

PHENOMENES DE TRANSPORT

PHENOMENES DE TRANSPORT

MECA-H-300

Cours : 20 leçons

Exo : 8 séances de 2 heures

Jean-Marie BUCHLIN

Institut von Karman de Dynamique des Fluides
Rhode Saint Genèse



VKI - ULB

OBJECTIFS

- **Compréhension des principes
physiques**
- **Etablissement des lois fondamentales**
- **Présentation des modèles**
- **Applications**
 - ☞ **Problèmes d'ingénierie**



LES TROIS FONDAMENTAUX

● Quantité de Mouvement: Partie I

☞ Ecoulement de fluide

- Viscosité μ

$$\longrightarrow \frac{d\vec{V}}{dx}$$

● Energie: Partie II

☞ Matière au repos - en mouvement

- Conductivité thermique k

$$\longrightarrow \frac{dT}{dx}$$

☞ Rayonnement électromagnétique

● Matière: Partie III

☞ Milieu à plusieurs constituants

- Diffusivité massique $\mathcal{D}$

$$\longrightarrow \frac{dC}{dx}$$



PARTIE I

● Quantité de Mouvement

☞ _Loi de Newton

☞ Film Tombant

● Équations Générales

☞ Forme locale

☞ Forme Intégrale

● Écoulements Externes

☞ Fluides Parfaits

☞ Couche Limite

● Écoulements Internes

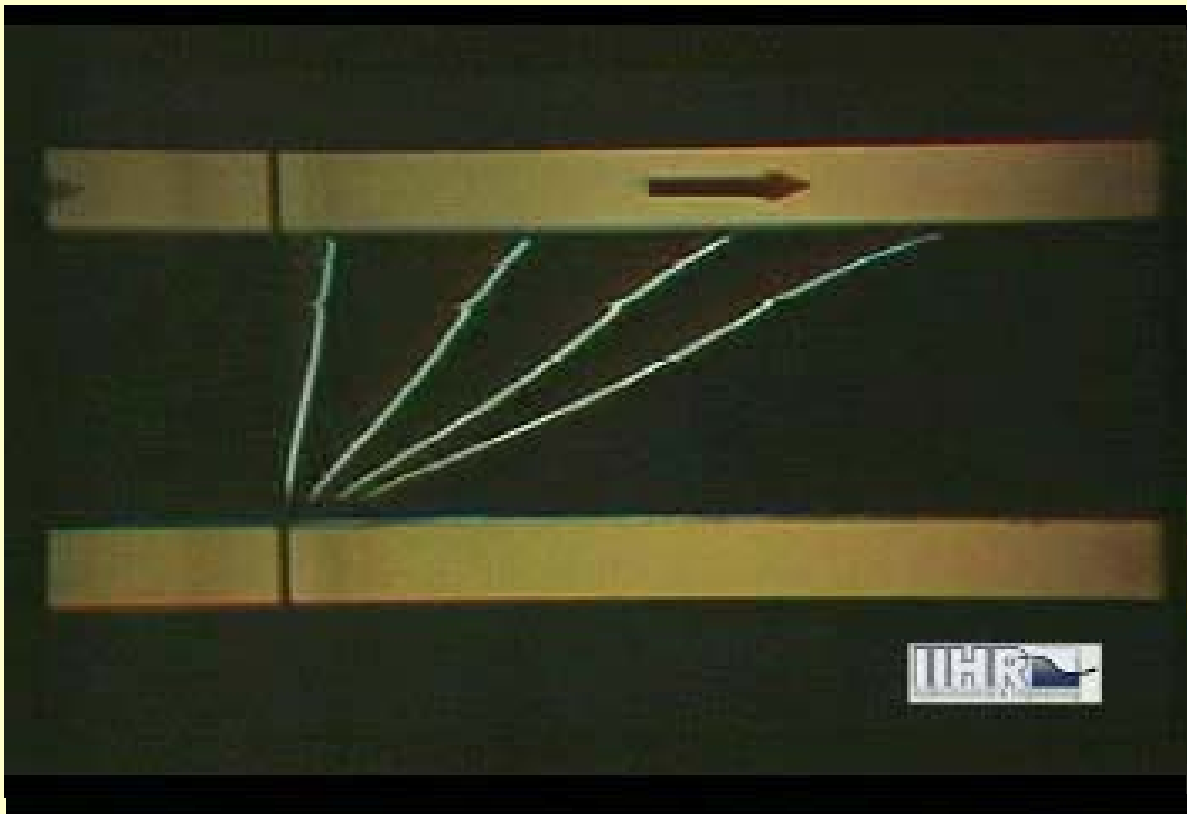
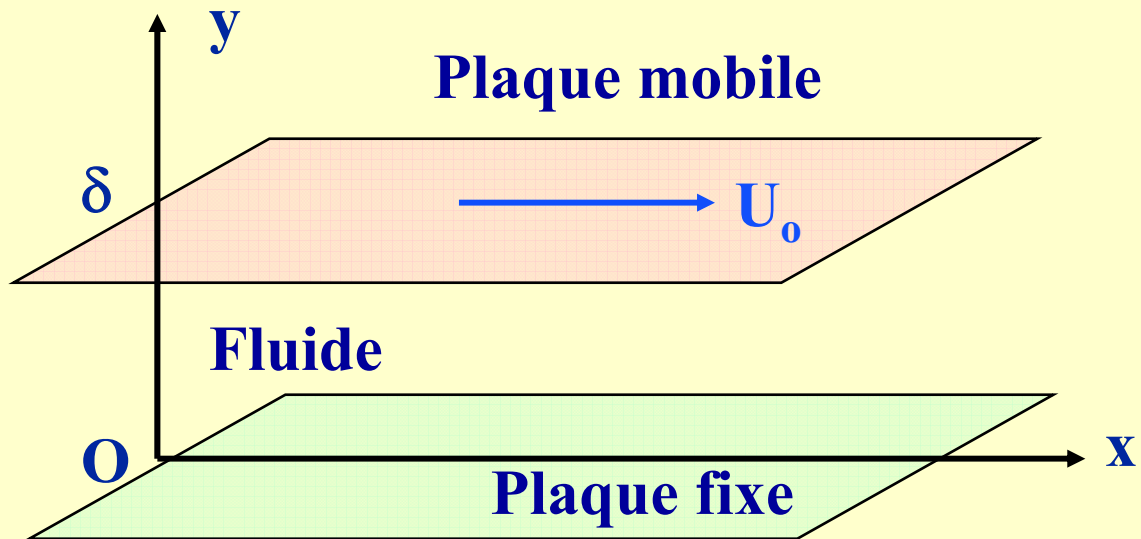
☞ Perte de Charge Régulière

