

7 L'entropie

Au chapitre précédent, on s'est limité à l'étude des cycles thermodynamiques. On va maintenant étendre la discussion au cas des transformations ouvertes.

De plus, on n'a donné jusqu'à présent qu'une formulation qualitative du second principe. On peut aussi, et cela s'avère intéressant en pratique, en donner une formulation quantitative.

Ce faisant, on introduira une nouvelle variable thermodynamique, l'entropie, tout comme le premier principe nous avait conduit à introduire la variable énergie.

7.1 L'inégalité de Clausius

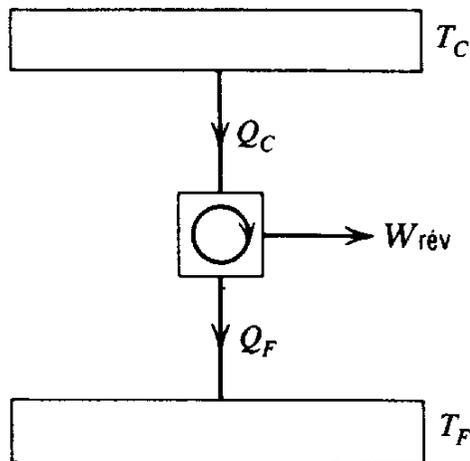
L'inégalité de Clausius est un corollaire du second principe qui s'exprime comme suit.

Pour tout système fermé à température uniforme décrivant un cycle,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (7.1)$$

où δQ est la quantité de chaleur reçue sur un élément de cycle, et T la température du système à l'état correspondant.

On va à présent vérifier la validité de l'expression pour les machines thermiques et frigorifiques, réversibles et irréversibles. Commençons par une machine thermique réversible. Comme une telle machine peut être obtenue par combinaison de cycles de Carnot, on se contentera de vérifier la validité de (7.1) pour un cycle de Carnot.



Comme un cycle de Carnot est réversible, les échanges de chaleur sont isothermes, à la température de la source avec laquelle s'effectue l'échange. Il en résulte que

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F^*}{T_F} = 0$$

Considérons à présent un cycle parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source chaude Q_C , mais dont certaines parties sont parcourues de manière irréversible. Le cycle étant irréversible,

$$W_{\text{irr}}^* < W_{\text{rév}}^*, \text{ et donc } Q_{F,\text{irr}}^* > Q_{F,\text{rév}}^*.$$

Il en résulte

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} = \int_C \frac{\delta Q}{T_C} = \frac{Q_C}{T_C}, \quad \int_F \frac{\delta Q^*}{T} = \int_F \frac{\delta Q^*}{T_F} = \frac{Q_{F,\text{irr}}^*}{T_F} > \frac{Q_{F,\text{rév}}^*}{T_F}$$

et, en soustrayant

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_C \frac{\delta Q}{T} - \int_F \frac{\delta Q^*}{T} < \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_{F,\text{rév}}^*}{T_F} = 0 \quad (7.2)$$

Semblablement, comme un cycle de Carnot frigorifique n'est rien d'autre qu'un cycle de Carnot thermique inversé, il satisfait aussi

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

Pour le cycle frigorifique parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source froide Q_F , mais dont certaines parties sont parcourues de manière irréversible, $W_{\text{irr}} > W_{\text{rév}}$, et donc $Q_{C,\text{irr}}^* > Q_{C,\text{rév}}^*$.

Il en résulte

$$\int_F \frac{\delta Q}{T} = \int_F \frac{\delta Q}{T_F} = \frac{Q_F}{T_F}, \quad \int_C \frac{\delta Q^*}{T} = \int_C \frac{\delta Q^*}{T_C} = \frac{Q_{C,\text{irr}}^*}{T_C} > \frac{Q_{C,\text{rév}}^*}{T_C}$$

et, en soustrayant

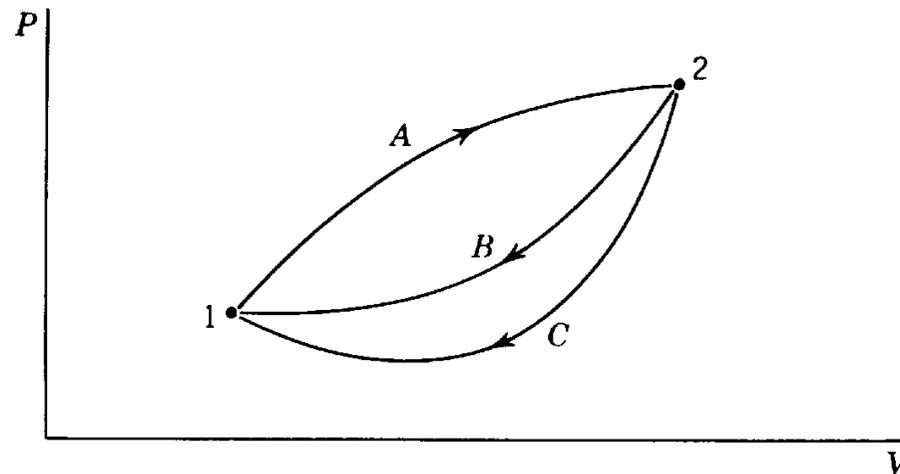
$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_F \frac{\delta Q}{T} - \int_C \frac{\delta Q^*}{T} < \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q_{C,\text{rév}}^*}{T_C} = 0 \quad (7.3)$$

ce qui complète la démonstration de la proposition (pour le cas particulier des cycles comportant des échanges de chaleur isothermes).

La généralisation au cas des cycles comportant des échanges de chaleur non isothermes ne pose pas de difficultés majeures.

7.2 L'entropie

Considérons deux cycles réversibles composés respectivement des transformations A et B , et A et C .



Puisque les deux cycles sont réversibles,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

et

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C = 0$$

En soustrayant, on déduit

$$\int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C = 0$$

et l'on voit que l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru (pour autant que la transformation soit réversible) et par conséquent que $(\delta Q/T)_{\text{rév}}$ est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole S la fonction dont la différentielle

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rév}} \quad (7.4)$$

et on lui donne le nom d'**entropie** du système. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rév}} \quad (7.5)$$

Remarques

- Bien que pour calculer la variation d'entropie entre deux états 1 et 2, on doive intégrer $\delta Q/T$ le long d'une transformation réversible, l'entropie étant une variable d'état, la différence d'entropie entre deux états est indépendante non seulement du chemin parcouru, mais aussi de la nature (réversible ou non) de la transformation subie.
- Tout comme l'énergie, l'entropie n'est définie par l'équation (7.5) qu'à une constante près. La valeur absolue de l'entropie n'est fixée que d'après **le troisième principe de la thermodynamique** qui stipule que l'entropie d'une substance pure est nulle au zéro absolu des températures.
La valeur absolue de l'entropie n'est toutefois nécessaire qu'en cas de changement de composition, c.-à-d. en cas de réactions chimiques.

