TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire & Convective

- Principe physique
- Définitions
- Fluide immobile
  - Loi de Fick $\equiv$ Newton $\equiv$ Fourier
  - Analogies
- Fluide en mouvement
- Exploitation des lois
  - Évaporation d'un liquide
  - Absorption par film liquide tombant
  - Thermomètre humide

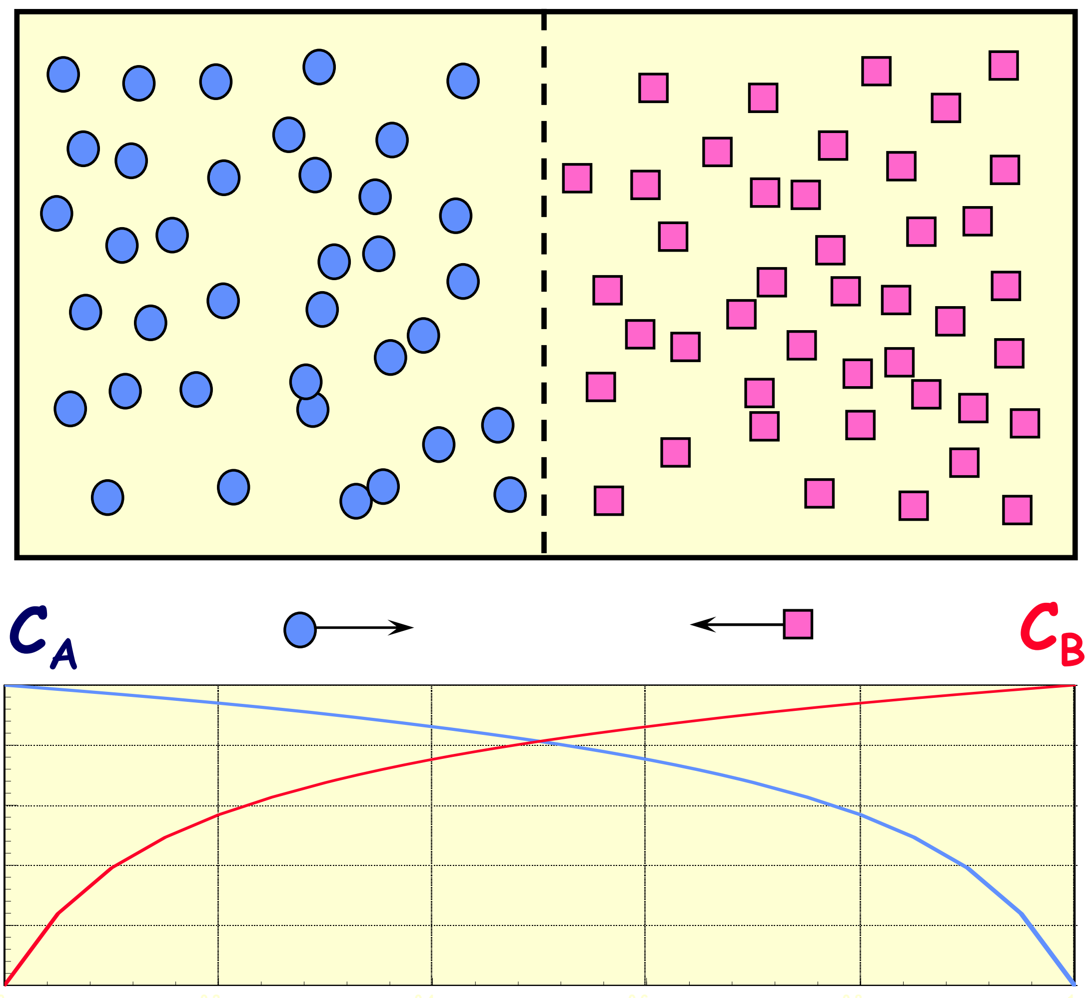
TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

- Principe Physique

Mélange Binaire

Cloison fictive

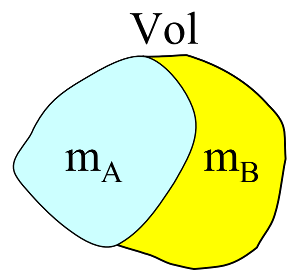


Distribution de la concentration des espèces au temps t

TRANSFERT DE MATIERE

Définitions

Mélange binaire



- Concentration massique

$$\rho = \rho_A + \rho_B \equiv \left[kg/m^3 \right]$$

- Fraction massique

$$\omega_A = \frac{\rho_A}{\rho} \longrightarrow \omega_A + \omega_B = 1$$

- Concentration molaire

$$C_A = \frac{\rho_A}{M_A} \longrightarrow C = C_A + C_B$$

- Fraction molaire

$$X_A = \frac{C_A}{C} \longrightarrow X_A + X_B = 1$$

- Pression partielle $P = P_A + P_B$

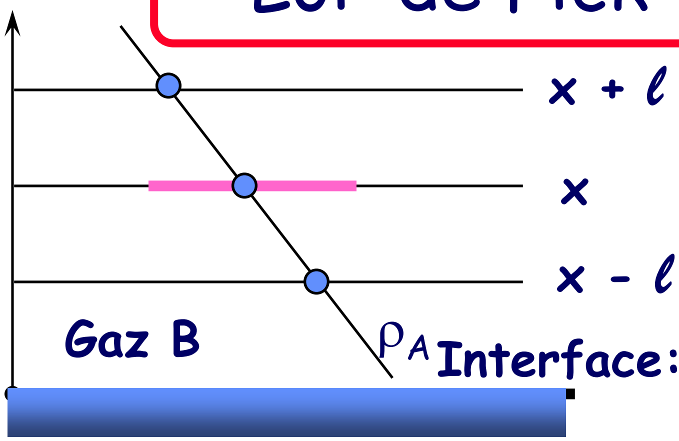
$$C_A = \frac{P_A}{\Re T} \quad \text{et} \quad X_A = \frac{P_A}{P}$$

$$\Re \simeq 8314,5 \ \ J \cdot Mol^{-1} K^{-1}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Loi de Fick



