TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

❖ Fluide & Surface Solide

$\exists$ Vitesse relative U

$\exists$ Différence de température T_f-T_p

<u>Coefficient d'échange convectif</u> ***h***

❖ Convection Forcée

U impose ΔT et donc l'échange thermique

h= *h*(U, propriétés du fluide)

❖ Convection Naturelle

$\Delta T \Rightarrow \partial\rho \Rightarrow U$: Phénomènes couplés

h= *h*(ΔT, propriétes du fluide)

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

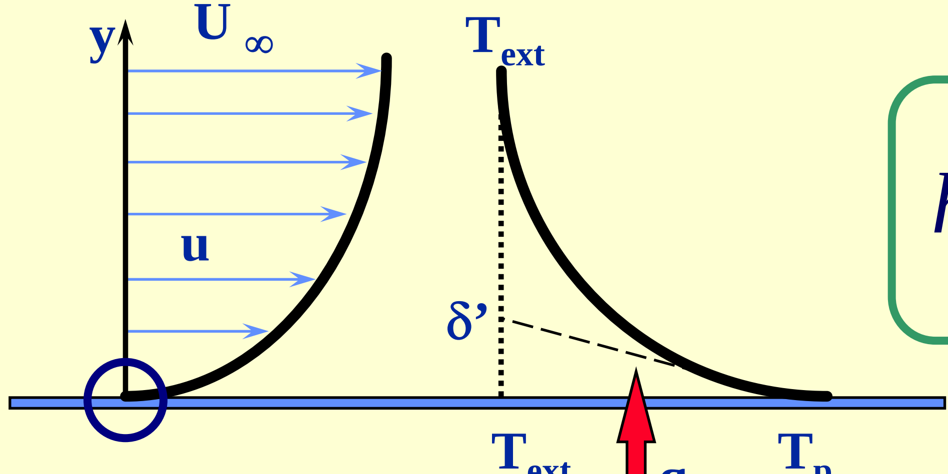
Coefficient de transfert de chaleur

- Définition de Newton

$$q_p = h \cdot \left(T_p - T_{ext}\right)$$

- Interprétation Physique

$$q_p = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_p = k_f \cdot \frac{\left(T_p - T_{ext}\right)}{\delta'}$$



$$\boxed{h = \frac{k_f}{\delta'}}$$

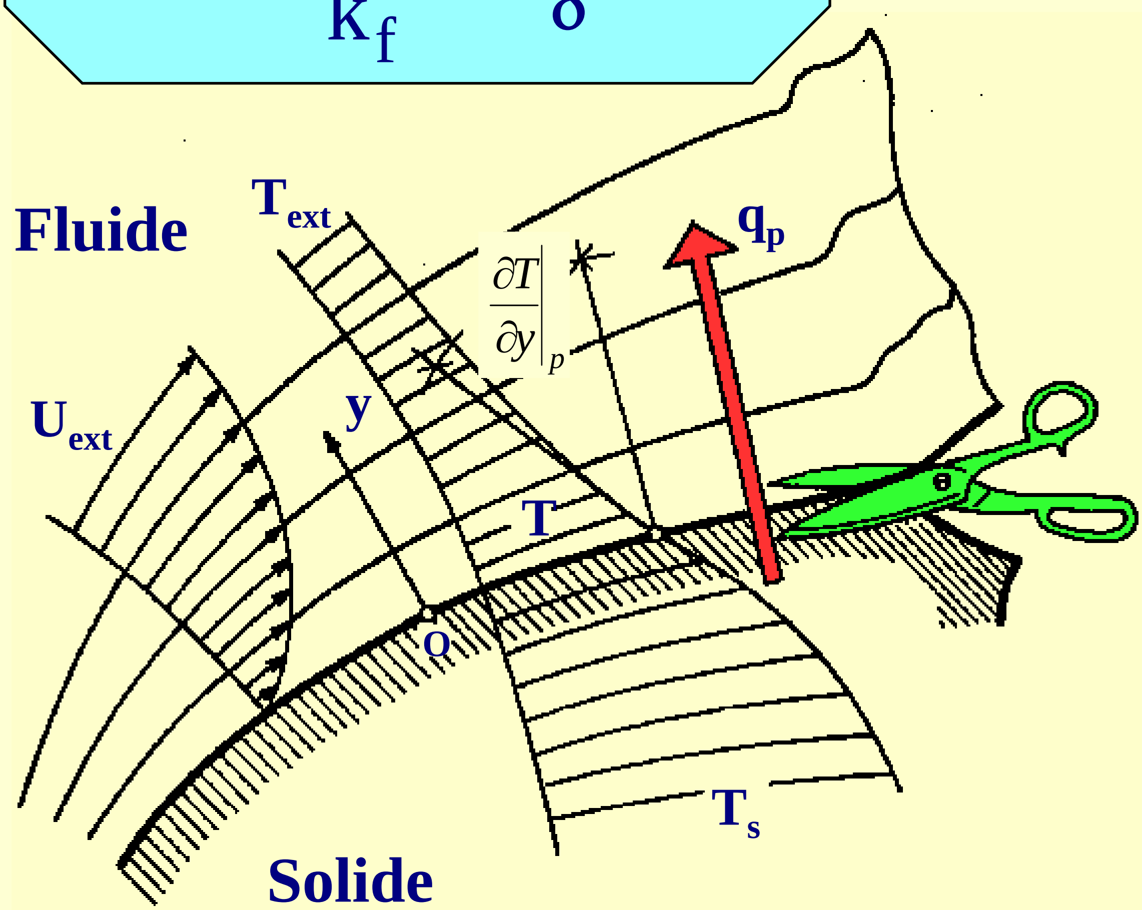
- CONVECTION
  - **CON**DUCTION $\quad k_f$
  - ADVECTION $\quad \delta'(U)$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

