Formulaire du cours MECA 202

Phénomènes de Transport

La définition des nombres sans dimension ainsi que la signification physique des termes des différentes équations des Parties I, II et III doivent être connues.

Partie I : Mouvement

Equations locales

- **Loi de Newton :**

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

- **Conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

- **Équation de Navier-Stokes :**
  - Ecoulement laminaire, fluide incompressible et newtonien:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \vec{V} + \vec{F}$$

- **Équation d'Euler**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{F}$$

- **Équation de Bernoulli**

$$\rho \frac{V^2}{2} + P + \rho g z = C^{te} = P_{tot}$$

- **Équation de la couche limite laminaire sur une plaque plane :**

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

  - épaisseur de la couche limite: $\delta = \dfrac{5x}{\sqrt{Re_x}}$
  - coefficient de frottement: $C_f = \dfrac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$

Approche intégrale

- **Conservation de la masse :**

$$\frac{d[m]_{tot}}{dt} = <\rho V_n>_1 S_1 - <\rho V_n>_2 S_2$$

- **Quantité de mouvement**

$$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2\left[<\rho V^2> + P\right]\vec{S} - \vec{F}_{paroi} + m_{tot}\vec{g}$$

- **Couche limite**
  - épaisseur de la quantité de mouvement : $\delta^{**} = \delta \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{u}{U_{ext}} - \frac{u^2}{U_{ext}^2}\right) \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right)$

- Relation du coefficient de frottement $C_f = 2\frac{d\delta^{**}}{dx}$

- **Les pertes de charge**

☛ **Perte de charge régulière** $\Delta P_{tot} = \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho U^2}{2}$

- Régime laminaire: $\lambda == \frac{64}{Re_{D_h}}$
- Régime hydrauliquement lisse: **Blasius** $\lambda = \frac{0,316}{Re_{D_h}^{0,25}}$
- Régime de transition lisse- rugueux: **Colebrook** $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,87\ln\left(\tilde{\Lambda} + \frac{9,34}{Re_{D_h}\sqrt{\lambda}}\right)$
- Régime hydrauliquement rugueux: **Nikuradse** $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,87\ln\left(\tilde{\Lambda}\right)$

☛ **Perte de charge singulière** $\Delta P_{tot} = K\frac{\rho U_2^2}{2}$

- K coefficient d'un coude, d'une contraction ou d'un élargissement.

Coude

r_c/D	**K_c**
1	**0,35**
2	**0,19**
4	**0,16**
6	**0,21**
8	**0,28**
10	**0,32**

Contraction brusque

D_2/D_1	**K_e**
0	**0,5**
0,2	**0,49**
0,4	**0,42**
0,6	**0,27**
0,8	**0,20**
0,9	**0,1**

Diffuseur

D_1/D_2	**K_E**
0	**1**
0,2	**0,87**
0,4	**0,70**
0,6	**0,41**
0,8	**0,15**

Partie II : Énergie

Equations locales

- **Loi de Fourier:**

$$q_y = -k \cdot \frac{dT}{dy}$$

- **Equation de la chaleur pour un milieu immobile avec source (k=C^{te}) :**

$$\rho\, C \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \dot{Q}_v$$

- Laplacien en coordonnées cartésiennes $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
- Laplacien en coordonnées cylindriques: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$
- Laplacien en symétrie sphérique: $\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$

☛ Conditions aux limites :

Diriclet: $T_{paroi} = T_o(\vec{s}_{paroi}, t)$

Neuman: $q_{paroi} = -k \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{paroi} = q_o(\vec{s}_{paroi}, t)$

Mixte: $q_p = -k \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_p = h\ \left(T_p - T_f\right)$

- h = coefficient de transfert de chaleur par convection

- **Champ thermique dans un massif semi infini**

- Échelon brusque de température: $\Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$

☛ α = diffusivité thermique

- Perturbation périodique (ω) d'amplitude A_o : $\Theta = \frac{T - T_o}{A_o} = e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right)$

- **Equation de la chaleur pour un fluide en mouvement 2D:**

- Ecoulement laminaire, fluide incompressible et newtonien, conductivité thermique constante:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Equations globales