☞ Flux de A; $m=m_A$

$$j_A(x) = m\left[\dot{n}_A(x-\ell) - \dot{n}_A(x+\ell)\right]$$

Or $\quad m\dot{n}_A = \dfrac{\tilde{v}}{6}\rho_A$

☞ Soit après linéarisation

$$j_A(x) = -\left[\frac{\ell\tilde{v}}{3}\right]\cdot\frac{d\rho_A}{dx} = -\mathcal{D}_{AB}\cdot\frac{d\rho_A}{dx}$$

☞ Mélange à ρ constant

$$\boxed{j_A(x) = -\rho\mathcal{D}_{AB}\cdot\frac{d\omega_A}{dx}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

- Diffusivité binaire massique

$$\mathcal{D}_{AB} = \mathcal{D}_{BA} = \mathcal{D} \equiv [m^2/s]$$

  - Gaz: 0,1 --- 0,5 cm^2/s
  - Liquides: 10^{-5} cm^2/s
  - Solides: 10^{-8}-- 10^{-30} cm^2/s

- Analogies des Transports

Flux	Coefficient Phénoménologique	Gradient
$\overline{\overline{\tau}}$	μ	$\nabla\vec{V}$
$\vec{q}$	k	∇T
$\vec{j}_A$	$\rho\mathcal{D}$	$\nabla\omega_A$
$\vec{J}_A$	$C\mathcal{D}$	∇X_A

TRANSFERT DE MATIERE

Types de conditions aux limites

❖ Espèce A sous forme vapeur

Mélange gazeux avec A

Liquide pur de A à T

$$P_A = P_{sat}(T)$$

Mélange gazeux avec A

Mélange liquide avec A

$$X_{A,int} = \frac{P_A}{H}$$

H est la constante de Henri (en Pa)

❖ Substance pure A

A

Mélange liquide avec A

$$X_{A,int}$$

❖ Espèce A dans un solide

Mélange gazeux avec A

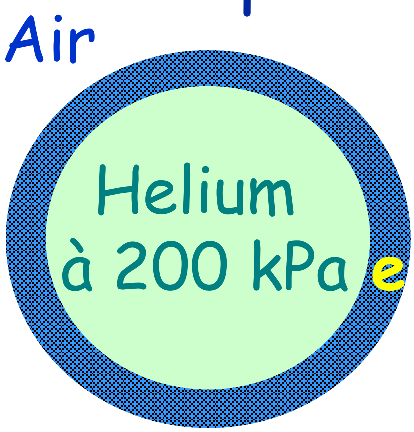
Solide avec A

$$P_A \cdot S = C_{A,int}$$

S est la solubilité (en kmol/m³.Pa)

TRANSFERT DE MATIERE

Exemple de Diffusion Ordinaire



Tube de Pyrex
de rayon R

❖ Hypothèse de paroi mince

e=2mm < R = 50 mm

❖ Flux molaire: loi de Fick

$$\boxed{J_{He} = -\mathcal{D} \cdot \frac{dC}{dx}}$$

❖ Pression partielle

$$J_{He} = -\mathcal{D} \cdot \mathcal{S} \cdot \frac{dP}{dx} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{S} \frac{P_o - \cancel{P_1}}{e}$$

Or $P_1 << P_o$

$$J_{He} = \left[4,5.10^{-15}\right] \times \left[3,4.10^{-9}\right] \frac{2.10^5}{0.002}$$

$$J_{He} = 1,53.10^{-15} \ \frac{\text{kmol}}{\text{s.m}^2}$$

❖ Flux massique de perte

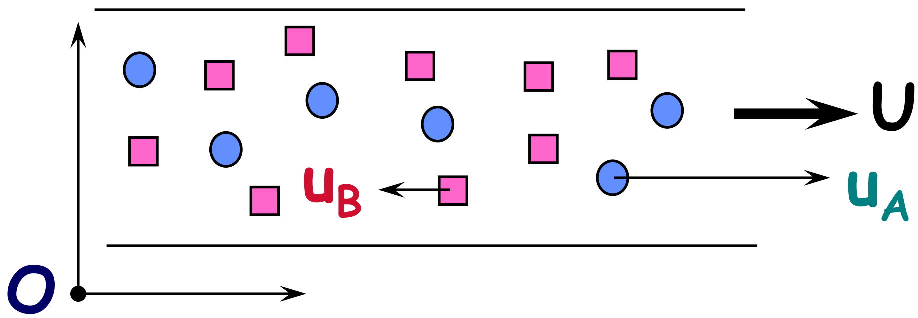
$$j_{He} = M_{He} J_{He}$$

$$j_{He} = 6,12.10^{-15} \ \frac{\text{kg}}{\text{s.m}^2}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

❖ Fluide en mouvement



☞ Observateur fixe (labo)

$$\vec{n}_A = \rho_A \vec{u}_A \qquad \text{et} \qquad \vec{n} = \vec{n}_A + \vec{n}_B$$

Vitesse barycentrique

$$\vec{U} = \frac{\rho_A \vec{u}_A + \rho_B \vec{u}_B}{\rho}$$

☞ Observateur à $\vec{U}$

$$\vec{j}_A = \rho_A \left(\vec{u}_A - \vec{U} \right) = -\rho \mathcal{D} \nabla \omega_A$$

☞ Relation finale: Fick généralisée

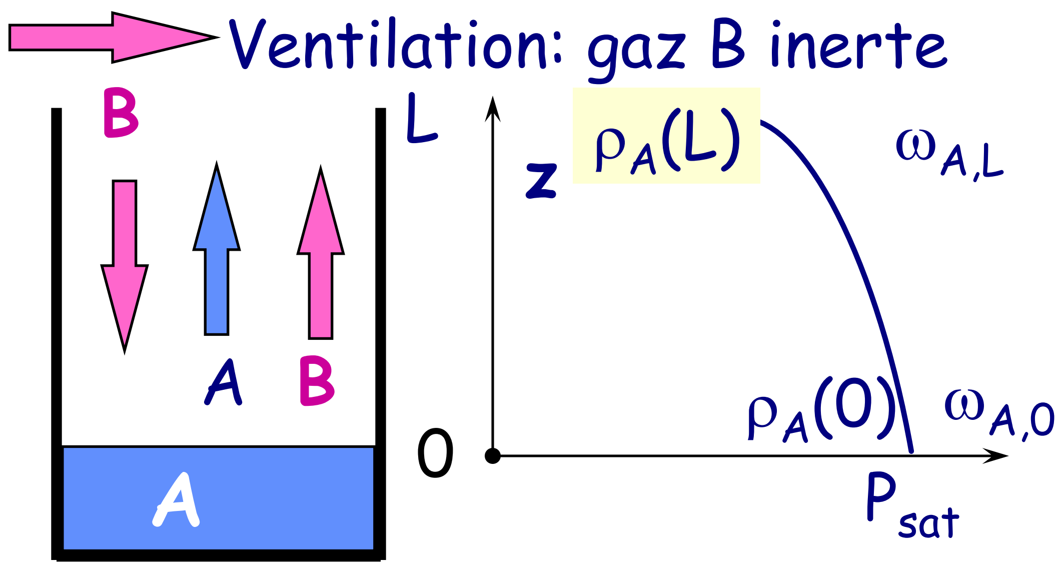
$$\boxed{\vec{n}_A - \omega_A \left(\vec{n}_A + \vec{n}_B \right) = -\rho \mathcal{D} \nabla \omega_A}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Exploitation des lois