Distinction entre Nu et Bi

$$Nu = \frac{hL_f}{k_f} = \frac{L_f}{\delta'}$$

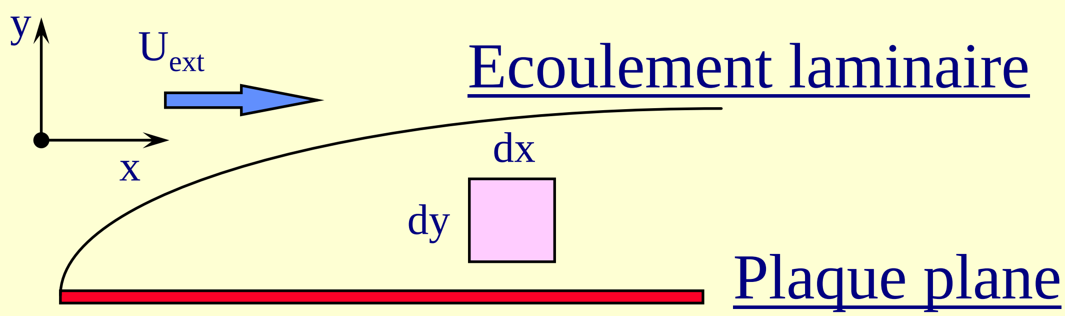


$$Bi = \frac{hL_s}{k_s} = \frac{\mathcal{R}_{cond}}{\mathcal{R}_{conv}}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Equation de l'Énergie (1)



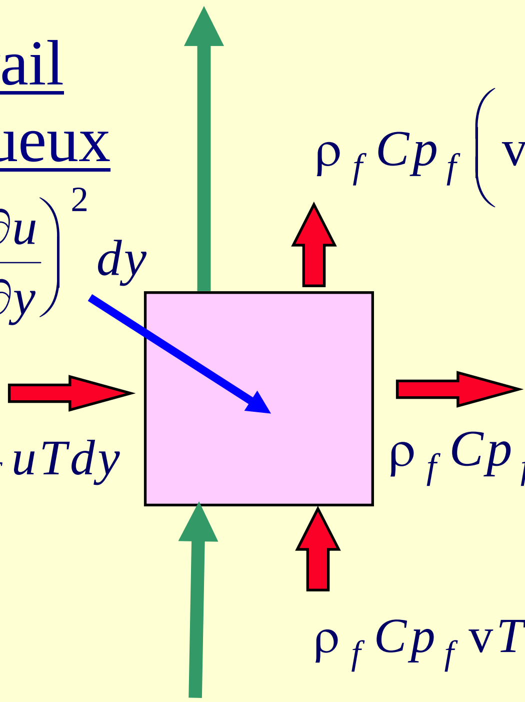
$$-k_f\,dx\left[\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy\right]$$

Travail visqueux

$$\rho_f Cp_f\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\left(T+\frac{\partial T}{\partial y}dy\right)dx$$

$$\mu\,dx\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

Advection



$$\rho_f Cp_f\,uT\,dy$$

$$\rho_f Cp_f\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right)dy$$

$$\rho_f Cp_f\,vT\,dx$$

$$-k_f\,dx\frac{\partial T}{\partial y}$$

Conduction

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Equation de l'Énergie (2)

- Régime laminaire
  - Conduction axiale négligeable

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{\rho_f C_{p\,f}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

  - Forme normée: $\delta \approx \delta_{th}$

$$\Theta=\frac{T-T_p}{T_{ext}-T_p}$$

$$\left[\tilde{u}\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}}+\tilde{\mathrm{v}}\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}}\right]\left\{\frac{\delta}{L}\right\}^2=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)^2$$

☞ Nombre de Peclet $\quad \mathbf{Pe}=\frac{U_{ext}L}{\alpha}=\mathbf{Re}\cdot\mathbf{Pr}$

☞ Nombre de Prandtl $\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu C_p}{k}=\frac{\nu}{\alpha}$

☞ Nombre de Brinkman $\quad \mathbf{Br}=\frac{\mu U_{ext}^2}{k_f\left|T_{ext}-T_p\right|}$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Équation de l'Énergie (3)