- **Résistance thermique**

- En série : $\Re_{th,tot} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} = \sum_{i=1}^{N} \Re_{th,i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{S k_i}$

- En parallèle : $\frac{\dot{Q}}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\Re_{th,tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\Re_{th,i}}$

- Coefficient d'échange global : $\frac{1}{h_{tot}} = S\Re_{th,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{k_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{h_i}$

- **Comportement en bloc**

  $$\rho_s C_s V \frac{dT}{dt} = -hS\left(T - T_f\right)$$

- Température de contact

$T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} \neq f\left(t\right)$ effusivité $b = \sqrt{k\rho C}$

- **Corrélations de convection forcée (gaz et liquides)**
  - Sur plaque plane en régime laminaire $Re_x < 3\ 10^5$ $\quad Nu_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0,332\, Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}$
  - Sur plaque plane en régime turbulent $\quad Nu_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0,029\, Pr^{0,43}\, Re_x^{0,8}$
  - Coefficient moyen sur L $\quad \overline{Nu}_L = \frac{1}{n} \cdot Nu_x (\text{en } x = L)$
    - ☛ n exposant de Re_x
  - Sur un cylindre $40 \le Re_D \le 10^5$: $\quad \overline{Nu}_D = \left(0,4\, Re_D^{0,5} + 0,06\, Re_D^{2/3}\right) Pr^{0,4}$
  - Sur une sphère $3,5 \le Re_D \le 8.10^4$: $\quad \overline{Nu}_{sph} = 2 + \overline{Nu}_{cyl}$
  - Dans une conduite
    - ☛ Laminaire à $T_{paroi} = C^{te}$: $\quad \overline{Nu}_D = 4,36$
    - ☛ Laminaire à $q_{paroi} = C^{te}$: $\quad \overline{Nu}_D = 3,66$
    - ☛ Turbulent: $\quad \overline{Nu}_D = 0,023\, Re_D^{0,8}\ Pr^{0,4}$

- **Corrélations de convection naturelle (gaz et liquides)**
  - Sur plaque plane verticale isotherme
    - o Laminaire $10^4 - 10^9 Pr$: $\quad \overline{Nu}_L = 0,59 Ra_L^{1/4}$
    - o Turbulent $10^9.Pr - 10^{13}$: $\quad \overline{Nu}_L = 0,10 Ra_L^{1/3}$
  - Sur plaque plane verticale à flux constant
    - o Laminaire $10^5 - 10^{11}$: $\quad \overline{Nu}_L = 0,750\left[Ra_L^*\right]^{0,20}$
    - o Turbulent $2\ 10^{13} - 10^{16}$: $\quad \overline{Nu}_L = 0,645\left[Ra_L^*\right]^{0,22}$
  - Sur un cylindre horizontal $\quad Nu_D = C Ra_D^n$

Ra_D	C	n
$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
$10^{-2} - 10^{2}$	1	0,148
$10^{2} - 10^{4}$	0.85	0,188
$10^{4} - 10^{7}$	0,48	1/4
$10^{7} - 10^{12}$	0,125	1/3

- Sur une sphère $10^5 \leq Ra_D \leq 10^9$ $\overline{Nu_D} = 2 + 0,5 Ra_D^{1/4}$

- Lame verticale en espace confiné $\overline{Nu_e} = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n \cdot \left[\frac{L}{e}\right]^{-m}$

	Ra_e	C	n	m
Gaz				
	$2000\text{-}2.10^5$	0,197	1/4	1/9
	$2.10^5\text{-}10^7$	0,073	1/3	1/9
Liquide	<2000	1	0	0
	$10^4\text{-}10^7$	0,45	1/4	0,3
	$10^6\text{-}10^9$	0,046	1/3	0

- Lame horizontale en espace confiné $\overline{Nu_e} = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n$

	Ra_e	C	n
Gaz	< 1700	1	0
	1700 - 7000	0,059	0,4
	$7000 - 3,2\ 10^5$	0,212	1/4
	$> 3,2\ 10^5$	0,061	1/3
Liquide	< 1700	1	0
	1700 - 6000	0,012	0,6
	$6000 - 3,7\ 10^4$	0,375	0,2
	$3,7\ 10^4 - 10^8$	0,13	0,3
	$> 10^8$	0,057	1/3