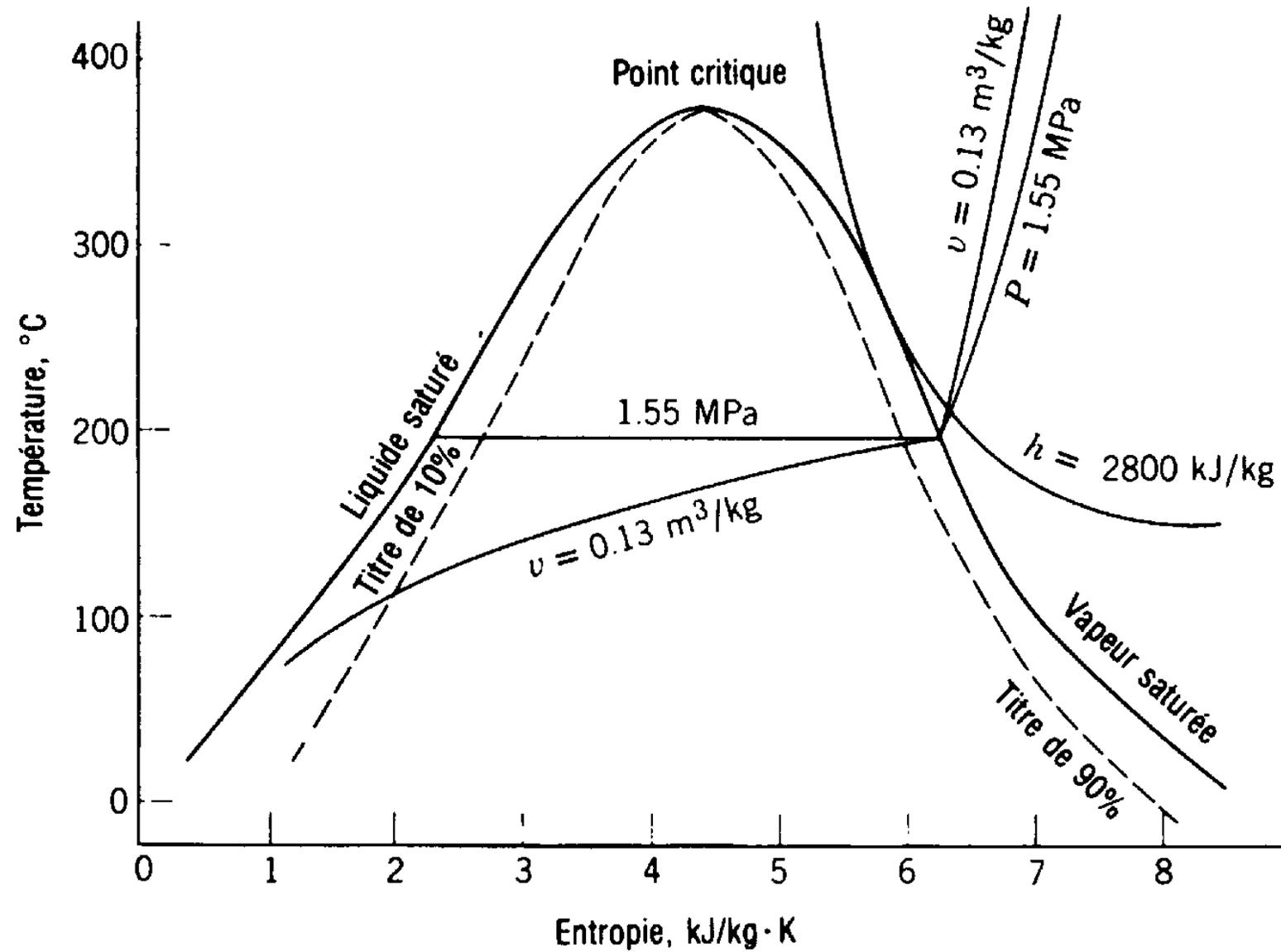
7.3 L'entropie d'une substance pure

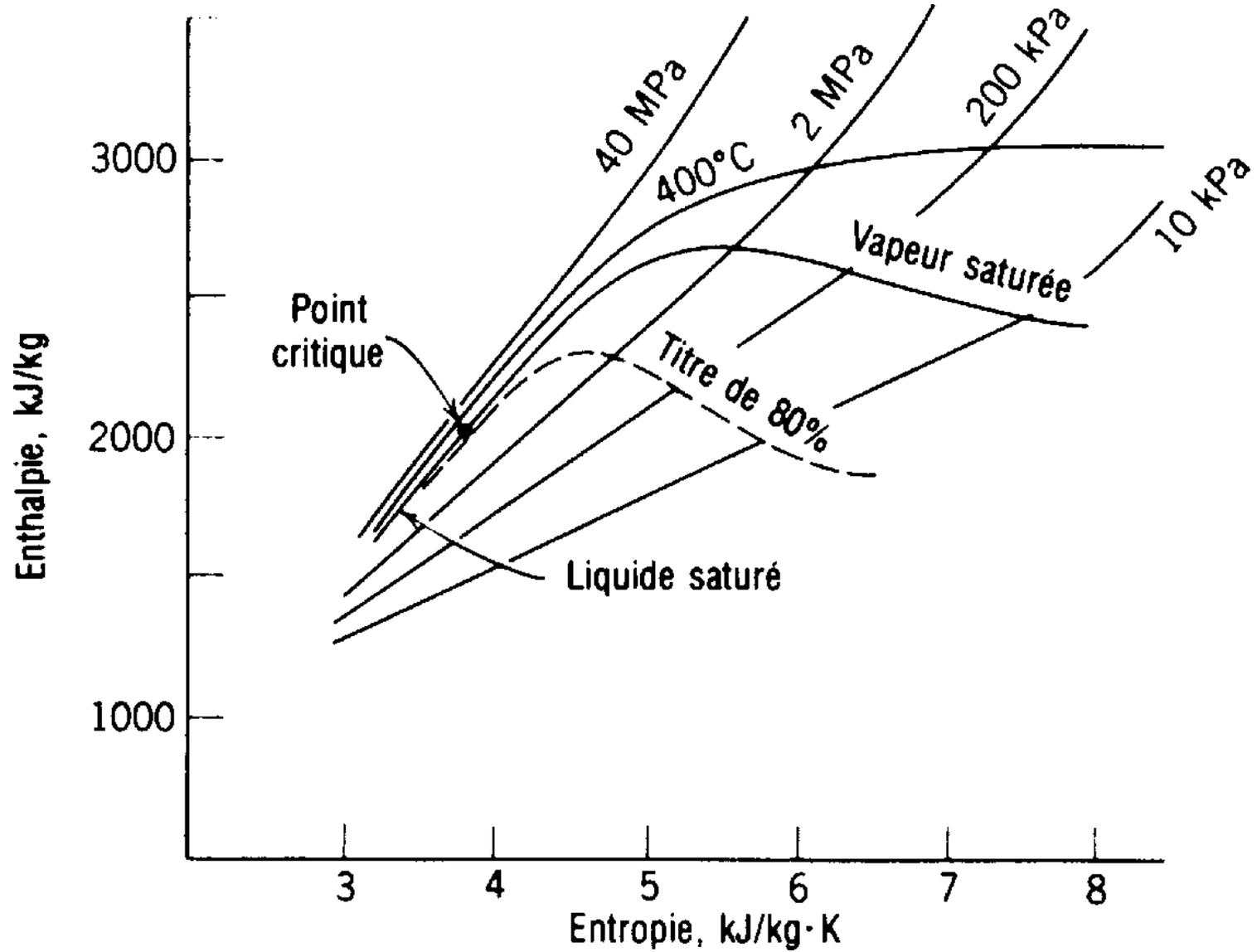
L'entropie définie à la section précédente est une variable extensive. Il lui correspond la variable intensive entropie massique s . Tout comme le volume massique et l'enthalpie, sa valeur est fournie dans les tables thermodynamiques des substances pures. La valeur nulle est attribuée conventionnellement à un état de référence particulier. Pour l'eau, il s'agit de l'état liquide au point triple.

Tout comme pour toutes les autres variables massiques, l'entropie massique d'un mélange saturé est lié au titre par la relation

$$s = (1 - x)s_l + xs_g = s_l + x(s_g - s_l)$$

Comme on l'a déjà mentionné plusieurs fois, on représente souvent les propriétés thermodynamiques d'une substance dans un diagramme thermodynamique, p. ex. le diagramme $p - v$. Deux diagrammes faisant intervenir l'entropie sont fréquemment utilisés, à savoir le diagramme $T - s$, souvent appelé diagramme entropique ou diagramme de Stodola, et le diagramme $h - s$ appelé diagramme de Mollier.





7.4 Les variations d'entropie au cours de transformations réversibles

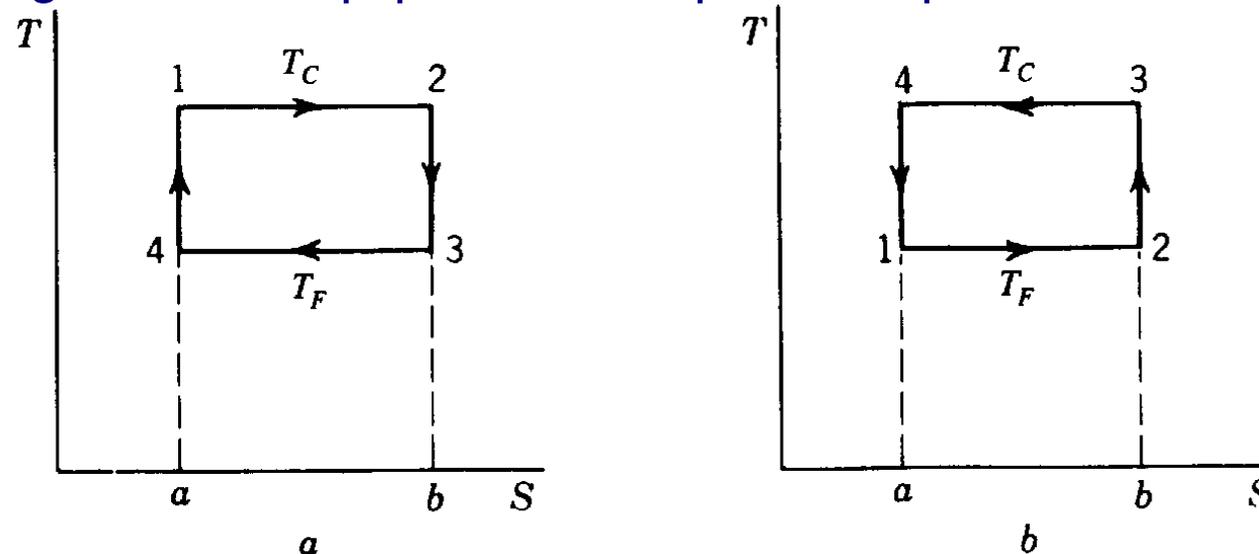
7.4.1 Le cycle de Carnot

Comme on l'a vu précédemment, le cycle de Carnot se décompose en 4 transformations, que nous allons examiner successivement.

Chauffage isotherme Dans cette transformation, on a

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1Q_2}{T_C}$$

Dans le diagramme entropique, elle est représentée par l'horizontale 1 – 2.



On en déduit que la chaleur échangée ${}_1Q_2 = T_C(S_2 - S_1)$ est l'aire $1 - 2 - b - a - 1$.