❖ Équation de la couche limite laminaire

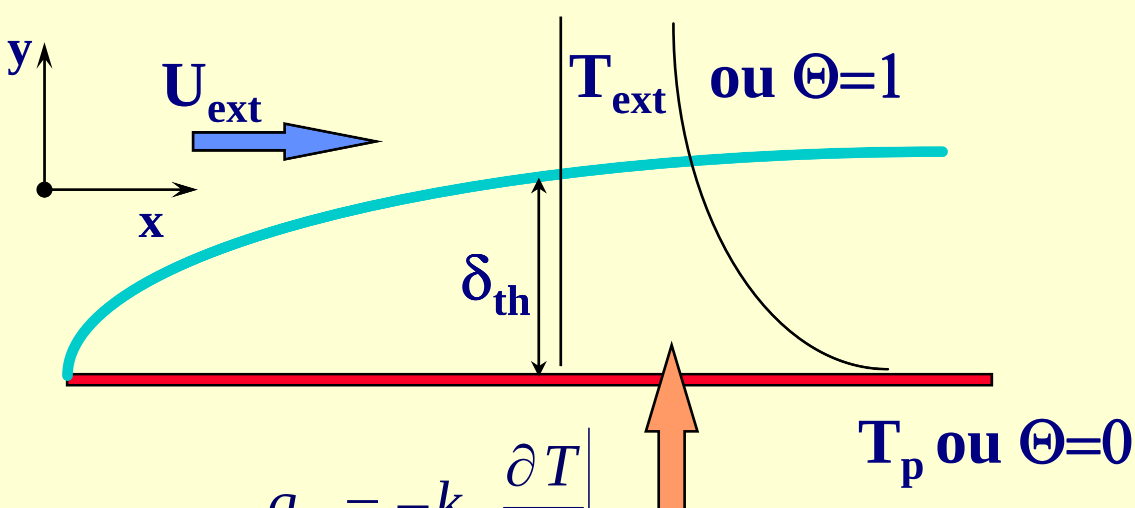
- Dissipation visqueuse négligeable

$$\mathrm{u}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Forme normée

$$\left[\tilde{u}\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\mathbf{v}}\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}}\right]\left\{\frac{\delta}{L}\right\}^2 = \frac{1}{\mathbf{Pe}}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{y}^2}$$

☞ Conditions aux limites



$$q_p = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Corrélation de transfert de chaleur

Gaz et liquides sur plaque plane

- Forme locale en régime laminaire

$$\mathbf{Nu}_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0{,}332\,\mathbf{Pr}^{1/3}\sqrt{\mathbf{Re}_x}$$

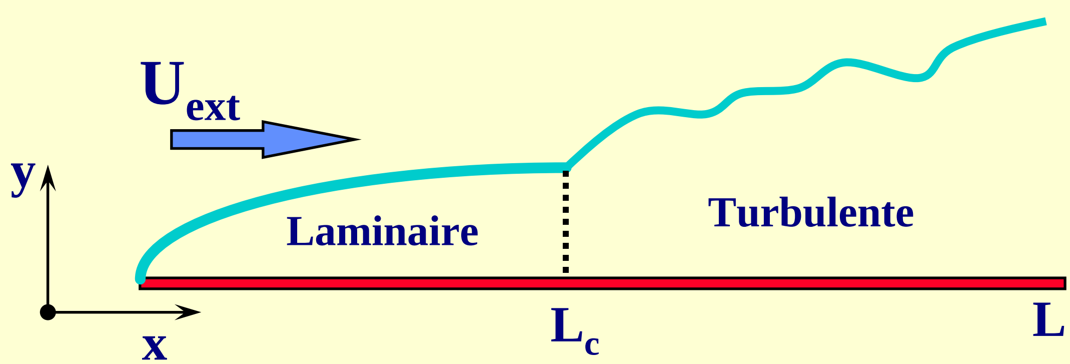
- Forme locale en régime turbulent: $\mathbf{Re_c \approx 3.10^5}$

$$\mathbf{Nu}_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0{,}029\,\mathbf{Pr}^{0{,}43}\mathbf{Re}_x^{0{,}8}$$

- Coefficient moyen

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\left(\int_0^{L_c} h_{\ell am}\,dx + \int_{L_c}^{L} h_{tur}\,dx\right)$$

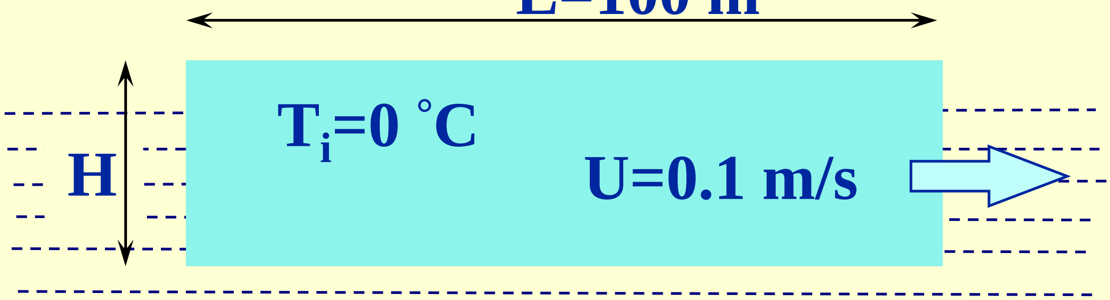
$$\boxed{\overline{\mathbf{Nu}} = 0{,}664\,Pr^{\frac{1}{3}}\,Re_c^{0{,}5} \;+\; 0{,}036\,Pr^{0{,}43}\left(Re_L^{0{,}8} - Re_c^{0{,}8}\right)}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Fonte des icebergs (1)



T_e= 10 °C

- Nombre de Reynolds: ν_e=1,5 10^{-6} m^2/s

$$Re = \frac{UL}{\nu_e} \approx 6,7 \text{x} 10^6$$

- Nombre de Nusselt moyen: Re_c= 3 10^5 , Pr_e=11

$$\overline{Nu}_L = 0,036 \, Pr_e^{0,43} \left(Re^{\frac{4}{5}} - Re_c^{\frac{4}{5}} \right) \approx 26625$$

- Densité de flux de chaleur reçue:

k_e=0,57 W/m.K

$$q_s = \frac{\overline{Nu}_L k_e}{L} \left(T_e - T_i \right) \approx 1518 \quad {}^{W}\!/\!_{m^2}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Fonte des icebergs (2)

- Taux de Fonte

$$\mathcal{L}_{s\ell}\frac{dm}{dt} = -q_s \cdot L \cdot \ell \;\Rightarrow\; \mathcal{L}_{s\ell}\rho_e\frac{dH}{dt} = -q_s$$

- $\mathcal{L}_{s\ell}$ = 333 kJ/kg et ρ_e=1000 kg/m^3

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{q_s}{\mathcal{L}_{s\ell}\rho_e} \approx -4{,}6\mu m$$

- Épaisseur perdue sur un jour

$$\Delta H = \left[\frac{dH}{dt}\right]\Delta t \approx 0{,}4 \text{ m}$$

- Qu'adviendrait-il si

U=10 m/s et H_o =15m ?

