

TRANSPORT D'ENERGIE

❖ Transfert de Chaleur

- ◆ Modes d'échange énergétique
- ◆ Sciences pures
- ◆ Applications technologiques

❖ Quantités Fondamentales

- ◆ Chaleur [J] ou [W]
- ◆ Différence de température [$^{\circ}C$], [K]

❖ Thermodynamique

- ◆ Chaleur & Travail: 1^{er} Principe
- ◆ $\Delta T \Rightarrow$ Flot d'énergie: 2^{em} Principe



TRANSPORT D'ENERGIE

❖ Conduction

- ◆ Interactions particulières
- ◆ Conductibilité ou conductivité k

❖ Convection

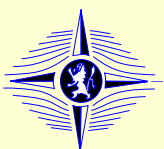
- ◆ Fluide en mouvement
- ◆ Présence d'une paroi à $T \neq T_f$
- ◆ Coefficient de transfert h

❖ Rayonnement thermique

- ◆ Ondes électromagnétiques
- ◆ Emission / Absorption

☞ En pratique

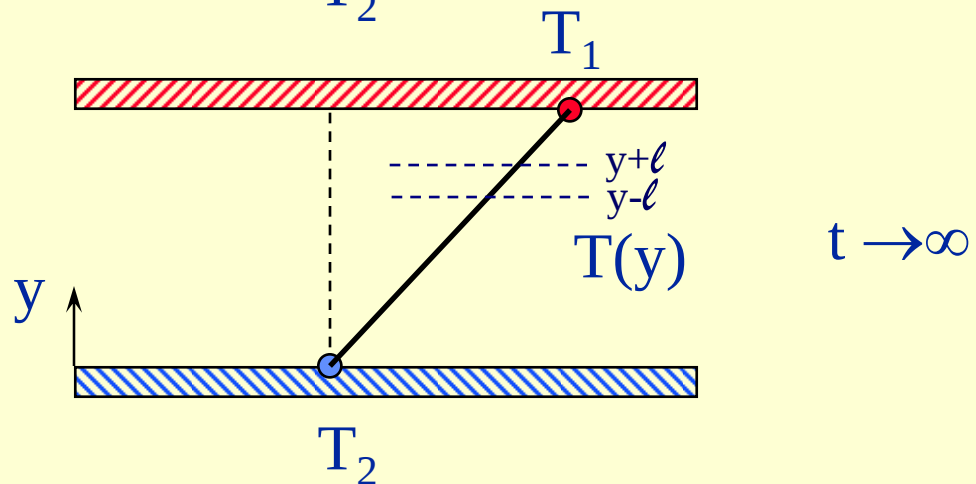
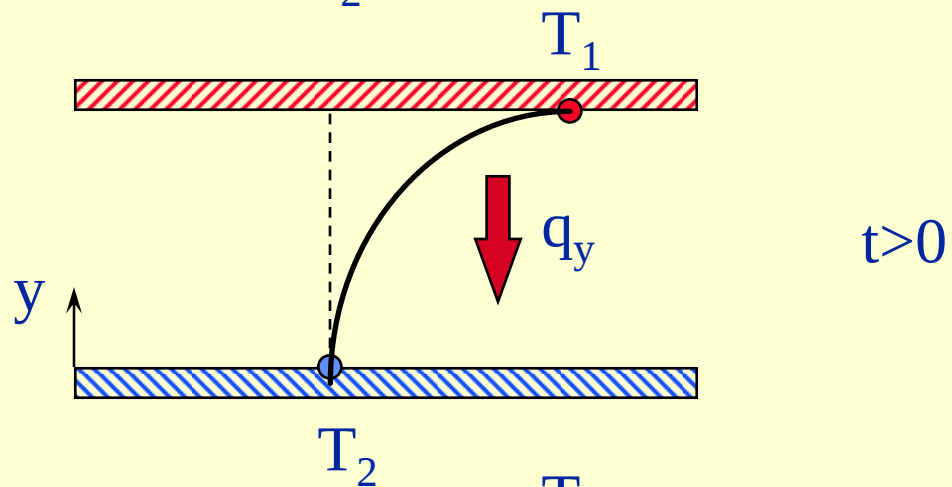
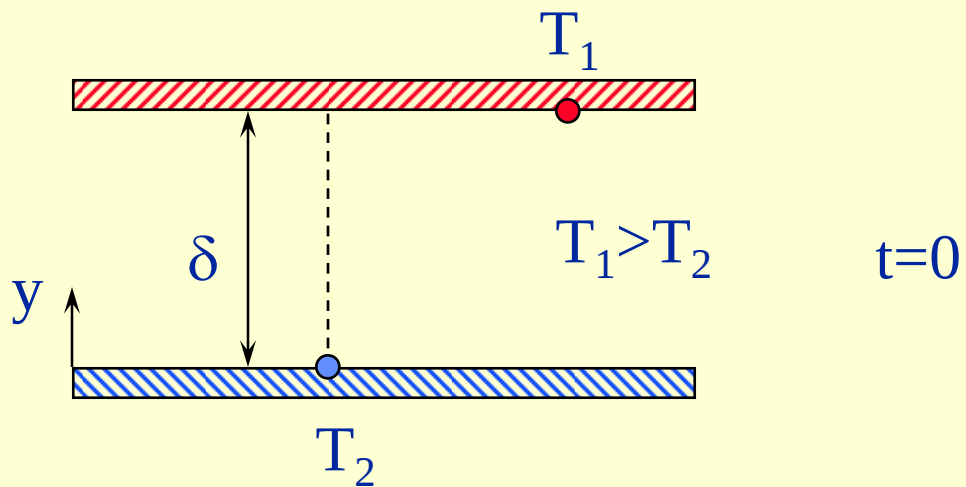
Combinaison des trois modes



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Nappe gazeuse immobile



TRANSPORT D'ENERGIE CONDUCTION

- ❖ Agitation des molécules

$$\frac{1}{2}m\tilde{v}^2 = \frac{3}{2}\kappa_b T$$

- ❖ Δ Énergie cinétique $\equiv$ Chaleur

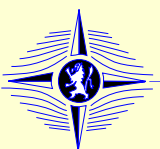
$$\frac{1}{2}\dot{n}m[\tilde{v}_{y-\ell}^2 - \tilde{v}_{y+\ell}^2] = q_y$$

$$q_y = \frac{3}{2}\kappa_b\dot{n}[T_{y-\ell} - T_{y+\ell}]$$

$$q_y = -[3\dot{n}\kappa_b\ell] \cdot \frac{dT}{dy}$$

- ❖ Loi de Fourier

$$q_y = -k \cdot \frac{dT}{dy}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Loi de Fourier vectorielle

$$\vec{q} = -k \cdot \nabla T$$

❖ Densité de flux de chaleur

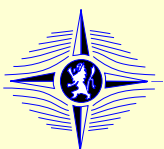
$$\vec{q} \equiv \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

❖ Conductibilité thermique

$$k \equiv \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

☞ $k = k(\text{matériau})$

☞ $k = k(T)$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Conductibilité des gaz $k \propto \sqrt{T}$

Gaz à 20°C	Helium	Air	Fréon 12
k [W/m.K]	0,17	0,026	0,007

❖ Conductibilité des liquides

Liquide	Sodium	Eau	huile
k [W/m.K]	80	0,6	0,14

❖ Conductibilité des solides

Solide	Cuivre	Pierre	Bois
k [W/m.K]	390	3	0,15

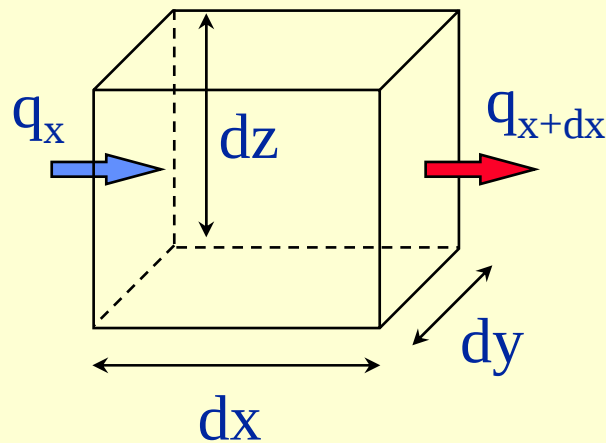


TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Equation générale de la chaleur

Taux de variation de l'énergie interne	+	Chaleur sortante - entrante	=	Source et Puits
---	----------	--	----------	--------------------------------



👉 Variation de l'énergie interne

$$(\rho \cdot dx dy dz) C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Chaleur spécifique $C \equiv [J / kg.K]$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

👉 Bilan calorifique spatial

♦ Direction Ox

$$\left[\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) - q_x \right] \cdot dydz = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dydz$$

♦ Direction Oy et Oz

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} dy \cdot dxdz \quad \text{et} \quad \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \cdot dxdy$$

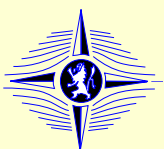
👉 Bilan thermique total

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] = \dot{Q}_v$$

Source ou puits $\dot{Q}_v \equiv [W / m^3]$

♦ Forme générale

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = \dot{Q}_v$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Equation thermique ou de la chaleur

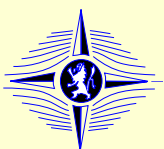
👉 Introduction de la loi de Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + \frac{\dot{Q}_v}{\rho C}$$

👉 Diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \equiv \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

<i>Matériau</i>	α [mm ² /s]
Métaux solides	4 - 200
Métaux liquides	5 - 60
Solides non-mét.	0,1 - 2
Eau	0,14
Air	20



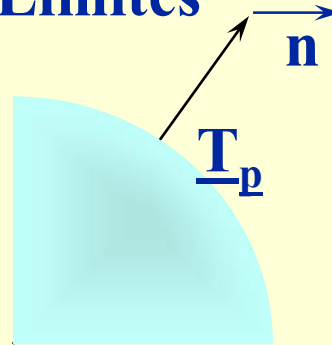
TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

Conditions aux Limites

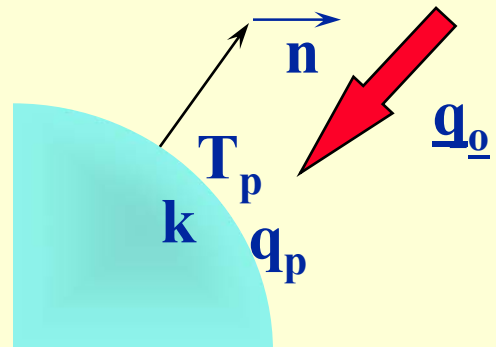
❖ Dirichlet

$$T_p = T_o(\vec{s}_p, t)$$



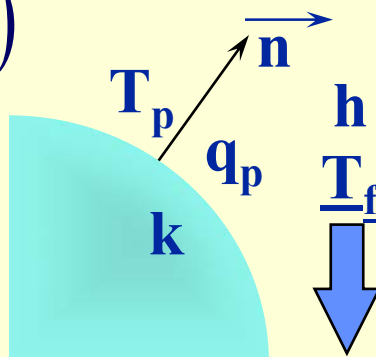
❖ Neuman

$$q_p = -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = q_o(\vec{s}_p, t)$$



❖ Mixte

$$q_p = -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = h (T_p - T_f)$$



◆ Coefficient Convectif
 $h = [\text{W/m}^2.\text{K}]$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

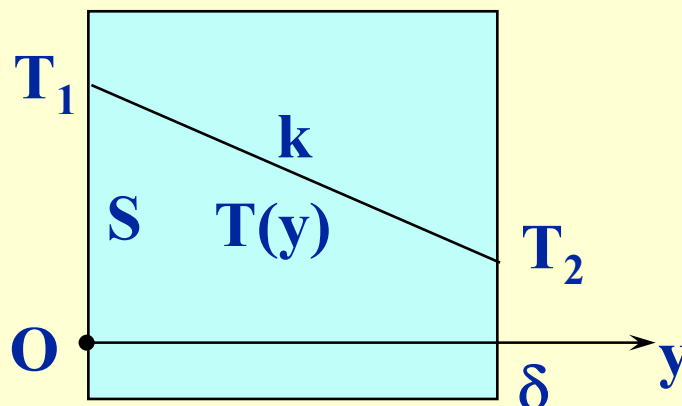
❖ Conduction morte stationnaire

☞ Mur plan

$$\frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -k \frac{dT}{dy} = C^{te}$$

☞ Profil de T linéaire si $k = \text{constante}$

$$q_y = k \frac{T_1 - T_2}{\delta}$$



$$\dot{Q} = qS \quad \Rightarrow \quad \text{circuit électrique équivalent}$$

$$\mathfrak{R}_{th} = \frac{\delta}{kS} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}}$$

Résistance thermique

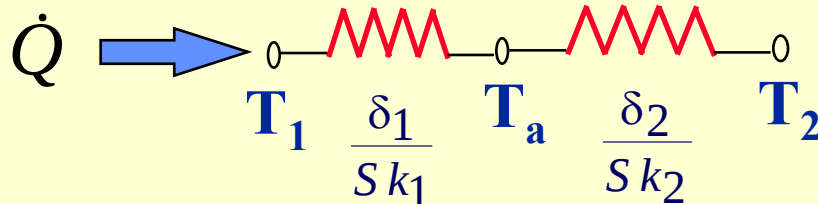
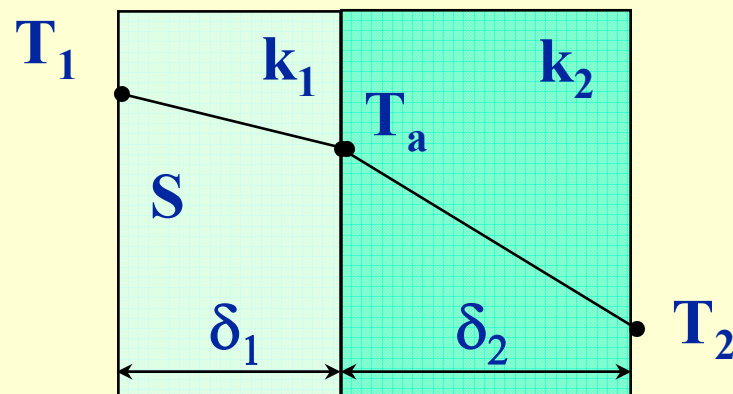


TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Mur plan composite

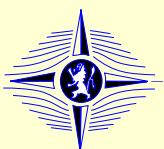
👉 Résistances en série



$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_a}{\mathcal{R}_{th,1}} = \frac{T_a - T_2}{\mathcal{R}_{th,2}}$$

👉 Formulation générale

$$\mathcal{R}_{th,tot} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} = \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{th,i} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{S k_i}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Isolation d'une habitation

☞ $\delta_{isol} = ?$

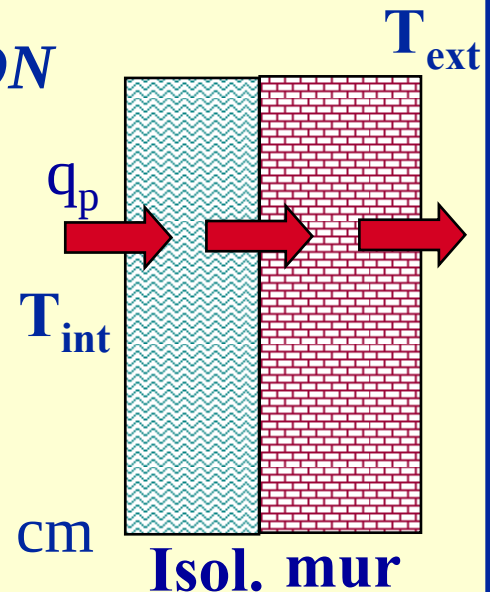
☞ Données

➤ $T_{int} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = 0^\circ\text{C}$

➤ $k_{mur} = 1 \text{ W/m.K}$, $\delta_{mur} = 15 \text{ cm}$

➤ $k_{isol} = 0,05 \text{ W/m.K}$

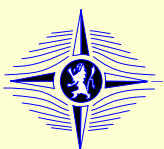
➤ $q_p \leq 30 \text{ W/m}^2$



$$S \cdot \mathcal{R}_{th,tot} = \frac{\delta_{isol}}{k_{isol}} + \frac{\delta_{mur}}{k_{mur}} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{q_p}$$

$$\delta_{isol} = k_{isol} \left(\frac{T_{int} - T_{ext}}{q_p} - \frac{\delta_{mur}}{k_{mur}} \right)$$

$$\delta_{isol} = 0,05 \left(\frac{20 - 0}{27} - \frac{0,15}{1} \right) \approx 0,03 \text{ m}$$

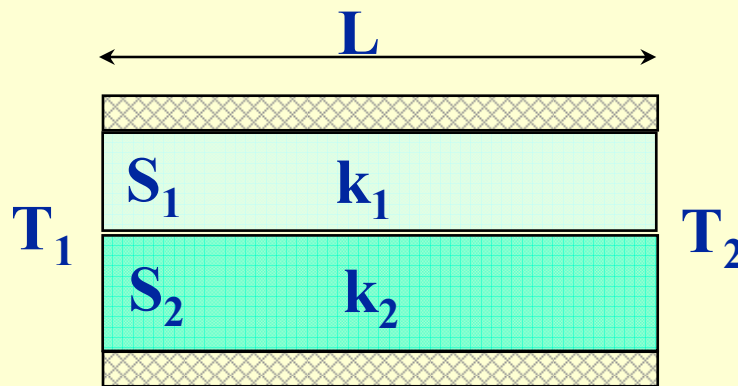


TRANSPORT D'ENERGIE

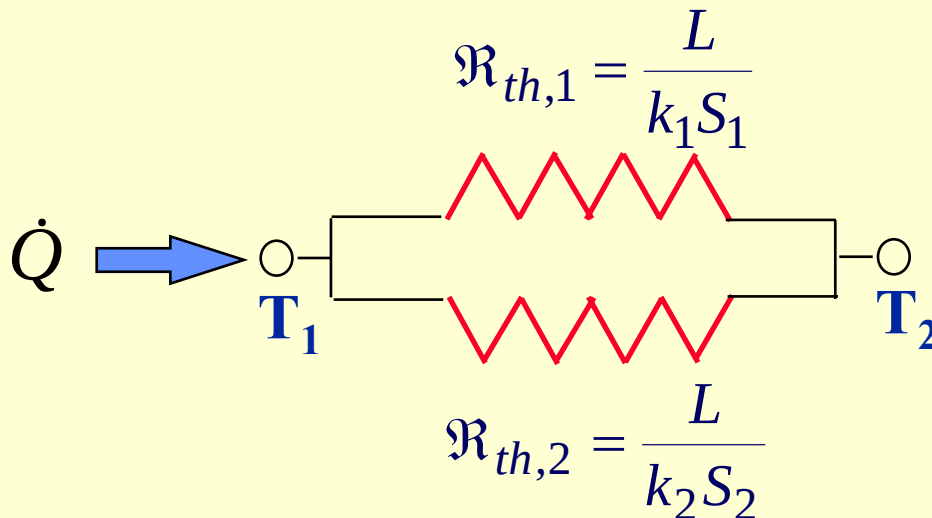
CONDUCTION

❖ Mur plan composite

👉 Résistances en parallèle

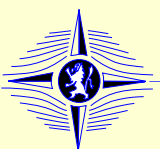


isolation



👉 Formulation générale

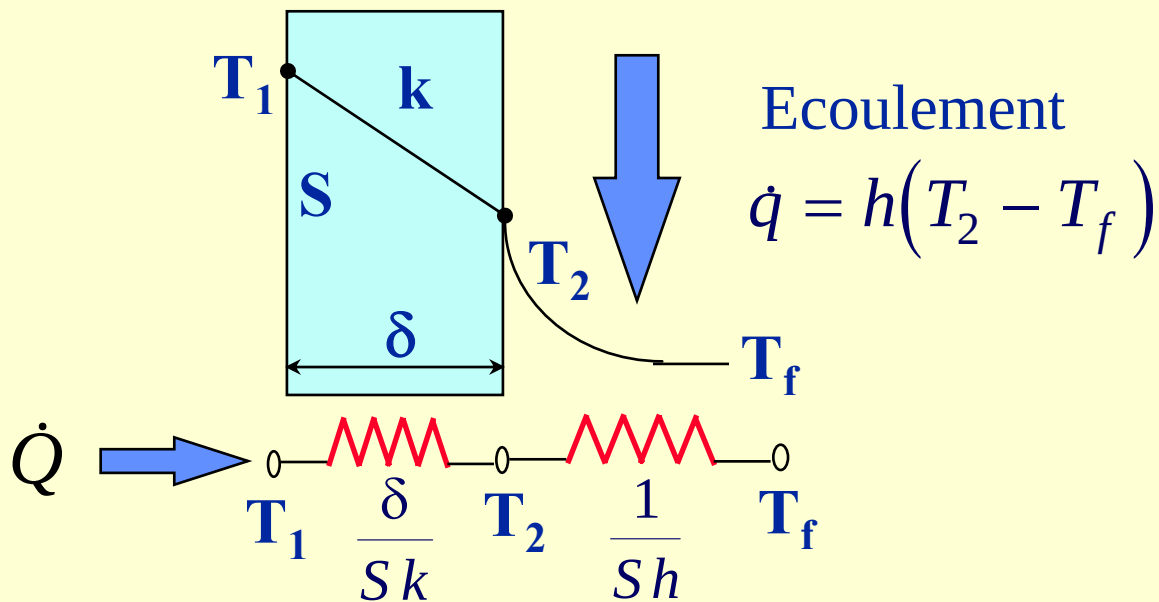
$$\frac{\dot{Q}}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\mathcal{R}_{th,tot}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mathcal{R}_{th,i}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Mur plan & Convection