Détente adiabatique Cette transformation étant adiabatique et réversible, $dS = \delta Q/T = 0$, et donc l'entropie reste constante. Cette transformation, représentée par le segment vertical $2 - 3$ dans le diagramme entropique, est appelée **isentropique**.

Refroidissement isotherme Comme pour la transformation $1 - 2$, on a

$$S_4 - S_3 = \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \frac{{}_3Q_4}{T_F}$$

grandeur qui est négative puisque ${}_3Q_4 < 0$. La chaleur cédée à la source froide $Q_F^* = -{}_3Q_4$ est l'aire $3 - 4 - a - b - 3$.

Compression adiabatique Il s'agit de nouveau d'une isentropique, représentée par le segment vertical $4 - 1$.

Le travail net du cycle W^* étant égal à la chaleur nette reçue, il est représenté dans le diagramme entropique par l'aire $1 - 2 - 3 - 4$, de sorte qu'on peut exprimer le

rendement thermique comme un rapport de deux aires

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{W^*}{Q_C} = \frac{\text{aire } 1 - 2 - 3 - 4 - 1}{\text{aire } 1 - 2 - b - a - 1}$$

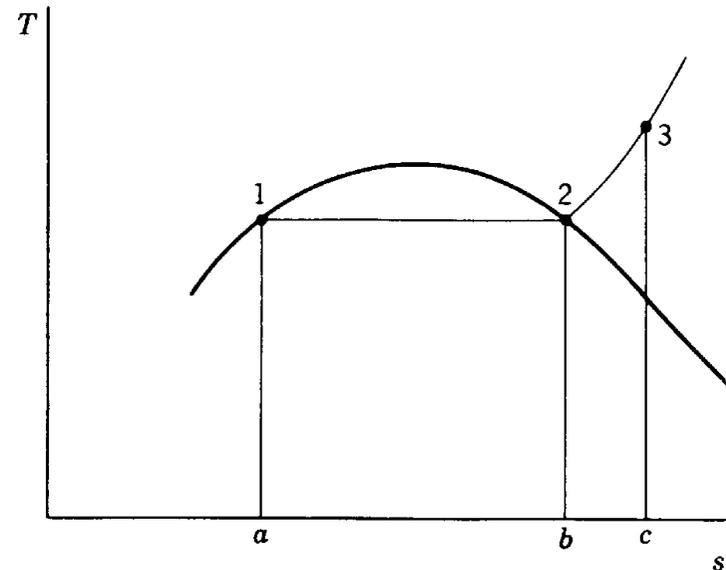
En inversant le sens de parcours, on obtient le cycle de Carnot frigorifique.

7.4.2 Le chauffage isobare

On considère à nouveau le cas du chauffage isobare d'une masse de fluide, tel que représenté à la section 3.2, à partir de l'état de liquide saturé. On suppose la transformation réversible du point de vue interne. La variation d'entropie massique entre l'état de liquide saturé et de vapeur saturée est dès lors

$$s_2 - s_1 = s_g - s_l = \frac{1}{m} \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{m} \int_1^2 \delta Q = \frac{{}_1q_2}{T} = \frac{h_g - h_l}{T}$$

puisque pour une transformation isobare d'un système fermé, la chaleur échangée est égale à la variation d'enthalpie (section 5.5).



Vu la relation précédente, cette chaleur est représentée par l'aire $1 - 2 - b - a - 1$.

Si l'on poursuit le chauffage à l'état de vapeur (transformation $2 - 3$), on peut écrire pour cette transformation

$${}_2q_3 = \int_2^3 T ds$$

À moins de connaître la variation de s avec T , cette expression ne peut être intégrée, mais elle est représentée par l'aire sous la courbe $2 - 3$, soit l'aire $2 - 3 - c - b - 2$.

7.5 Deux relations thermodynamiques importantes

Nous pouvons maintenant établir deux relations thermodynamiques importantes. Si l'on considère une transformation réversible d'un système fermé, sans variation d'énergies cinétique et potentielle, on a, par le premier principe

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Mais, par ailleurs, la transformation étant réversible (et donc quasi-statique)

$$\delta W = -pdV \quad \delta Q = TdS$$

On en déduit que pour une telle transformation

$$dU = TdS - pdV \quad (7.6)$$

À ce stade toutefois, cette relation ne fait intervenir que des variables d'état et doit par conséquent être valable pour une transformation infinitésimale irréversible aussi bien que pour une transformation infinitésimale réversible — pour autant toutefois

que la notion d'état conserve un sens, ce qui implique que le système reste proche de l'équilibre. Par conséquent, on peut intégrer l'équation (7.6) entre deux états, que la transformation soit réversible ou non^a.

En vertu de la définition de l'enthalpie, $H = U + pV$, on a en différentiant

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp \quad (7.7)$$

On en déduit les formes massiques

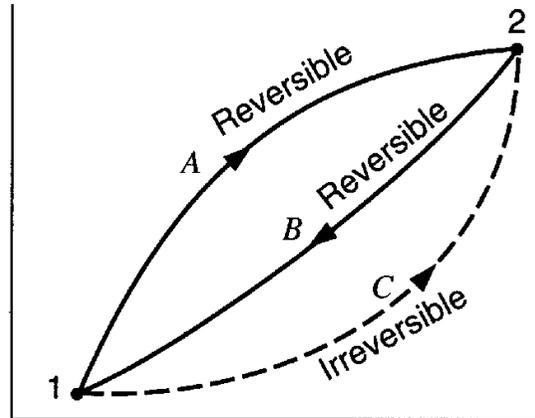
$$\begin{aligned} du &= Tds - pdv \\ dh &= Tds + vdp \end{aligned} \quad (7.8)$$

dont on fera un grand usage dans le reste du cours.

^a Bien sûr, pour pouvoir effectuer l'intégration, il faut connaître le chemin suivi, ce qui, en toute rigueur, ne peut être défini que pour une transformation quasi-statique, et donc réversible.

7.6 Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

Considérons un système fermé décrivant les cycles représentés ci-dessous



Le cycle composé des transformations A et B étant réversible, on a

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

Par ailleurs, pour le cycle irréversible composé de la transformation irréversible C et de la transformation irréversible B , l'inégalité de Clausius s'écrit

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B < 0$$

On en déduit

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C < \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A = \int_1^2 dS = S_2 - S_1$$

Rassemblant les résultats pour les cas réversible et irréversible, on peut donc écrire

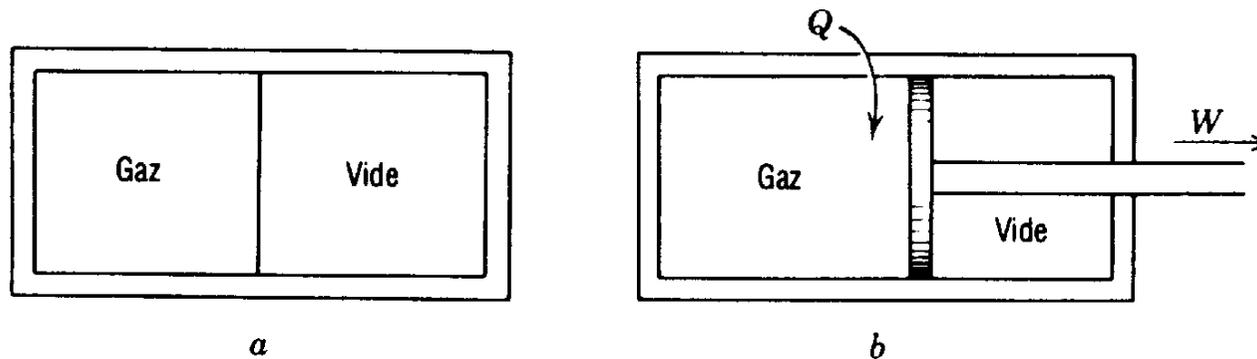
$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{T} &\leq dS \\ \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} &\leq S_2 - S_1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Remarquons que ces deux relations sont applicables quel que soit le signe de δQ . Si δQ est négative, cela contribue à faire diminuer l'entropie, mais les irréversibilités contribuent toujours à faire croître l'entropie.

À quantité de chaleur échangée constante, la variation d'entropie est toujours plus élevée pour une transformation irréversible que pour une transformation réversible. À parcours thermodynamique identiques, la chaleur reçue pour une transformation réversible est toujours plus faible que pour la transformation réversible correspondante.

7.7 Le travail non compensé

On peut mettre en évidence l'importance des irréversibilités en introduisant la notion de **travail non compensé** ou encore travail perdu, que l'on notera W_i^* .
Considérons à cet effet le système constitué du gaz contenu dans une partie du réservoir et séparé par une membrane du vide contenu dans l'autre.



On perce une ouverture dans la membrane de manière à ce que le gaz se répande lentement dans tout le réservoir, tout en recevant une quantité de chaleur telle que la température reste constante tout au cours de la transformation. Il est clair qu'aucun travail n'est échangé au cours de cette transformation.