❖ Évaporation d'un liquide (1)



- Transfert de matière stationnaire
- P et T constantes

$$\frac{d n_A}{d z} = 0 \qquad \text{et} \qquad n_B(z) = 0$$

donc

$$n_A - \omega_A \left(n_A + \cancel{n_B}\right) = -\rho \mathcal{D} \frac{d \omega_A}{d z}$$

d'où

$$\boxed{n_A = -\frac{\rho \mathcal{D}}{1 - \omega_A} \cdot \frac{d \omega_A}{d z} = C^{te}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Exploitation des lois

❖ Évaporation d'un liquide (2)

☞ Distribution de la fraction massique

$$\frac{1-\omega_A(z)}{1-\omega_{A,0}} = \left[\frac{1-\omega_{A,L}}{1-\omega_{A,0}}\right]^{\frac{z}{L}}$$

☞ Taux d'évaporation

- Densité de flux massique

$$n_A = \frac{\rho \mathcal{D}}{L} \ln\left(\frac{1-\omega_{A,L}}{1-\omega_{A,0}}\right)$$

- Densité de flux molaire

$$\boxed{N_A = \frac{c\mathcal{D}}{L} \ln\left(\frac{1-X_{A,L}}{1-X_{A,0}}\right)}$$

TRANSFERT DE MATIERE
Diffusion Ordinaire
Exploitation des lois

❖ Évaporation d'un liquide (3)

☞ Pression partielle

$$P_A = \rho_A \frac{\Re}{M_A} T = C_A \Re T$$

Comme $P = C \Re T$ ➡ $X_A = \dfrac{C_A}{C} = \dfrac{P_A}{P}$

☞ Flux molaire

$$N_A = \frac{C\mathcal{D}}{L} \ln\left(\frac{P - P_{A,L}}{P - P_{sat}(T)}\right)$$

$$N_A \approx \frac{C\mathcal{D}}{L}\left(\frac{P_{sat}(T) - P_{A,L}}{P}\right)$$

☞ Débit massique d'évaporation

$$\boxed{\dot{m}_A \approx \left[\mathcal{D}\frac{M_A}{RT} \cdot \frac{Surf}{L}\right]\left[P_{sat}(T) - P_{A,L}\right]}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Exploitation des lois

❖ Évaporation d'un liquide (4)

Application:

- ☞ eau à 40°C: récipient d=0,15m et L=0,05m
- ☞ $P=P_{atm}$=1034 hPa et air humide à 20%

- Diffusivité: Loi de Schirmer (T en K):

$$\mathcal{D} = \frac{2,26}{P}\left(\frac{T}{273}\right)^{1,81} \approx 2,8\ 10^{-5}\ m^2/s$$

- Pression de saturation (T en °C):

$$P_{sat}(T) = 10^{\frac{7,63\,T}{241+T}+2,79} \approx 7515\,Pa$$

- Humidité relative

$$\varphi = \frac{P_{v,L}}{P_{sat(T)}} \Rightarrow P_{v,L} \approx 1503\ Pa$$

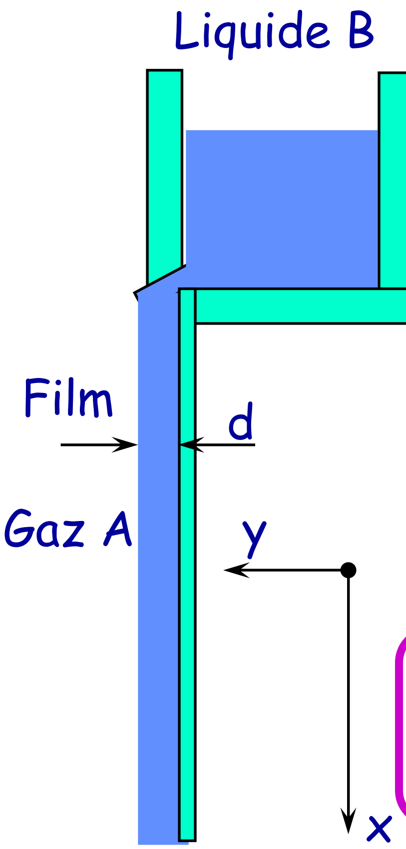
- Débit d'évaporation

$$\dot{m}_A \approx 4,12\ 10^{-7}\ kg/s \approx 1,48\ g/hr$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

❖ Film liquide tombant (1)



- Gaz A faiblement soluble dans B
- Processus sans réaction chimique

◆ **Hypothèses**

- ☞ Diffusion lente: $\rho_A = 0$ en $y=0$
- ☞ Advection dominante sur Ox
- ☞ Diffusion ordinaire sur Oy

◆ **Bilan Massique**

$$\boxed{dxdy\frac{\partial n_{A,x}}{\partial x} + dxdy\frac{\partial n_{A,y}}{\partial y} = 0}$$

◆ **Loi de Fick généralisée**

$$n_{A,x} = \omega_A\left(n_{A,x} + n_{B,x}\right) - \cancel{\rho\mathcal{D}\frac{\partial \omega_A}{\partial x}}$$

$$n_{A,y} = \cancel{\omega_A\left(n_{A,y} + n_{B,y}\right)} - \rho\mathcal{D}\frac{\partial \omega_A}{\partial y}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