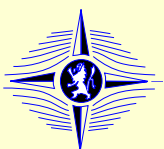
👉 Bilan $\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\delta / S k} = \frac{T_2 - T_f}{1 / S h}$

◆ Résistance globale entre T_1 et T_f

$$\mathcal{R}_{th,tot} = \mathcal{R}_{th}^{cd} + \mathcal{R}_{th}^{cv}$$

◆ Coefficient d'échange global

$$\frac{1}{h_{tot}} = S \mathcal{R}_{th,tot} = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h}$$

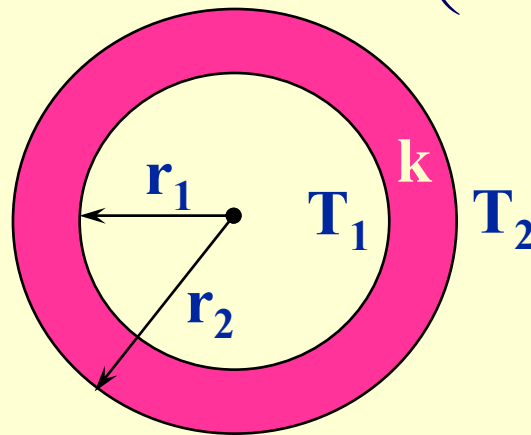


TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Cylindre tubulaire

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi r \left(-k \frac{dT}{dr} \right) = C^{te}$$



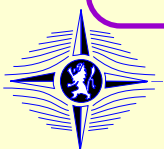
$$\dot{Q} = 2\pi r L q_r \Rightarrow \begin{array}{c} T_1 \text{---} \text{---} T_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \ln(r_2 / r_1) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ 2\pi L k \end{array}$$

◆ Profil de température

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

◆ Densité de flux de chaleur

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} = -\frac{k}{r} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION

❖ Tube de Chaudière

👉 q_{ext} pour ébullition ?

👉 Données

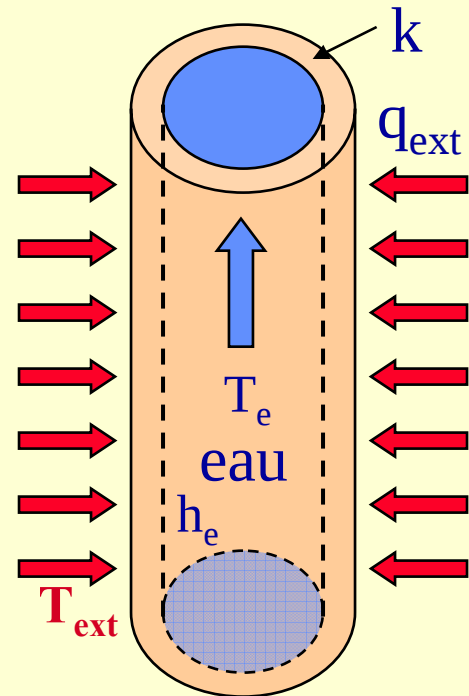
➤ $R_i = 10 \text{ cm}$

➤ $e = 5 \text{ mm}$

➤ $k = 10 \text{ W/m.K}$

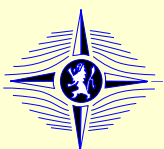
➤ $h_e \rightarrow \infty$

➤ $T_e = 100^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = 200^\circ\text{C}$



$$q_{ext} = \frac{k \cdot (T_{ext} - T_e)}{R_{ext} \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right)} = \frac{10 \cdot (200 - 100)}{0.015 \ln\left(\frac{0.015}{0.010}\right)}$$

$$q_{ext} = 164,4 \text{ kW/m}^2$$



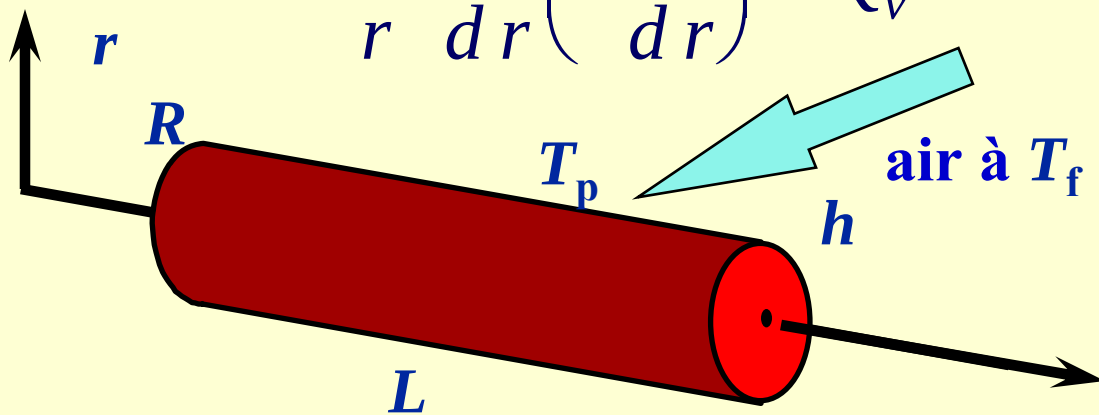
TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION VIVE

Cylindre avec Source de Chaleur (1)

❖ Equation Thermique

$$\frac{k}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \dot{Q}_v = 0$$



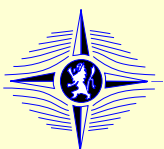
❖ Solution Générale

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_v}{4k} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$$

❖ Conditions aux limites

◆ $r = 0$ Température finie

◆ $r = R$ $q = -k dT/dr = h(T_p - T_f)$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION VIVE

Cylindre avec Source de Chaleur (2)

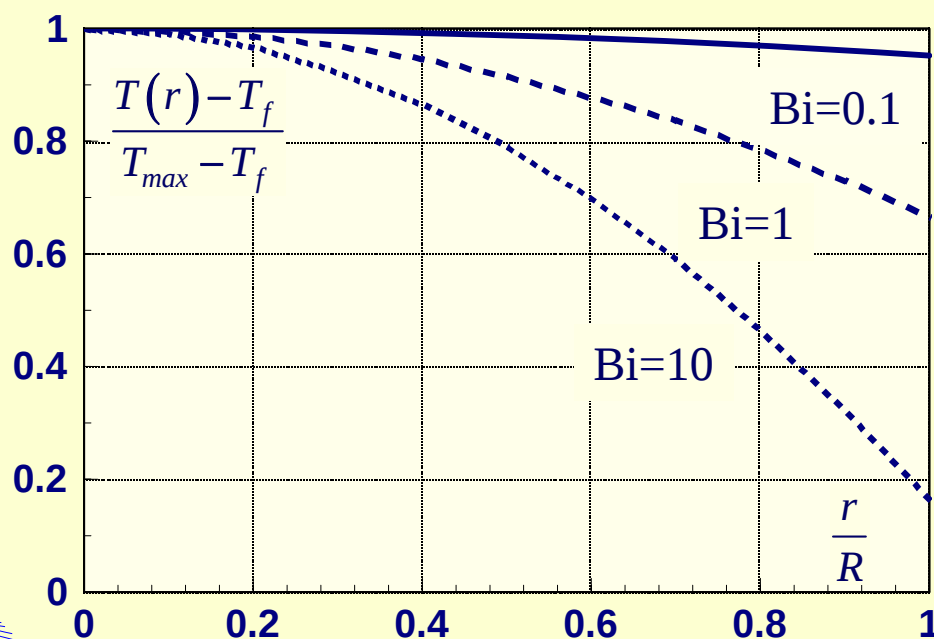
❖ Profil de Température

$$T(r) = T_f + \frac{R\dot{Q}_v}{2h} + \frac{R^2\dot{Q}_v}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

❖ Maximum de Température

$$\frac{T_{max} - T_f}{T_p - T_f} = \left[1 + \frac{Bi}{2} \right]$$

❖ Nombre de Biot $Bi = \frac{hR}{k}$



TRANSPORT D'ENERGIE

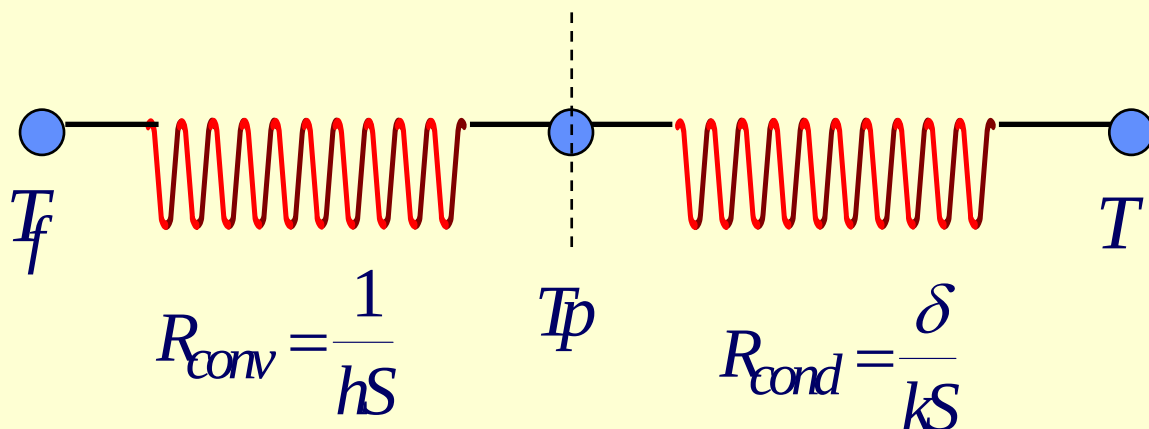
CONDUCTION VIVE

NOMBRE DE BIOT

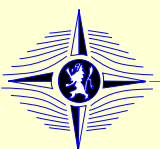
❖ Définition

$$Bi = \frac{h\delta}{k} = \left(\frac{\delta}{k} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h} \right)}$$

❖ Signification Physique



$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION VIVE

Cylindre avec Source de Chaleur (3)

Analogie

Écoulement de Poiseuille

$$\frac{\text{Coef}}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\text{Variable}}{dr} \right) + \text{Source} = 0$$

$$\text{Flux} = -\text{Coef} \frac{d\text{Variable}}{dr}$$

Grandeur	Ecoulement	Conduction
Coefficient	μ	k
Variable	$u(r)$	$T(r)$
Aux limites	$u(R)=0$	$T(R)-T_p=0$
Flux	$\tau_{rz}(r)$	$q_r(r)$
Source	$\Delta P_o. / \Delta L$	Q_v



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Phénomènes Naturels

$$T(x_i, t)$$

Etat Initial $\Rightarrow$ Etat Final ?

❖ Problèmes

◆ Apériodiques - Transitoires

➤ Démarrage, Arrêt de machines

➤ Mise en contact de surfaces

◆ Cycliques

➤ Variations diurnes, Ensoleillement

➤ Bâtiments, Régénérateurs, Stockage ...

➤ Fatigue des moteurs à piston

➤ Systèmes d'asservissement

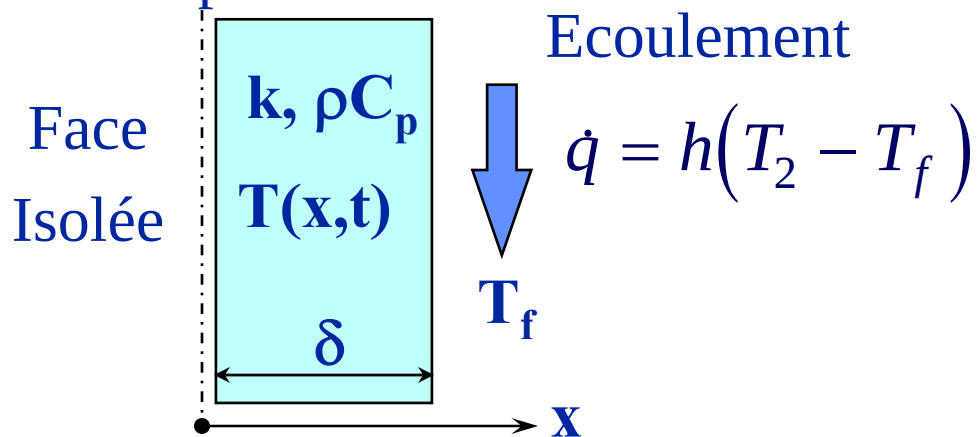


TRANSPORT D'ENERGIE

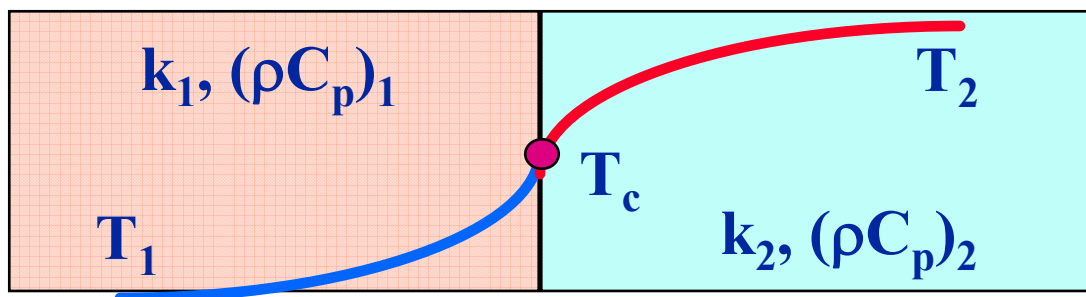
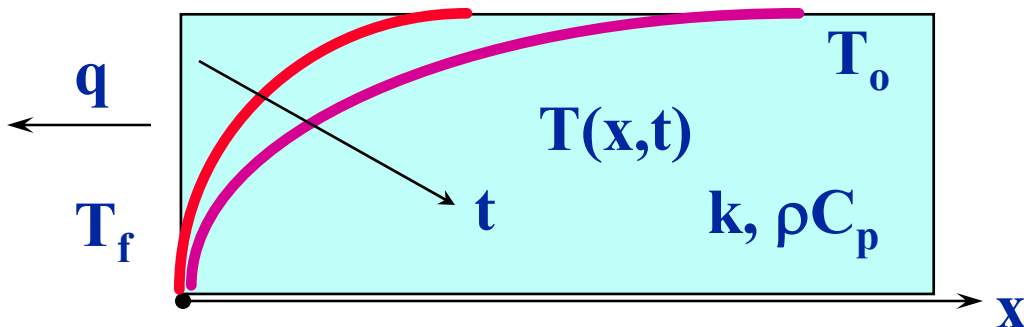
CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Problèmes génériques

◆ Mur plan



◆ Massif semi infini



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Equation de la chaleur

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla T] + \dot{Q}_v$$

◆ k Conductivité [W/m.K]

◆ ρ Masse volumique [kg/m³]

◆ C Chaleur Spécifique [J/kg.K]

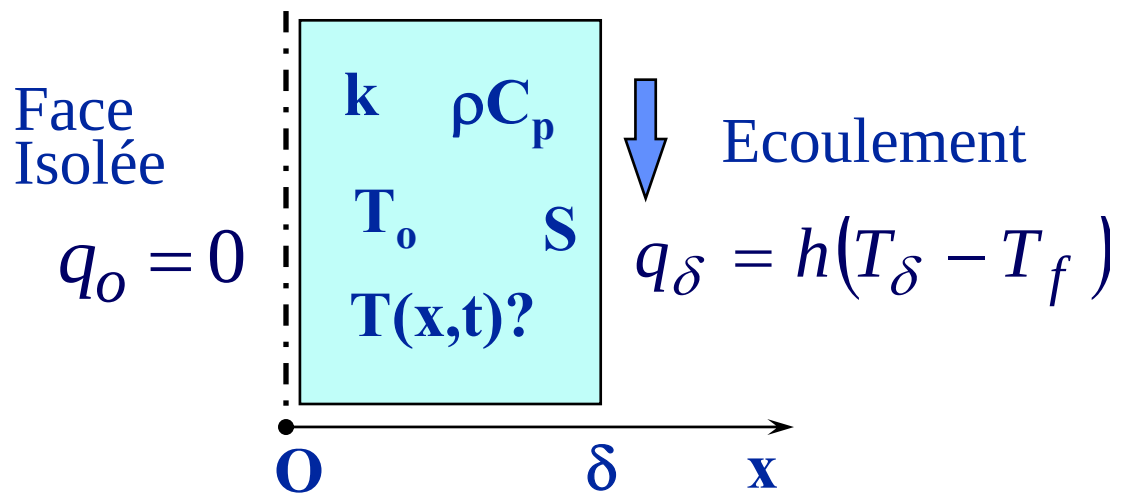
◆ Q_v Source ou puits [W/m³]



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Mur plan; propriétés constantes (1)



👉 Equation thermocinétique

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

👉 Conditions d'univalence

♦ A $t = 0$ $T = T_o \quad \forall x$

♦ En $x = 0$ $\frac{dT}{dx} = 0 \quad \forall t > 0$

♦ En $x = \delta$ $-k \frac{dT}{dx} = h(T - T_f)$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Mur plan; propriétés constantes (2)

◆ Equation normée

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}$$

☞ Variables adimensionnelles

Nombre de Fourier $Fo = \frac{\alpha}{\delta^2} t = \frac{t_{physique}}{t_{diffusion}}$

$$X = \frac{x}{\delta} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f}$$

☞ Conditions d'univalence

◆ A $Fo = 0 \quad \Theta = 1 \quad \forall X$

◆ En $X = 0 \quad \frac{d\Theta}{dX} = 0 \quad \forall Fo > 0$

◆ En $X = 1 \quad \frac{d\Theta}{dX} = -Bi \cdot \Theta$

$$Bi = \frac{h\delta}{k}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$ ❖ Mur plan; propriétés constantes (3)

- ◆ Séparation des variables

$$\Theta(Fo, X) = \Phi(Fo) \cdot \Psi(X)$$

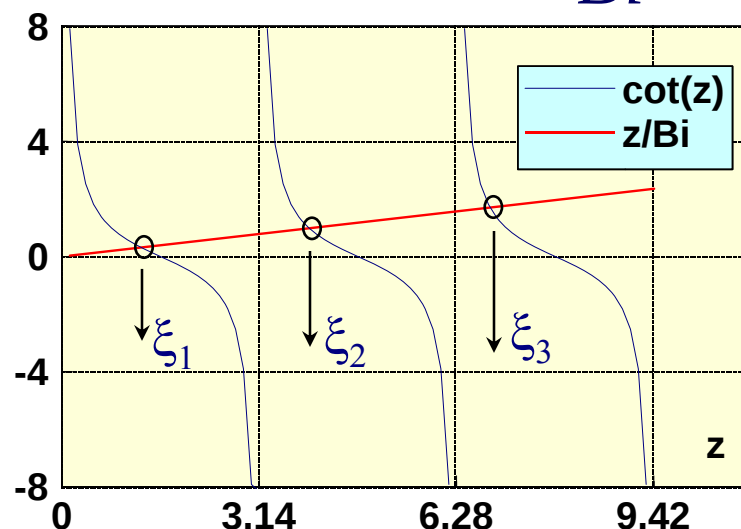
- ◆ Equation aux valeurs propres

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dFo} = \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{d^2\Psi}{dX^2} = -\xi^2$$

