à la section minimum (sortie pour une tuyère convergente, col pour une tuyère de Laval).

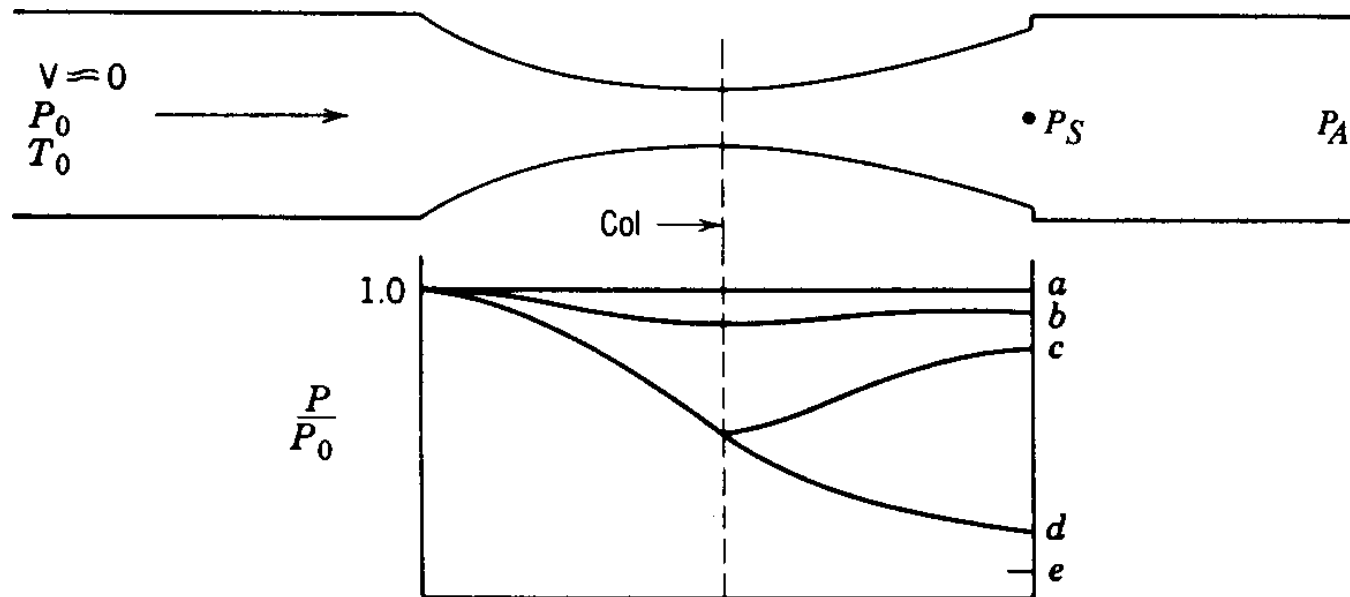
14.6.4 Écoulement dans une tuyère de forme donnée

Considérons une tuyère de forme donnée alimentée par un fluide de conditions totales données et étudions le comportement de l'écoulement en fonction de la pression aval p_s . Si la pression aval est égale à la pression d'arrêt, le fluide est entièrement au repos. Si l'on baisse la pression aval, un écoulement s'établit dans la tuyère. Tant que le rapport de pression p_s/p^0 est tel que

$$\frac{A_s}{A_{\text{col}}} < \frac{A}{A^*}(M_s) \quad \text{avec} \quad M_s = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_s}{p^0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

l'écoulement est subsonique au col, et il existe une solution unique (cas b de la

figure suivante). En effet, en vertu de la relation précédente, $A^* < A_{\text{col}}$, et donc $M_{\text{col}} < 1$.



Lorsque la pression est telle que $A_s/A_{\text{col}} = (A/A^*)(M_s)$, l'écoulement est sonique au col (cas c) et subsonique dans le divergent. Si l'on réduit encore la pression, alors il n'y a plus de solution isentropique, sauf pour le cas d correspondant à un écoulement supersonique dans le divergent. On dit alors que la tuyère est **adaptée**. Pour toutes les pressions intermédiaires entre les cas c et d, il y aura donc des phénomènes irréversibles qui interviennent dans ou à l'extérieur de la tuyère.

14.7 Écoulement unidimensionnel adiabatique avec frottement

14.7.1 Effet du frottement

Dans le cas d'un écoulement avec frottement et sans échange de chaleur (adiabatique) dans une conduite de section constante, les équations du mouvement deviennent.