Comparons cette transformation avec la transformation réversible représentée en *b*. Pour cette évolution réversible

$$\delta Q = TdS \quad \delta W^* = pdV$$

On constate que le travail fourni par le système lors de la transformation irréversible est moindre que celui qu'aurait fourni la transformation réversible : du travail a été en quelque sorte « perdu ».

$$(\delta W^*)_{\text{irr}} = pdV - \delta W_i^* \quad (7.10)$$

En vertu du premier principe $\delta Q + \delta W = dU$, et de la relation de Gibbs (7.6)

$$(\delta Q)_{\text{irr}} = (\delta W^*)_{\text{irr}} + dU = TdS - \delta W_i^*$$

et l'on voit que la chaleur reçue est moindre que celle reçue pour une transformation réversible. La différence, que l'on appelle **chaleur non compensée** est égale au travail non compensé.

Résolvant la relation précédente pour dS , on obtient

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta W_i^*}{T} \quad (7.11)$$

à rapprocher de l'inégalité

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (7.12)$$

établie précédemment. La différence entre dS et $\delta Q/T$ est l'augmentation d'entropie due aux irréversibilités

$$dS_i = \frac{\delta W_i^*}{T} \quad (7.13)$$

appelée **production d'entropie**.

Conséquences

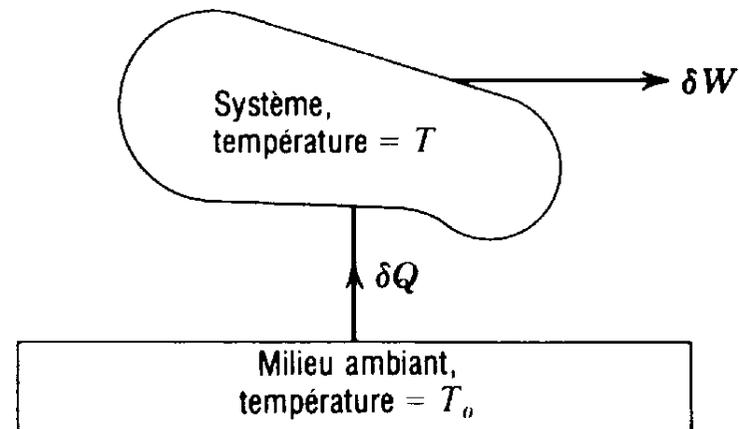
- La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation résulte de deux effets, à savoir les échanges de chaleur avec le milieu extérieur, et les irréversibilités.

- Les échanges de chaleur peuvent conduire, selon leur signe, à une augmentation ou à une diminution de l'entropie d'un système.
- Les irréversibilités sont toujours responsables d'une augmentation d'entropie.
- Alors que pour une transformation réversible, les aires sous les courbes représentant la transformation dans les diagrammes $T - s$ et $p - v$ sont égales à la chaleur échangée et au travail fourni respectivement, il n'en est plus de même pour une transformation irréversible.

D'ailleurs, comme on l'a mentionné précédemment, on ne peut pas à proprement parler définir les états intermédiaires d'une transformation irréversible puisque la notion d'état implique l'équilibre et que l'irréversibilité d'une transformation va de pair avec un écart par rapport à l'équilibre. C'est la raison pour laquelle il est préférable de représenter les transformations irréversibles par des pointillés dans les diagrammes thermodynamiques.

7.8 Le principe de l'accroissement de l'entropie

Considérons un système fermé subissant une transformation infinitésimale. Au cours de cette transformation, il reçoit une certaine quantité de chaleur δQ du milieu extérieur et fournit un travail δW^* .



Supposons qu'au cours de cette transformation, le système soit à une température T et que le milieu extérieur soit à une température $T_0 > T$. Pour le système, on a

$$dS_{\text{sys}} \geq \frac{\delta Q}{T}$$

alors que pour le milieu extérieur,

$$dS_{\text{ext}} = -\frac{\delta Q}{T_0}$$

puisque, si on le considère comme une source, l'échange de chaleur ne modifie pas sa température, et donc la transformation est réversible.

Sommant les deux variations d'entropie, on a

$$dS_{\text{tot}} = dS_{\text{sys}} + dS_{\text{ext}} \geq \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{\delta Q}{T} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) > 0 \quad (7.14)$$

Si l'on suppose au contraire que $T < T_0$, alors l'échange de chaleur est dans le sens contraire, c.-à-d. $\delta Q < 0$, et l'on a de même

$$dS_{\text{tot}} = dS_{\text{sys}} + dS_{\text{ext}} \geq 0 \quad (7.15)$$

de sorte que la variation d'entropie de l'ensemble système + milieu extérieur est toujours positive.

Ce résultat est connu sous le nom de **principe d'accroissement de l'entropie**. Il indique que les seules transformations possibles sont celles pour lesquelles l'entropie globale augmente (voire reste constante). Sauf pour ce cas limite, la transformation inverse qui ramènerait le système et le milieu extérieur dans son état initial est impossible.

L'accroissement global d'entropie peut se décomposer entre contributions interne et externe. La variation d'entropie du système pouvant s'écrire selon la relation (7.11)

$$dS_{\text{sys}} = \frac{\delta Q}{T} + dS_i$$

où dS_i est la production d'entropie due aux irréversibilités internes, on a

$$dS_{\text{tot}} = dS_i + \underbrace{\frac{\delta Q}{T} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)}_{dS_e} = dS_i + dS_e$$

dS_e étant la production d'entropie externe due à l'irréversibilité de l'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

7.9 L'entropie d'un solide ou d'un liquide

À la section 5.6, on a vu que, pour les liquides et les solides,

$$dh \approx du \approx cdT$$

où c est la chaleur massique.

Comme par ailleurs, $du = Tds - pdv$ (et $dh = Tds + vdp$), on a, en négligeant à nouveau les termes faisant intervenir le volume massique,

$$ds \approx \frac{du}{T} \approx c \frac{dT}{T} \quad (7.16)$$

La chaleur massique des solides et des liquides étant approximativement constante, on peut intégrer cette expression et l'on obtient

$$s_2 - s_1 \approx c \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \quad (7.17)$$

7.10 L'entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait s'obtient directement des équations de Gibbs (7.8), des expressions de l'énergie interne et de l'enthalpie, et de la loi des gaz parfaits.

$$Tds = du + pdv = c_v dT + pdv$$

d'où, en divisant par T

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (7.18)$$

et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (7.19)$$

Semblablement,

$$Tds = dh - vdp = c_p dT - vdp$$

d'où, en divisant par T

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (7.20)$$

et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.21)$$

Avec l'approximation de chaleurs massiques constantes, ces deux expressions s'intègrent analytiquement

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (7.22)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.23)$$

Si l'on tient compte des variations des chaleurs massiques avec la température, on peut calculer une fois pour toutes les intégrales et les tabuler en fonction de la

température, p. ex.

$$s^0(T) \equiv \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T} \quad (7.24)$$

La variation d'entropie est alors donnée par

$$s_2 - s_1 = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.25)$$

On peut utiliser ces expressions pour déterminer la variation de pression et de volume massique pour une évolution adiabatique et réversible (et donc isentropique) entre deux températures. Ainsi, l'on aura

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{R} \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} = \frac{s^0(T_2) - s^0(T_1)}{R} \quad (7.26)$$

Le calcul est simplifié en utilisant la pression relative p_r définie par la relation

$$\ln p_r \equiv \ln \frac{p}{p_0} = \frac{1}{R} \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T} = \frac{s^0(T)}{R} \quad (7.27)$$

que l'on tabule en fonction de la température. On a alors

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_r(T_2)}{p_r(T_1)} \quad (7.28)$$

Semblablement, on peut définir un volume massique relatif, d'où on obtient directement le rapport des volumes massiques

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_r(T_1)}{v_r(T_2)} \quad (7.29)$$

Les valeurs de p_r et de v_r pour l'air sont fournies en annexe du livre de Van Wylen. Pour d'autres gaz, elles ne sont généralement pas données, seule étant donnée la fonction $s^0(T)$. Il suffit alors d'appliquer (7.26).

Les expressions se simplifient si l'on suppose les chaleurs massiques constantes. Introduisant le rapport des chaleurs massiques $k = c_p/c_v$ (γ dans la littérature

anglo-saxonne), on a, compte tenu de l'identité $c_p = c_v + R$,

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \quad \rightarrow \quad c_v = \frac{R}{k-1} \quad c_p = \frac{kR}{k-1} \quad (7.30)$$

de sorte qu'on peut réécrire la différentielle de l'entropie comme suit

$$\frac{ds}{R} = \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = \frac{k}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} = \frac{k}{k-1} \frac{dv}{v} + \frac{1}{k-1} \frac{dp}{p}$$

expressions valables dans le cas général où k dépend de la température. Lorsque k est constant, ces expressions s'intègrent facilement pour fournir les relations entre rapports de pression, de température et de volume massique pour une transformation isentropique.

$$T_2^{\frac{1}{k-1}} v_2 = T_1^{\frac{1}{k-1}} v_1; \quad \frac{T_2^{\frac{k}{k-1}}}{p_2} = \frac{T_1^{\frac{k}{k-1}}}{p_1}; \quad v_2^k p_2 = v_1^k p_1 \quad (7.31)$$

En particulier, on constate que, pour une transformation isentropique $pv^k = \text{cte}$, une expression connue sous le nom de loi de Laplace.

7.11 La transformation polytropique réversible d'un gaz parfait

Considérons une transformation réversible d'un gaz parfait telle que $pV^n = \text{cte}$.

Une telle transformation est appelée **transformation polytropique**.