- ◆ Solution

$$\Theta(Fo, X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\xi_n X) e^{-\xi_n^2 Fo}$$

👉 Equation caractéristique $\frac{\xi_n}{Bi} = \cot(\xi_n)$

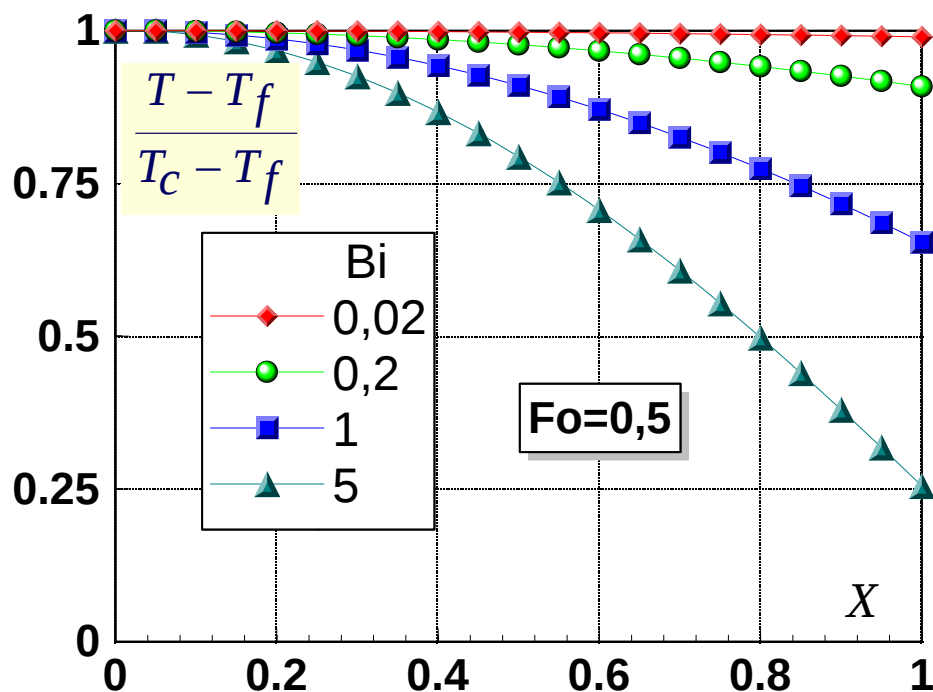


TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Mur plan; propriétés constantes (4)

◆ Profil de température



◆ Critère de Biot

☞ $Bi \leq 0.1 \rightarrow T(t)$ de bloc

☞ $Bi > 0.1 \Rightarrow T(t, x)$



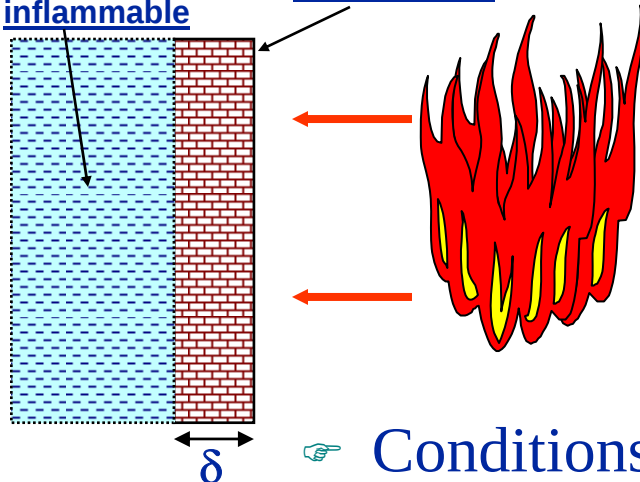
TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Application: Mur de Protection Incendie

Produit inflammable

Mur en béton

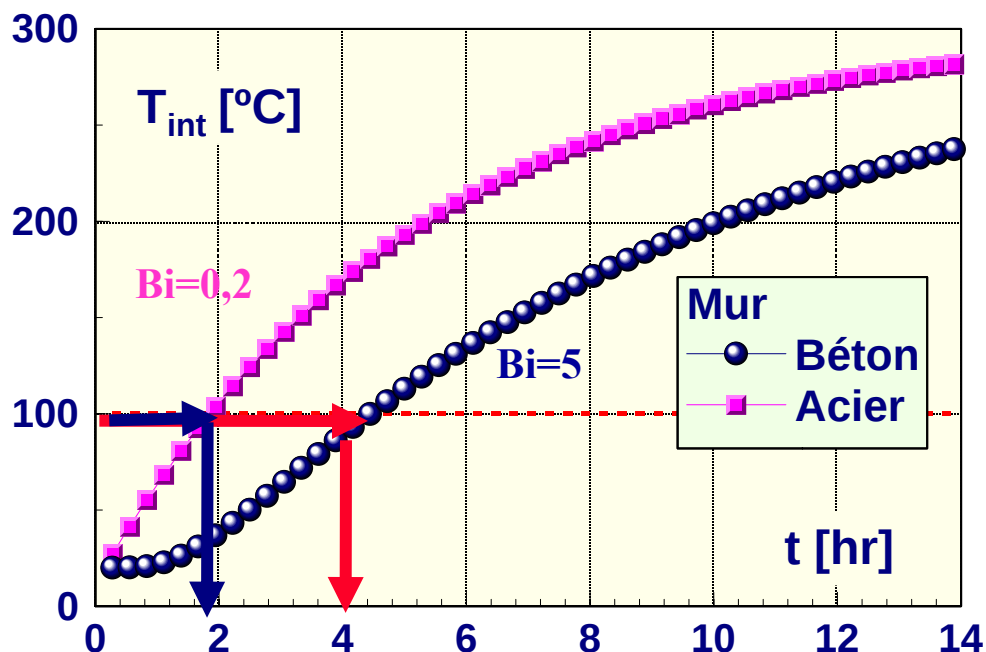


➡ Mur en béton

- ◆ $\delta = 0,15 \text{ m}$
- ◆ $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
- ◆ $C = 900 \text{ J/kg.K}$
- ◆ $k = 1 \text{ W/m.K}$
- ◆ $T_o = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- ◆ $T_{in,max} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- ◆ $T_{ext} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$
- ◆ $h = 34 \text{ W/m}^2.\text{K}$

➡ Conditions externes

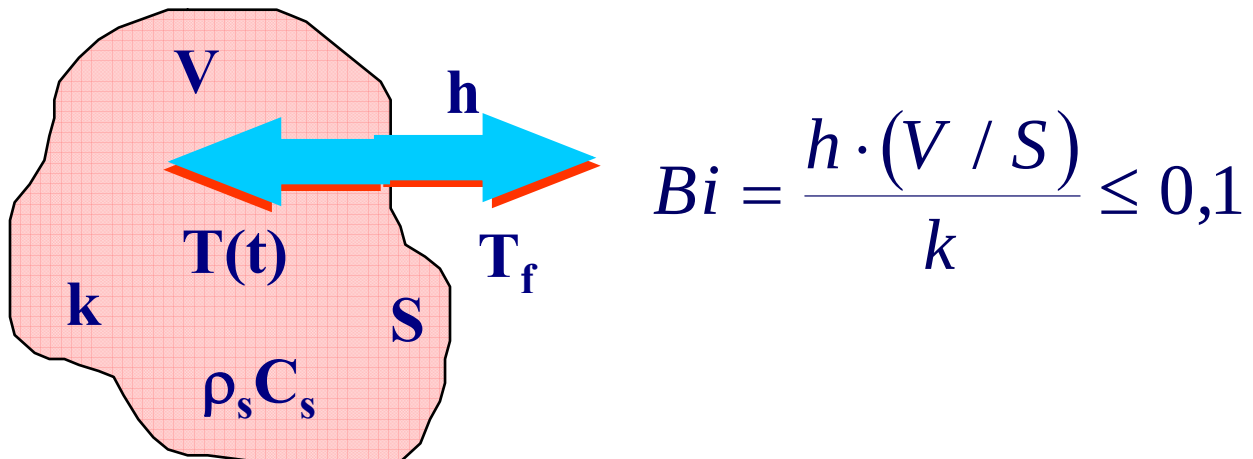
➡ Temps pour atteindre T critique?



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Comportement en bloc



◆ Variation d'énergie interne

$$\rho_s C_s V \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_f)$$

◆ Solution du transitoire

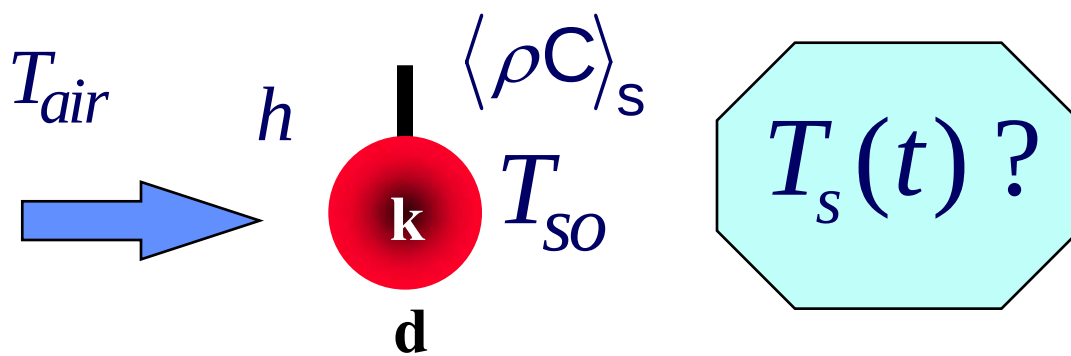
$$\Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho_s C_s V} t}$$

$\swarrow$
 $\frac{1}{\tau}$



Réponse d'une Sonde Thermique

❖ Position du Problème



❖ $Bi \leq 0,1$

◆ Temps caractéristique

$$\tau = \frac{\langle \rho C \rangle_s \text{Vol}}{hS} = \frac{\langle \rho C \rangle_s d}{6h}$$

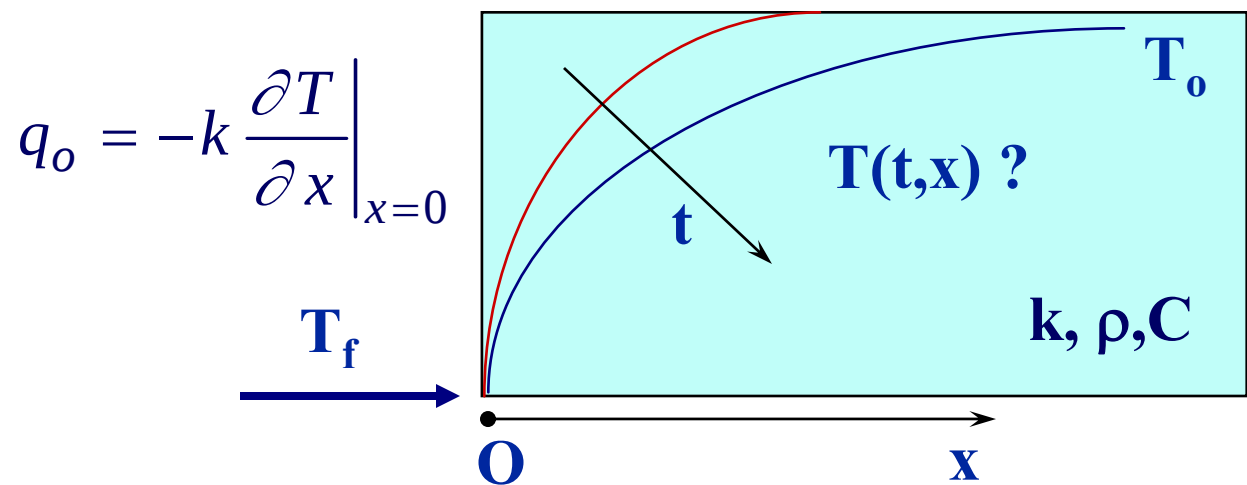
$$\tau = \frac{10^7 \times 0,0005}{6 \times 550} = 1,5 \text{ sec}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Massif semi infini (1)



👉 Equation thermocinétique

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

👉 Conditions d'univalence

- ◆ A $t = 0$ $T = T_0 \quad \forall x > 0$
- ◆ En $x=0$ $T = T_f \quad \forall t > 0$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Massif semi infini (2)

👉 Variables réduites

$$Z = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f}$$

👉 Conditions d'univalence adimensionnelles

♦ $Z \longrightarrow \infty$ alors $\Theta = 1$

♦ $Z \longrightarrow 0$ alors $\Theta = 0$

👉 Solution: Profil de température

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(Z)$$

Intégrale de Gauss $\operatorname{erf}(Z) = \int_0^Z e^{-z^2} dz$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Massif semi infini (3)

➡ Densité de flux de chaleur

$$q(x,t) = -k \frac{dT}{dx} = k \frac{T_f - T_o}{\sqrt{\pi \alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$$

➡ Densité de Flux en $x = 0$ et $t > 0$

$$q_o = q(0,t) = \frac{\sqrt{\rho C k} (T_f - T_o)}{\sqrt{\pi t}}$$

Effusivité $b = \sqrt{\rho C k} \equiv \left[\frac{J}{m^2 K \sqrt{s}} \right]$

➡ Chaleur accumulée ou perdue

$$Q = \frac{2bS}{\sqrt{\pi}} (T_f - T_o) \sqrt{t}$$



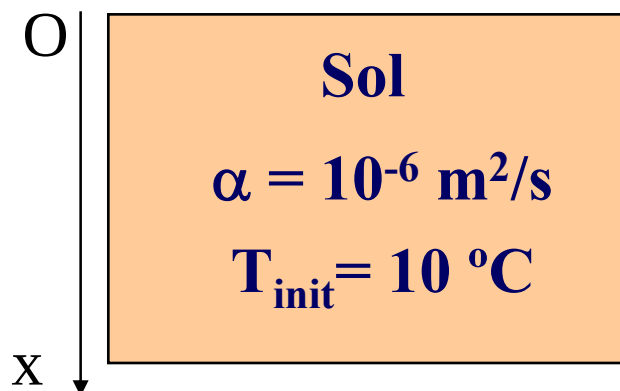
TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

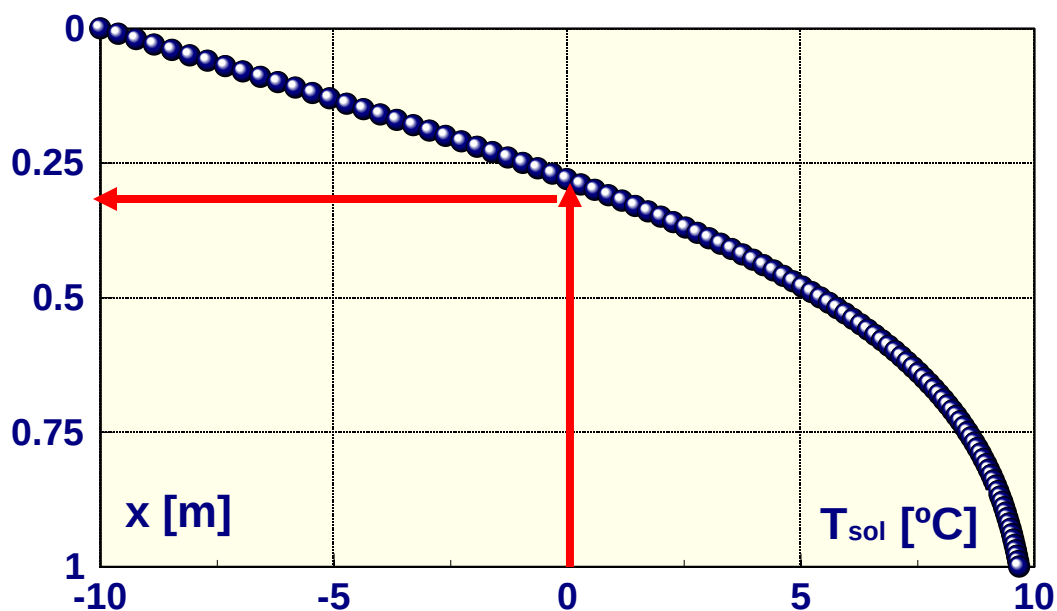
❖ Application: Gel du sol

👉 Brusque chute de température

$T_{\text{ext}} = -10\text{ °C}$ pendant 12 heures



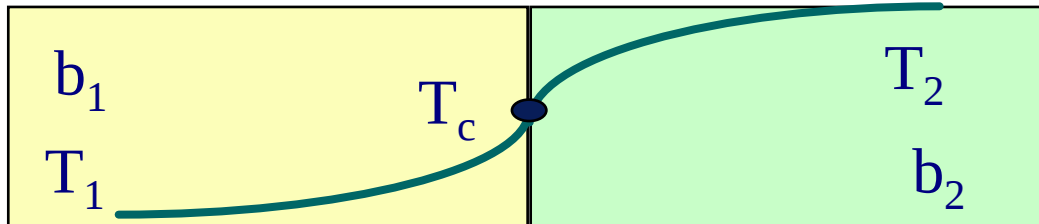
👉 Profondeur de gel ?