Conservation de la masse

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho c = \frac{c}{v} = \text{constante} \quad (14.47)$$

Résultante cinétique

$$c dc + \frac{dp}{\rho} + \frac{c^2}{2} \delta \mathcal{F} = 0 \quad (14.48)$$

Premier principe

$$d\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = dh^0 = 0 \quad (14.49)$$

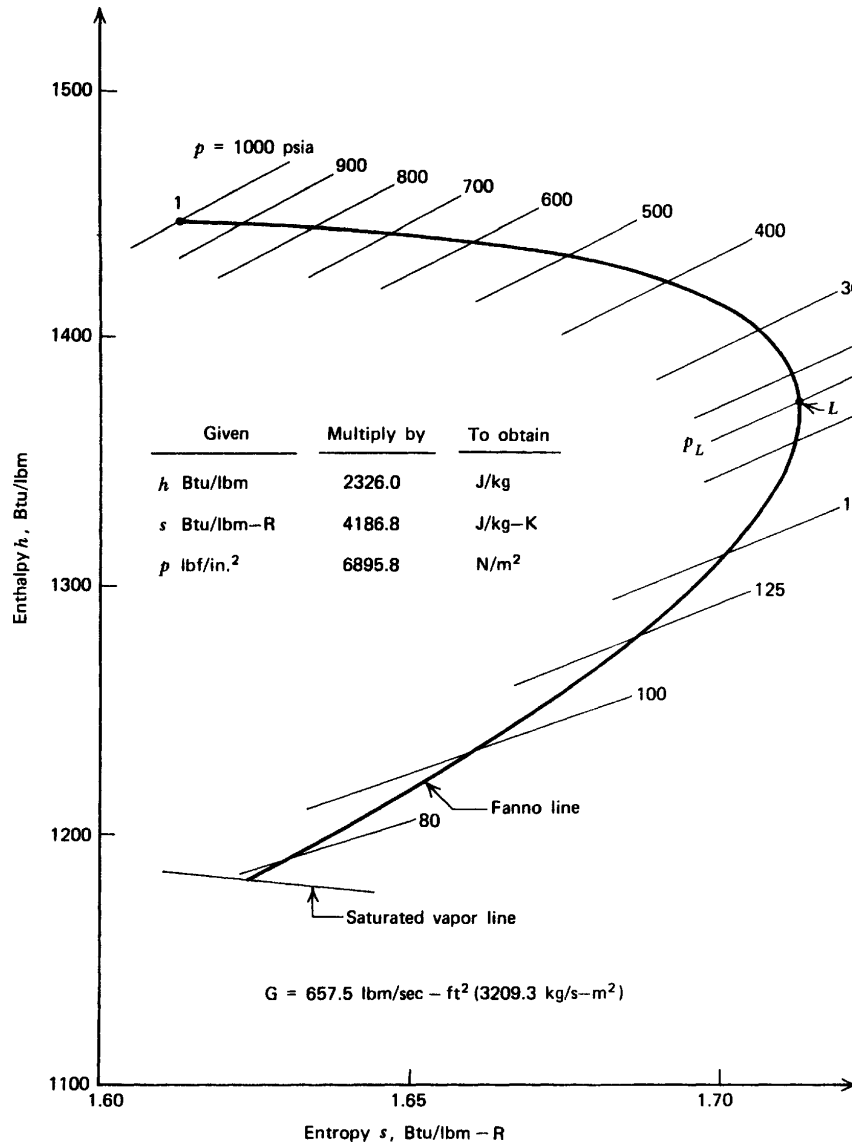
Comme $c = Gv$, on peut exprimer l'équation de l'énergie uniquement en fonction

de variables thermodynamiques :

$$h + G^2 \frac{v^2}{2} = h^0 \quad (14.50)$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, que l'on appelle **ligne de Fanno**. Elle s'applique au cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. L'effet du frottement n'apparaît pas explicitement, mais se manifeste via son influence sur les propriétés thermodynamiques.

À titre d'illustration, on représente une ligne de Fanno dans un diagramme de Mollier de la vapeur d'eau sur la planche suivante. La forme de la courbe est semblable pour tous les fluides compressibles. Avec un fluide entrant dans l'état 1, le frottement aura pour effet de réduire la pression (perte de charge), ce qui entraîne une diminution de masse volumique et donc une augmentation de vitesse, et par conséquent une diminution d'enthalpie. On constate que l'entropie augmente, ce qui est en accord avec le second principe puisque la transformation est adiabatique.



On constate que la ligne de Fanno présente un maximum d'entropie, indiqué par point L . On en déduit que la pression dans la conduite ne peut descendre sous la valeur p_L et que la vitesse ne peut excéder la valeur c_L atteinte au même point. Comme dans le cas de la tuyère convergente décrit à la section précédente, on observe donc un phénomène de saturation, cette fois dû au frottement.

Comme dans le cas de la tuyère convergente, la section ne pouvait pas diminuer sous la section critique, le frottement ne peut excéder une valeur maximum.

En effet, en soustrayant l'équation de l'énergie de l'équation de quantité de mouvement, on obtient

$$vdp - dh + \frac{c^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0 \rightarrow \delta\mathcal{F} = \frac{Tds}{c^2/2} \rightarrow \mathcal{F} = \int_e^s \frac{Tds}{c^2/2} \leq \int_e^L \frac{Tds}{c^2/2}$$

En l'absence d'obstacles dans l'écoulements, $\delta\mathcal{F} = 4f dx/D_h$, et il y a donc une longueur maximum de conduite L_{\max} ,

$$L_{\max} = \frac{D_h}{4f} \int_e^L \frac{Tds}{c^2/2} = \frac{D_h}{4fG^2} \int_e^L \frac{Tds}{v^2/2} = -\frac{D_h}{2fG^2} \int_e^L \left(G^2 \frac{dv}{v} + \frac{dp}{v} \right) \quad (14.51)$$

Si la conduite considérée est plus longue que cette longueur limite, cela signifie que les conditions d'entrée ne sont pas réalisables, spécifiquement que le débit est trop élevé.