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Analogie avec le frottement

Plaque plane

❖ Frottement : couche limite laminaire

$$C_f(x) = \frac{C^{te}}{\sqrt{Re_x}}$$

❖ Nombre de Stanton

$$St_x = \frac{h_x}{\rho_f \, Cp_f \, U_{ext}} = \frac{convection}{\Delta\left(enthalpie\right)}$$

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x . Pr} = \frac{0{,}332 \, Pr^{-2/3}}{\sqrt{Re_x}}$$

❖ Analogie de Colburn

$$St_x \, Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

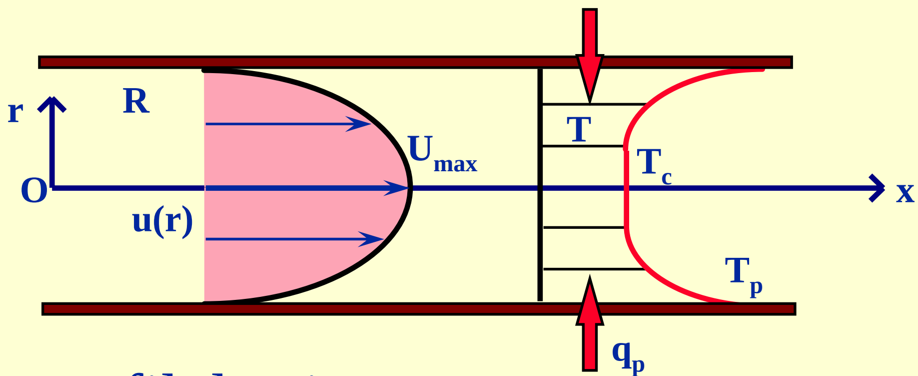
☞ Valable aussi en turbulent

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Écoulements Internes

❖ Écoulement de Poiseuille (1)



- Profil de vitesse

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

- Équation de l'énergie

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = u(r)C_o$$

- Cas: q_p= constant et T développé

$$T(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = C_o$$

- Conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{q_p}{k_f}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Ecoulements Internes

- Écoulement de Poiseuille (2)
  - Profil de T

$$T - T_c = \frac{T^*}{4}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \qquad T^* = \frac{C_o U_{max} R^2}{\alpha}$$

  - T_p de paroi et <T> moyenne

$$T_p = T_c + \frac{3}{16} T^*$$

$$< T > = \frac{1}{\pi R^2 < u >} \int_0^R (uT)\, 2\pi r dr == T_o + \frac{7}{97} T^*$$

  - Coefficient convectif

$$h = \frac{k_f \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_p}{T_p - < T >} = \frac{48}{11} \cdot \frac{k_f}{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Nu_D} = 4{,}36$$

  - Paroi à T_p = constant $\Rightarrow$ $\mathbf{Nu_D} = 3{,}66$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

❖ Écoulement de Poiseuille (3)

☞ Nombre de Stanton $St = \dfrac{Nu}{Re.Pr} = \dfrac{C^{te}}{Re.Pr}$

☞ Frottement $C_f = \dfrac{16}{Re}$

◆ Analogie

$$\boxed{\frac{St.Pr}{C_f} = C^{te}}$$

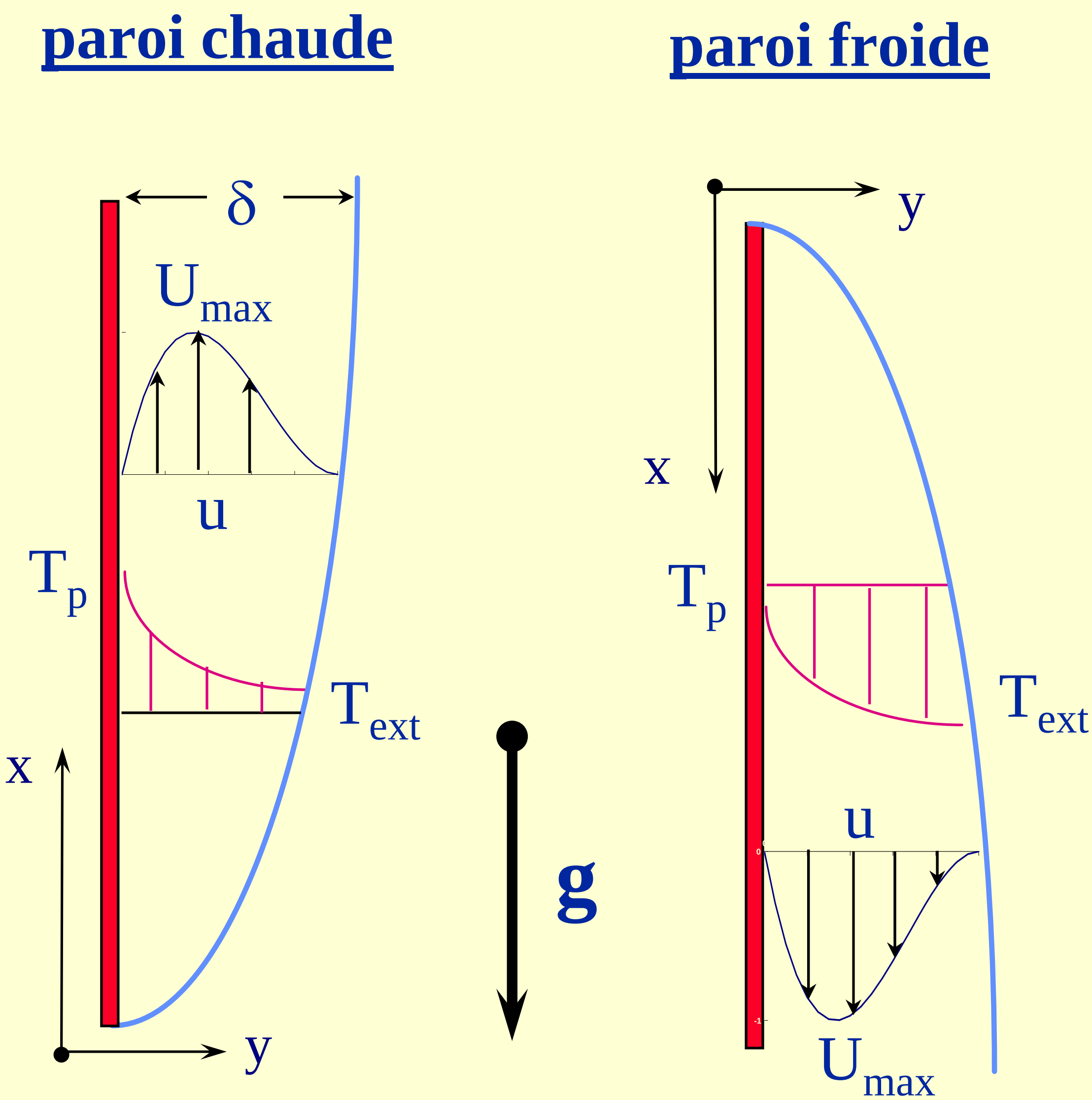
❖ Écoulement turbulent en conduite: Re>2300