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Massifs en contact (1)



➞ Densité de flux au contact

$$q_c = -b_1 \frac{T_1 - T_c}{\sqrt{\pi t}} = -b_2 \frac{T_c - T_2}{\sqrt{\pi t}}$$

➞ Température de contact

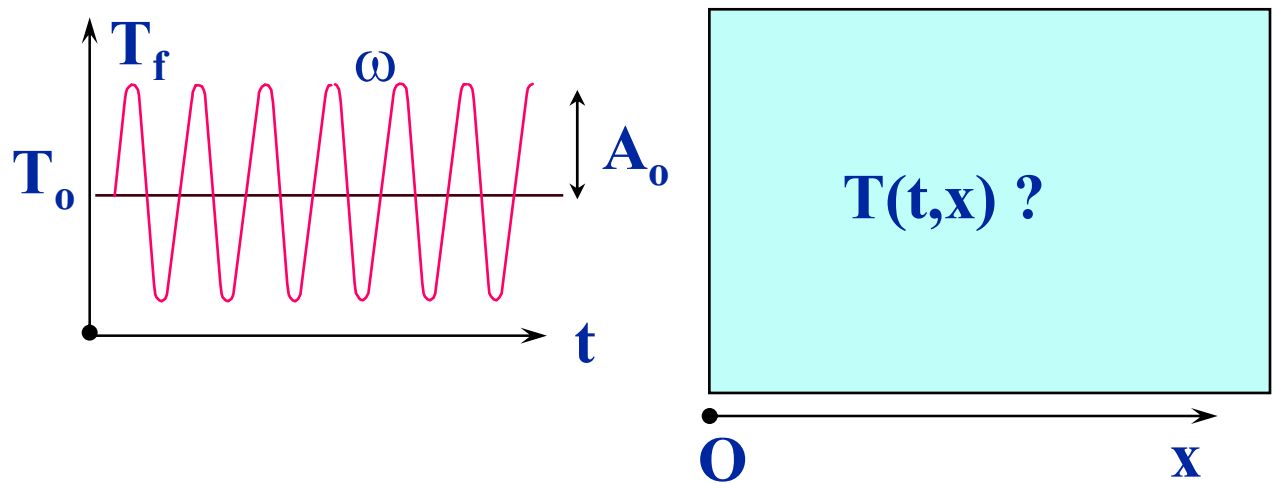
$$T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} \neq f(t)$$

- ◆ Température de la peau $T_1 = 37^\circ\text{C}$
- ◆ Effusivité de la peau $b = 600 \text{ [J/m}^2\text{K}\sqrt{\text{s}}]$
- ◆ Température de la pièce $T_2 = 20^\circ\text{C}$

<i>Contact</i>	<i>b</i>	<i>Tc</i> [°C]	<i>Sensation</i>
Fonte	14700	20,7	Froide
Marbre	2650	23,3	Normale
Bois	400	30,4	Tiède
Isolant	24	36,4	Chaude



❖ Perturbation périodique (1)



➞ Condition aux limites

$$T_f = T_o + A_o \cos(\omega t)$$

➞ Variables réduites

$$\tau = \omega t \qquad X = \frac{x}{\tilde{L}} \qquad \Theta = \frac{T - T_o}{A_o}$$

♦ Longueur caractéristique

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONDUCTION MORTE $F(t)$

❖ Perturbation périodique (2)

👉 Solution (séparation des variables)

$$\Theta = e^{-X} \cos(\tau - X)$$

👉 Caractéristique de l'onde thermique

♦ Amplitude $A = A_o e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}}$

♦ Déphasage $\phi = x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$

♦ Longueur d'onde $\lambda = 2\pi \tilde{L} = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$

♦ Profondeur d'inversion

Déphasage π entre $T(0)$ et $T(L_{inv})$

$$L_{inv} = \frac{\lambda}{2}$$

Sol: $\alpha = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, saison $\omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$

$L_{inv} = 3,14 \text{ m}$ 

Glace en été



❖ **Fluide & Surface Solide**

∃ Vitesse relative U

∃ Différence de température $T_f - T_p$

Coefficient d'échange convectif h

❖ **Convection Forcée**

U impose ΔT et donc l'échange thermique

$$h = h(U, \text{propriétés du fluide})$$

❖ **Convection Naturelle**


 $\Delta T \Rightarrow \Delta \rho \Rightarrow U$: Phénomènes couplés

$$h = h(\Delta T, \text{propriétés du fluide})$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

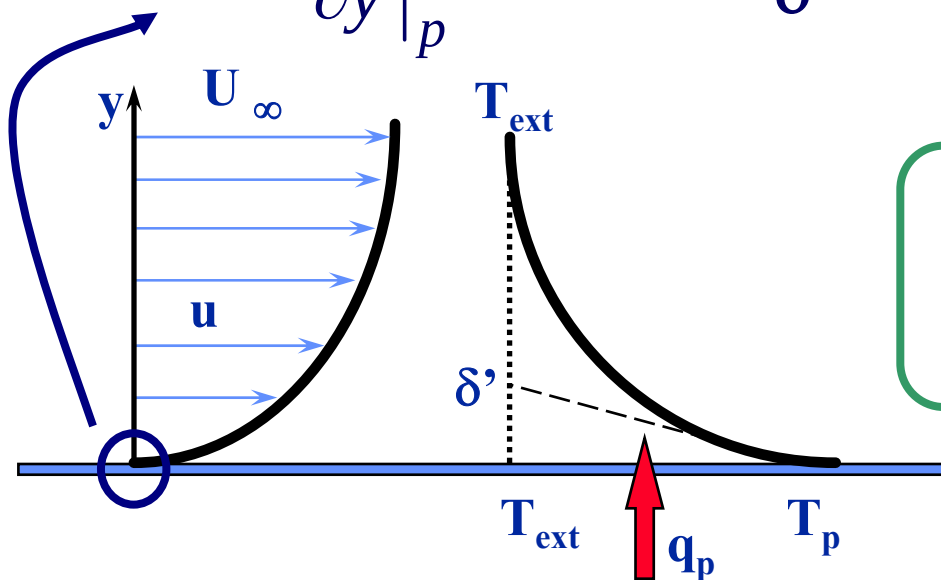
Coefficient de transfert de chaleur

❖ Définition de Newton

$$q_p = h \cdot (T_p - T_{ext})$$

❖ Interprétation Physique

$$q_p = -k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_p = k_f \cdot \frac{(T_p - T_{ext})}{\delta'}$$



$$h = \frac{k_f}{\delta'}$$

❖ CONVECTION

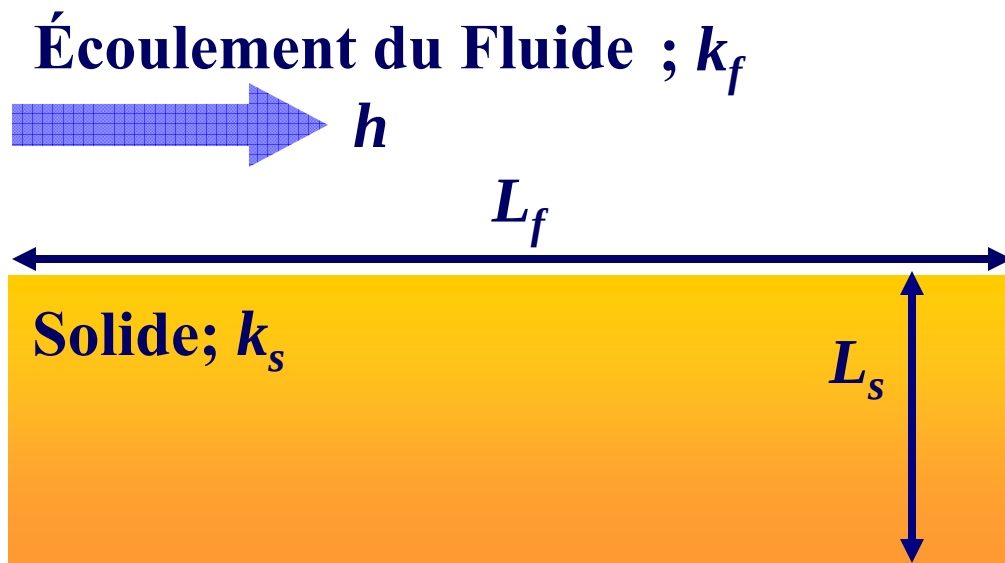
- CONDUCTION k_f
- ADVECTION $\delta'(U)$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION

Distinction entre Nu et Bi

$$\text{Nu} = \frac{hL_f}{k_f} = \frac{L_f}{\delta'}$$



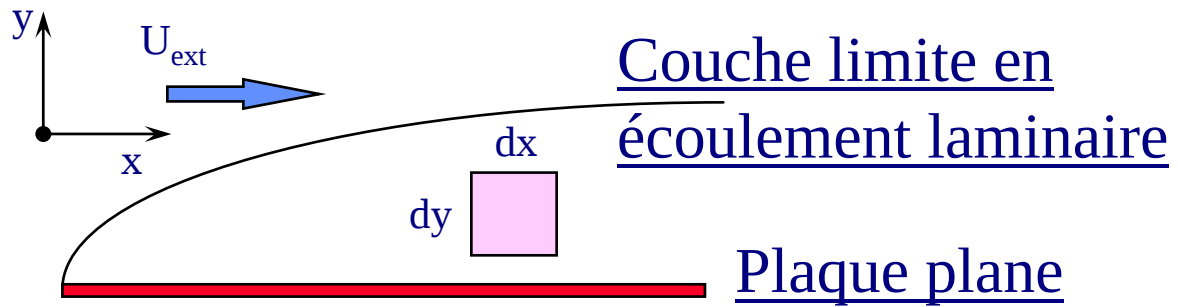
$$\text{Bi} = \frac{hL_s}{k_s} = \frac{\mathcal{R}_{\text{cond}}}{\mathcal{R}_{\text{conv}}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

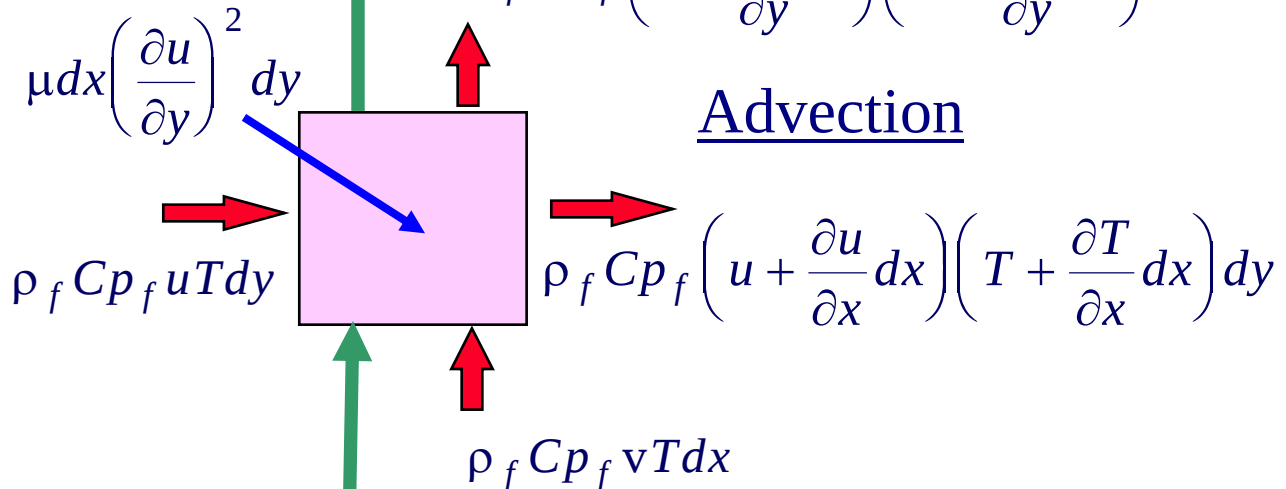
Equation de l'Énergie (1)



$$-k_f dx \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right]$$

Travail
visqueux

$$\mu dx \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$



$$-k_f dx \frac{\partial T}{\partial y}$$

Conduction



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Equation de l'Énergie (2)

❖ Régime laminaire

◆ Conduction axiale négligeable

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho_f C_{pf}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

◆ Forme normée: $\delta \approx \delta_{th}$

$$\Theta = \frac{T - T_p}{T_{ext} - T_p}$$

$$\left[\tilde{u} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}} \right] \left\{ \frac{\delta}{L} \right\}^2 = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{Br}{Pe} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2$$

☞ Nombre de Peclet $Pe = \frac{U_{ext} L}{\alpha} = Re \cdot Pr$

☞ Nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{v}{\alpha}$

☞ Nombre de Brinkman $Br = \frac{\mu U_{ext}^2}{k_f |T_{ext} - T_p|}$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Équation de l'Énergie (3)

❖ Équation de la couche limite laminaire

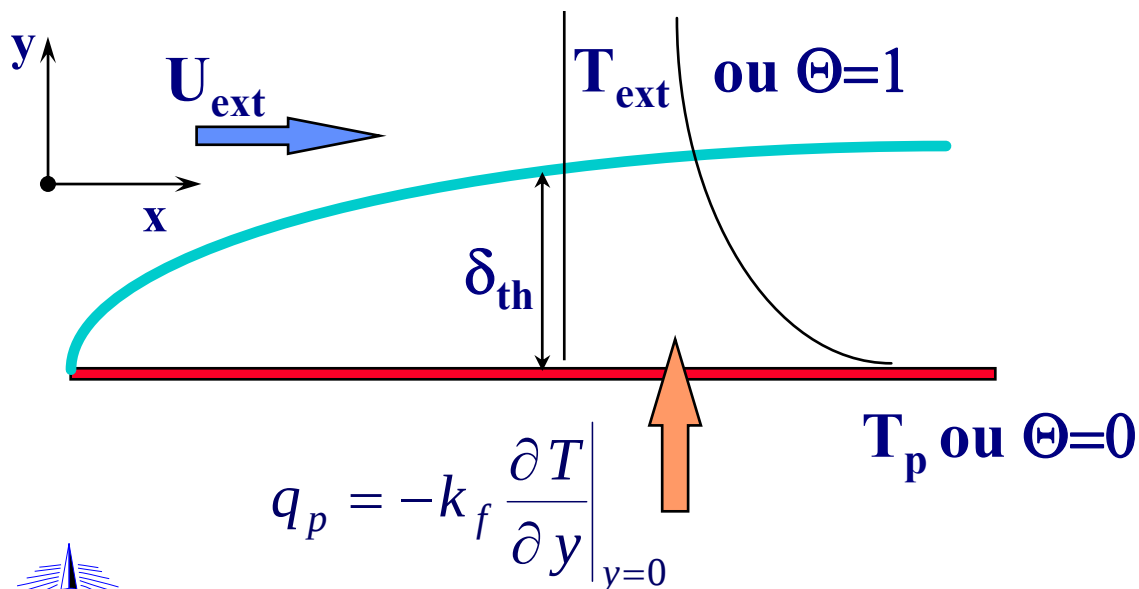
◆ Dissipation visqueuse négligeable

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

◆ Forme normée

$$\left[\tilde{u} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}} \right] \left\{ \frac{\delta}{L} \right\}^2 = \frac{1}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{y}^2}$$

👉 Conditions aux limites



Corrélation de transfert de chaleur

Gaz et liquides sur plaque plane

- ❖ Forme locale en régime laminaire

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0,332 \text{Pr}^{1/3} \sqrt{\text{Re}_x}$$

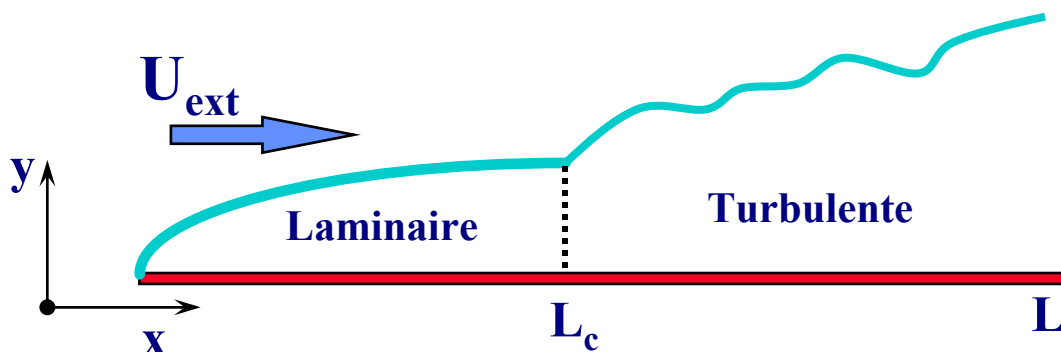
- ❖ Forme locale en régime turbulent: **$\text{Re}_c \approx 3.10^5$**

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k_f} = 0,029 \text{Pr}^{0,43} \text{Re}_x^{0,8}$$

- ❖ Coefficient moyen

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \left(\int_0^{L_c} h_{\ell am} dx + \int_{L_c}^L h_{tur} dx \right)$$

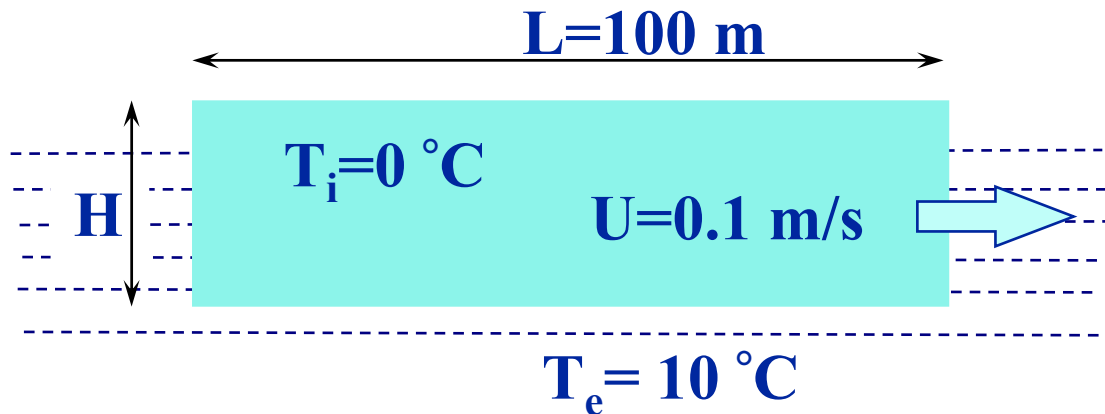
$$\overline{\text{Nu}} = 0,664 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_c^{0,5} + 0,036 \text{Pr}^{0,43} \left(\text{Re}_L^{0,8} - \text{Re}_c^{0,8} \right)$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Fonte des icebergs (1)



- ❖ Nombre de Reynolds: $\nu_e = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re = \frac{UL}{\nu_e} \approx 6,7 \times 10^6$$

- ❖ Nombre de Nusselt moyen: $Re_c = 3 \cdot 10^5$, $Pr_e = 11$

$$\overline{Nu}_L = 0,036 Pr_e^{0,43} \left(Re^{\frac{4}{5}} - Re_c^{\frac{4}{5}} \right) \approx 26625$$

- ❖ Densité de flux de chaleur reçue:

$$k_e = 0,57 \text{ W/m.K}$$

$$q_s = \frac{\overline{Nu}_L k_e}{L} (T_e - T_i) \approx 1518 \text{ W/m}^2$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION FORCÉE

Fonte des icebergs (2)

❖ Taux de Fonte

$$\mathcal{L}_{sl} \frac{dm}{dt} = -q_s \cdot L \cdot \ell \Rightarrow \mathcal{L}_{sl} \rho_e \frac{dH}{dt} = -q_s$$

◆ $\mathcal{L}_{sl} = 333 \text{ kJ/kg}$ et $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{q_s}{\mathcal{L}_{sl} \rho_e} \approx -4,6 \mu\text{m}$$

❖ Épaisseur perdue sur un jour

$$\Delta H = \left[\frac{dH}{dt} \right] \Delta t \approx 0,4 \text{ m}$$

❖ Qu'advierait-il si

$$U = 10 \text{ m/s} \text{ et } H_0 = 15 \text{ m} ?$$

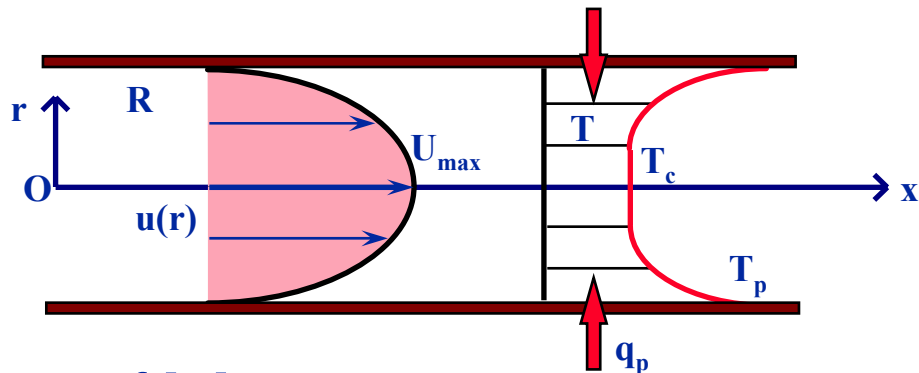


TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION FORCÉE

Écoulements Internes

❖ Écoulement de Poiseuille (1)



◆ Profil de vitesse

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

◆ Équation de l'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = u(r) C_o$$

◆ Cas: $q_p = \text{constant}$ et T développé

$$T(r) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = C_o$$

◆ Conditions aux limites

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{q_p}{k_f}$$



❖ Écoulement de Poiseuille (2)

◆ Profil de T

$$T - T_c = \frac{T^*}{4} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad T^* = \frac{C_o U_{max} R^2}{\alpha}$$

◆ T_p de paroi et $\langle T \rangle$ moyenne

$$T_p = T_c + \frac{3}{16} T^*$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\pi R^2 \langle u \rangle} \int_0^R (uT) 2\pi r dr = T_o + \frac{7}{97} T^*$$

◆ Coefficient convectif

$$h = \frac{k_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_p}{T_p - \langle T \rangle} = \frac{48}{11} \cdot \frac{k_f}{D} \Rightarrow \text{Nu}_D = 4,36$$

◆ Paroi à $T_p = \text{constant} \Rightarrow \text{Nu}_D = 3,66$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION FORCÉE

❖ Écoulement de Poiseuille (3)