Examinons de plus près les conditions d'écoulement au point limite L . Comme en ce point $ds = 0$,

$$dh = vdp = va^2 d\rho = -a^2 dv/v$$

Mais par ailleurs $dh = -G^2 v dv$, de sorte que

$$G^2 v = a^2 / v \rightarrow c^2 = G^2 v^2 = a^2$$

c.-à-d. que l'écoulement est sonique, comme à l'extrémité d'une tuyère convergente saturée.

La partie inférieure de la ligne de Fanno correspond à des conditions d'entrée supersoniques. Dans ce cas, le frottement a pour effet (paradoxal) de comprimer le fluide. La raison en est que la perte de charge a pour effet principal de réduire la vitesse, dont il s'ensuit une augmentation de masse volumique (par conservation du débit) et de pression. On constate donc que le frottement a pour effet de faire tendre le nombre de Mach vers l'unité, comme la convergence d'une tuyère.

Remarquons pour terminer que, par un point du plan thermodynamique, il passe plusieurs lignes de Fanno correspondant à des débits différents.

14.7.2 Équations de la ligne de Fanno pour les gaz parfaits

Comme à la section précédente, on peut obtenir une solution analytique dans le cas des gaz parfaits. Comme l'enthalpie totale se conserve, on a à nouveau

$$T^0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

et en particulier, à l'état critique L que l'on désignera dans ce qui suit par l'indice supérieur $*$ (mais qu'il faut veiller à ne pas confondre avec l'état critique isentropique de la section précédente),

$$T^0 = \frac{k+1}{2} T^* \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} \quad (14.52)$$

À partir de l'équation de conservation de la masse, on tire

$$G = \rho c = \rho M a = p M \sqrt{\frac{k}{RT}}$$

d'où

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{k+1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14.53)$$

et donc

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*} \frac{T^*}{T} = \frac{1}{M} \left(\frac{k+1}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (14.54)$$

Calculons à présent la longueur maximum. De l'équation de l'énergie $dh + cdc = 0$, on a en divisant par h ,

$$\frac{dh}{h} + \frac{c^2}{h} \frac{dc}{c} = \frac{dT}{T} + (k-1)M^2 \frac{dc}{c} = 0$$

Mais par ailleurs, par conservation de la masse,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0$$

d'où, en sommant,

$$\frac{dp}{p} + \left[1 + (k-1)M^2\right] \frac{dc}{c} = 0$$

De l'équation de quantité de mouvement (14.25)

$$\frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dc}{c} + \frac{kM^2}{2} \delta\mathcal{F} = 0$$

on déduit par conséquent

$$\frac{kM^2}{2} \delta\mathcal{F} = (1 - M^2) \frac{dc}{c}$$

Enfin, comme

$$\frac{dM}{M} = \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dc}{c}$$

on obtient

$$\delta\mathcal{F} = \frac{4f dx}{D_h} = \frac{2(1 - M^2)}{kM^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M} = \frac{2(1 - M^2)dM}{kM^3 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \quad (14.55)$$

En intégrant entre le point courant et le point critique, on obtient

$$\frac{4fL_{\max}}{D_h} = \frac{1 - M^2}{kM^2} + \frac{k + 1}{2k} \ln \left(\frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \quad (14.56)$$

Enfin, on peut calculer la variation d'entropie. Comme (voir section 7.10)

$$\frac{ds}{R} = \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} = (1 - M^2) \frac{dc}{c} = \frac{1 - M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M}$$

on obtient en intégrant

$$\frac{s^* - s}{R} = \ln \left\{ \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \right\} \quad (14.57)$$

14.8 Écoulement unidimensionnel avec échange de chaleur

14.8.1 Effet de l'échange de chaleur

On considère à présent l'écoulement sans frottement mais avec échange de chaleur dans une conduite de section constante. Les équations du mouvement deviennent dans ce cas

Conservation de la masse

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho c = \frac{c}{v} = \text{constante} \quad (14.58)$$