☞ Régime hydrauliquement lisse

$$\mathbf{Nu} = \frac{hD}{k_f} = 0{,}023\,\mathbf{Pr}^{0{,}4}\,\mathbf{Re}^{0{,}8}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE



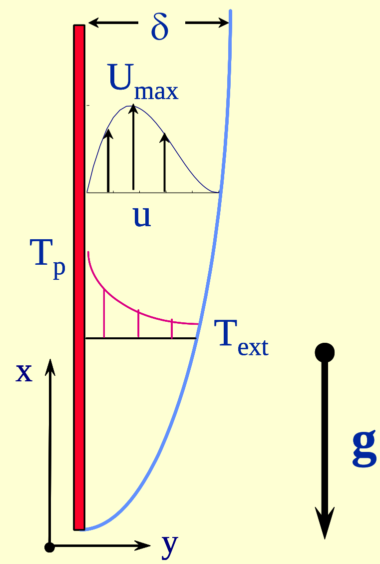
❖ Dilatabilité du Fluide

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial T} = -\beta \rho_f < 0$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

- Plaque verticale
  - Couche limite laminaire (1)
    - ☞ Équations de base



Masse

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}=0$$

Mouvement - Ox

$$\rho_f\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\rho_f\, g$$

Énergie

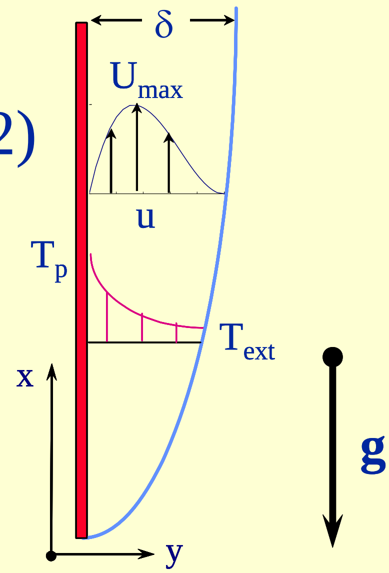
$$\rho_f C_{pf}\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

❖ Plaque verticale

◆ Couche limite laminaire (2)



A $y = \delta$; $u \rightarrow 0$ et $\rho_f \rightarrow \rho_{ext}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{ext}\, g$$

Soit

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_f\, g = \left(\rho_{ext} - \rho_f\right) g$$

☞ Coefficient d'expansion thermique

$$\rho_{ext} - \rho_f = -\beta \rho_f \left(T_{ext} - T_f\right)$$

☞ Terme moteur **Force d'Archimède**

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_f\, g = -\beta \rho_f\, g \left(T_{ext} - T\right)}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION MIXTE

- Plaque verticale
  - Couche limite laminaire (3)
    - ☞ Équations adimensionnelles

Masse

$$\frac{U_o}{L}\left[\frac{\partial\,\tilde{u}}{\partial\,\tilde{x}}\right]+\frac{V_{ref}}{\delta}\left[\frac{\partial\,\tilde{v}}{\partial\,\tilde{y}}\right]=0$$

Mouvement - Ox

$$\left[\tilde{u}\,\frac{\partial\,\tilde{u}}{\partial\,\tilde{x}}\right]+\left[\tilde{v}\,\frac{\partial\,\tilde{u}}{\partial\,\tilde{y}}\right]=\frac{(L/\delta)^2}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\,\tilde{y}^2}\right]+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\Theta$$