Pour une transformation entre deux états 1 et 2, on a donc

$$p_2 V_2^n = p_1 V_1^n \quad (7.32)$$

Mais par ailleurs, le gaz étant parfait

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

de sorte qu'en éliminant les volumes ou les pressions, on obtient

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} \quad (7.33)$$

Pour un système fermé, le travail reçu est donc égal à

$$\begin{aligned}
 {}_1W_2 &= - \int_1^2 p dV = -p_1 V_1^n \int_1^2 V^{-n} dV = -p_1 V_1^n \frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n} = -\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} \\
 &= -\frac{mR(T_2 - T_1)}{1-n}
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

($n \neq 1$).

On peut de même calculer la chaleur échangée au cours de la transformation.

Comme, en supposant c_v constant,

$$U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1) = \frac{mR(T_2 - T_1)}{k-1} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{k-1}$$

on a, par application du premier principe,

$${}_1Q_2 = U_2 - U_1 - {}_1W_2 = (p_2 V_2 - p_1 V_1) \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{n-k}{(k-1)(n-1)} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \tag{7.35}$$

Comme on le verra ultérieurement, pour les systèmes ouverts, on utilise la transformation polytropique comme point de comparaison avec une transformation adiabatique irréversible entre les mêmes états initial et final afin de définir un rendement.

Lorsque $n = 1$, qui correspond à une transformation isotherme, les expressions précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas,

$${}_1W_2 = -p_1 V_1 \int_1^2 V^{-1} dV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (7.36)$$

et, comme la variation d'énergie interne est nulle, la chaleur échangée est l'opposée du travail.

7.12 Le second principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts

En suivant le même raisonnement qu'à la section 5.10, le taux de variation de l'entropie d'un système ouvert peut être relié au taux de variation du système fermé constitué de la matière initialement contenue dans le système ouvert par l'expression habituelle

$$\frac{dS_F}{dt} = \frac{dS_O}{dt} + \oint_S \rho s (\vec{c} - \vec{b}_O) \cdot \vec{n} dS = \frac{dS_O}{dt} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e \quad (7.37)$$

en supposant comme de coutume les propriétés uniformes sur les sections d'entrée et de sortie.

Par ailleurs, le second principe appliqué aux systèmes fermés s'écrit (7.11)

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_i$$

Toutefois, en écrivant cette relation pour les systèmes fermés, on avait considéré les variables thermodynamiques uniformes sur le système, ce qui n'est plus le cas en

général pour les systèmes ouverts. En particulier, la température du système n'est en général pas uniforme sur les frontières à travers lesquelles il échange de la chaleur avec le milieu extérieur. Par conséquent, on doit remplacer $\delta Q/T$ par une somme sur chaque élément de la frontière dont la température est différente

$$\frac{\delta Q}{T} \leftarrow \sum \frac{\delta Q}{T}$$

À la limite, si la température varie continûment sur la frontière, en notant $\delta\Phi$ la chaleur échangée par unité de surface, $\delta Q = \delta\Phi d\mathcal{A}$, de sorte que

$$\frac{\delta Q}{T} \leftarrow \oint_{\mathcal{A}} \frac{\delta\Phi}{T} d\mathcal{A}$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient donc finalement l'expression suivante pour le taux de variation de l'entropie d'un système ouvert

$$\frac{dS_o}{dt} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i = \oint_{\mathcal{A}} \frac{\dot{\Phi}}{T} d\mathcal{A} + \dot{S}_i \quad (7.38)$$

7.13 Les systèmes ouverts en régime permanent et les systèmes ouverts avec écoulement uniforme

Pour les systèmes ouverts en régime permanents définis à la section 5.11, l'expression précédente se simplifie en

$$\sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \quad (7.39)$$

et, dans le cas particulier d'une seule entrée et d'une seule sortie

$$\dot{m}(s_s - s_e) = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \quad (7.40)$$

Pour une transformation adiabatique, on aura donc

$$s_s - s_e = \frac{\dot{S}_i}{\dot{m}} \geq 0 \quad (7.41)$$

Pour les systèmes ouverts avec écoulement uniforme définis à la section 5.13,

l'expression du second principe devient

$$\frac{d(ms)_O}{dt} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \quad (7.42)$$

Remarquons que l'on a omis le signe \sum qui représente la décomposition entre les diverses parties de la frontière puisque le système est supposé uniforme.

On peut de nouveau intégrer cette expression dans le temps, pour obtenir

$$m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e = \int_0^t \frac{\dot{Q}}{T} dt + \int_0^t \dot{S}_i dt \quad (7.43)$$

Puisque la température du système est uniforme, on peut exprimer le dernier terme en fonction du travail non compensé $\dot{S}_i = \dot{W}_i^*/T$, ce qui fournit l'expression alternative

$$m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e = \int_0^t \left(\frac{\dot{Q} + \dot{W}_i^*}{T} \right) dt \quad (7.44)$$

7.14 Les transformations réversibles des systèmes ouverts en régime permanent

On va maintenant établir une expression du travail échangé par un système ouvert permanent dans le cas d'une transformation réversible. Dans le cas d'une seule section d'entrée et de sortie, le premier principe s'écrit (5.33)

$$\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = q + w$$

et le second principe (7.40)

$$\dot{m}(s_s - s_e) = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \geq \sum \frac{\dot{Q}}{T}$$

Considérons à présent deux transformations réversibles :

Transformation adiabatique Dans ce cas, le second principe se réduit à

$$s_s = s_e$$

Par conséquent, vu la relation de Gibbs $dh = Tds + vdp$, $h_s - h_e = \int_e^s vdp$, et

dès lors

$$w = \int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \quad (7.45)$$

Transformation isotherme Puisque la transformation est isotherme, il s'ensuit que la température du système est uniforme, et dès lors,

$$\sum \frac{\dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}}{T} = \dot{m} \frac{q}{T}$$

de sorte que le second principe devient

$$s_s - s_e = \frac{q}{T} \quad (7.46)$$

Par ailleurs, par application de la même relation de Gibbs,

$h_s - h_e = T(s_s - s_e) + \int_e^s v dp$, et par conséquent, l'expression du travail est identique à celle établie pour la transformation adiabatique (7.45).

Enfin, puisqu'un échange de chaleur réversible non isotherme peut se concevoir comme une succession d'échanges de chaleur réversibles isothermes élémentaires,

il s'ensuit que l'expression (7.45) est applicable généralement à toutes les transformations réversibles de systèmes ouverts en régime permanent.

Un cas particulier d'une transformation sans échange de travail (comme l'écoulement dans une tuyère), l'expression devient

$$\int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0 \quad (7.47)$$

équation très importante en mécanique des fluides, connue sous le nom d'équation de Bernoulli. Dans le cas particulier des fluides à masse volumique constante, elle se simplifie en

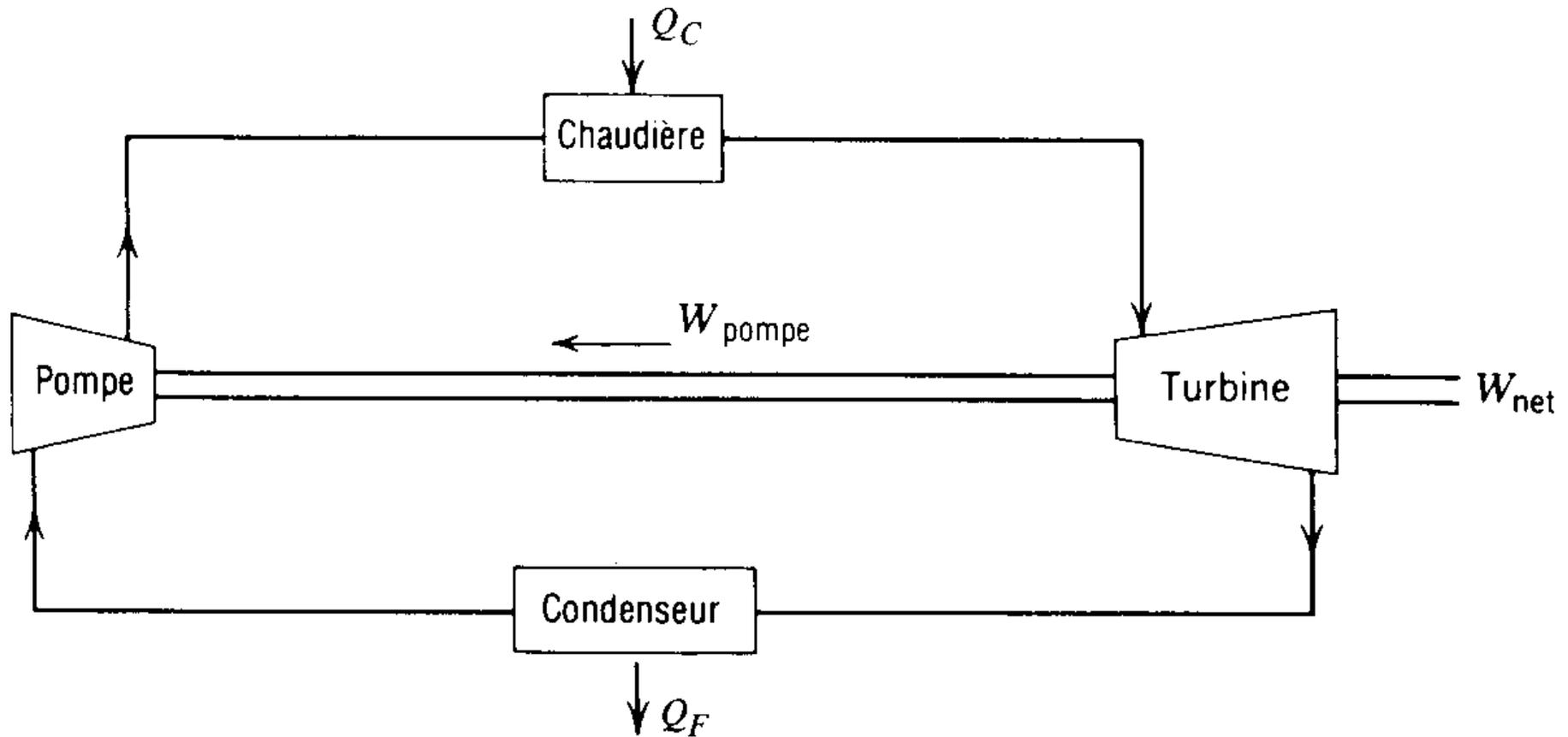
$$v(p_s - p_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0 \quad (7.48)$$