Résultante cinétique

$$c dc + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (14.59)$$

Premier principe

$$d\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = dh^0 \quad (14.60)$$

Comme $c = Gv$, on peut exprimer l'équation de quantité de mouvement

uniquement en fonction de variables thermodynamiques

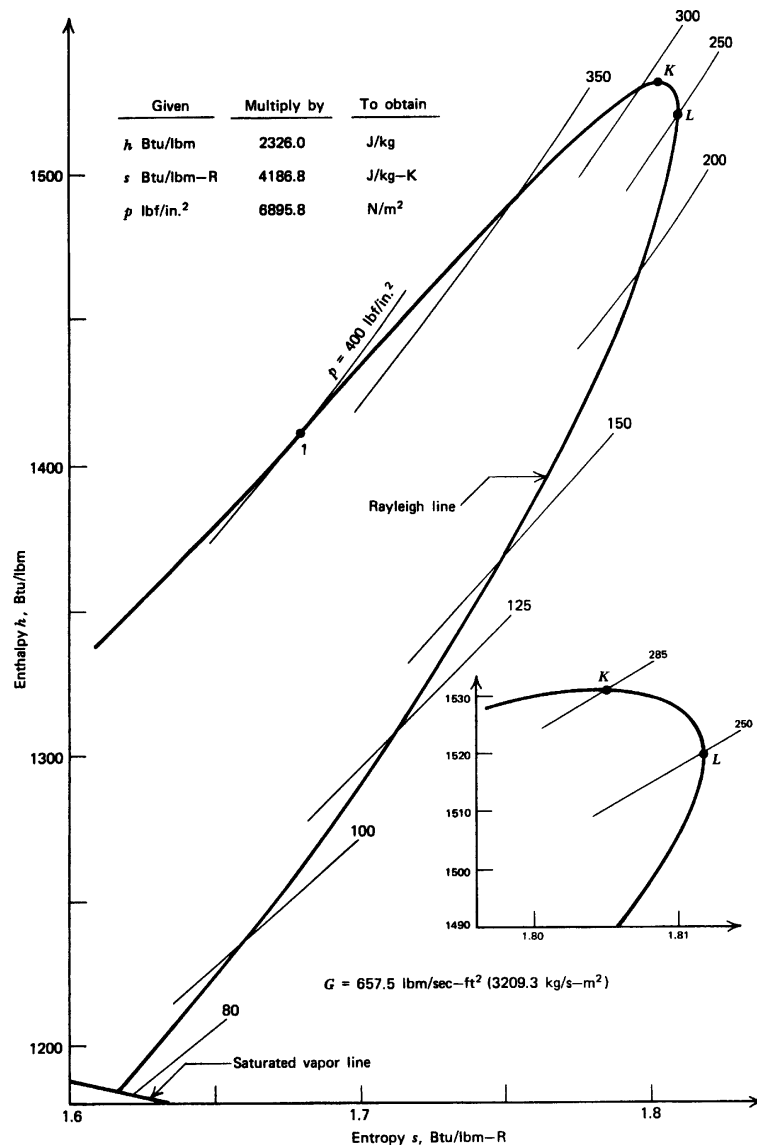
$$dp + Gdc = dp + G^2 dv = 0$$

d'où, en intégrant,

$$p + G^2 v = \text{constante} \quad (14.61)$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, que l'on appelle **ligne de Rayleigh**. Elle s'applique au cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. L'effet de l'échange de chaleur n'apparaît pas explicitement, mais se manifeste via son influence sur les propriétés thermodynamiques.

À titre d'illustration, on représente une ligne de Rayleigh dans un diagramme de Mollier de la vapeur d'eau sur la planche suivante. La forme de la courbe est semblable pour tous les fluides compressibles. Dans un diagramme $p - v$, la ligne de Rayleigh est évidemment une ligne droite. Avec un fluide entrant à l'état 1, l'apport de chaleur se traduit par une augmentation d'entropie (puisque la transformation est réversible), qui s'accompagne d'une diminution de pression et de masse volumique, et par conséquent une augmentation de vitesse.



On remarque deux points remarquables sur la ligne de Rayleigh, à savoir un maximum d'enthalpie K et un maximum d'entropie L . Initialement, l'apport de chaleur s'accompagne d'une augmentation d'enthalpie, jusqu'au point K où l'apport de chaleur se transforme intégralement en énergie cinétique. Au-delà de K , l'augmentation d'énergie cinétique est supérieure à l'apport de chaleur, ce qui entraîne la diminution de h .

Quant au point d'entropie maximum, il indique à nouveau un phénomène de saturation. En effet, il en résulte que la quantité de chaleur fournie au fluide est bornée supérieurement par la quantité de chaleur l'amenant à l'état L . On parle dans ce cas de saturation thermique.

Comme la transformation est réversible, $\delta q = dh^0 = T ds$ et donc la quantité maximum de chaleur transférable au fluide vaut

$$q_{\max} = \int_e^L T ds \quad (14.62)$$

Examinons de plus près les conditions au point limite L . Comme en ce point $ds = 0$, $dp = a^2 d\rho$. Mais sur la ligne de Rayleigh $dp + G^2 dv = 0$. On en déduit

$$a^2 - G^2 v^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c^2 = G^2 v^2 = a^2 \quad (14.63)$$

c.-à-d. qu'une nouvelle fois, l'écoulement est sonique.

Dans la partie supérieure de la ligne de Rayleigh, qui correspond à un écoulement subsonique, l'apport de chaleur a pour effet d'accélérer l'écoulement vers des conditions soniques. Au contraire, dans la partie inférieure de la ligne de Rayleigh, qui correspond à un écoulement supersonique, l'apport de chaleur a pour effet de décélérer l'écoulement vers des conditions soniques. Il a donc le même effet qu'une diminution de section.

14.8.2 Équations de la ligne de Rayleigh pour les gaz parfaits

Dans le cas des gaz parfaits, on peut à nouveau obtenir une solution analytique pour l'évolution des variables thermodynamiques sur une ligne de Rayleigh. On part cette fois de l'équation de la quantité de mouvement $p + Gc = p + \rho c^2 = \text{constante}$. On en déduit

$$p + \rho c^2 = p + M^2 \rho a^2 = p(1 + kM^2) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1 + k}{1 + kM^2} \quad (14.64)$$

en notant par l'indice supérieur * les conditions critiques à l'état L .