Énergie

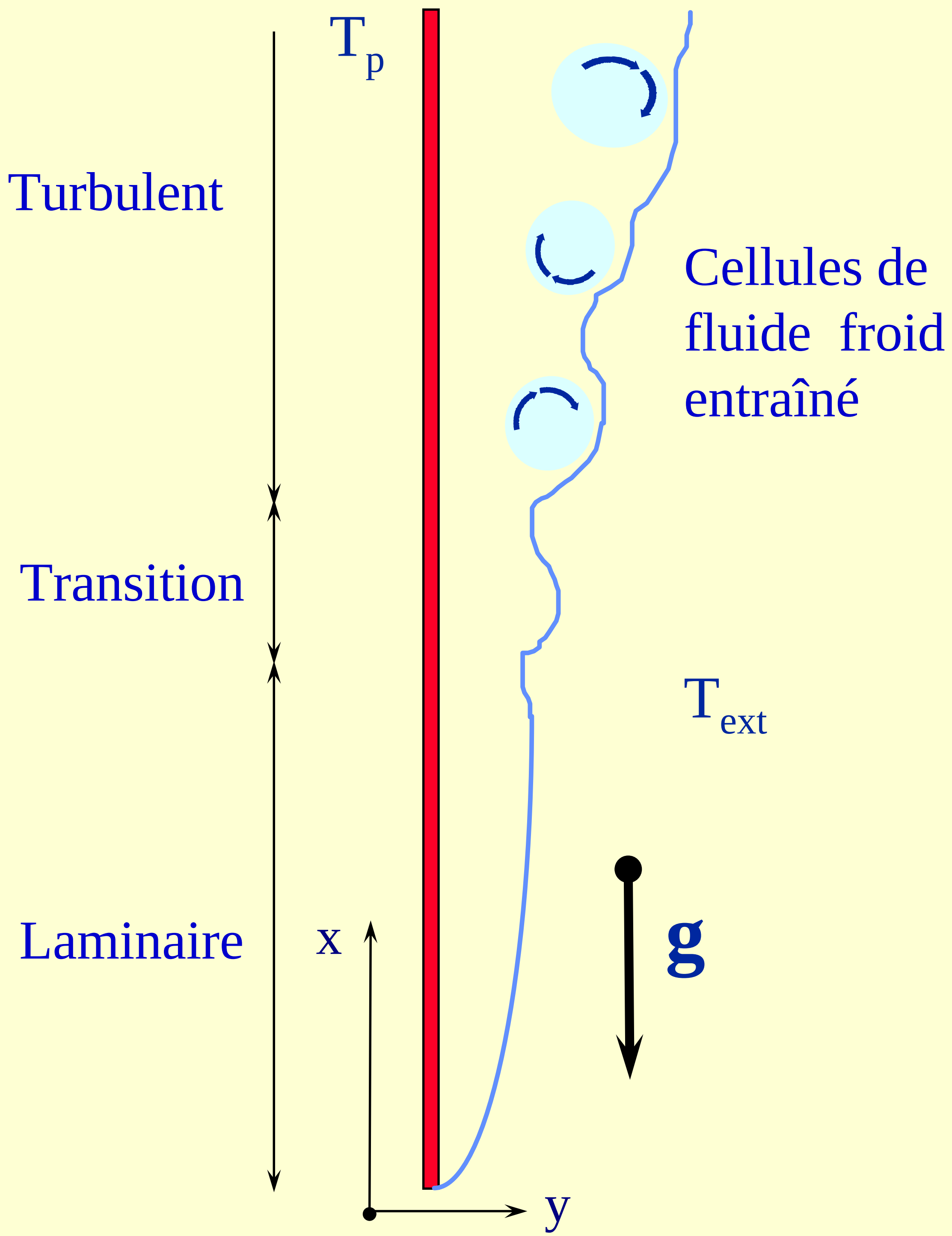
$$\left[\tilde{u}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\tilde{x}}\right]+\left[\tilde{v}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\tilde{y}}\right]=\frac{(L/\delta)^2}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial^2\Theta}{\partial\,\tilde{y}^2}\right]$$

- ☞ Nombre de Grashof

$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta\left(T_p-T_{ext}\right)L^3}{\nu^2}=\frac{\text{Flottaison}}{\text{Viscosité}}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale isotherme (1)

❖ Nombre de Rayleigh

$$\mathrm{Ra}_{\mathrm{L}} = \mathrm{Gr}_{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{Pr} = \frac{\beta g \left(T_p - T_{ext}\right) L^3}{\nu \alpha}$$

❖ Corrélation Expérimentale

$$\overline{\mathrm{Nu}_L} = C \cdot \mathrm{Ra}_L^n$$

Régime	**Ra**	*C*	*n*
Laminaire	10^4 - 10^9.Pr	0,59	1/4
Turbulent	10^9.Pr - 10^{13}	0,10	1/3

<u>Turbulent</u>

$$h = \frac{\overline{\mathrm{Nu}_L} \cdot k_f}{L} \propto \frac{\mathrm{Ra}_L^{\frac{1}{3}}}{L} \propto \left(T_p - T_{ext}\right)^{\frac{1}{3}}$$

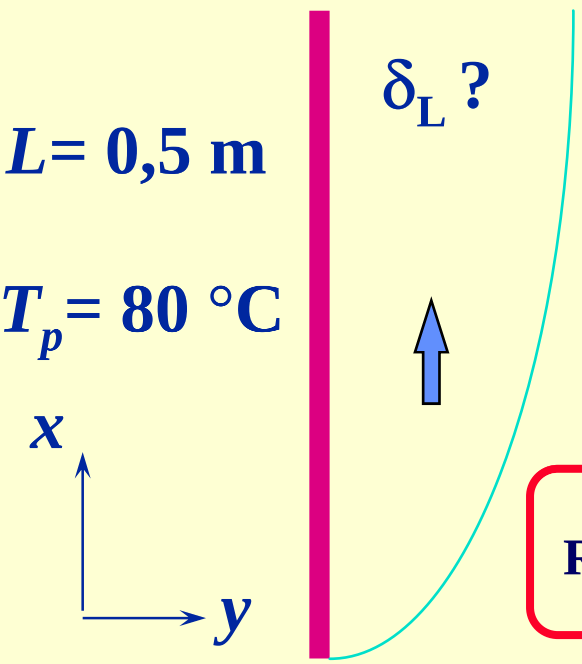
TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque Plane Verticale Isotherme (2)