❖ Film liquide tombant (2)

- **Advection sur Ox et Diffusion sur Oy**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega_A \boxed{\left(n_{A,x}+n_{B,x}\right)}\right]=\rho\mathcal{D}\frac{\partial^2\omega_A}{\partial y^2}$$

- **Flux massiques**

$$n_{A,x}+n_{B,x}=\rho_A u_{A,x}+\rho_B u_{B,x}=\rho u=C^{te}$$

- **Équation de base**

$$\boxed{u\frac{\partial\omega_A}{\partial x}=\mathcal{D}\frac{\partial^2\omega_A}{\partial y^2}}$$

- **Solution: $u=u_m$**
  - ☞ Fraction massique

$$\frac{\omega_A}{\omega_{A,\delta}}=1-\mathrm{erf}\left[(\delta-y)\sqrt{\frac{u_m}{4\mathcal{D}x}}\right]$$

  - ☞ Densité de Flux à l'interface

$$n_{A,\delta}=-\rho\mathcal{D}\left.\frac{\partial\omega_A}{\partial y}\right|_\delta=\rho\omega_{A,\delta}\sqrt{\frac{u_m\mathcal{D}}{\pi x}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

❖ Nombres sans dimension

- **Densité de flux massique**

$$\left[\frac{n_{A,\delta}}{\rho_{A,\delta}u_m}\right] = \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\rho\mathcal{D}}{\mu}\right]\cdot\left[\frac{\mu}{\rho u_m x}\right]}$$

- **Nombre de Stanton massique**

$$St = \frac{n_{A,\delta}}{\rho_{A,\delta}u_m}$$

- **Nombre de Schmidt**

$$Sc = \frac{\mu}{\rho\mathcal{D}} = \frac{\nu}{\mathcal{D}}$$

- **Nombre de Reynolds**

$$Re = \frac{\rho u_m x}{\mu}$$

- **Corrélation**

$$\boxed{St^2\cdot Re\cdot Sc = C^{te}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

- Fluide immobile
  - Loi de Fick $\vec{j}_{AB} = -\mathcal{D}_{AB} \cdot \nabla \rho_A$
  - Coefficient de diffusion massique

$$\mathcal{D}_{AB} = \mathcal{D}_{BA} = \mathcal{D} \equiv [m^2/s]$$

  - Diffusion à travers un solide
- Fluide en mouvement
  - Observateur fixe

$$\vec{n}_A = \rho_A \vec{u}_A$$

  - Relation de Fick généralisée

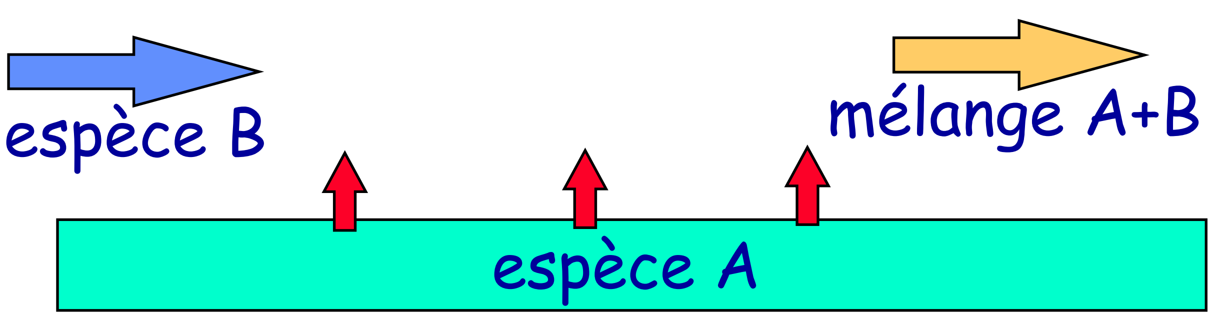
$$\vec{n}_A - \omega_A \left(\vec{n}_A + \vec{n}_B \right) = -\rho \mathcal{D} \nabla \omega_A$$

  - Évaporation d'un liquide
  - Absorption par film tombant

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

- Équation fondamentale
  - Diffusion avec réaction chimique
- Couche limite massique
  - Coefficient de transfert de matière
  - Corrélations et Analogies
- Exploitation des lois
  - Évaporation d'un film liquide
  - Thermomètre humide
  - Évaporation d'une goutte



TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Équation Fondamentale

❖ Équation de la masse: espèce A

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho_A \vec{u}_A) = \dot{r}_A$$

- Taux volumique de production $\dot{r}_A \equiv \left[\frac{kg}{s.m^3}\right]$

- Flux absolu $\rho_A \vec{u}_A = \vec{j}_A + \rho_A \vec{U}$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho_A \vec{U}) + \nabla \bullet \vec{j}_A = \dot{r}_A$$

- Loi de Fick $\vec{j}_A = -\mathcal{D} \nabla \rho_A$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho_A \vec{U}) = \mathcal{D} \nabla^2 \rho_A + \dot{r}_A}$$

- **C = Constante → fraction molaire**

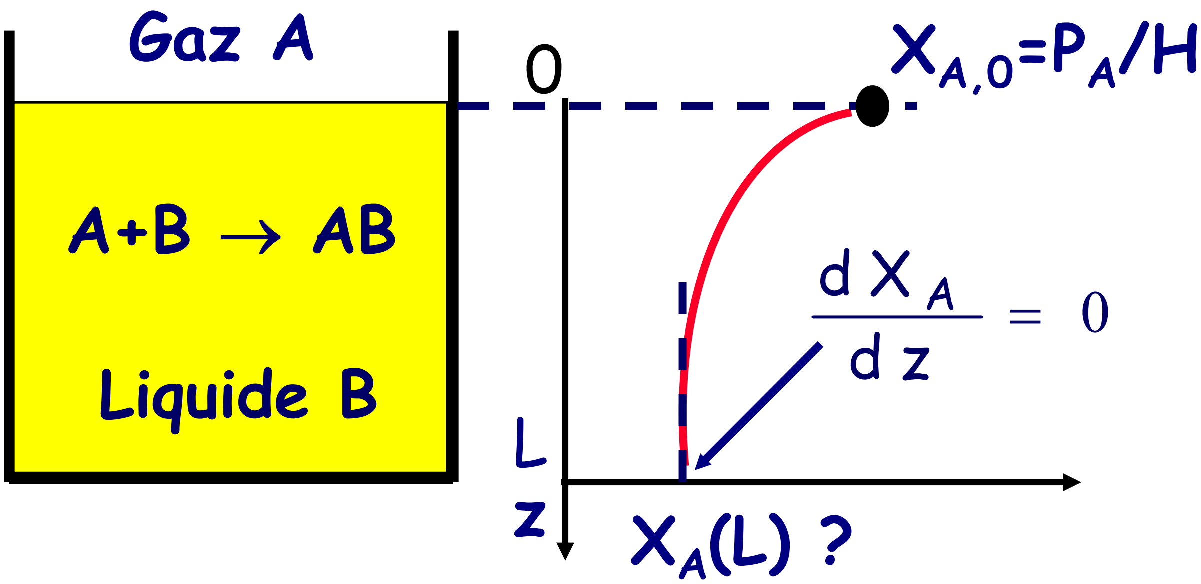
$$\boxed{\frac{\partial X_A}{\partial t} + \nabla . (X_A \vec{U}) = \mathcal{D} \nabla^2 X_A + \frac{\dot{r}_A}{M_A C}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Exploitation des lois