➡ Nombre de Stanton $St = \frac{Nu}{Re.Pr} = \frac{C^{te}}{Re.Pr}$

➡ Frottement $C_f = \frac{16}{Re}$

◆ Analogie

$$\frac{St.Pr}{C_f} = C^{te}$$

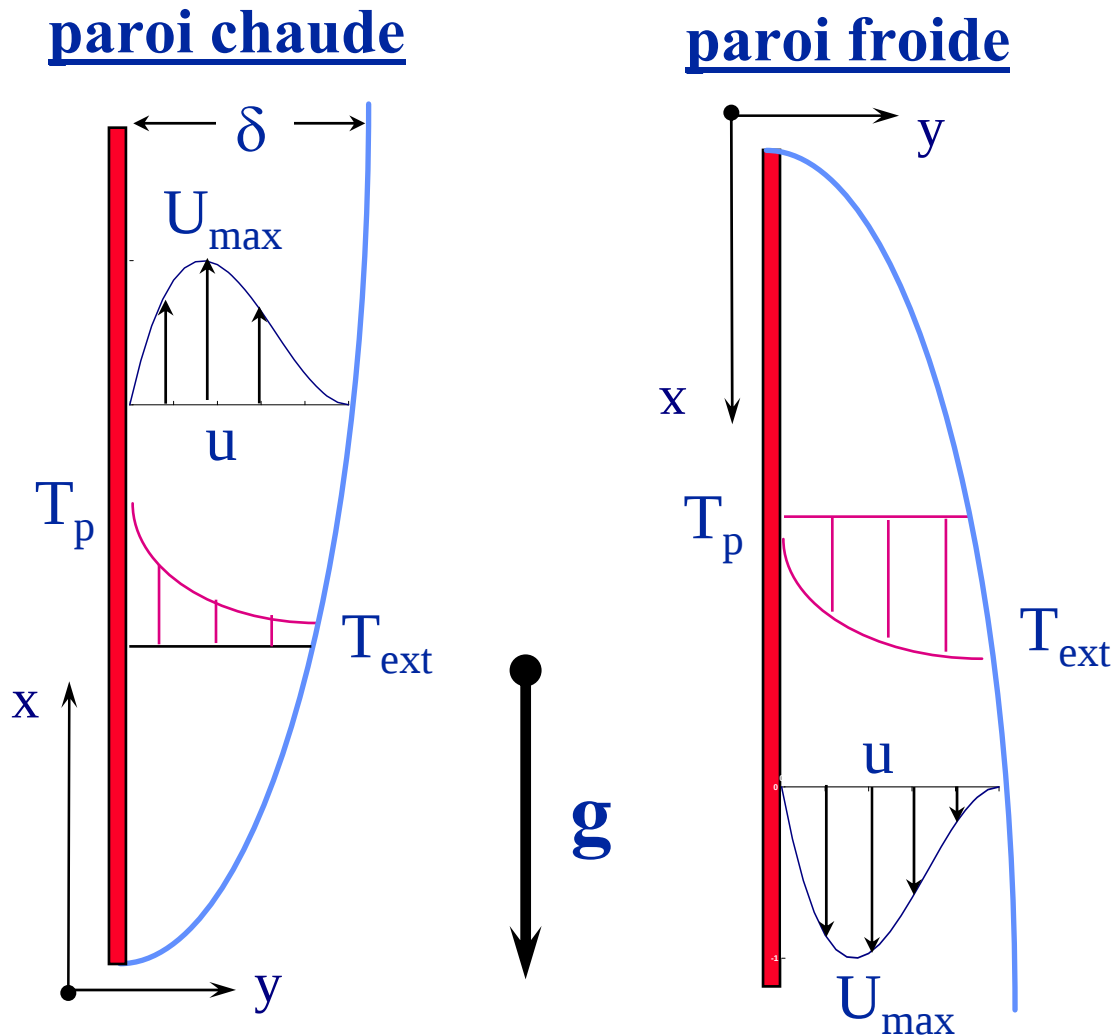
❖ Écoulement turbulent en conduite: $Re > 2300$

➡ Régime hydrauliquement lisse

$$Nu = \frac{hD}{k_f} = 0,023 Pr^{0,4} Re^{0,8}$$



TRANSPORT D'ENERGIE CONVECTION NATURELLE



❖ Dilatabilité du Fluide

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial T} = -\beta \rho_f < 0$$

Gas:

$$\rho_f = \frac{P}{RT} \rightarrow \frac{\partial \rho_f}{\partial T} = -\frac{P}{RT^2} = -\frac{\rho_f}{T} \rightarrow \beta = \frac{1}{T}$$



TRANSPORT D'ENERGIE CONVECTION NATURELLE

❖ Plaque verticale

◆ Couche limite laminaire (1)

👉 Équations de base

Masse

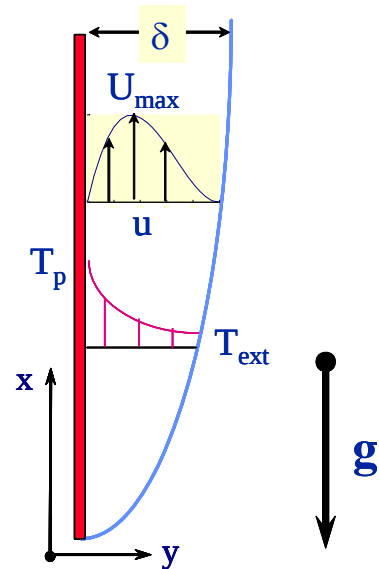
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Mouvement - Ox

$$\rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_f g$$

Énergie

$$\rho_f C_{pf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



TRANSPORT D'ENERGIE CONVECTION NATURELLE

❖ Plaque verticale

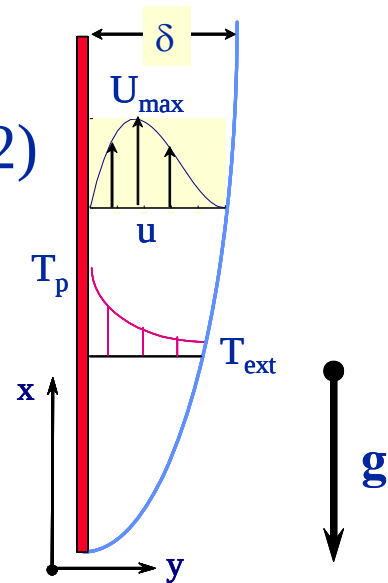
◆ Couche limite laminaire (2)

A $y = \delta$; $u \rightarrow 0$ et $\rho_f \rightarrow \rho_{ext}$

Soit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{ext} g$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_f g = (\rho_{ext} - \rho_f) g$$



☞ Coefficient d'expansion thermique

$$\rho_{ext} - \rho_f = -\beta \rho_f (T_{ext} - T_f)$$

☞ Terme moteur Force d'Archimède

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_f g = -\beta \rho_f g (T_{ext} - T)$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION MIXTE

❖ Plaque verticale

◆ Couche limite laminaire (3)

☞ Équations adimensionnelles

Masse

$$\frac{U_o}{L} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{V_{ref}}{\delta} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right] = 0$$

Mouvement - Ox

$$\left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right] + \left[\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right] = \frac{(L / \delta)^2}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right] + \frac{Gr}{Re^2} \Theta$$

Énergie

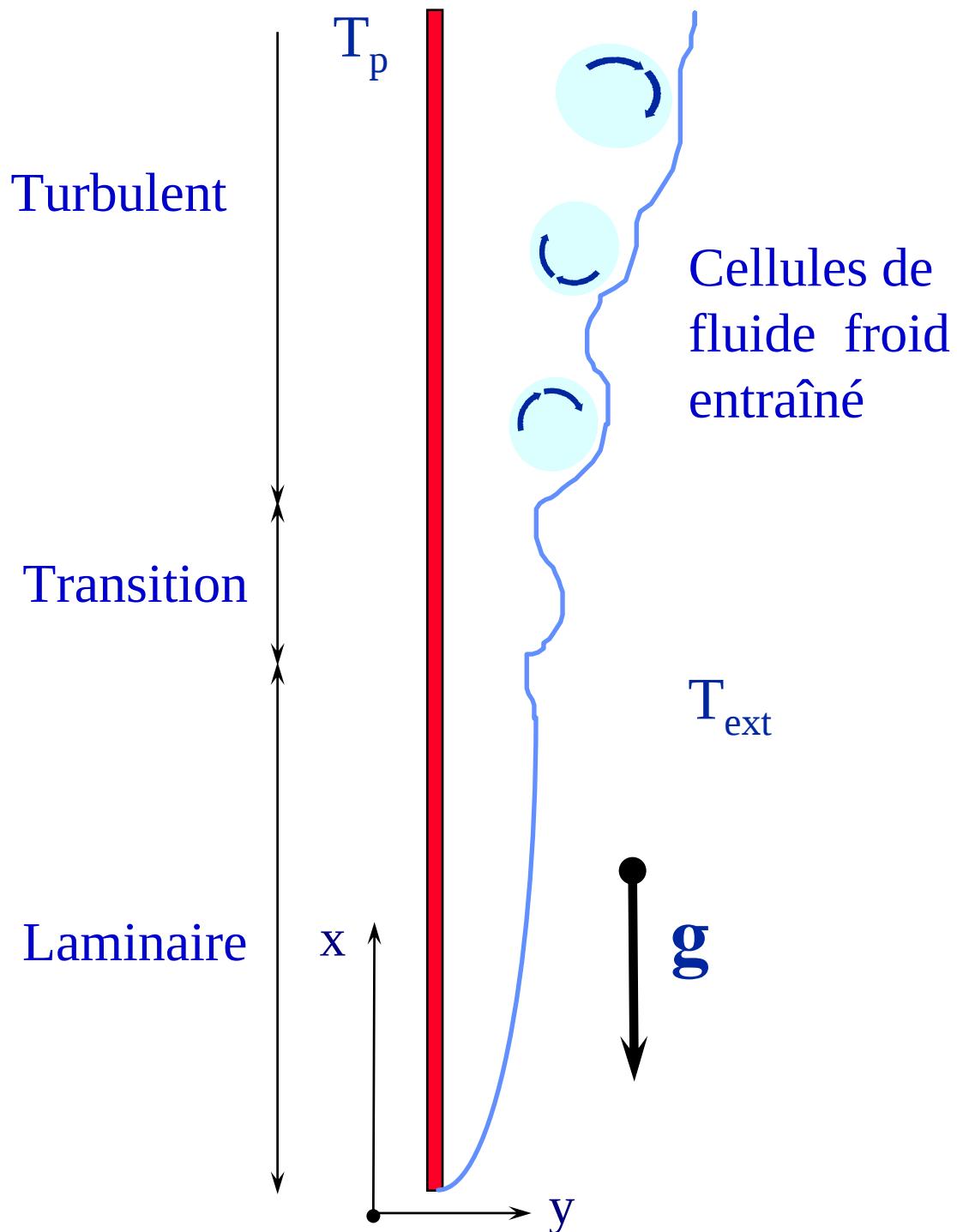
$$\left[\tilde{u} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}} \right] + \left[\tilde{v} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}} \right] = \frac{(L / \delta)^2}{Re \cdot Pr} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{y}^2} \right]$$

☞ Nombre de Grashof

$$Gr = \frac{g\beta(T_p - T_{ext})L^3}{\nu^2} = \frac{\text{Flottaison}}{\text{Viscosité}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale isotherme (1)

❖ Nombre de Rayleigh

$$Ra_L = Gr_L \cdot Pr = \frac{\beta g (T_p - T_{ext}) L^3}{\nu \alpha}$$

❖ Corrélation Expérimentale

$$\overline{Nu}_L = C \cdot Ra_L^n$$

Régime	Ra	C	n
Laminaire	$10^4 - 10^9 \cdot Pr$	0,59	1/4
Turbulent	$10^9 \cdot Pr - 10^{13}$	0,10	1/3

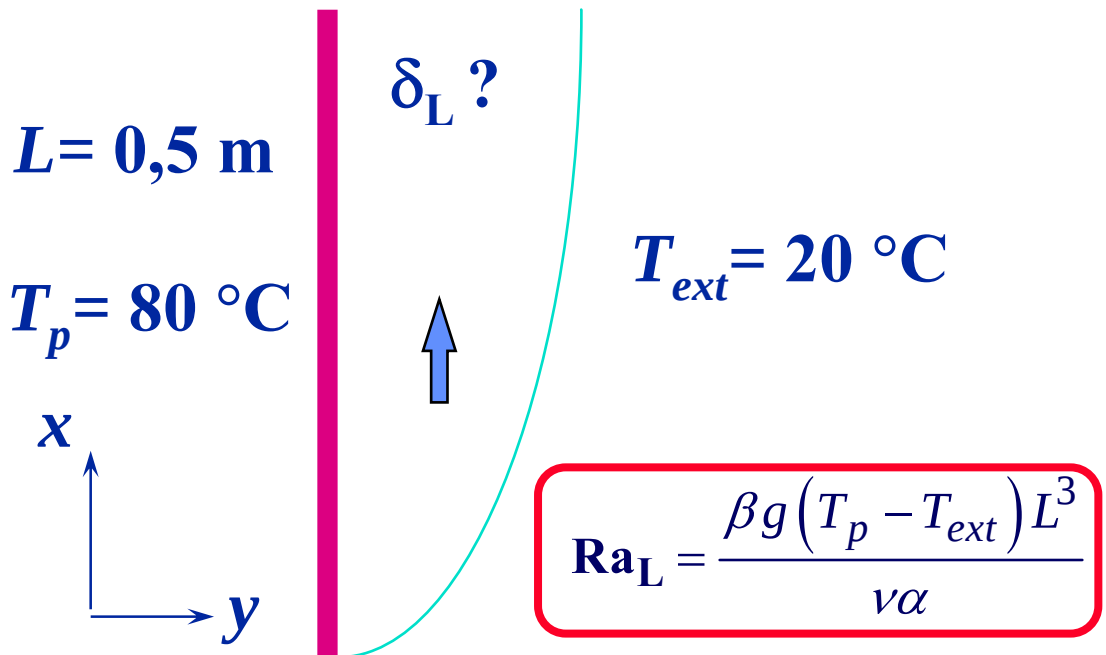
Turbulent

$$h = \frac{\overline{Nu}_L \cdot k_f}{L} \propto \frac{Ra_L^{\frac{1}{3}}}{L} \propto (T_p - T_{ext})^{\frac{1}{3}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE CONVECTION NATURELLE

Plaque Plane Verticale Isotherme (2)



- ❖ Température moyenne: $T_f = 273 + 0,5(T_p + T_{ext})$
- ❖ Propriétés thermophysiques du film

Propriétés	Valeur	Unités
$\beta = 1/T_f$	0,0031	K^{-1}
ν_f	$18,3 \cdot 10^{-6}$	m^2/s
k_f	0,028	$\text{W}/\text{m.K}$
Pr	0,7	-



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE

Plaque Plane Verticale Isotherme (3)

❖ Nombre de Rayleigh

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_p - T_{ext})L^3}{\nu\alpha} = 4,8 \times 10^8 < 10^9$$

☞ Régime Laminaire

❖ Nombre de Nusselt

$$\overline{Nu}_L = 0,59 * Ra_L^{0,25} \approx 87$$

❖ Coefficient de Transfert de Chaleur

$$h_L = \frac{\overline{Nu}_L \cdot k_f}{L} \approx 4,9 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1} = \frac{k_f}{\delta_L/2}$$

❖ Épaisseur de Couche Limite

$$\delta_L = \frac{2k_f}{h_L} = \frac{2L}{\overline{Nu}_L} \approx 0,012 \text{ m}$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale à flux constant (1)

❖ Nombre de Rayleigh

$$Ra_L = \frac{\beta g}{\nu \alpha} \cdot \frac{q_p L^4}{k_f}$$

❖ Corrélation Expérimentale

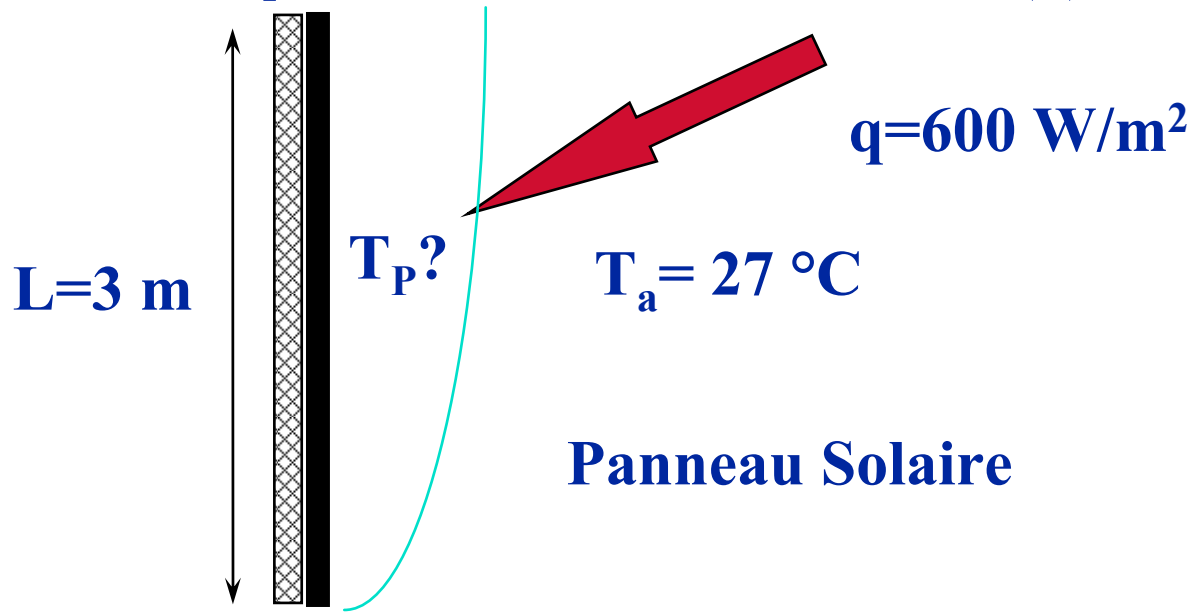
$$\overline{Nu}_L = C \cdot Ra_L^n$$

Régime	Ra	C	n
Laminaire	$10^5 - 10^{11}$	0,75	0,20
Turbulent	$2 \times 10^{13} - 10^{16}$	0,645	0,22



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE

Plaque verticale à flux constant (2)



h inconnu $\Rightarrow$ Procédure itérative

❖ **Itération 1:** se donner $h^{(1)} = 6 \text{ W/m}^2.\text{K}$

■ $T_p^{(1)} = q/h^{(1)} + T_a = 127 \text{ °C} \rightarrow T_f^{(1)} = 77 \text{ °C}$

■ $Ra_L^{(1)} = 7,3 \cdot 10^{13} \rightarrow Nu_L^{(1)} = 0,645 Ra^{0,22} = 724$

❖ **Itération 2:** $h^{(2)} = 7,24 \text{ W/m}^2.\text{K}$

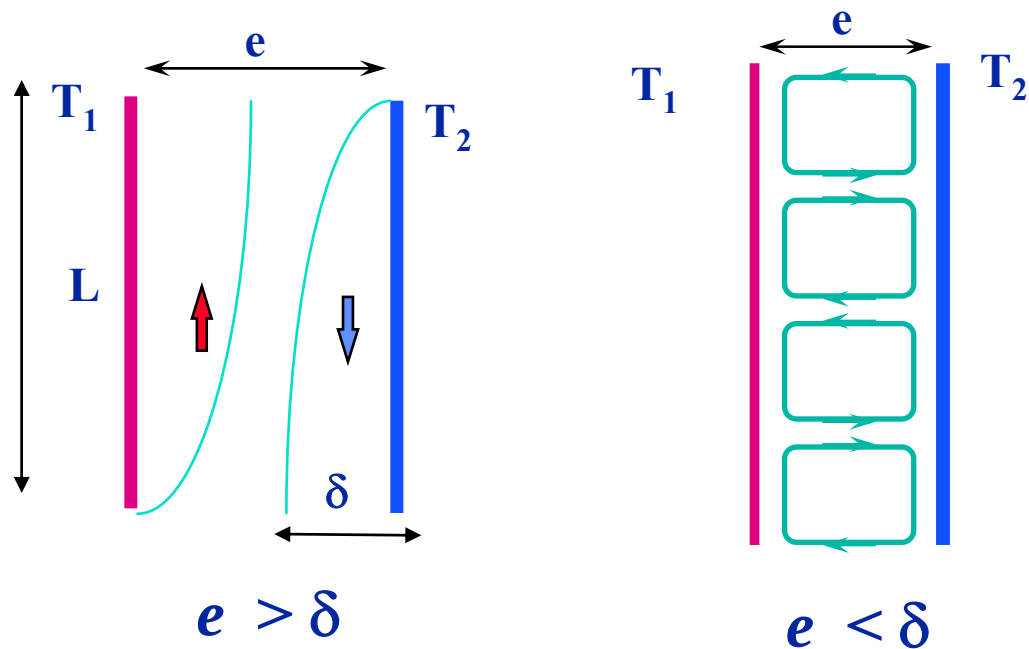
■ $T_p^{(2)} = 110 \text{ °C}$ et $T_f^{(2)} = 68,4 \text{ °C}$