Par ailleurs, l'équation de conservation de la masse $\rho c = \text{constante}$ permet de déduire

$$\rho c = \frac{p}{RT} M \sqrt{kRT} = pM \sqrt{\frac{k}{RT}} = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + k}{1 + kM^2} \right)^2 \quad (14.65)$$

En divisant, on déduit immédiatement

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1 + kM^2}{M^2(1 + k)} \quad (14.66)$$

De la définition de la température totale, on tire l'expression de la variation de température totale

$$T^0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) \rightarrow \frac{T^0}{T^{0*}} = \frac{2M^2(k+1)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1 + kM^2)^2} \quad (14.67)$$

qui passe effectivement par un maximum pour $M = 1$.

Enfin, on peut calculer la variation d'entropie. Comme (section 7.10)

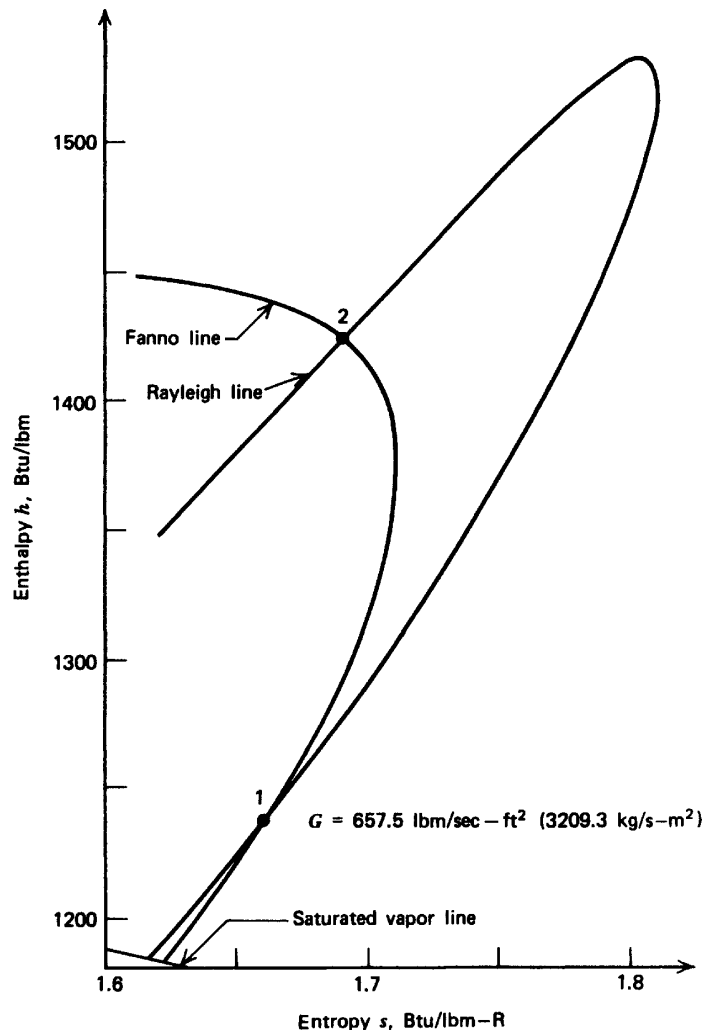
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

on obtient

$$\frac{s^* - s}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \frac{T}{T^*} - \ln \frac{p}{p^*} = \frac{k}{k-1} \ln \left\{ M^2 \left(\frac{kM}{1 + kM^2} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right\} \quad (14.68)$$

14.9 Ondes de choc normales

14.9.1 Intersections d'une ligne de Fanno et d'une ligne de Rayleigh



Si l'on porte sur le même diagramme de Mollier une ligne de Fanno et une ligne de Rayleigh correspondant à la même valeur du flux massique $G = \rho c$, on constate qu'elles s'intersectent en deux points, l'un correspondant à un écoulement supersonique et l'autre à un écoulement subsonique. On en conclut qu'un passage spontané de l'état 1 à l'état 2, sans échange de chaleur et sans frottement, est possible.

Un tel changement brusque (discontinuité) est une **onde de choc**. On constate qu'il s'agit d'une onde de compression puisque $p_2 > p_1$. Corollairement, la vitesse diminue.

Il faut remarquer que le saut de l'état 1 à l'état 2 est possible parce qu'il respecte le second principe ($s_2 > s_1$) alors qu'au contraire le saut de l'état 2 à l'état 1 est impossible. Comme $s_2 > s_1$ alors que la transformation est adiabatique, on en conclut qu'une onde de choc est un phénomène irréversible.

14.9.2 Conditions de saut : relations de Rankine-Hugoniot

Les relations entre l'état 1 et l'état 2, appelées conditions de saut ou relations de Rankine-Hugoniot, s'obtiennent à partir des équations de base des systèmes ouverts.