❖ Réaction chimique (1)



- État stationnaire et liquide au repos

$$\mathcal{D}\nabla^2 X_A = -\frac{\dot{r}_A}{M_A C}$$

- Réaction d'ordre 1

$$\dot{r}_A = -k' M_A C_A$$

- Équation différentielle

$$\boxed{\mathcal{D}\frac{d^2X_A}{dz^2} - k' X_A = 0}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Diffusion Ordinaire

Exploitation des lois

Réaction chimique (2)

- Solution ($Z=z/L$)

$$\boxed{\frac{X_A(Z)}{X_{A,0}} = \frac{\cosh\left(N_H(1-Z)\right)}{\cosh(N_H)}}$$

- Nombre de Hatta

$$N_H = \sqrt{\frac{k' L^2}{\mathcal{D}}}$$

- Densité de flux molaire

$$J_A(Z) = -\frac{\mathcal{D}}{L}\frac{dX_A}{dZ}$$

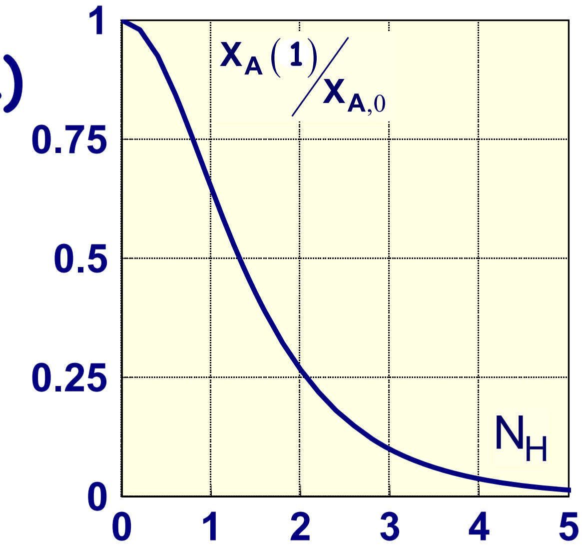
$$\boxed{J_A(Z) = \frac{\mathcal{D} X_{A,0}}{L} N_H \frac{\sinh\left(N_H(1-Z)\right)}{\cosh(N_H)}}$$

TRANSFERT DE MATIERE
Diffusion Ordinaire
Exploitation des lois

❖ Réaction chimique (3)