■ *etc*



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE

Lame verticale en espace confiné



Effet de Ra et L/e

Effet de Ra

❖ Nombre de Rayleigh critique

$$Ra_e^* = 2000$$

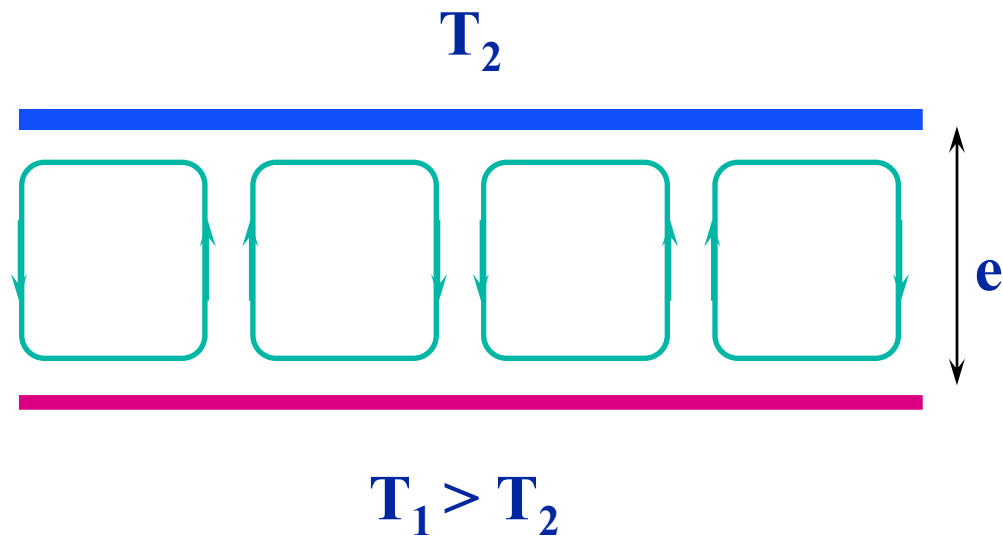
❖ Conductibilité effective

$$Nu_e = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n \cdot \left[\frac{L}{e} \right]^{-m}$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION NATURELLE

Lame horizontale en espace confiné



❖ Nombre de Rayleigh critique

$$Ra_e^* = 1700$$

❖ Conductibilité effective

$$Nu_e = \frac{k_e}{k_f} = C \cdot Ra_e^n$$



TRANSPORT D'ENERGIE

CONVECTION

Synthèse

$$q_p = h \cdot (T_p - T_f) \Rightarrow \text{Nu} = \frac{h \cdot L_f}{k_f}$$

❖ **Convection Forcée** $\text{Re} = \frac{U \cdot L_f}{\nu}$

☞ **Écoulements externes** $\text{Nu}_L = A \cdot \text{Pr}^n \text{Re}_L^m$

☞ **Écoulements internes**

✓ Laminaire $\text{Nu}_D = C^{\text{te}}$

✓ Turbulent $\text{Nu}_D = A \cdot \text{Pr}^n \text{Re}_D^m$

❖ **Convection Naturelle** $\text{Ra} = \frac{\beta g \Delta T L_f^3}{\nu \alpha}$

☞ **Écoulements externes** $\text{Nu}_L = C \cdot \text{Ra}_L^m$

☞ **Écoulements confinés** $\text{Ra} > \text{Ra}^*$

$$\text{Nu}_e = C \cdot \text{Ra}_e^n \cdot \left[\frac{L}{e} \right]^{-m}$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION MIXTE

❖ Écoulement

◆ Forcé U_0 et Libre: ΔT

◆ Critères

☞ Convection forcée

$$\frac{Gr}{Re^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Re, Pr)$$

☞ Convection mixte

$$\frac{Gr}{Re^2} \cong 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Re, Gr, Pr)$$

☞ Convection naturelle

$$\frac{Gr}{Re^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad Nu = Nu(Gr, Pr)$$



TRANSPORT D'ENERGIE
CONVECTION FORCÉE

Analogie avec le frottement

Plaque plane

- ❖ Frottement : couche limite laminaire

$$C_f(x) = \frac{C_{te}}{\sqrt{Re_x}}$$

- ❖ Nombre de Stanton

$$St_x = \frac{h_x}{\rho_f C_{p_f} U_{ext}} = \frac{\text{convection}}{\Delta(\text{enthalpie})}$$

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x \cdot Pr} = \frac{0,332 Pr^{-2/3}}{\sqrt{Re_x}}$$

- ❖ Analogie de Colburn

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

☞ Valable aussi en turbulent



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

Généralités

❖ Le comportement d'un corps

Dès que $T > 0 \text{ K} \Rightarrow$ Emissance $M(T, \lambda)$

◆ Rayonnement électromagnétique

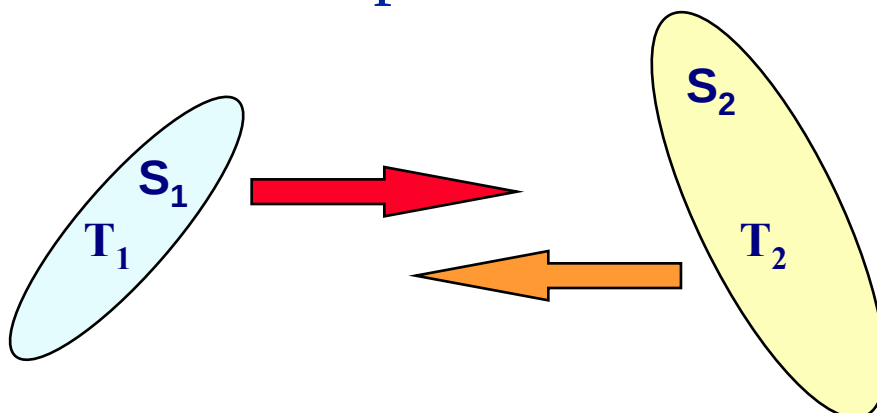
$$0,3 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1000 \mu\text{m}$$

← Infrarouge →

✎ Contenu énergétique

$$E_{ph} = \frac{\hbar C_o}{n\lambda}$$

◆ Source et récepteur



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

Définitions des grandeurs

❖ Grandeur monochromatique

◆ Relative à un λ

❖ Grandeur totale

◆ Relative à l'ensemble du spectre

$$\int_0^{\infty} () \cdot d\lambda$$

❖ Grandeur directionnelle

◆ Relative à une direction Ox

❖ Grandeur hémisphérique

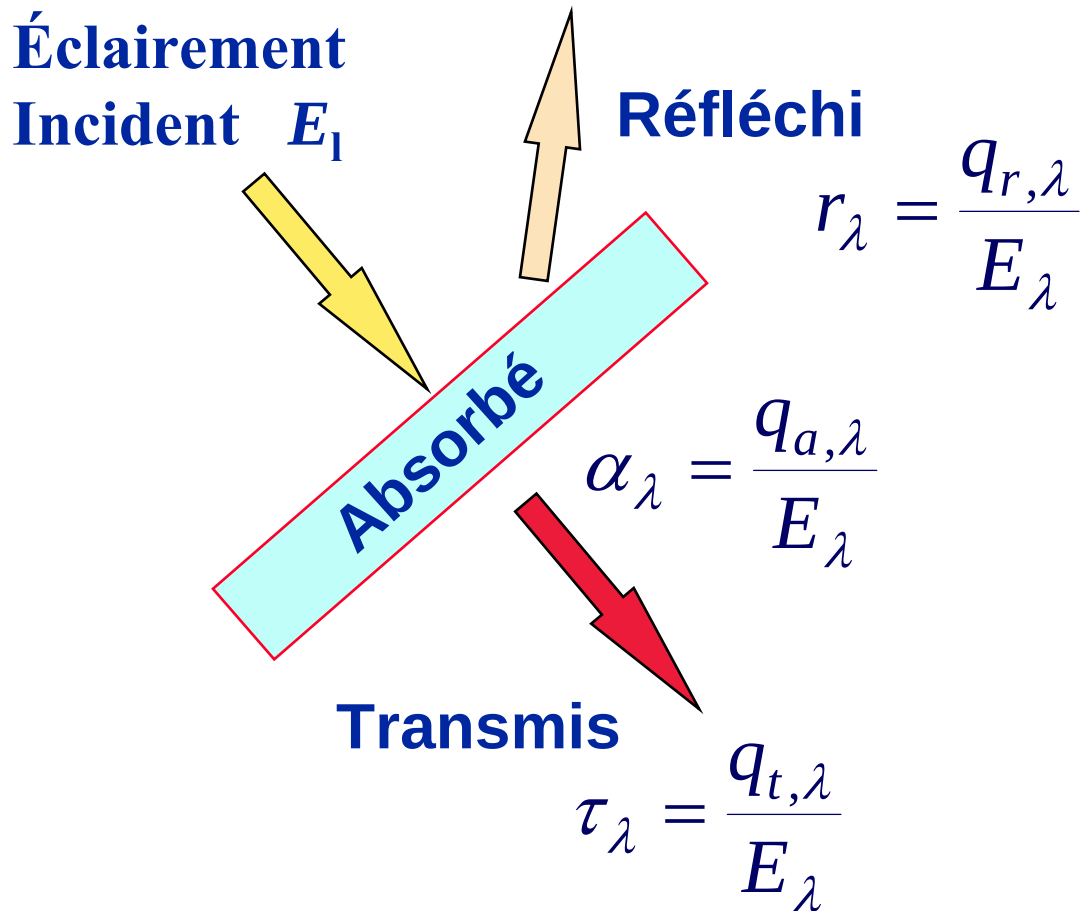
◆ Relative à l'ensemble des directions

$$\int_0^{2\pi sr} () \cdot d\Omega$$



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

Récepteur



❖ Bilan énergétique

$$\alpha_\lambda + \tau_\lambda + r_\lambda = 1$$

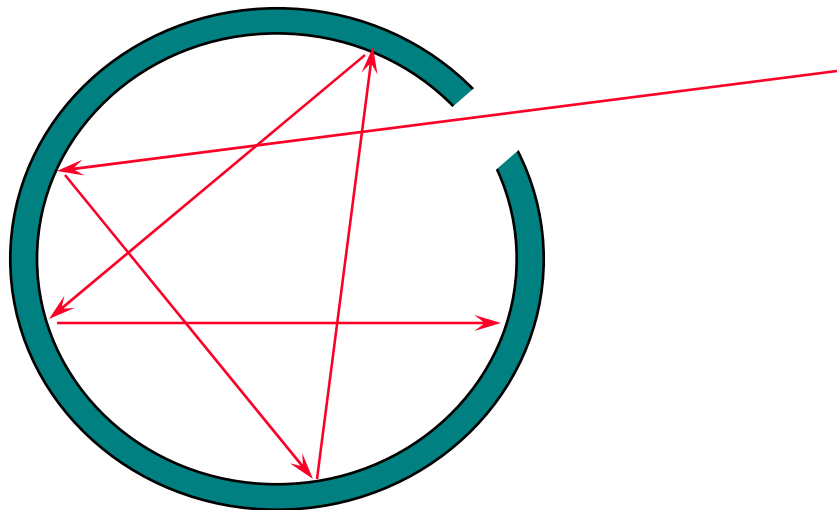


TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

Récepteur

❖ Propriétés

- ◆ Corps diathermane: $\tau_\lambda = 1$
- ◆ Corps athermane: $\tau_\lambda = 0$
- ◆ Corps noir: $\alpha_\lambda = 1$



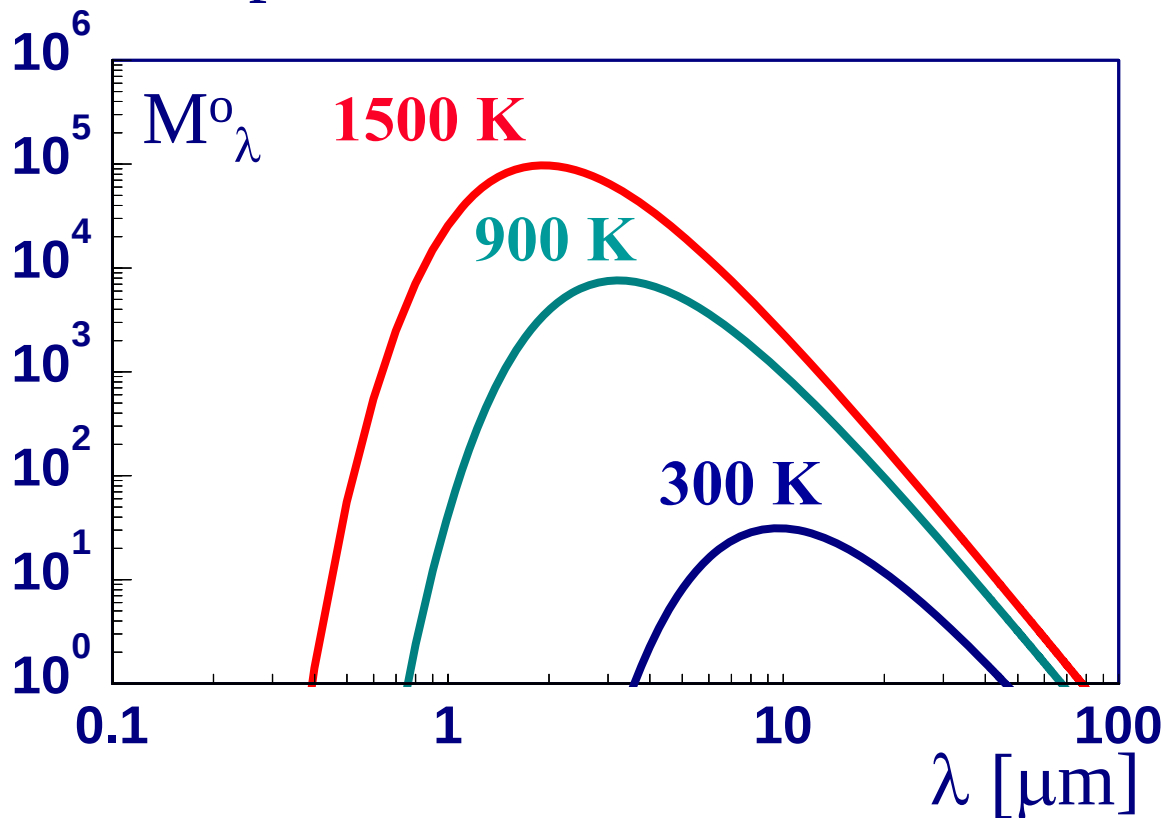
- ◆ Corps gris $\alpha_\lambda = \alpha$



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

L'émetteur

❖ Le corps noir



◆ Stefan-Boltzmann

$$M^o = \int_0^{\infty} M_{\lambda}^o d\lambda = \sigma T^4$$

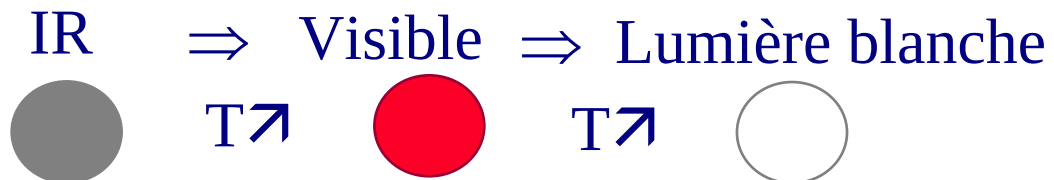
$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ [W / m}^2 \cdot \text{K}^4]$$



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

L'émission

❖ Échauffement d'un matériau

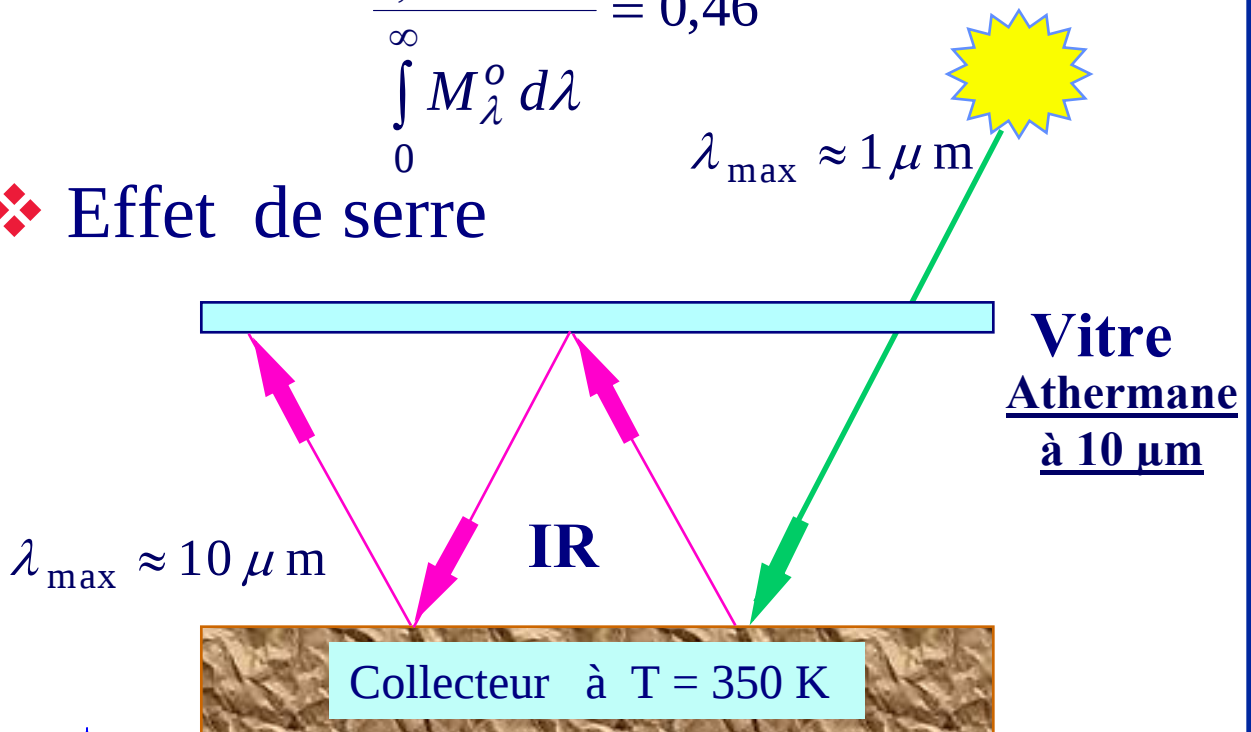


❖ Énergie solaire dans le visible

◆ $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8 \mu\text{m}$

$$\frac{\int_{0,4}^{0,8} M_{\lambda}^o d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{\lambda}^o d\lambda} = 0,46$$

❖ Effet de serre



TRANSPORT D'ENERGIE
RAYONNEMENT THERMIQUE

L'émission

❖ L'émissivité

$$0 \leq \varepsilon_{\lambda} = \frac{M_{\lambda}}{M_{\lambda}^o} \leq 1$$

◆ Loi de Kirchhoff $\alpha_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}$