☞ Perte de Charge Singulière



Quantité de Mouvement

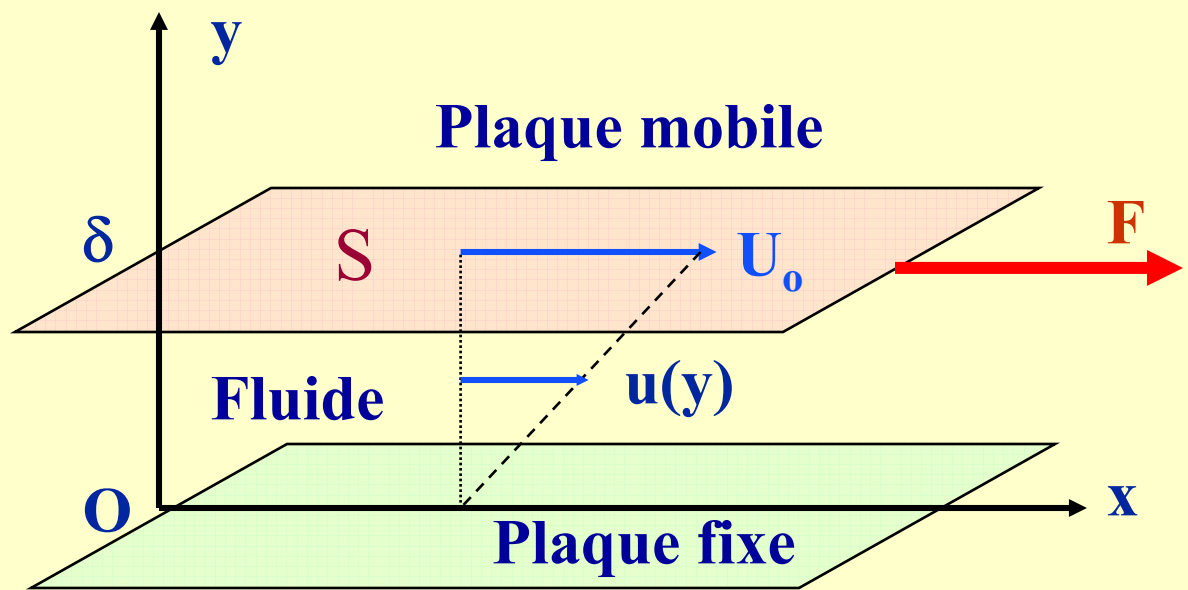
Ecoulement Plan de Couette (1)