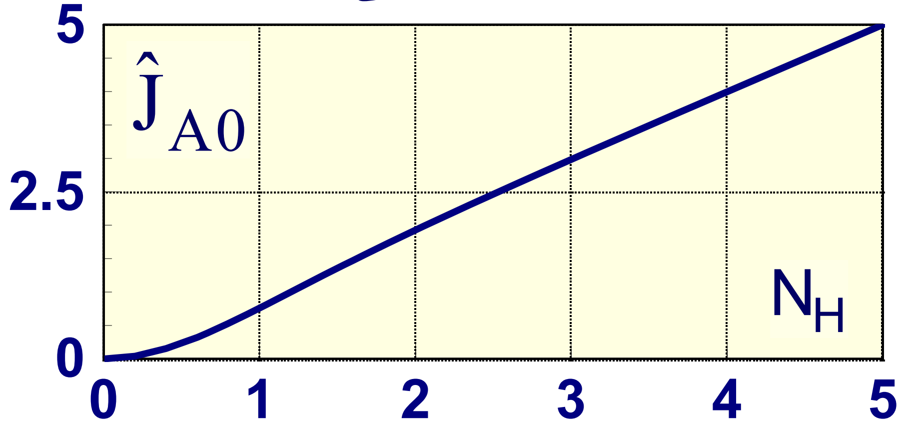
- **Fraction Molaire $X_A(L)$**

$$\frac{X_A(1)}{X_{A,0}} = \cosh(N_H)^{-1}$$



- **Densité de flux molaire en Z=0**

$$J_A(0) = \frac{\mathcal{D}X_{A,0}}{L} N_H \tanh(N_H)$$



L'absorption de A augmente avec N_H

TRANSFERT DE MATIERE
Convection

Couche Limite Massique

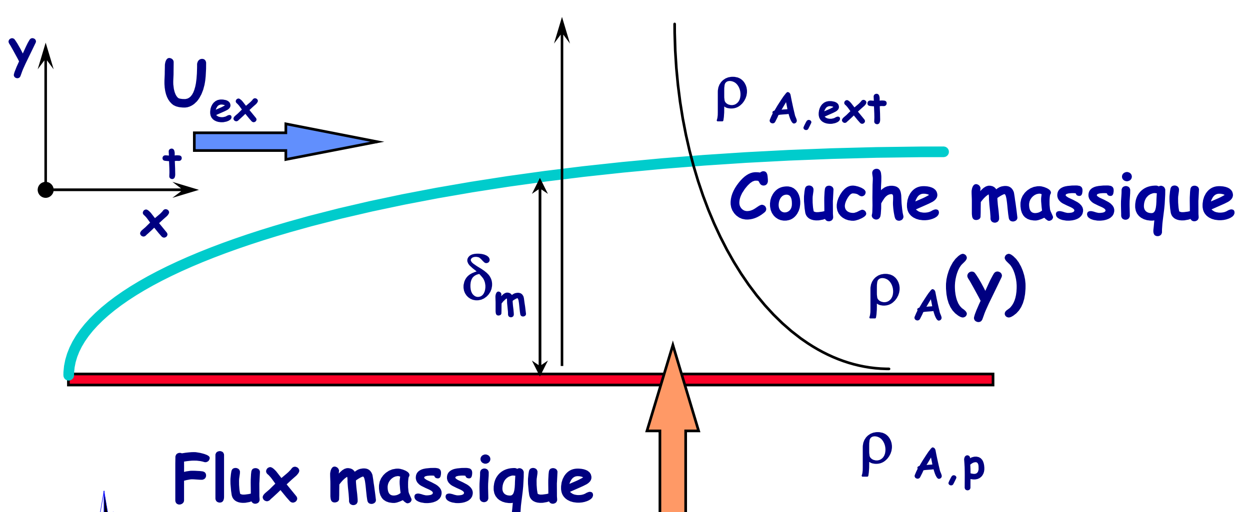
- Équation
  - Stationnaire, sans réaction (2D)

$$u\frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v\frac{\partial \rho_A}{\partial y} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2}$$

- Analogies
  - Mouvement: Nbre de Schmidt $Sc = \dfrac{\nu}{\mathcal{D}}$

$\updownarrow$ $Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}$

  - Chaleur: Nbre de Lewis $Le = \dfrac{\mathcal{D}}{\alpha} = \dfrac{Pr}{Sc}$



TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Coefficient de transfert de matière

- Définition

$$h_m = \frac{j_{A_p}}{\rho_{A,p} - \rho_{A,ext}} = \frac{-\mathcal{D} \left.\frac{\partial \rho_A}{\partial y}\right|_{y=0}}{\rho_{A,p} - \rho_{A,ext}}$$

- Nombre de Sherwood local

$$Sh_x = \frac{h_m . x}{\mathcal{D}}$$

  - Corrélation

$$\boxed{Sh_x = A \cdot Sc^n \cdot Re_x^m}$$

  - Relation d'Analogie

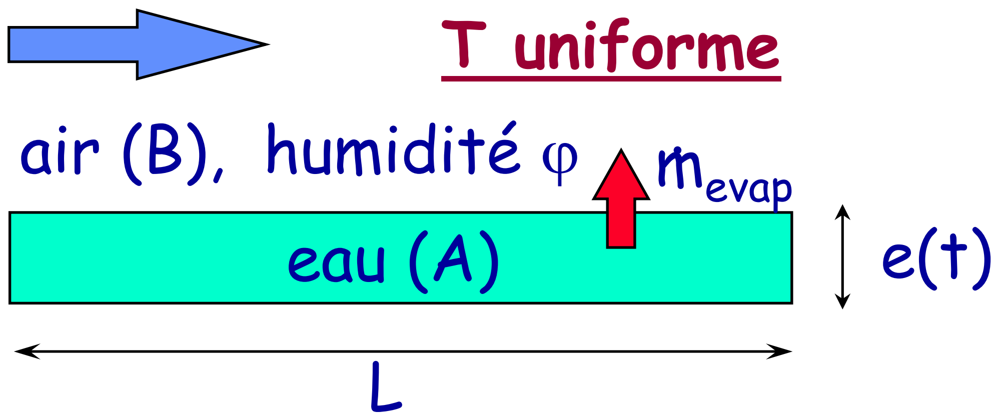
$$\boxed{\frac{Sh}{Nu} = Le^{-n}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Exploitation des Lois

❖ Évaporation d'un liquide étalé (1)



- **Variation de l'épaisseur du film**

$$\rho_\ell L \frac{de}{dt} = -\dot{m}_{evap}$$

- **Temps d'évaporation (?)**

$$\boxed{t_{evap} = \frac{e_o L \rho_\ell}{\dot{m}_{evap}}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Exploitation des Lois

❖ Évaporation d'un liquide étalé (2)

- Taux d'évaporation / largeur

$$\dot{m}_{evap} = \overline{h}_m L \left[\rho_{v,p} - \rho_{v,ext} \right]$$

Comme $T_{air}=T_{eau}$ → $\rho_{v,ext} = \varphi \rho_{v,p}$

avec

$$\overline{h}_m = \frac{\overline{Sh}.\mathcal{D}}{L} \quad \text{et} \quad \rho_{v,p} = \frac{M_v.P_{sat}(T)}{\mathcal{R}.T}$$

Finalement

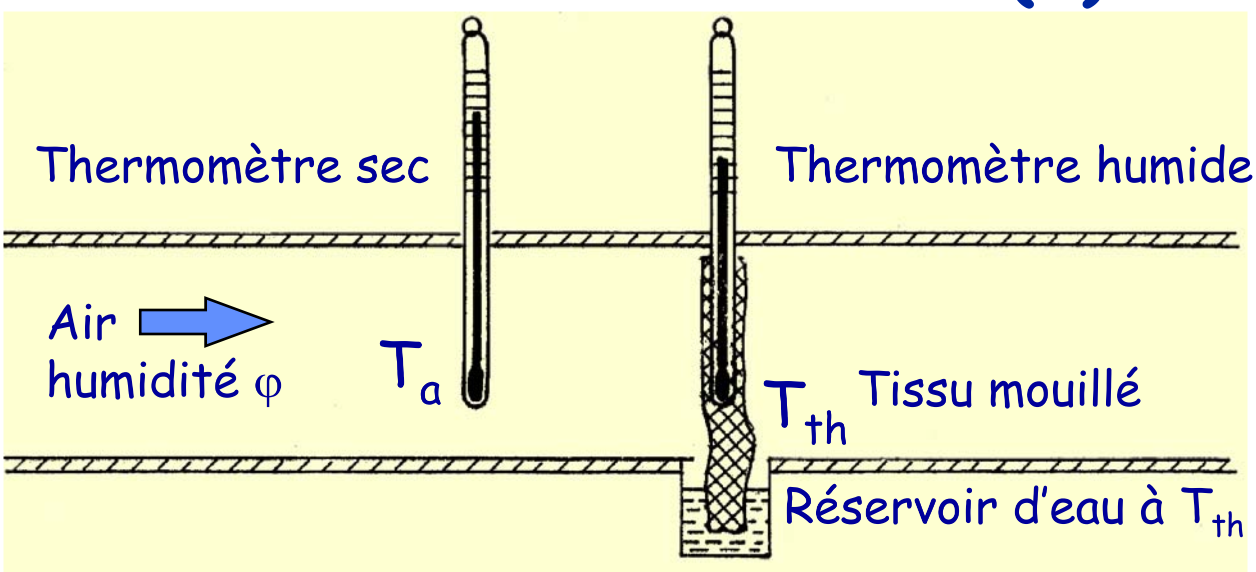
$$\boxed{t_{evap} = \frac{e_o \rho_\ell}{\overline{h}_m (1-\varphi)} \cdot \frac{\mathcal{R}.T}{M_v.P_{sat}(T)}}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Exploitation des Lois