***L* = 0,5 m**

T_p = 80 °C



T_{ext} = 20 °C

$$\boxed{\mathbf{Ra_L} = \frac{\beta g \left(T_p - T_{ext}\right) L^3}{\nu \alpha}}$$

- Température moyenne: $T_f = 273 + 0{,}5(T_p + T_{ext})$
- Propriétés thermophysiques du film

Propriétés	*Valeur*	*Unités*
$\beta = 1/T_f$	0,0031	K^{-1}
ν_f	18,3 10^{-6}	m^2/s
k_f	0,028	W/m.K
Pr	0,7	-

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque Plane Verticale Isotherme (3)

❖ Nombre de Rayleigh

$$Ra_L = \frac{g\beta\left(T_p - T_{ext}\right)L^3}{\nu\alpha} = 4{,}8\mathrm{x}10^8 < 10^9$$

☞ Régime Laminaire

❖ Nombre de Nusselt

$$\overline{\mathrm{Nu}_L} = 0{,}59 * Ra_L^{0{,}25} \approx 87$$

❖ Coefficient de Transfert de Chaleur

$$h_L = \frac{\overline{Nu_L} \cdot k_f}{L} \approx 4{,}9 \ \ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}} \qquad = \frac{k_f}{\delta_L / 2}$$

❖ Épaisseur de Couche Limite

$$\delta_L = \frac{2k_f}{h_L} = \frac{2L}{\overline{\overline{Nu_L}}} \approx 0{,}012 \ \ \mathrm{m}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale à flux constant (1)

❖ Nombre de Rayleigh

$$\mathrm{Ra}_\mathrm{L} = \frac{\beta g}{\nu\alpha} \cdot \frac{q_p L^4}{k_f}$$

❖ Corrélation Expérimentale

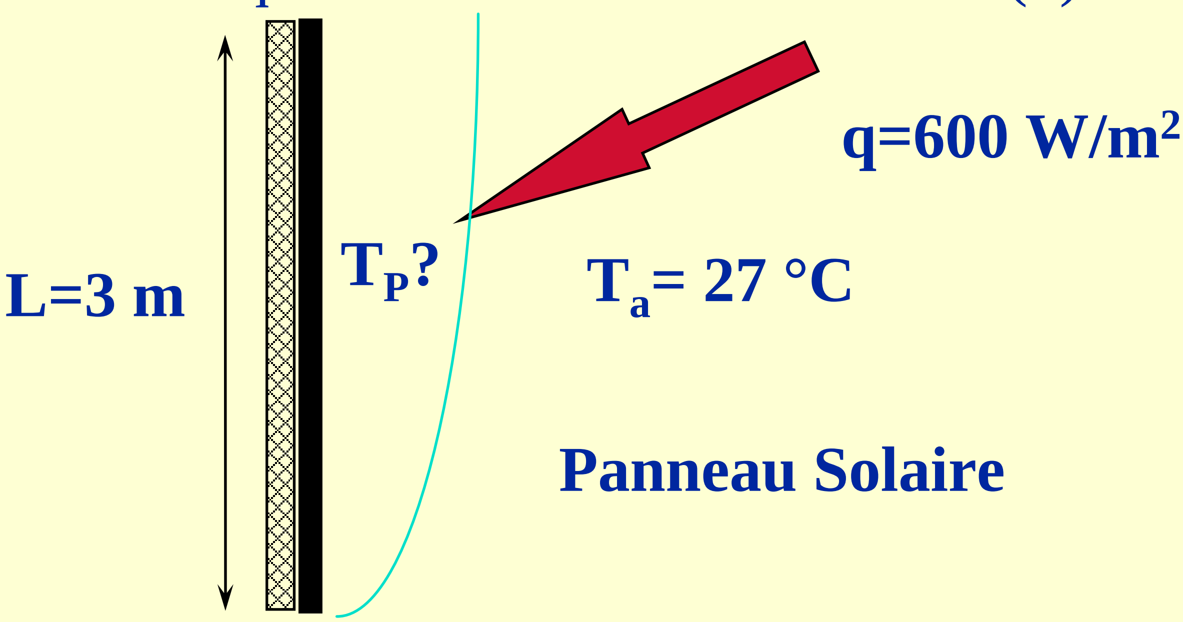
$$\overline{\mathrm{N}u_L} = C \cdot \mathrm{Ra}_\mathrm{L}^\mathrm{n}$$

Régime	**Ra**	*C*	*n*
Laminaire	10^5 - 10^{11}	0,75	0,20
Turbulent	2 x10^{13} - 10^{16}	0,645	0,22

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale à flux constant (2)



***h* inconnu ⇒ Procédure itérative**

❖ **Itération 1**: se donner $h^{(1)} = 6$ W/m².K

- $T_p^{(1)} = q/h^{(1)} + T_a = 127$ °C ➔ $T_f^{(1)} = 77$ °C
- $Ra_L^{(1)} = 7{,}3\ 10^{13}$ ➔ $Nu_L^{(1)} = 0{,}645 Ra^{0{,}22} = 724$