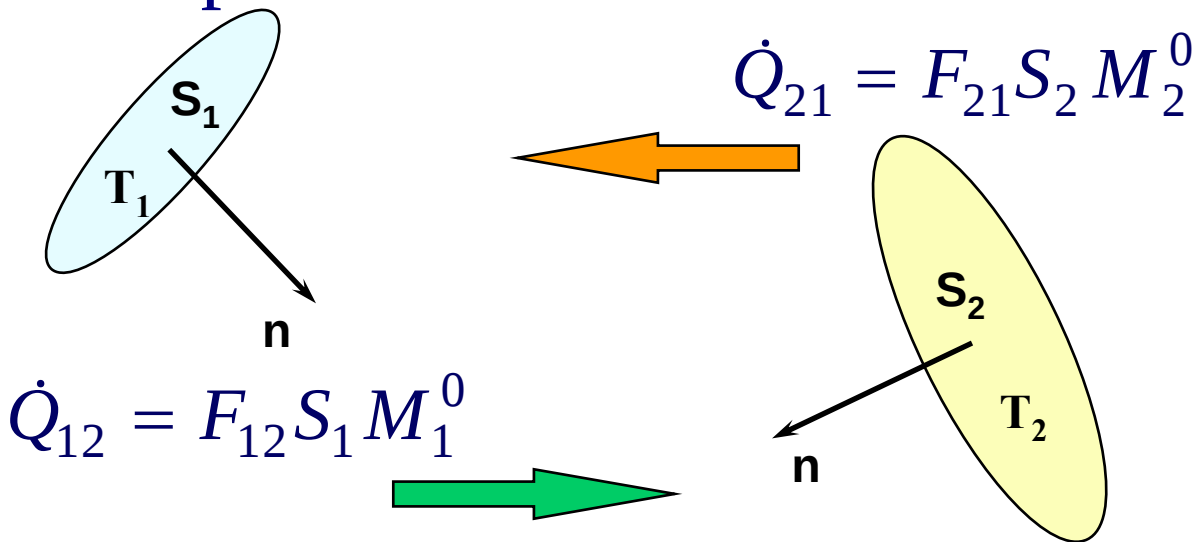
◆ Corps réel $\varepsilon(T, \lambda, \vartheta)$

◆ Corps gris $\alpha = \varepsilon$

◆ Corps noir $\alpha = \varepsilon = 1$



❖ Corps noirs



◆ Réciprocité: Facteurs de forme

$$F_{12} S_1 = F_{21} S_2$$

◆ Flux de chaleur échangé

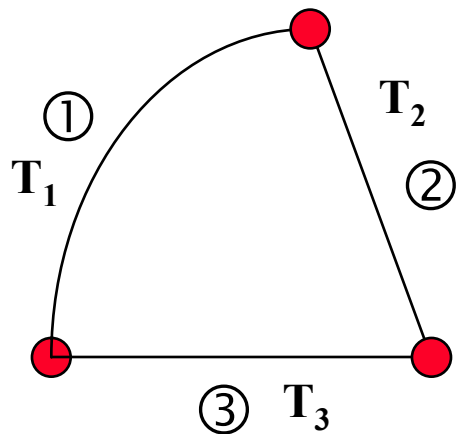
$$\Delta \dot{Q}_{12} = F_{12} S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

Cavité de corps noirs



$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1$$

❖ Flux émis par ①

$$\dot{Q}_1 = F_{11}\dot{Q}_1 + F_{12}\dot{Q}_1 + F_{13}\dot{Q}_1$$

❖ Flux reçu par ①

$$\dot{Q}_1^r = F_{11}\dot{Q}_1 + F_{21}\dot{Q}_2 + F_{31}\dot{Q}_3$$

❖ Flux net échangé par ①

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1^{net} &= F_{12}\dot{Q}_1 - F_{21}\dot{Q}_2 + F_{13}\dot{Q}_1 - F_{31}\dot{Q}_3 \\ &= F_{12}S_1M_1^0 - F_{21}S_2M_2^0 + F_{13}S_1M_1^0 - F_{31}S_3M_3^0 \end{aligned}$$

$$\dot{Q}_1^{net} = F_{12}S_1\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) + F_{13}S_1\sigma \cdot (T_1^4 - T_3^4)$$

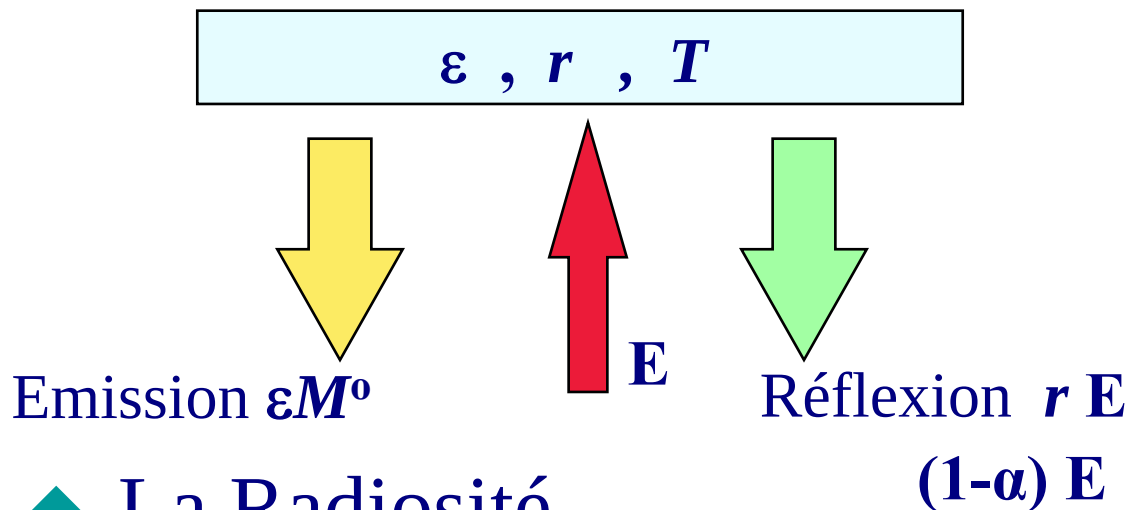


TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

Echange thermique

❖ Corps gris



◆ La Radiosité

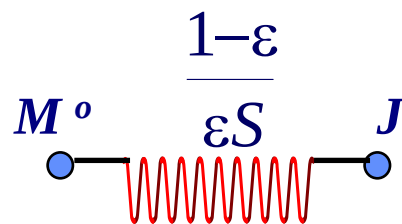
$$J = \varepsilon M^o + rE$$

$$J = \varepsilon M^o + (1 - \varepsilon)E \Rightarrow E = (J - \varepsilon M^o) / (1 - \varepsilon)$$

◆ Flux de chaleur perdu ($\alpha = \varepsilon$)

$$q_L = \varepsilon M^o - \alpha E = \varepsilon M^o - \varepsilon E$$

$$\dot{Q}_L = \frac{\varepsilon S}{1 - \varepsilon} (M^o - J)$$

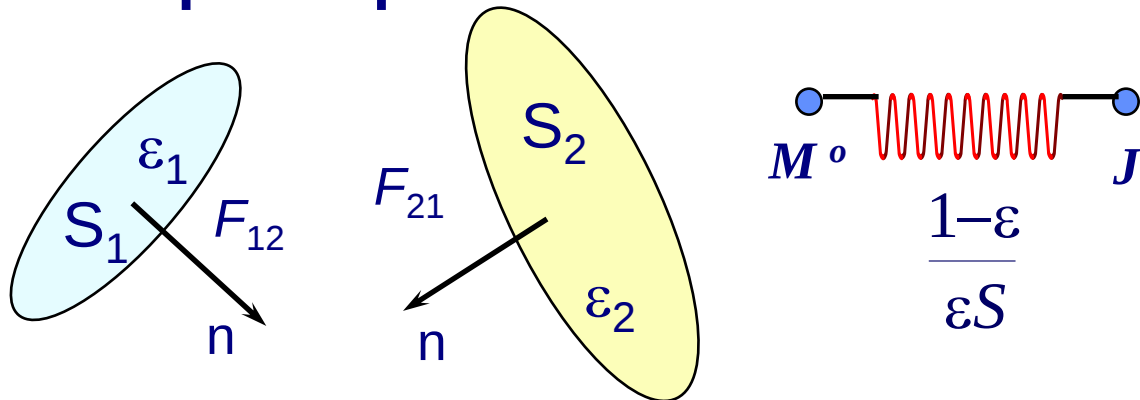


TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

Schémas analogiques

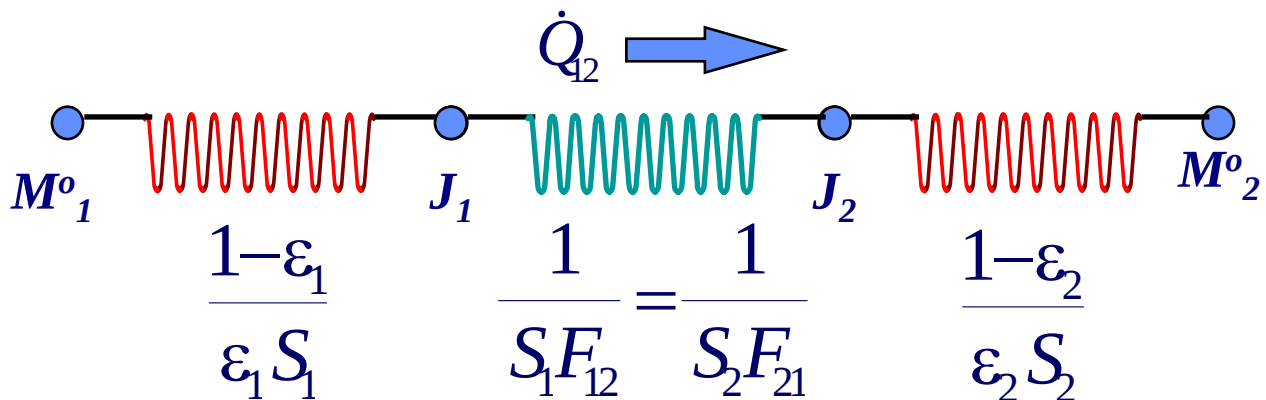
❖ Flux perdu par S



❖ Flux échangé entre S_1 et S_2

$$\dot{Q}_{12} = S_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

❖ Schéma électrique final



★ M° = Potentiel et $\dot{Q}_{12}$ = Courant

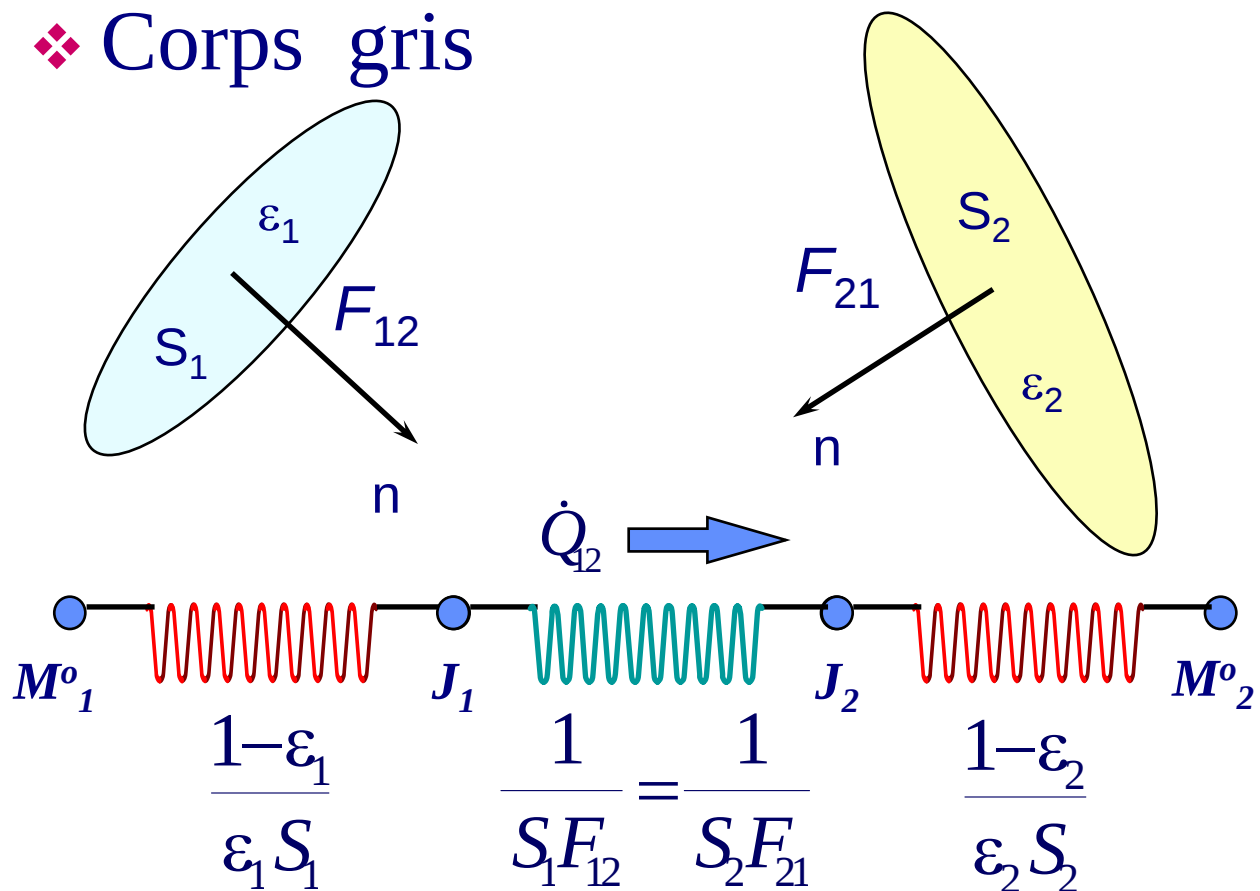


TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

Echange thermique

❖ Corps gris



◆ Flux de chaleur $M^o = \sigma T^4$

$$\dot{Q}_{12} = \frac{M_1^o - M_2^o}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$



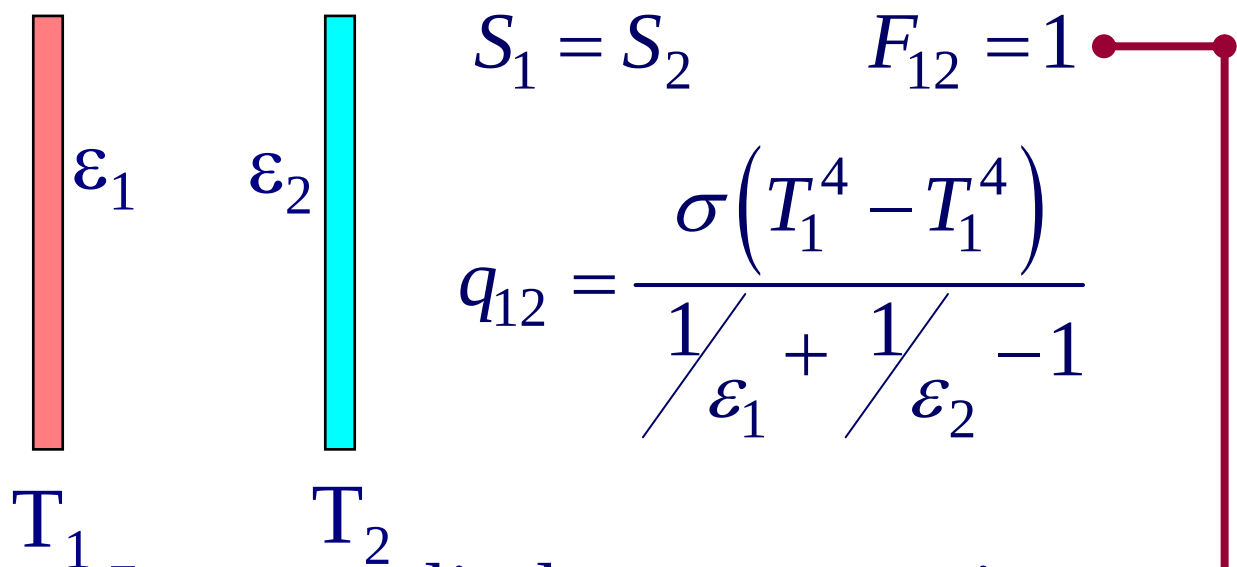
TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

Echange thermique

❖ Corps gris: Applications

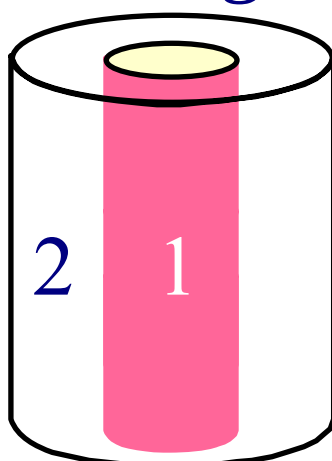
◆ Plans // infinis



$$S_1 = S_2 \quad F_{12} = 1$$

$$q_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

◆ Longs cylindres concentriques



$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

$S_2 \gg S_1$

$$q_{12} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$



- ❖ Densité de flux de chaleur

$$q_{12} = G(\varepsilon, F) \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q_{12} = h_r (T_1 - T_2)$$

- ❖ Le coefficient de transfert de chaleur

$$h_r = G(\varepsilon, F) \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$$

- ❖ Aux faibles températures

$$h_r \cong 5 - 10 \text{ W / m}^2\text{K}$$

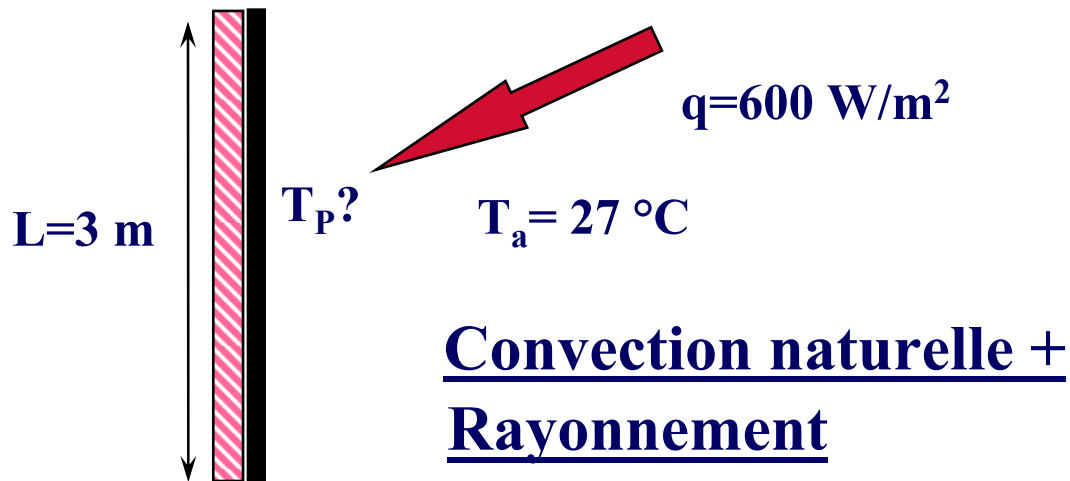
➡ Comparable aux valeurs de h_{cn}



TRANSPORT D'ENERGIE

Rayonnement Thermique

■ PANNEAU SOLAIRE



❖ Procédure itérative

👉 $T_f^{(1)} = 48 \text{ °C} \rightarrow \text{Prop. Thermo-Phy.}$

👉 $h_c^{(1)} = 7,4 \text{ et } h_r^{(1)} = 7,2 \text{ W/m}^2.\text{K}$

👉 $T_p^{(1)} = q/h_t^{(1)} + T_a = 68,1 \text{ °C}$

👉 $T_f^{(2)} = 0.5(T_p^{(1)} + T_a) = 45,6 \text{ °C} \rightarrow \text{Prop}$

👉 $h_c^{(2)} = 7,44 \text{ et } h_r^{(2)} = 7,13 \text{ W/m}^2.\text{K}$

👉 $T_p^{(2)} = q/h_t^{(2)} + T_a = 68,2 \text{ °C}$

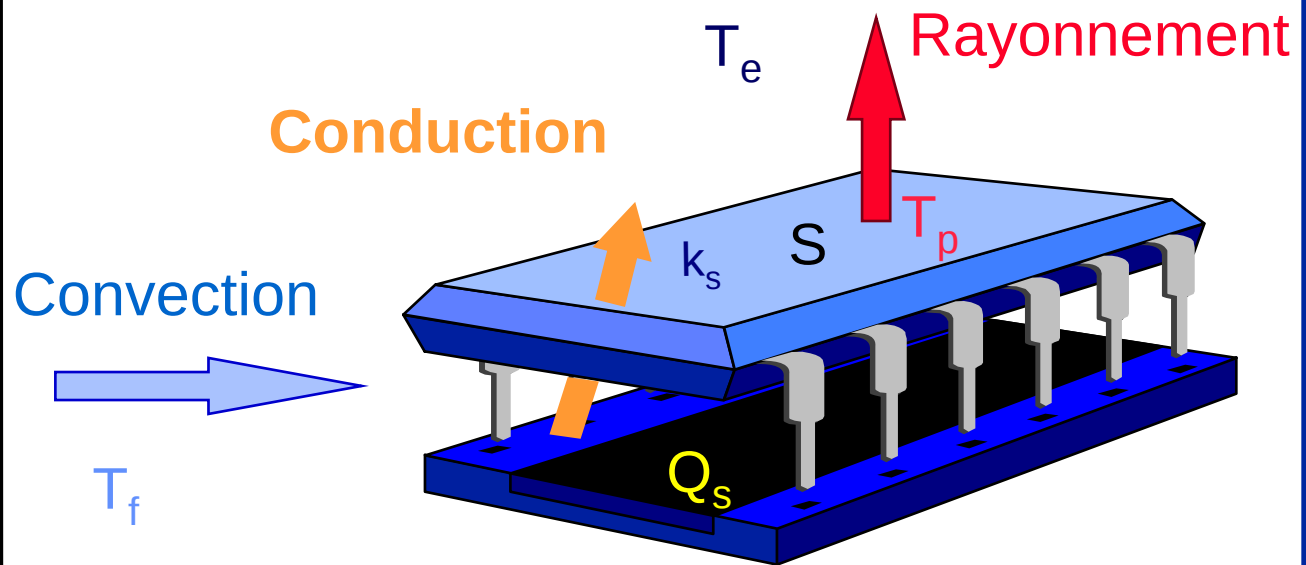
👉 $T_{p \text{ sans rayonnement}} = 110 \text{ °C} !!!$