L'équation (7.45) est largement employée pour tous les systèmes ouverts avec échange de travail comme les turbomachines. Dans de nombreux cas, les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables, de sorte que le travail par unité de masse est simplement

$$w = \int_e^s v dp \quad (7.49)$$

d'où l'on constate que le travail transmis à l'arbre d'une turbomachine est directement lié au volume massique du fluide la traversant.

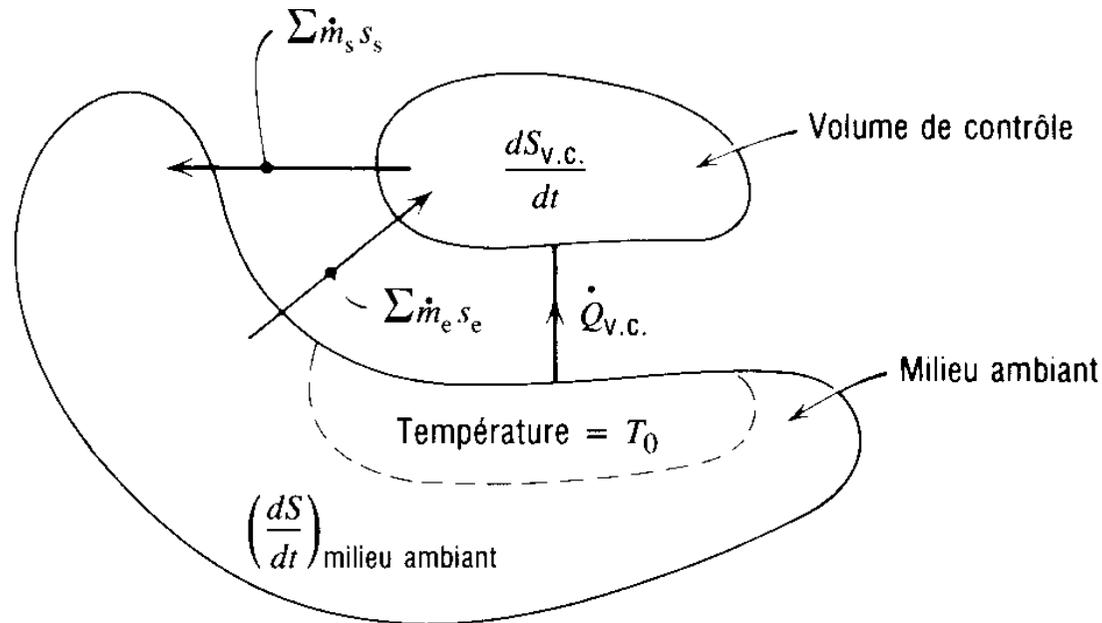
Par conséquent, dans le cas d'une centrale thermique à vapeur telle qu'idéalisée ci-après, la pression reste constante dans toutes les composantes où aucun travail n'est échangé et donc l'augmentation de pression dans la pompe est égale à la chute de pression dans la turbine.



Par ailleurs, puisque la pompe comprime du liquide dont le volume massique est très petit par rapport à celui de la vapeur détendue dans la turbine, la puissance consommée par la pompe est nettement inférieure à celle fournie par la turbine, la différence étant la puissance nette fournie par la centrale.

7.15 Principe d'accroissement de l'entropie pour un système ouvert

Reprenons la discussion de la section 7.8, mais cette fois pour un système ouvert.



Le taux de variation de l'entropie du système s'écrit

$$\frac{dS_{\text{sys}}}{dt} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i$$

Par ailleurs, le taux de variation de l'entropie du milieu extérieur, qui est lui aussi un système ouvert, vaut lui

$$\frac{dS_{\text{ext}}}{dt} - \sum \dot{m}_s s_s + \sum \dot{m}_e s_e = -\frac{\sum \dot{Q}}{T_0} \quad (7.50)$$

puisque les débits sont inversés, de même que l'échange de chaleur, et que, pour le milieu extérieur à température T_0 , l'échange de chaleur est réversible.

En sommant ces deux équations, on obtient le taux de variation de l'entropie totale

$$\frac{dS_{\text{tot}}}{dt} = \frac{dS_{\text{sys}}}{dt} + \frac{dS_{\text{ext}}}{dt} = \underbrace{\sum \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\sum \dot{Q}}{T_0}}_{\dot{S}_e} + \dot{S}_i = \dot{S}_e + \dot{S}_i > 0 \quad (7.51)$$

Le terme \dot{S}_e , toujours positif puisque $\dot{Q} > 0$ lorsque $T < T_0$ et vice-versa, est le taux de production d'entropie externe, due à l'irréversibilité de l'échange de chaleur.

Pour un système ouvert en régime permanent, l'entropie du système est constante, et par conséquent

$$\frac{dS_{\text{tot}}}{dt} = \frac{dS_{\text{ext}}}{dt} = \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e - \frac{\dot{Q}}{T_0}$$

Par contre, pour les systèmes ouverts avec écoulement uniforme, on calcule les variations d'entropie au cours de la transformation en intégrant dans le temps comme on l'a fait à la section 7.13. La variation d'entropie du système vaut

$$\Delta S_{\text{sys}} = m_2 s_2 - m_1 s_1 \quad (7.52)$$

et celle du milieu extérieur

$$\Delta S_{\text{ext}} = \sum m_s s_s - \sum m_e s_e - \frac{Q}{T_0} \quad (7.53)$$

de sorte que l'accroissement total d'entropie vaut

$$\Delta S_{\text{tot}} = m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e - \frac{Q}{T_0}$$

7.16 Les rendements

On a défini au chapitre précédent la notion d'efficacité d'un cycle. Comme on l'a souligné, cette efficacité est bornée supérieurement par l'efficacité du cycle de Carnot, qui ne dépend que des températures des sources, et donc ne donne en soi aucune information quant au degré de perfection d'un dispositif.

On nomme un indicateur de ce dernier **rendement**. Plusieurs indicateurs de ce type ont été définis, que l'on va maintenant présenter. Un autre sera défini au chapitre suivant. On ne considère ici que des systèmes ouverts en régime permanent.

7.16.1 Rendements des transformations adiabatiques

Systèmes avec échange de travail Pour les systèmes avec échange de travail, le rendement est défini de manière générale par les expressions

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_{\text{idéal}}}{W} && \text{machine réceptrice (pompe, ventilateur, compresseur)} \\ \eta &= \frac{W^*}{W_{\text{idéal}}^*} && \text{machine motrice (turbine)} \end{aligned} \tag{7.54}$$

où $w_{\text{idéal}}^{(*)}$ serait le travail reçu (fourni) par une machine idéale. Les diverses définitions du rendement diffèrent quant à la définition de la machine idéale.

On a vu précédemment que le travail échangé lors d'une transformation réversible d'un système ouvert valait (7.45)

$$w = \int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

alors que le travail échangé lors d'une transformation adiabatique réelle (irréversible) vaut lui, par application du premier principe,

$$w = h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

Par conséquent, l'expression générale du rendement est

$$\eta = \frac{\int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta = \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s)}{-\int_e^s v dp + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s)} \quad \text{machine motrice}$$
(7.55)

Pour les machines à fluide (ou plutôt à écoulement) incompressible, le travail massique idéal s'évalue aisément. En effet, comme le volume massique est approximativement constant, $\int_e^s v dp \simeq v(p_s - p_e)$. D'autre part, le travail massique réel peut s'évaluer en mesurant la différence d'enthalpie entre sections d'entrée et de sortie (cfr labo du cours MECA Machines à piston en 4e Méca), ou encore en mesurant la puissance à l'arbre de la machine (couple et vitesse de rotation).

Pour les machines à fluide compressible, les choses sont plus complexes. Pour calculer $\int_e^s v dp$, il faut en effet connaître le chemin thermodynamique parcouru lors de la transformation. Dans le cas des gaz parfaits, une bonne approximation est de

supposer que le chemin parcouru coïncide avec celui d'une transformation polytropique réversible (section 7.11), et le rendement ainsi défini est appelé **rendement polytropique**, noté η_p .