Visualisation par injection de bulles d'hydrogène
VKI - ULB

Quantité de Mouvement

Ecoulement Plan de Couette (1)



❖ Observations

👉 Adhérence du fluide aux parois

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(\delta) = U_o$$

👉 Mouvement $\equiv$ Couches //

Profil $u(y)$



Quantité de Mouvement

Ecoulement Plan de Couette (2)

❖ Profil de vitesse linéaire

$$u(y) = U_o \frac{y}{\delta}$$

❖ Contrainte de cisaillement

$$\tau_{xy} = \frac{F}{S} \propto -\frac{U_o}{\delta}$$

Loi de Newton

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{du}{dy}$$



Quantité de Mouvement

Loi de Newton

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{du}{dy} = -\mu \dot{\gamma}$$

❖ Contrainte de cisaillement

$$\tau_{xy} \equiv [\text{N/m}^2] = [\text{Pa}]$$

❖ Vitesse de déformation

$$\dot{\gamma} \equiv [\text{s}^{-1}]$$

❖ Viscosité dynamique

$$\mu \equiv [\text{Pa.s}]$$



La Viscosité Dynamique

Ordre de grandeur

Fluide	T [°C]	μ [mPa.s]
Air	20	0,018
Eau	20	1
Mercure	20	1,5
Huile	20	100-800
Glycérine	20	1500

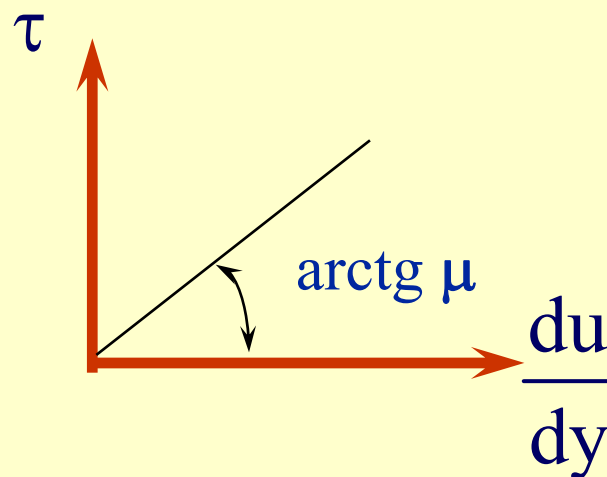
❖ Gaz

$T \nearrow \Rightarrow \mu \nearrow$

❖ Liquides

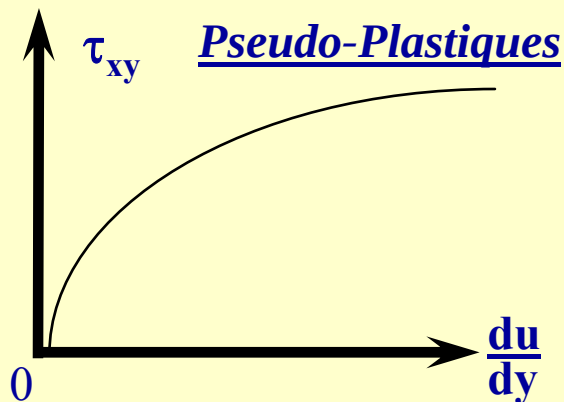
$T \nearrow \Rightarrow \mu \searrow$

Fluide Newtonien



FLUIDES NON-NEWTONIENS

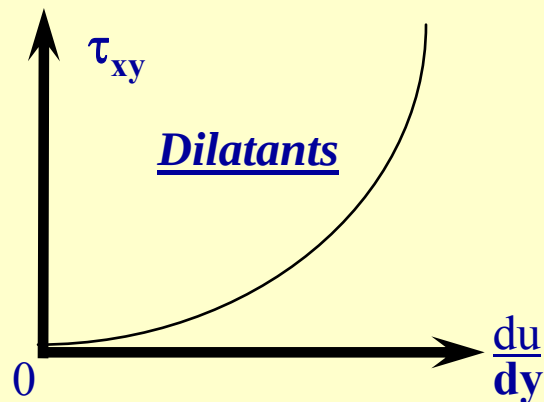
Comportement non linéaire



Gélatine, Lait, Sang
Mayonnaise, Colles,
Hauts polymères,
Suspensions de détergents...