Conservation de la masse

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_2 c_2 = \rho_1 c_1 \quad (14.69)$$

Résultante cinétique

$$\dot{m}_2 c_2 - \dot{m}_1 c_1 = (p_1 - p_2)A \quad \rightarrow \quad p_2 + \rho_2 c_2^2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 \quad (14.70)$$

Premier principe

$$m_2(h_2 + \frac{c_2^2}{2}) - \dot{m}_1(h_1 + \frac{c_1^2}{2}) = 0 \quad \rightarrow \quad h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} \quad (14.71)$$

Pour des conditions à l'état 1 données, ces trois équations, accompagnées de l'équation d'état $h = h(p, \rho)$, forment un système de 4 équations à 4 inconnues p_2, ρ_2, h_2 et c_2 . Comme aucune hypothèse n'a été faite sur l'équation d'état, elles sont applicables à un fluide quelconque.

En éliminant c_2 ou c_1 entre les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, on obtient

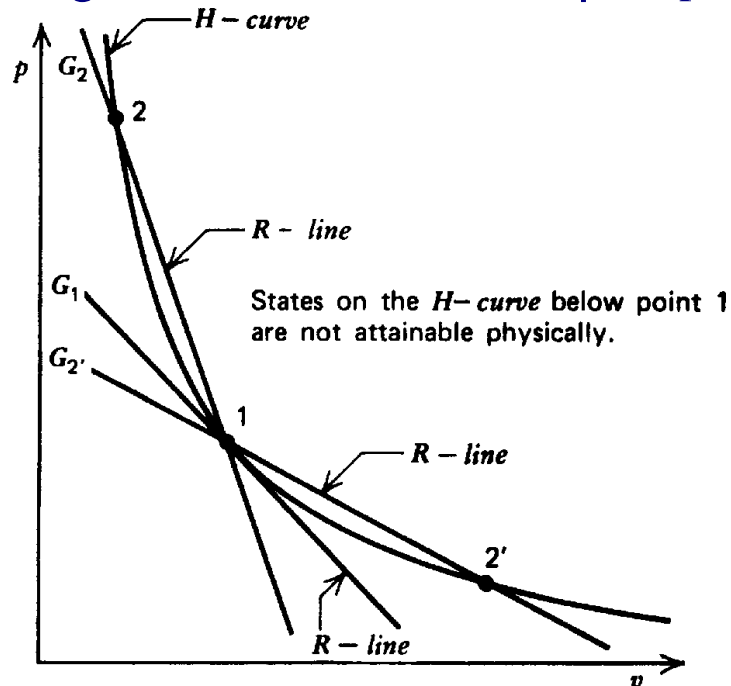
$$c_1^2 = \frac{(p_2 - p_1)\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)\rho_1} = \frac{v_1^2(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)} \quad c_2^2 = \frac{(p_2 - p_1)\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1)\rho_2} = \frac{v_2^2(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)}$$

Insérant ces expressions dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \frac{(v_1^2 - v_2^2)(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)} = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)(p_2 - p_1) \quad \Leftrightarrow \quad u_2 - u_1 = \frac{1}{2} (v_1 - v_2)(p_2 + p_1) \quad (14.72)$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, lieu de tous les états 2 pouvant être obtenus à partir d'un état 1 donné par une onde de choc normale. Elle est connue sous le nom de **courbe de Hugoniot**.

On peut obtenir graphiquement la solution des conditions de saut en déterminant l'intersection de la courbe de Hugoniot avec une ligne de Rayleigh (ou une ligne de Fanno). Comme l'équation de la ligne de Rayleigh est $p + G^2 v = \text{constante}$ (14.61), il s'agit d'une droite dans le plan $p - v$, et il est donc avantageux d'utiliser ce plan.



Considérons plusieurs lignes de Rayleigh passant par l'état initial 1. La ligne G_1 tangente à la ligne de Rayleigh sépare les lignes de pente plus élevée telles que G_2 qui intersectent la courbe de Hugoniot en un point de pression plus élevée, et les lignes de pente plus faible telles que G_2' qui l'intersectent en un point de pression plus faible. Comme on l'a observé précédemment, seules les premières transformations sont possibles.

Le cas de la ligne G_1 marquant la frontière entre les branches supérieure et inférieure de la courbe de Hugoniot mérite une attention particulière. Par la définition même

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_H = -G_1^2 = -\rho_1^2 c_1^2$$

Mais par ailleurs, $(ds)_H = 0$ au point 1. En effet, par l'équation de la courbe de Hugoniot,

$$\left(\frac{dh}{dv}\right)_H = \frac{1}{2}(p - p_1) + \frac{1}{2}(v_1 + v) \left(\frac{dp}{dv}\right)_H$$

En utilisant la relation de Gibbs $dh = Tds + vdp$, on déduit donc

$$2T \left(\frac{ds}{dv}\right)_H = (p - p_1) + (v_1 - v) \left(\frac{dp}{dv}\right)_H = (v_1 - v) \left[G^2 + \left(\frac{dp}{dv}\right)_H \right]$$

Or précisément, dans le cas de la ligne G_1 , les deux facteurs du membre de droite sont tous les deux nuls. Par conséquent,

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_H = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\rho_1^2 a_1^2$$

et donc $c_1 = a_1$, c.-à-d. que la ligne G_1 correspond à des conditions soniques en 1. La branche supérieure, admissible, de la courbe de Hugoniot correspond à des conditions supersoniques en 1 et donc, une onde de choc ne peut survenir que dans les écoulements supersoniques.