- **Bilan énergétique en rayonnement thermique** $\alpha_\lambda + \tau_\lambda + r_\lambda = 1$
- **Loi de Stefan-Boltzmann** $M^o = \int_0^\infty M_\lambda^o d\lambda = \sigma T^4$ avec σ=5,67 10^{-8} W/m^2.K^4
- **Radiosité d'u corps gris** $J = \varepsilon M^o + rE$
- **Densité de flux de chaleur perdue par le corps gris perdue** $q_{perdue} = \varepsilon M^o - \alpha E = J - E$
- **Flux de chaleur échangé par rayonnement thermique entre deux corps gris**

$$\dot{Q}_{ray} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

- **Coefficient d'échange par rayonnement thermique** $h_r = G(\varepsilon, F) \cdot \sigma \cdot \left(T_1^2 + T_2^2\right)\left(T_1 + T_2\right)$

- **Equation de l'énergie totale**

$$\frac{d\left[E_c + E_i + E_p\right]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2\left[< \rho\left(\frac{V^2}{2} + e_i + \frac{P}{\rho} + gz\right) V_n > S \right] + \dot{Q} + \dot{\overline{W}}$$

- **Equation de l’énergie mécanique pour un fluide incompressible**

$$\frac{d\left[E_c + E_p\right]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2\left[< \rho\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right)V_n > S \right] + \dot{\overline{W}} - \dot{E}_v$$

- **Equation de Bernoulli généralisée pour un écoulement en conduite**

$$-\Delta_1^2\left[< \rho\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + e_p\right)V_n > S \right] = \dot{E}_v$$

- **Equation de l’énergie interne pour un fluide incompressible**

$$\frac{d\left[E_i\right]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2\left[< \rho e_i V_n > S\right] + \dot{Q} + \dot{E}_v$$

Partie II : Matière

- **Loi de Fick**

$$j_A(x) = -\rho D_{AB} \cdot \frac{d\omega_A}{dx} \qquad \text{avec} \quad D_{AB} = D_{BA} = D$$

- **Diffusion de matière dans un fluide en mouvement**

$$\vec{n}_A - \omega_A \left(\vec{n}_A + \vec{n}_B\right) = -\rho D \nabla \omega_A \qquad \text{avec} \quad \omega_A = \frac{\rho_A}{\rho}$$

  - Densité de flux absolue $\vec{n}_A = \rho_A \vec{u}_A = \vec{j}_A + \rho_A \vec{U}$
  - Vitesse barycentrique $\vec{U} = \dfrac{\rho_A \vec{u}_A + \rho_B \vec{u}_B}{\rho}$

- **Évaporation d'un liquide par diffusion moléculaire dans une colonne ventilée L**

  - Distribution de fraction massique $\dfrac{1-\omega_A(z)}{1-\omega_{A,0}} = \left[\dfrac{1-\omega_{A,L}}{1-\omega_{A,0}}\right]^{\frac{z}{L}}$
  - Débit massique d'évaporation $\dot{m}_A \approx \left[D \dfrac{M_A}{R\,T} \cdot \dfrac{S}{L}\right]\left(P_{sat}(T) - P_{A,L}\right)$
  - Pression de saturation pour la vapeur d'eau (T en °C) : $p_{sat}\left(T\right) = 10^{7,625\frac{T}{241+T}+2,787}$
  - Diffusivité massique (T en °C et P en Pa) : $D = \dfrac{2,26}{P}\left(\dfrac{T+273,15}{273,15}\right)^{1,81}$

- **Couche limite massique**

$$u\frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v\frac{\partial \rho_A}{\partial y} = D\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2}$$

- **Corrélation de transfert de matière par convection forcée**

Mêmes écritures qu'en transfert de chaleur en substituant Nu par Sh, et Pr par Sc

- **Relation des gaz parfaits :**

$$p_v = \rho_v \frac{R}{M_v} T_v \qquad \text{avec} \quad R = 8314 \text{ J / kmole.K}$$