TRANSPORT D'ENERGIE

Transfert de Chaleur

Les trois modes



Bilan Energétique

$$-k_s S \frac{dT}{dy} \Big|_p = h_{cv} \cdot S (T_p - T_f) + G(\varepsilon, F) \sigma S (T_p^4 - T_e^4)$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

❖ Formes locales et intégrales

◆ Énergie totale

☞ Puissance des forces extérieures

◆ Énergie mécanique

☞ Puissance des forces internes

Travail  *Chaleur*
Irréversibilité

◆ Énergie interne

◆ Entropie



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

❖ Grandeurs physiques

👉 Vitesse	$\vec{V}$
👉 Pression	P
👉 Masse volumique	ρ
👉 Température	T

❖ 1^{er} Principe de la Thermodynamique

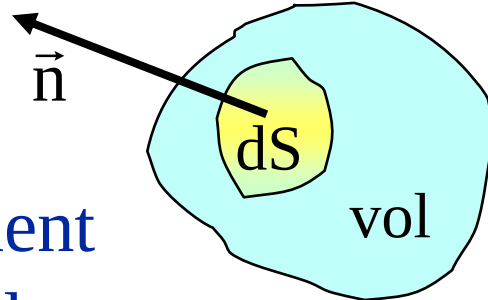
$$\frac{DE_T}{Dt} = \frac{D}{Dt} [E_I + E_c] = \dot{Q} + \overline{\dot{W}}$$

👉 Énergie interne	E_I
👉 Énergie cinétique	E_c
👉 Chaleur/temps	$\dot{Q}$
👉 Travail/temps	$\overline{\dot{W}}$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie



❖ Fluide en mouvement

◆ Énergie par unité de masse

👉 e_I et $e_C = \frac{1}{2}V^2$

$$\frac{DE_T}{Dt} = \int_{vol} \rho \frac{D}{Dt} \left[e_I + \frac{1}{2} V^2 \right] d(vol)$$

◆ Quantité de chaleur

👉 Conduction + Source

$$\dot{Q} = - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_{vol} \dot{Q}_v d(vol)$$

Soit

$$\dot{Q} = - \int_{vol} \left[\nabla \cdot \vec{q} - \dot{Q}_v \right] d(vol)$$



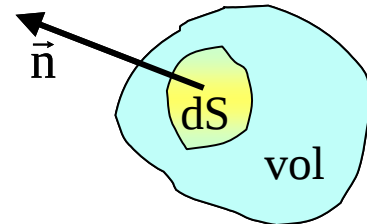
TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

❖ Puissance des forces extérieures

◆ Forces de surface

$$\overline{\dot{W}_{fs}} = - \int_S (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} dS$$



👉 Décomposition des contributions

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (P \vec{V}) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V})$$

◆ Forces de volume

$$\overline{\dot{W}_{fv}} = \int_{vol} \rho \vec{F} \vec{V} d(vol)$$

◆ Puissance totale

$$\overline{\dot{W}_e} = - \int_{vol} \left[\nabla \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{V}) - \rho \vec{F} \vec{V} \right] d(vol)$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

❖ Équation de l'énergie totale

$$\begin{aligned}
 &\text{Énergie totale} && \frac{DE_T}{Dt} \\
 &= \\
 &\text{Interne + Cinétique} && \rho \frac{D}{Dt} \left[e_I + \frac{1}{2} V^2 \right] \\
 &= \\
 &\text{Chaleur par diffusion} && -\nabla \cdot \vec{q} \\
 &+ \\
 &\text{Puissance due à la pression} && -\nabla \cdot (p \vec{V}) \\
 &+ \\
 &\text{Puissance due à la viscosité} && -\nabla \cdot (\bar{\tau} \vec{V}) \\
 &+ \\
 &\text{Puissance des forces de volume} && \rho \vec{F} \vec{V} \\
 &+ \\
 &\text{Sources thermiques} && \dot{Q}_v
 \end{aligned}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

L'Énergie Mécanique

L' Irréversibilité

❖ Quantité de mouvement x Vitesse

$$\rho \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{V^2}{2} \right] = -\vec{V} \nabla P - \vec{V} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{F} \vec{V}$$

❖ Contribution des forces de surface

$$\vec{V} \nabla p = \nabla \cdot (p \vec{V}) - p \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \vec{V}) - \bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{V}$$

❖ Forme Finale

Produit diadique

Puissance des forces externes

$$\frac{\rho}{2} \frac{DV^2}{Dt} = \overbrace{\rho \vec{F} \vec{V} - \nabla \cdot (p \vec{V}) - \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \vec{V})}^{\text{Puissance des forces externes}} + \underbrace{p \nabla \cdot \vec{V} + \bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{V}}_{\text{Puissance des forces internes}}$$

Puissance des forces internes



TRANSPORT D'ENERGIE

L'Énergie Mécanique

L' Irréversibilité

❖ Énergie mécanique $\leftrightarrow$ Chaleur

$$p \nabla \cdot \vec{V} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \geq 0$$

◆ Fluide compressible

👉 Compression $\Rightarrow e_c \searrow \Rightarrow T \nearrow$

👉 Détente $\Rightarrow e_c \nearrow \Rightarrow T \searrow$

❖ Dissipation visqueuse $\rightarrow$ Chaleur

$$\phi_v = -\frac{1}{\mu} [\bar{\tau} : \nabla \vec{V}] > 0$$

👉 Dégradation de E_c

👉 2^{ème} Principe de la Thermodynamique



TRANSPORT D'ENERGIE

L'Énergie Mécanique

Énergie de dissipation visqueuse

❖ Fonction de dissipation

$$-\mu\phi_v = \nabla \cdot \left(\bar{\tau} \bar{\vec{V}} \right) - \bar{\vec{V}} \nabla \cdot \bar{\tau}$$

❖ Champ de vitesse:

$$\bar{\vec{V}} = [u(y), 0]$$

❖ Tenseur des contraintes visqueuses

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

❖ Résultat

$$-\mu\phi_v = \frac{d}{dy} (u\tau_{xy}) - u \frac{d}{dy} (\tau_{xy})$$

◆ Soit

$$\phi_v = -\frac{\tau_{xy}}{\mu} \frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$



TRANSPORT D'ENERGIE

L'Énergie Mécanique

❖ Équation de l'énergie mécanique

$$\text{Énergie mécanique} = \rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{V^2}{2} \right]$$

$$\text{Puissance des forces extérieures} \left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (p \vec{V}) \\ -\nabla \cdot (\bar{\tau} \vec{V}) \\ + \rho \vec{F} \vec{V} \end{array} \right.$$

+

$$\text{Puissance des forces internes} \left\{ \begin{array}{l} p \nabla \cdot \vec{V} \\ + \bar{\tau} : \nabla \vec{V} \end{array} \right.$$



TRANSPORT D'ENERGIE

L'Énergie Interne

❖ Énergie totale – Energie mécanique

$$\rho \frac{De_I}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} - p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \phi_v + \dot{Q}_v$$

◆ + Loi de Fourier

$$\rho \frac{De_I}{Dt} = \nabla \cdot [k \nabla T] - p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \phi_v + \dot{Q}_v$$

❖ Équation de la chaleur

◆ Gaz Parfaits $\partial e_I = C_V \partial T$

$$\rho C_V \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot [k \nabla T] - p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \phi_v + \dot{Q}_v$$

◆ Fluides incompressibles avec $k = C^{te}$

$$\rho C \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \phi_v + \dot{Q}_v$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

Grandeur extensive mX

❖ Masse $X = 1$

❖ Quantité de mouvement $\vec{X} = \vec{V}$

❖ Énergie totale $X = \frac{V^2}{2} + e_I$

❖ Énergie mécanique $X = \frac{V^2}{2}$

❖ Énergie thermique $X = e_I$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

Équation du transport

$$\rho \frac{DX}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{\phi} + A$$

Variation
(Taux + Advection)

Flux de diffusion
(Surface)

Source
(Volume)

Terme	Mouvement	Energie
X	Vecteur $\vec{V}$	Scalaire E
ϕ	Tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$	Vecteur $\vec{q}$
A	Vecteur $\vec{F}$	Scalaire $\vec{V} \cdot \vec{F}$

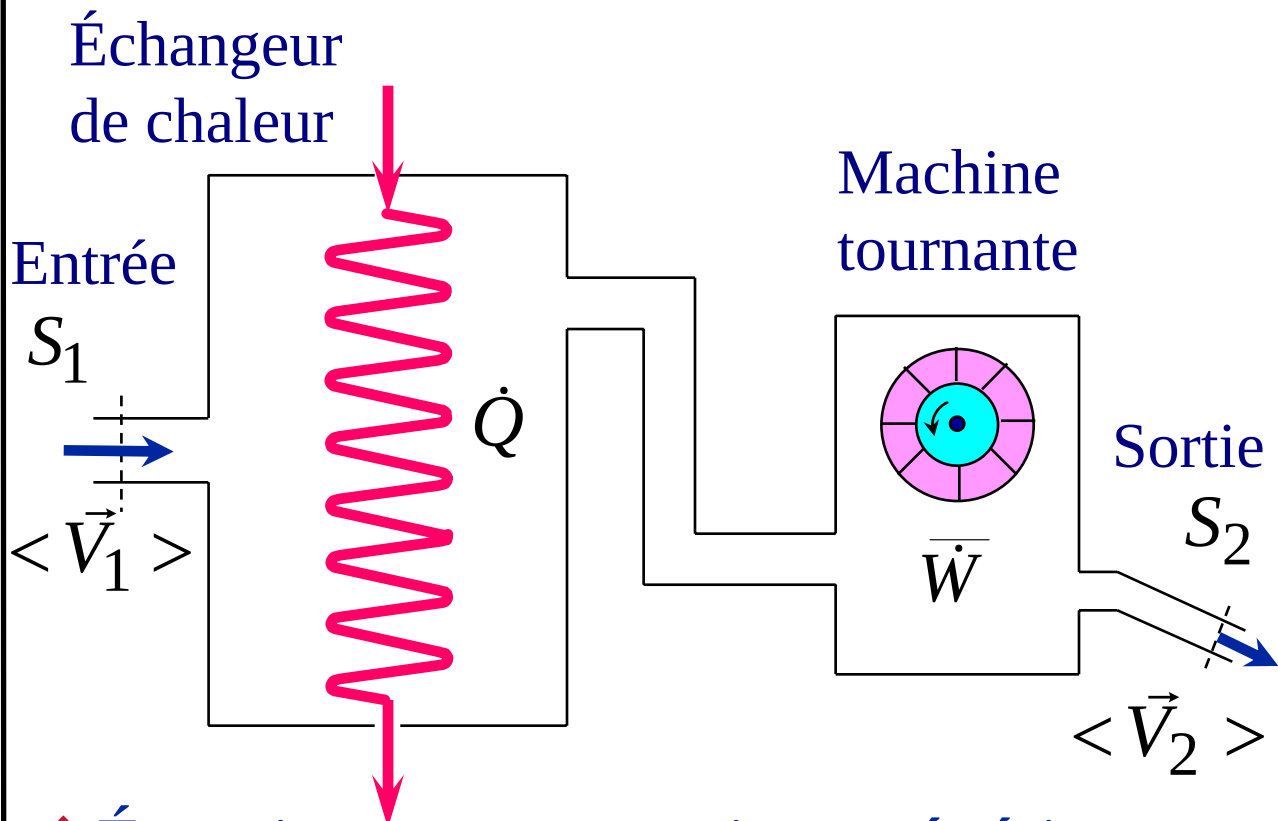


TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

Définition du système



❖ Équation macroscopique générique

$$\frac{d[mX]_{\text{tot}}}{dt} = \Delta_1^2 \left(\langle \rho X V_n \rangle S \right)$$

$$- \int_S \varphi \cdot \vec{n}_e dS + A_{\text{tot}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

❖ Énergie totale

$$X = e_{\text{tot}} = e_i + e_c$$

◆ Puissance des forces extérieures

$$\bar{\dot{W}}_{e,\text{tot}} = \int_{\text{vol}} \left[-\nabla \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{V}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{V} \right] d(\text{vol})$$

◆ Quantité de chaleur

$$\dot{Q} = - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n}_e dS + \int_{\text{vol}} \dot{Q}_v d(\text{vol})$$

◆ Équation macroscopique: N°1

$$\frac{d[E_T]_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[\left\langle \rho \left(\frac{V^2}{2} + e_i \right) V_n \right\rangle S \right] + \dot{Q} + \bar{\dot{W}}_{e,\text{tot}}$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

❖ Énergie totale

◆ Puissance des forces de surface

$$\int_S (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n}_e dS = -\Delta_1^2 [< P V_n > S]$$

$$+ \int_{S_{mob}} (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n}_e dS$$


 $\dot{W}$

◆ Puissance des forces de volume

$$\int_{vol} \rho \vec{F} \vec{V} d(vol) = - \int_{vol} \rho \vec{V} \nabla e_p d(vol)$$

$$= - \int_{vol} \rho \frac{De_p}{Dt} d(vol)$$

$$= - \frac{d[E_p]_{tot}}{dt} - \int_S \rho e_p \vec{V} \cdot \vec{n}_e dS$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Conservation de l'énergie

Forme intégrale

❖ Énergie totale: forme finale

$$\frac{d[E_c + E_i + E_p]_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[\left\langle \rho \left(\frac{V^2}{2} + H + e_p \right) V_n \right\rangle S \right] + \dot{Q} + \bar{\dot{W}}$$

◆ Enthalpie massique

$$H = e_i + \frac{P}{\rho}$$

☞ Gaz parfait $\Delta H = C_p \Delta T$

☞ Liquide $\Delta H = C \Delta T + \frac{\Delta P}{\rho}$



TRANSPORT D'ENERGIE

Energie Mécanique

Forme intégrale

❖ Écriture générale

$$\frac{d[E_c + E_p]_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[\left\langle \rho \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + e_p \right) V_n \right\rangle S \right] + \bar{\dot{W}} - \dot{E}_v + \int_{\text{vol}} p \nabla \cdot \vec{V} d(\text{vol})$$

◆ Terme d'irréversibilité

$$\dot{E}_v = \int_{\text{vol}} \mu \phi_v d(\text{vol})$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Énergie Mécanique

Forme intégrale

❖ Forme simplifiée

◆ Écoulement incompressible permanent

◆ Cas de la conduite

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\dot{W}} = 0$$

◆ Équation de Bernoulli généralisée

$$-\Delta_1^2 \left[\left\langle \rho \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + e_p \right) V_n \right\rangle S \right] = \dot{E}_v$$

◆ Puissance de la pompe

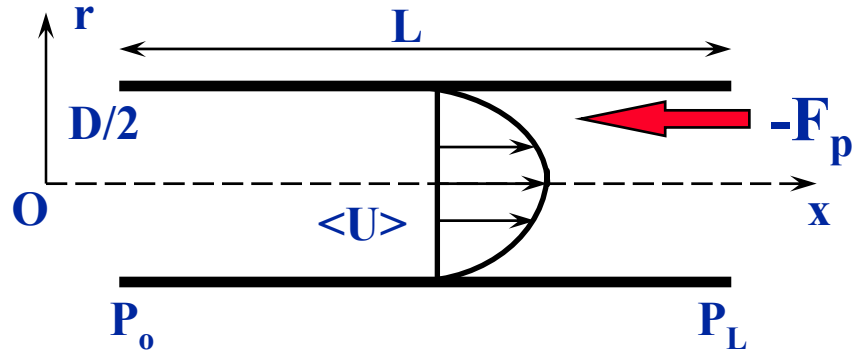
$$\dot{W}_{\text{pompe}} = -\Delta_1^2 \left[\left\langle \left(\frac{P_{\text{tot}}}{\rho} \right) \right\rangle \dot{m} \right] = \dot{E}_v$$



TRANSPORT D'ENERGIE

Énergie Mécanique

Énergie de dissipation visqueuse



❖ Quantité de Mouvement

◆ $S_1 = S_2$ et $\langle U_1 \rangle = \langle U_2 \rangle$

$$F_p = (P_o - P_L) S$$

◆ $\Delta P = 0,5 \lambda \rho \langle U \rangle^2 L / D$

❖ Énergie Mécanique

$$\dot{E}_v = (P_o - P_L) \frac{\dot{m}}{\rho}$$

◆ Puissance Dissipée

$$\dot{E}_v = \frac{\pi D L}{8} \cdot \lambda(\text{Re}, \bar{\Lambda}) \rho \langle U \rangle^3$$



TRANSPORT D'ENERGIE

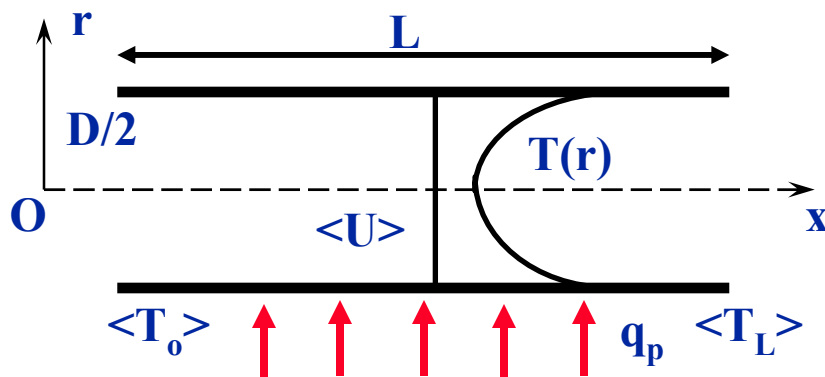
Énergie Interne

Forme intégrale

❖ Écriture générale

$$\frac{d[E_i]_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta_1^2 [\langle \rho e_i V_n \rangle S] + \dot{Q} + \dot{E}_v - \int_{\text{vol}} p \nabla \cdot \vec{V} \cdot d(\text{vol})$$

❖ Cas de l'échangeur tubulaire; $e_i = C.T$



$$\rho \langle U \rangle \frac{\pi D^2}{4} C \Delta_0^L [\langle T \rangle] = \pi D L \dot{q}_p + \dot{E}_v$$