Comme pour une polytropique ($pv^n = C$),

$$vdp = -nCv^{-n}dv = -\frac{nC}{1-n}d(v^{1-n}) = \frac{n}{n-1}d(pv)$$

et

$$dh = c_p dT = \frac{kR}{k-1}dT = \frac{k}{k-1}d(pv)$$

on obtient, en omettant les termes d'énergie potentielle, toujours négligeables pour les fluides compressibles, les expressions suivantes pour le rendement polytropique

$$\eta_p = \frac{\frac{n}{n-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}}{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_p = \frac{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{\frac{n}{n-1}(p_e v_e - p_s v_s) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}} \quad \text{machine motrice}$$
(7.56)

qui deviennent, lorsque les variations d'énergie cinétique sont aussi négligeables,

$$\eta_p = \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{k}{k-1}} \quad \text{machine réceptrice} \quad (7.57)$$

$$\eta_p = \frac{\frac{k}{k-1}}{\frac{n}{n-1}} \quad \text{machine motrice}$$

Lorsque l'on n'a pas affaire à un gaz parfait, comme p. ex. pour les turbines à vapeur, cette définition n'est pas utilisable, ce qui conduit à introduire une autre définition, à savoir celle de **rendement isentropique** noté η_s . Contrairement au cas précédent, où la transformation idéale de référence était la polytropique réversible de même états initial et final que la transformation réelle^a, la transformation idéale de référence est cette fois la transformation adiabatique et réversible, c.-à-d. isentropique, de même état initial et de même pression finale (et de même pression totale finale, voir définition de ce terme ci-après) que la transformation réelle.

Il résulte de cette définition que l'état final de la transformation idéale de référence

^a Remarquez que cette transformation n'est pas adiabatique.

diffère de l'état final réel. En notant s_* l'état final de la transformation isentropique de référence et c_{s_*} la vitesse de sortie correspondante qui, en raison de la définition n'est pas exactement égale à la vitesse de sortie réelle, et compte tenu du fait que $\int_e^{s_*} v dp = h_{s_*} - h_e$, l'expression du rendement isentropique est donc (négligeant toujours les variations d'énergie potentielle)

$$\eta_s = \frac{h_{s_*} - h_e + \frac{c_{s_*}^2 - c_e^2}{2}}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_s = \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{h_e - h_{s_*} + \frac{c_e^2 - c_{s_*}^2}{2}} \quad \text{machine motrice}$$
(7.58)

On peut encore donner une forme alternative de cette expression en introduisant les notions d'enthalpie et de pression totales (ou d'arrêt). On appelle enthalpie et pression totales d'un fluide en un point (h^0, p^0) , l'enthalpie et la pression que l'on obtiendrait en amenant le fluide à l'arrêt de manière adiabatique et réversible, c.-à-d.

isentropiquement. Il résulte de cette définition que

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} \quad p^0 = p(h^0, s) \quad (7.59)$$

Pour un gaz parfait avec chaleurs massiques constantes, on a donc

$$p^0 = p \left(\frac{h^0}{h} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (7.60)$$

Avec ces définitions des conditions totales, les expressions du rendement isentropique deviennent

$$\eta_s = \frac{h_{s^*}^0 - h_e^0}{h_s^0 - h_e^0} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_s = \frac{h_e^0 - h_s^0}{h_e^0 - h_{s^*}^0} \quad \text{machine motrice} \quad (7.61)$$

Lorsque les variations d'énergie cinétique sont négligeables, et en faisant

l'approximation $c_{s_*} \simeq c_s$,^b les expressions du rendement isentropique deviennent

$$\eta_s = \frac{h_{s_*} - h_e}{h_s - h_e} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_s = \frac{h_e - h_s}{h_e - h_{s_*}} \quad \text{machine motrice}$$
(7.62)

Explicitons ces dernières expressions dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, afin de les comparer avec les expression du rendement polytropique (7.57). En notant Π le rapport entre haute et basse pression, et en

^b Dans le cas d'un gaz parfait, on peut expliciter l'expression de c_{s_*} . En effet, comme $p_{s_*}^0 = p_s^0$ et $p_{s_*} = p_s$, on en déduit

$$\frac{h_{s_*}^0}{h_{s_*}} = \frac{h_s^0}{h_s} = 1 + \frac{c_s^2}{2h_s}$$

Il en résulte

$$h_{s_*}^0 = h_{s_*} + \frac{h_{s_*}}{h_s} \frac{c_s^2}{2} \quad \rightarrow \quad c_{s_*}^2 = \frac{h_{s_*}}{h_s} c_s^2$$

rappelant que pour une polytropique,

$$\frac{h_s}{h_e} = \frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

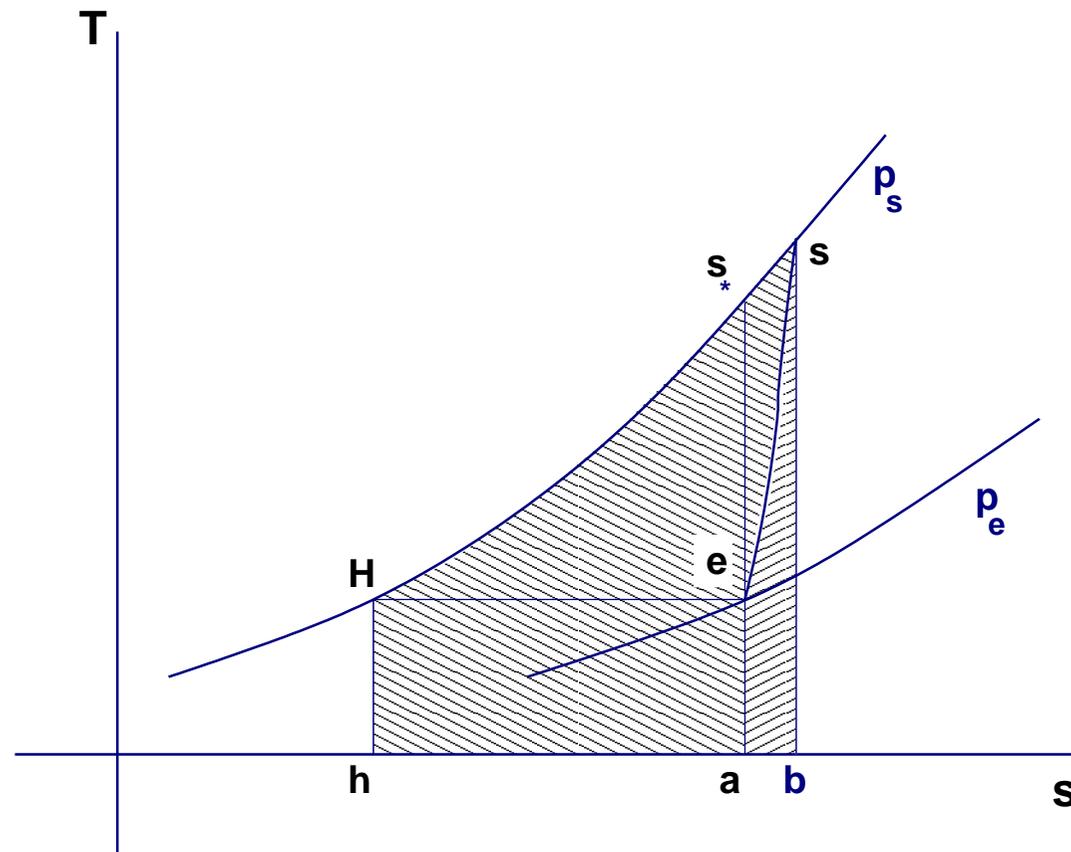
on obtient

$$\eta_s = \frac{\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\Pi^{\frac{n-1}{n}} - 1} = \frac{\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\Pi^{\frac{1}{\eta_p} \frac{k-1}{k}} - 1} \quad \text{machine réceptrice} \quad (7.63)$$

$$\eta_s = \frac{1 - \Pi^{-\frac{n-1}{n}}}{1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - \Pi^{-\eta_p \frac{k-1}{k}}}{1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}}} \quad \text{machine motrice}$$

et l'on remarque que le rendement isentropique dépend non seulement du rendement polytropique (ou, ce qui est équivalent, de l'exposant n) mais aussi du rapport de pression. Pour les faibles rapports de pression $\Pi = 1 + \epsilon$, $\eta_s \approx \eta_p$, ce qui explique le nom « small stage efficiency » employé parfois comme synonyme de rendement polytropique dans la littérature anglophone.

Pour finir, donnons une interprétation graphique à ces définitions, pour le cas où les variations d'énergie cinétique sont négligeables. Considérons tout d'abord le cas d'une compression. La polytropique joignant les états initial et final, de même que l'état final de la transformation isentropique de référence sont représentés dans le diagramme entropique ci-dessous.



Le travail reçu lors de la transformation réelle $w = h_s - h_e$ se représente comme suit. Soit le point H situé à l'intersection de l'isenthalpique passant par e^a et l'isobare p_s . Alors, par construction, $h_s - h_e = h_s - h_H = \int_H^s T ds + v dp = \int_H^s T ds$, qui est représentée sur le graphique par l'aire $H - s - b - h - H$.