14.9.3 Relations de Rankine-Hugoniot pour les gaz parfaits

Pour les gaz parfaits, on peut facilement éliminer l'enthalpie des conditions de saut puisque $h = (k/k - 1)(p/\rho)$. Il reste donc

$$\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1 \quad (14.73)$$

$$p_2 + \rho_2 c_2^2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 \quad (14.74)$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} \quad (14.75)$$

Il est avantageux de donner une forme adimensionnelle à ce système. En divisant la première équation par $\sqrt{k\rho_1 p_1}$, la deuxième par p_1 et la dernière par kp_1/ρ_1 et en introduisant les rapports de pression $\Pi = p_2/p_1$ et de masse volumique $\sigma = \rho_2/\rho_1$,

on obtient

$$\sqrt{\sigma\Pi}M_2 = M_1 \quad (14.76)$$

$$\Pi(1 + kM_2^2) = 1 + kM_1^2 \quad (14.77)$$

$$\frac{\Pi}{\sigma} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{M_2^2}{2} \right) = \frac{1}{k-1} + \frac{M_1^2}{2} \quad (14.78)$$

qui constitue un système algébrique non-linéaire pour Π , σ et M_2 , dont la solution ne dépend que du nombre de Mach M_1 de l'écoulement initial. Il se trouve que, par chance, ce système possède une solution analytique.

On commence par résoudre la première équation pour M_2

$$M_2^2 = \frac{M_1^2}{\sigma\Pi}$$

En insérant dans la deuxième, on obtient

$$\Pi + \frac{kM_1^2}{\sigma} = 1 + kM_1^2$$

qui permet d'exprimer Π en fonction de σ . On tire alors de la troisième équation

$$\frac{\Pi}{\sigma} + \frac{k-1}{2} \frac{M_1^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1 + kM_1^2}{\sigma} - \frac{kM_1^2}{\sigma^2} + \frac{k-1}{2} \frac{M_1^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2$$

ou, en multipliant par σ^2

$$\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \sigma^2 - (1 + kM_1^2) \sigma + \frac{k+1}{2} M_1^2 = 0$$

On a donc finalement une équation du second degré pour σ , dont une des racines est la racine évidente $\sigma = 1$. On peut donc factoriser le trinôme précédent

$$\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \sigma^2 - (1 + kM_1^2) \sigma + \frac{k+1}{2} M_1^2 = (\sigma - 1) \left(\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \sigma - \frac{k+1}{2} M_1^2 \right) = 0$$

de sorte que

$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{(k+1)M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2} \quad (14.79)$$

En injectant ce résultat dans l'expression du rapport de pression Π , on obtient

$$\Pi = \frac{p_2}{p_1} = 1 + kM_1^2 - \frac{k}{k+1}(2 + (k-1)M_1^2) = \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1} \quad (14.80)$$

Enfin, il ne reste plus qu'à injecter ces deux expressions dans l'expression de M_2 et l'on trouve

$$M_2^2 = \frac{M_1^2}{\sigma\Pi} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2kM_1^2 - (k-1)} \quad (14.81)$$

Ces relations sont tabulées pour le cas d'un gaz diatomique ($k=1,4$) dans le livre de Van Wylen et al.

Il est également intéressant de calculer la variation d'entropie à travers le choc. À partir de la relation (voir section 7.10)

$$\frac{ds}{R} = \frac{k}{k-1} \frac{dv}{v} + \frac{1}{k-1} \frac{dp}{p} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} \right)$$

on obtient en intégrant

$$(k-1)\frac{\Delta s}{R} = \frac{\Delta s}{c_v} = \ln \Pi - k \ln \sigma \quad (14.82)$$

et l'on vérifie, en portant cette fonction en graphique en fonction de M_1 que $\Delta s > 0$ lorsque $M_1 > 1$. Examinons en particulier le comportement de cette fonction au voisinage de l'unité. En posant $M_1^2 = 1 + \varepsilon$, on a

$$\sigma = \frac{(k+1)(1+\varepsilon)}{(k+1) + (k-1)\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{1 + \frac{k-1}{k+1}\varepsilon} \quad \Pi = \frac{(k+1) + 2k\varepsilon}{k+1} = 1 + \frac{2k}{k+1}\varepsilon$$

et donc

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \ln\left(1 + \frac{2k}{k+1}\varepsilon\right) - k \ln\left(1 + \varepsilon\right) + k \ln\left(1 + \frac{k-1}{k+1}\varepsilon\right)$$

Développant en série de Mac Laurin, on obtient

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \frac{2k(k^2-1)}{3(k+1)^3}\varepsilon^3 + \dots = \frac{2k(k-1)}{3(k+1)^2}\varepsilon^3 + \dots \quad (14.83)$$

On constate donc que l'accroissement d'entropie est proportionnel au cube de

$(M_1^2 - 1)$ pour M_1 au voisinage de l'unité. Il est donc très faible lorsque M_1 s'écarte peu de l'unité.