❖ Le thermomètre humide (1)



- Bilan énergétique

Convection= changement de phase

$$h.S\left[T_a - T_{th}\right] = \dot{m}_v.\mathcal{L}_{\ell v}$$

- Évaporation

$$\dot{m}_v = h_m.S.\rho_{v,p}\left[1-\varphi\left(T_{th}\right)\right]$$

<u>**φ calculé à T_{th}**</u>

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

Exploitation des Lois

Le thermomètre humide (2)

- Écart de température $\Delta T = T_a - T_{th}$

$$\Delta T = \frac{h_m}{h} \cdot \rho_{v,p} \cdot \mathcal{L}_{\ell v} (1 - \varphi)$$

- Relation d'analogie

$$\frac{h_m}{h} = \frac{Sh \cdot \mathcal{D}}{L} \cdot \frac{L}{k_g \cdot Nu} = Le^{-n} \cdot \frac{\mathcal{D}}{k_g}$$

Soit $$h / h_m = \rho_g \cdot c_{pg} \cdot Le^{n-1}$$

- Humidité relative

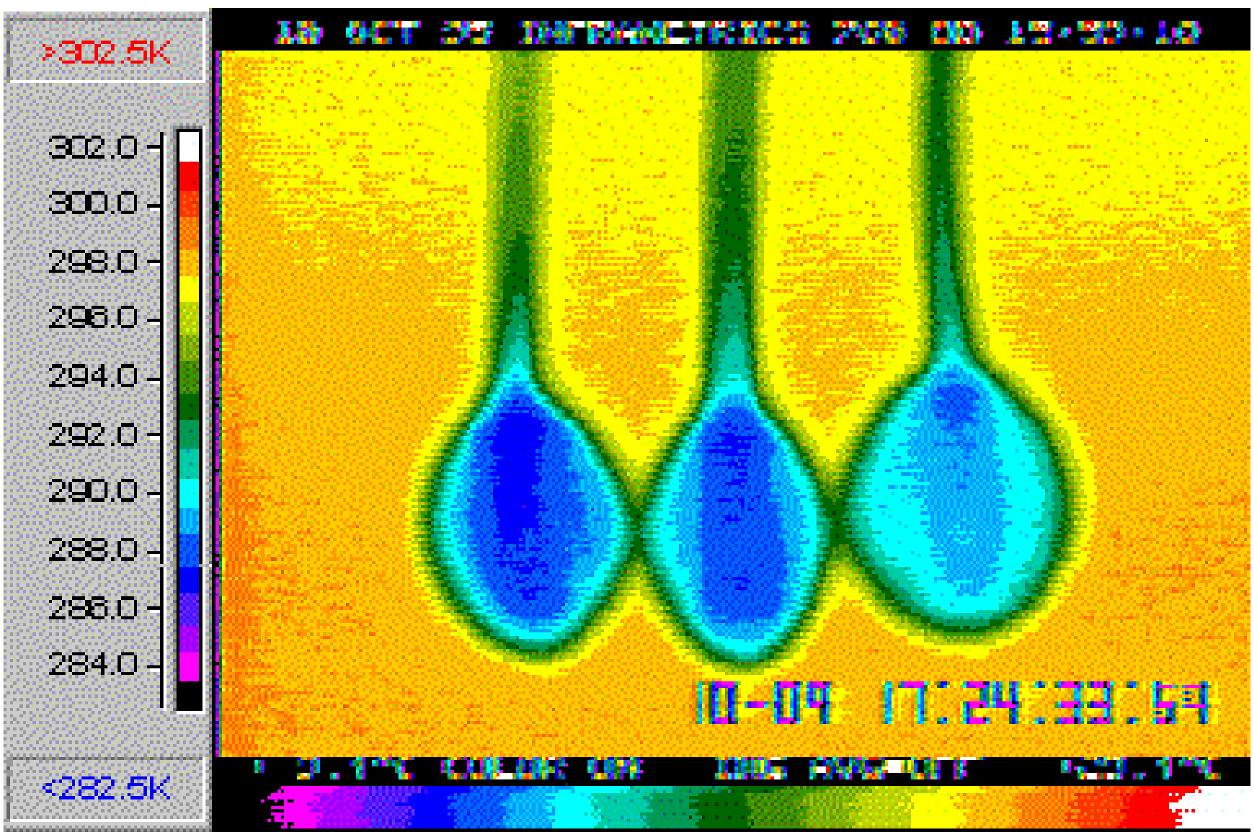
$$\boxed{\varphi = 1 - \left(\frac{\rho_g . c_{pg}}{\rho_{v,p}} Le^{n-1} \right) \Delta T}$$

Hygromètre psychrométrique

TRANSFERT DE MATIERE

Convection

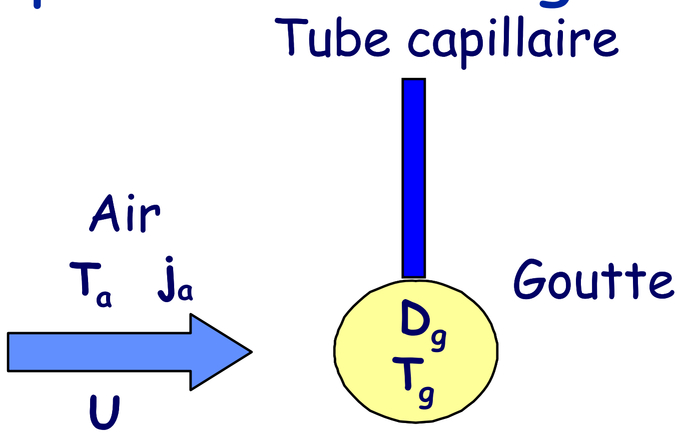
Évaporation de gouttes



- **Observation par caméra infrarouge**
  - **Variation de D_g**
  - **Variation de T_g**