Le travail reçu lors de la transformation polytropique de référence vaut, lui, $w_p = \int_e^s v dp = \int_e^s dh - T ds$, soit la différence entre la variation d'enthalpie $h_s - h_e$ représentée par l'aire $H - s - b - h - H$ et $\int_e^s T ds$ représentée par l'aire $e - s - b - a - e$. Il est donc représenté par l'aire $H - s - e - a - h - H$, et le rendement polytropique vaut donc

$$\eta_p = \frac{\text{aire } H - s - e - a - h - H}{\text{aire } H - s - b - h - H}$$

^a Sur le graphique, on a considéré le cas d'un gaz parfait, de sorte que l'isenthalpique est confondue avec l'isotherme, c.-à-d. horizontale.

Le travail reçu lors de la transformation isentropique de référence vaut

$w_s = h_{s_*} - h_e = h_{s_*} - h_H = \int_H^{s_*} T ds + v dp = \int_H^{s_*} T ds$, soit l'aire $H - s_* - a - h - H$, de sorte que le rendement isentropique vaut

$$\eta_s = \frac{\text{aire } H - s_* - a - h - H}{\text{aire } H - s - b - h - H}$$

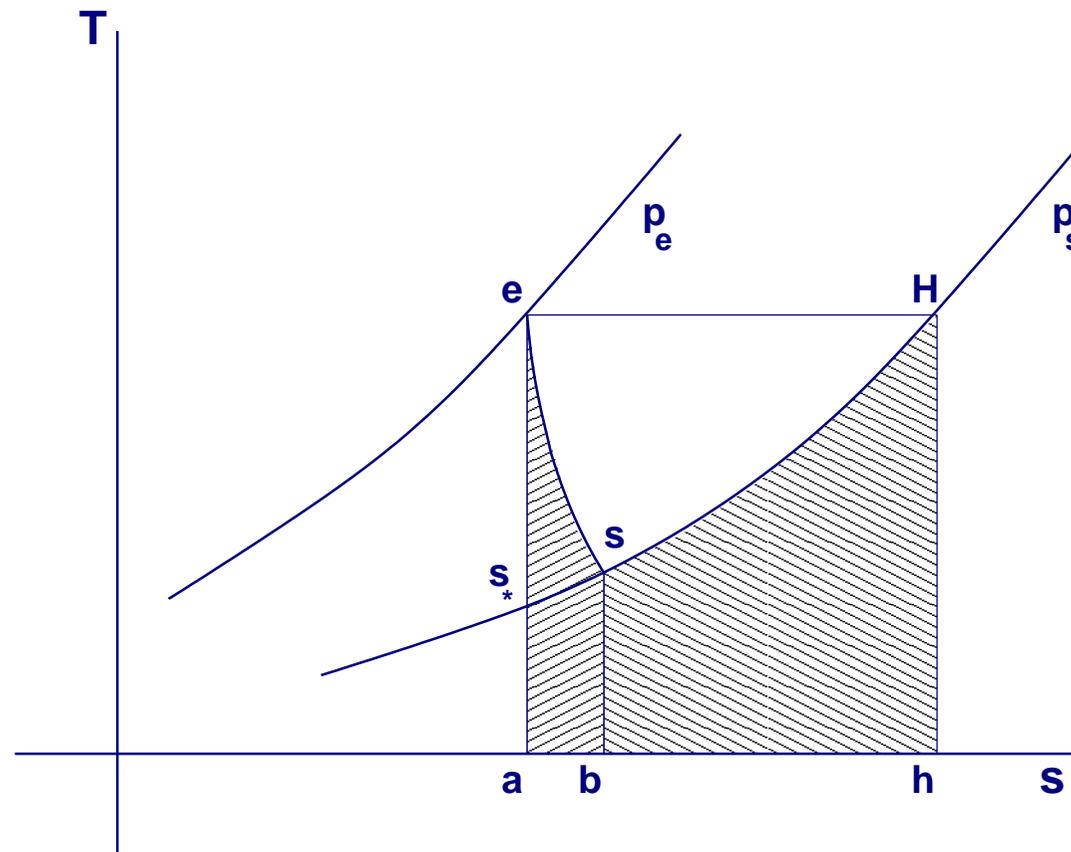
d'où il apparaît que $\eta_s < \eta_p$.

Ce résultat se confirme analytiquement pour les gaz parfaits en développant l'expression du rendement isentropique pour les rapports de pression proches de l'unité. Avec $\Pi = 1 + \epsilon$ et la formule binomiale

$$(1 + \epsilon)^m = 1 + m\epsilon + \frac{m(m-1)}{2}\epsilon^2 + \dots = 1 + m\epsilon(1 + (m-1)\frac{\epsilon}{2} + \dots)$$

$$\eta_s = \frac{\frac{k-1}{k}\epsilon \left[1 + \left(\frac{k-1}{k} - 1\right)\frac{\epsilon}{2} + \dots \right]}{\frac{k-1}{\eta_p k}\epsilon \left[1 + \left(\frac{k-1}{\eta_p k} - 1\right)\frac{\epsilon}{2} + \dots \right]} \simeq \eta_p \left[1 - \frac{k-1}{k} \left(\frac{1}{\eta_p} - 1\right)\frac{\epsilon}{2} \right] < \eta_p$$

Répetons l'analyse pour le cas d'une détente, représentée ci-dessous dans un diagramme entropique



Le travail réel fourni vaut $h_e - h_s$, qui est représenté par l'aire $s - H - h - b - s$ alors que le travail fourni lors de la transformation polytropique de référence vaut

$w_p^* = \int_s^e v dp = \int_s^e dh - T ds = h_e - h_s + \int_e^s T ds$, soit la somme du travail réel représenté par l'aire $s - H - h - b - s$ et de $\int_e^s T ds$ représentée par l'aire $e - s - b - a - e$, et est donc représenté par l'aire $e - s - H - h - a - e$. Par conséquent, le rendement polytropique de détente vaut

$$\eta_p = \frac{\text{aire } s - H - h - b - s}{\text{aire } e - s - H - h - a - e}$$

De son côté, le travail fourni lors de la transformation isentropique de référence vaut $w_s^* = h_e - h_{s_*} = h_{H-s_*}$ représenté par l'aire $s_* - H - h - a - s_*$, de sorte que le rendement isentropique vaut

$$\eta_s = \frac{\text{aire } s - H - h - b - s}{\text{aire } s_* - H - h - a - s_*}$$

d'où il apparaît que $\eta_s > \eta_p$.

Rien d'étonnant dès lors à ce que les fabricants de compresseurs préfèrent donner le rendement polytropique de leurs machines, alors que les fabricants de turbines préfèrent donner le rendement isentropique !

Systèmes sans échange de travail (diffuseurs et tuyères) Pour les systèmes sans échange de travail, les définitions précédentes n'ont pas de sens. La fonction de ces dispositifs est de transformer l'énergie cinétique en énergie interne ou vice-versa. Par conséquent, la définition générale du rendement de ces dispositifs est donc (en supposant à nouveau les variations d'énergie potentielle négligeables)

$$\eta = \frac{\left(\frac{c_e^2 - c_s^2}{2}\right)_{\text{idéal}}}{\frac{c_e^2 - c_s^2}{2}} = \frac{\int_e^s v dp}{h_s - h_e} \quad \text{diffuseur} \quad (7.64)$$

$$\eta = \frac{\frac{c_s^2 - c_e^2}{2}}{\left(\frac{c_s^2 - c_e^2}{2}\right)_{\text{idéal}}} = \frac{h_e - h_s}{\int_s^e v dp} \quad \text{tuyère}$$

En écoulement incompressible, ces expressions s'évaluent aisément. En écoulement compressible, il faut à nouveau distinguer selon le choix de la transformation idéale de référence, et l'on définit ainsi rendements polytropique et isentropique de compression et de détente, dont les expressions sont identiques à celles obtenues à la section précédente lorsque les variations d'énergie cinétique étaient négligeables.

7.16.2 Rendements des transformations avec échange de chaleur

On peut montrer que le travail nécessaire pour comprimer un gaz à une pression donnée est réduit si le gaz est refroidi au cours de la compression — c'est d'ailleurs la raison d'être des « intercoolers » qui équipent de nombreux groupes de suralimentation de moteurs volumétriques. Pour ces compressions réfrigérées, il y a lieu de définir un autre rendement. Si l'échange de chaleur s'effectue avec une source de température T_0 , supposée égale à la température d'entrée du fluide, la transformation réversible de référence est la compression isotherme. On définit donc le **rendement isotherme**, η_T , comme

$$\eta_T = \frac{w_T}{w} = \frac{h_{s_T} - h_e - T_0(s_{s_T} - s_e)}{h_s - h_e - q} \quad (7.65)$$

où s_T est l'état à pression p_s et à température T_0 . Pour un gaz parfait, $h_{s_T} - h_e = 0$.

On définit de même un rendement isotherme de détente (beaucoup moins utilisé cependant)

$$\eta_T = \frac{w^*}{w_T^*} = \frac{h_e - h_s + q}{h_e - h_{s_T} + T_0(s_{s_T} - s_e)} \quad (7.66)$$