La variation d'entropie peut encore s'exprimer en termes de la variation de la pression d'arrêt, une grandeur plus directement mesurable. Comme par définition $s^0 = s$,

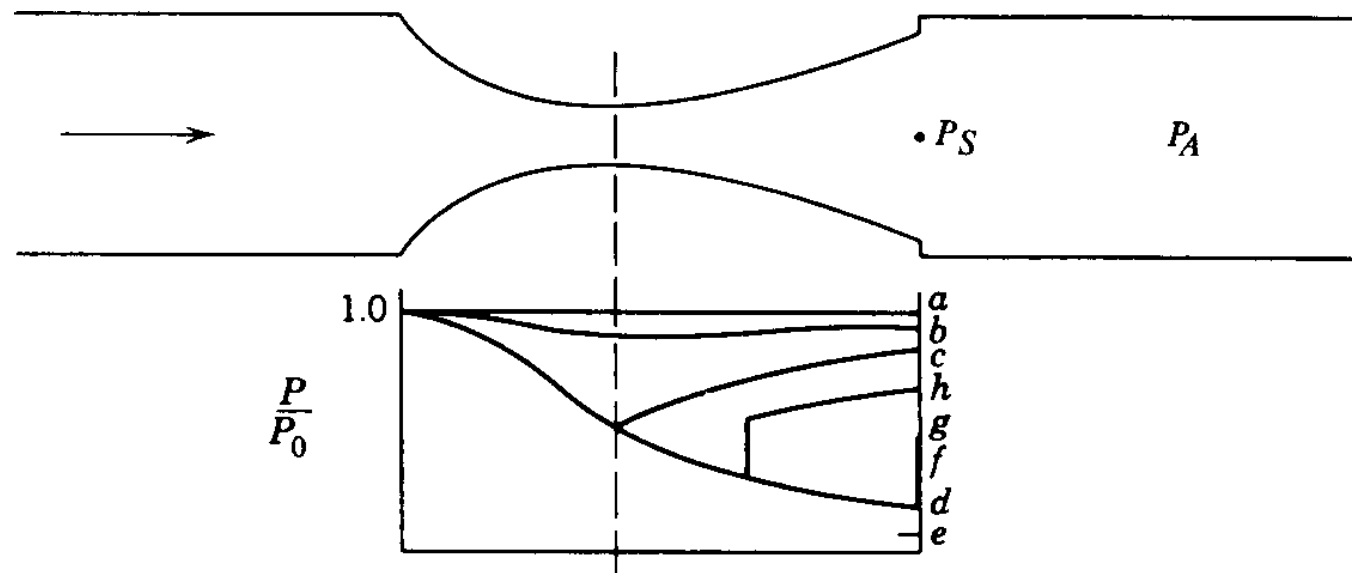
$$\Delta s = s_2^0 - s_1^0 = -R \ln \left(\frac{p_2^0}{p_1^0} \right) \quad (14.84)$$

puisque $T_2^0 = T_1^0$. Un accroissement d'entropie implique donc une chute de la pression d'arrêt. Ceci explique que la chute de pression d'arrêt soit utilisée comme indicateur de pertes dans certaines applications, notamment les turbomachines.

14.9.4 Écoulement avec choc dans une tuyère de Laval

On a conclu la section 14.6 en remarquant qu'il n'existe pas de solution isentropique dans une tuyère de Laval pour une pression aval comprise entre les solutions subsonique et supersonique saturées c et d. À la lumière de la connaissance des ondes de choc normales, on peut à présent en dire un peu plus.

Supposons qu'une onde de choc normale survienne dans le divergent en un endroit donné. Les relations de Rankine-Hugoniot permettent de calculer les conditions derrière le choc, en particulier la pression et le nombre de Mach. L'écoulement étant subsonique derrière le choc, il décélère dans le reste du divergent, et l'on peut calculer son évolution par la théorie des écoulements isentropiques en tuyère. On constate que la pression de sortie est inférieure à celle du cas c (cas h).



En effet, si la transformation à travers le choc était isentropique, la pression derrière le choc serait identique à celle de la courbe c. Comme il y a une chute de pression

d'arrêt à travers le choc, la pression derrière le choc est inférieure, et par conséquent toute la distribution de pression en aval est sous celle du cas c.

Comme la chute de pression totale augmente avec le nombre de Mach M_1 en amont du choc, il en résulte que la pression de sortie diminue à mesure que le choc se déplace vers la sortie de la tuyère. Pour une pression de sortie donnée, la position du choc n'est pas connue a priori. On doit la déterminer par itérations. Le cas extrême est celui où le choc se trouve dans la section de sortie, qui correspond au cas g de la figure précédente.

On peut donc calculer à présent l'écoulement en tuyère pour des pressions aval comprises entre les cas a et g. Pour une pression inférieure à celle du cas g, l'augmentation de pression entre la pression adaptée p_d et la pression aval ne peut se produire qu'à l'extérieur de la tuyère, au moyen d'ondes de choc obliques, analysées dans le cours MECA 339 Dynamique des gaz. En pratique, on observe que les ondes de choc obliques remontent dans la tuyère pour des pressions légèrement au-delà de la pression p_g .