TRANSFERT DE MATIERE

Évaporation d'une goutte fixe



$$\begin{cases} S_g = \pi D_g^2 \\ m_g = \rho_\ell \dfrac{\pi D_g^3}{6} \end{cases}$$

❖ Le transfert de matière

$$\frac{dm_g}{dt} = -\dot{m}_v = -h_m S_g \left[\rho_{v,sat}\left(T_g\right) - \rho_{v,\infty}\right] \qquad \equiv [kg/s]$$

☞ **Coefficient de transfert massique**

$$h_m = \frac{Sh \cdot \mathcal{D}}{D_g} = \frac{\mathcal{D}}{D_g}\left[2 + \left(0,4Re^{0,5} + 0,06Re^{\frac{2}{3}}\right)Sc^{0,4}\right]$$

☞ **Variation de D_g**

$$\boxed{\frac{dD_g^2}{dt} = -4Sh\frac{\mathcal{D}}{\rho_\ell} \cdot \frac{M_v}{\mathcal{R}}\left(\frac{P_{v,sat}\left(T_g\right)}{T_g} - \varphi_a \frac{P_{v,sat}\left(T_a\right)}{T_a}\right)}$$

TRANSFERT DE MATIERE

Évaporation d'une goutte fixe

❖ **Le transfert de chaleur (en bloc)**

$$m_g C_\ell \frac{dT_g}{dt} = h S_g \left(T_a - T_g\right) - \dot{m}_v \mathcal{L}_{\ell v} \qquad \equiv [W]$$

☞ **Coefficient de transfert de chaleur**

$$h = \frac{Nu \cdot k_a}{D_g} = \frac{k_a}{D_g}\left[2 + \left(0,4\,Re^{0,5} + 0,06\,Re^{\frac{2}{3}}\right) Pr^{0,4}\right]$$

☞ **Variation de T_g**

$$\boxed{\frac{dT_g}{dt} = \frac{6}{\rho_\ell C_\ell D_g^2}\left[\begin{array}{l} Nu \cdot k_a \left(T_a - T_g\right) - \\ Sh \dfrac{\mathcal{D} M_v \mathcal{L}_{\ell v}}{\mathcal{R}} \left(\dfrac{P_{v,sat}\left(T_g\right)}{T_g} - \varphi_a \dfrac{P_{v,sat}\left(T_a\right)}{T_a}\right) \end{array}\right]}$$

❖ **Solution**

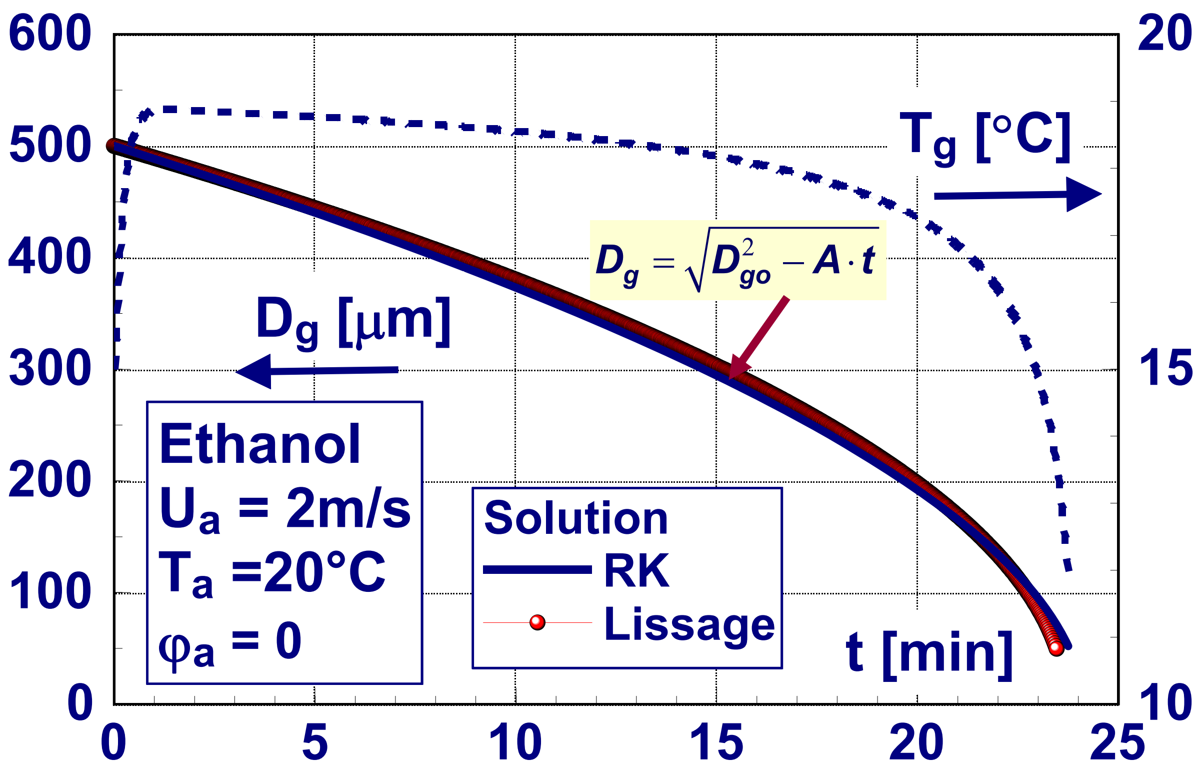
☞ **2 Équations différentielles ordinaires**

☞ **Méthode numérique de Runge-Kutta**

TRANSFERT DE MATIERE

Évaporation d'une goutte fixe

❖ Résultat typique



- Diminution du diamètre de la goutte
- Comportement en $\sqrt{D_{go}^2 - A \cdot t}$
- Phase de chauffe par convection
- Phase de refroidissement par évaporation