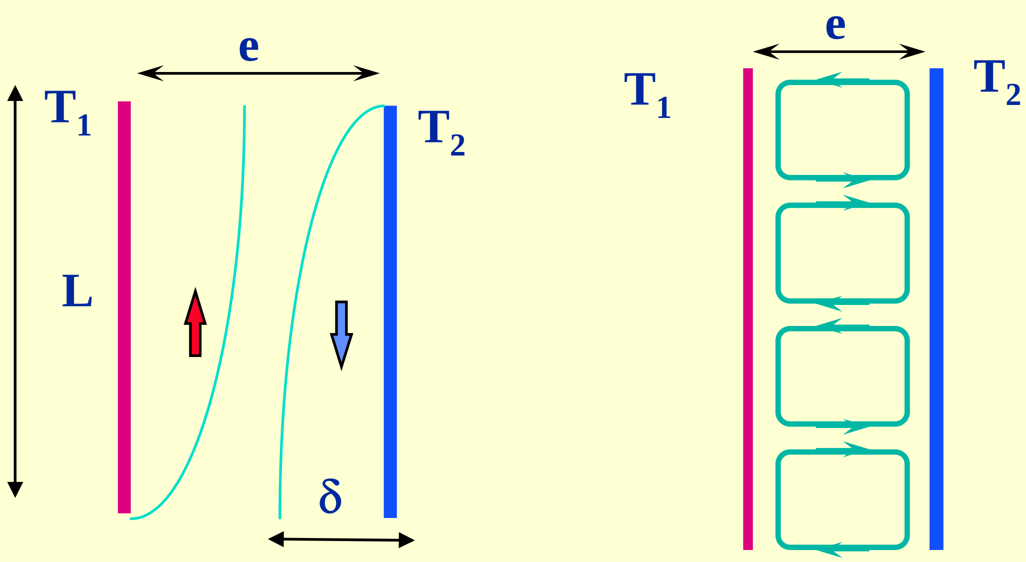
❖ **Itération 2**: $h^{(2)} = 7{,}24$ W/m².K

- $T_p^{(2)} = 110$ °C et $T_f^{(2)} = 68{,}4$ °C
- *etc* ....

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Lame verticale en espace confiné



$e > \delta$ — **Effet de *Ra* et *L/e***

$e < \delta$ — **Effet de *Ra***

❖ **Nombre de Rayleigh critique**

$$Ra_e^* = 2000$$

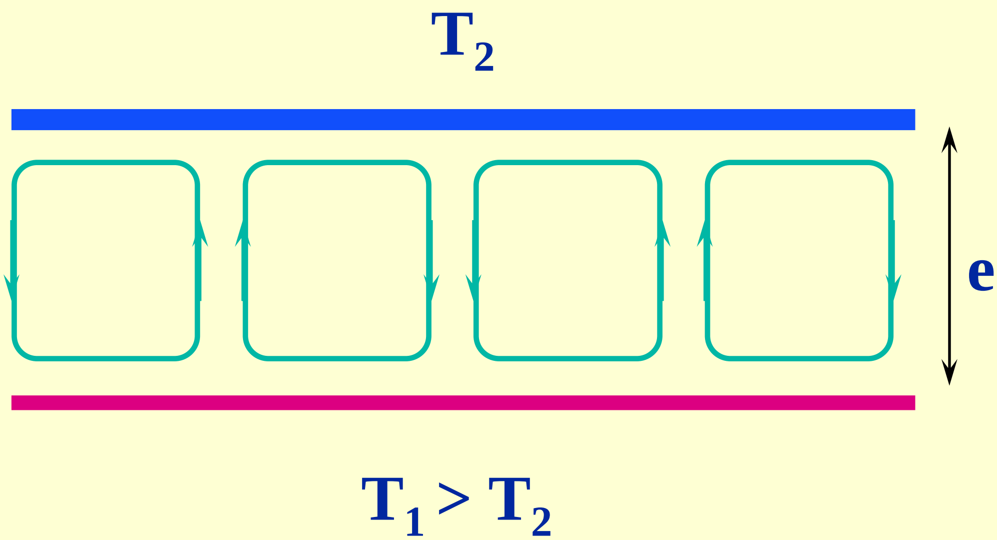
❖ **Conductibilité effective**

$$Nu_e = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n \cdot \left[\frac{L}{e}\right]^{-m}$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Lame horizontale en espace confiné



❖ **Nombre de Rayleigh critique**

$$Ra_e^* = 1700$$

❖ **Conductibilité effective**

$$Nu_e = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n$$

TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

Synthèse

$$q_p = h \cdot \left(T_p - T_f\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Nu} = \frac{h \cdot L_f}{k_f}$$

- Convection Forcée $\mathbf{Re} = \dfrac{U \cdot L_f}{\nu}$

☞ **Écoulements externes** $\mathbf{Nu} = A \cdot \mathbf{Pr}^n \mathbf{Re}^m$

☞ **Écoulements internes**

✓ Laminaire $\mathbf{Nu} = \mathbf{C}^{\mathbf{te}}$

✓ Turbulent $\mathbf{Nu} = A \cdot \mathbf{Pr}^n \mathbf{Re}^m$

- Convection Naturelle $\mathbf{Ra} = \dfrac{\beta g \Delta T L_f^3}{\nu\alpha}$

☞ **Écoulements externes** $\mathbf{Nu} = C \cdot \mathbf{Ra}^n$

☞ **Écoulements internes** $> \mathbf{Ra}^*$

$$\mathbf{Nu} = C \cdot \mathbf{Ra}_e^n \cdot \left[\frac{L}{e}\right]^{-m}$$

TRANSPORT D''ENERGIE

CONVECTION MIXTE

- Écoulement
  - Forcé $\mathbf{U_o}$ et Libre: $\mathbf{\Delta T}$
  - Critères

☞ Convection forcée

$$\frac{Gr}{Re^2} << 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Re, Pr)$$

☞ Convection mixte

$$\frac{Gr}{Re^2} \cong 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Re, Gr, Pr)$$

☞ Convection naturelle

$$\frac{Gr}{Re^2} >> 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Gr, Pr)$$