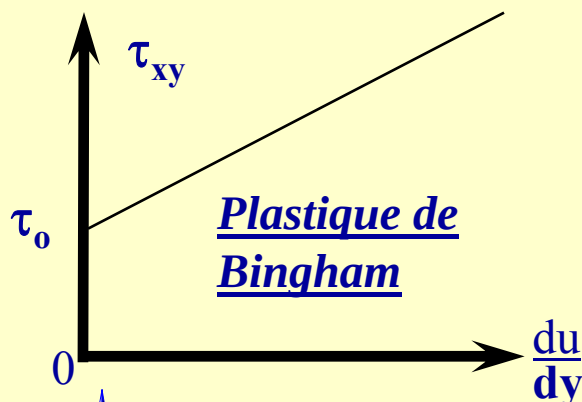
$$0 < n < 1$$
$$\tau_{xy} = K \left[\frac{du}{dy} \right]^n$$

K = consistance



Solutions de sucre,
Suspensions d'amidon
Sable mouillé.

$$n > 1$$



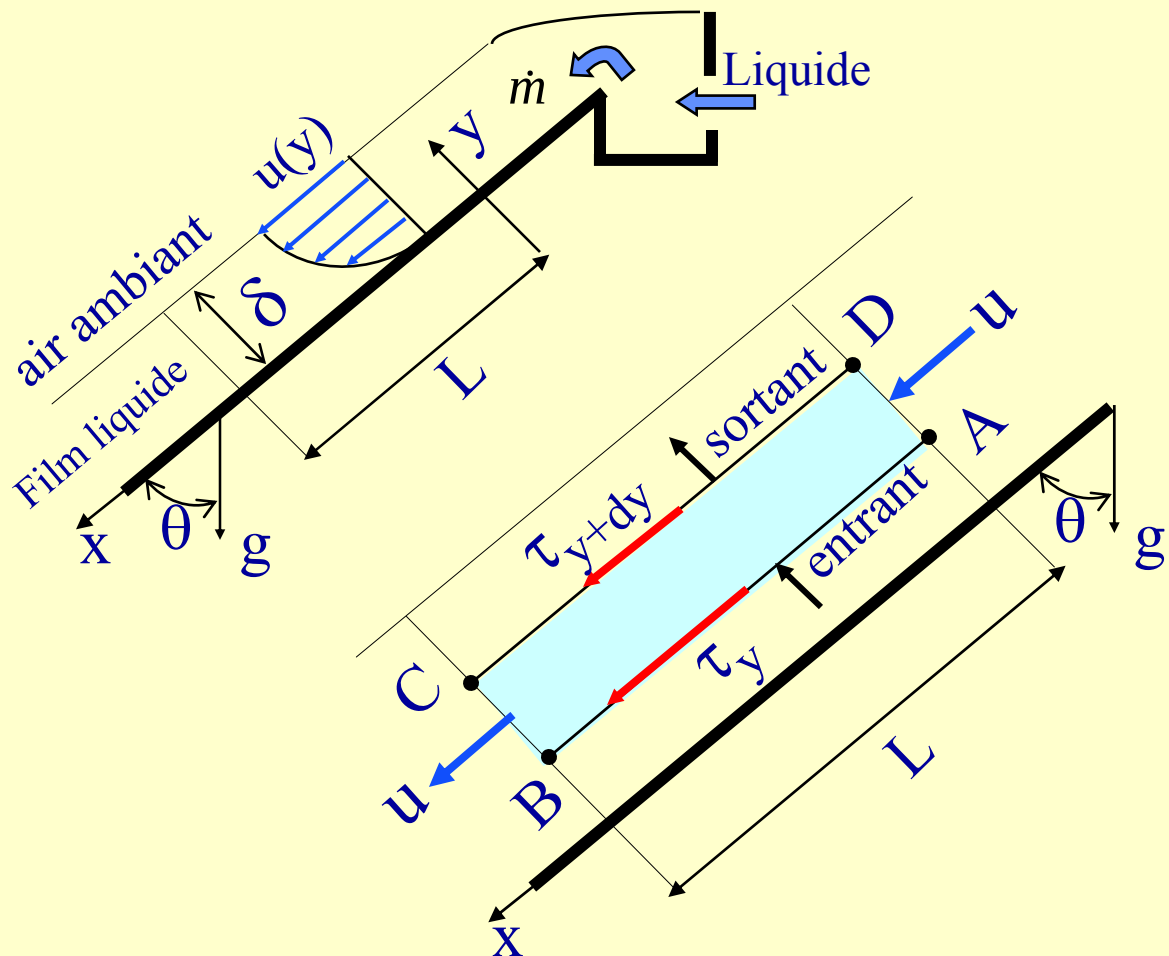
Peintures, Dentifrice,
Chocolat, Margarine,
Suspensions d'argile,
Pâte à papier

$$\tau_{xy} = \tau_o + \mu_p \frac{du}{dy}$$



Application

FILM TOMBANT (1)



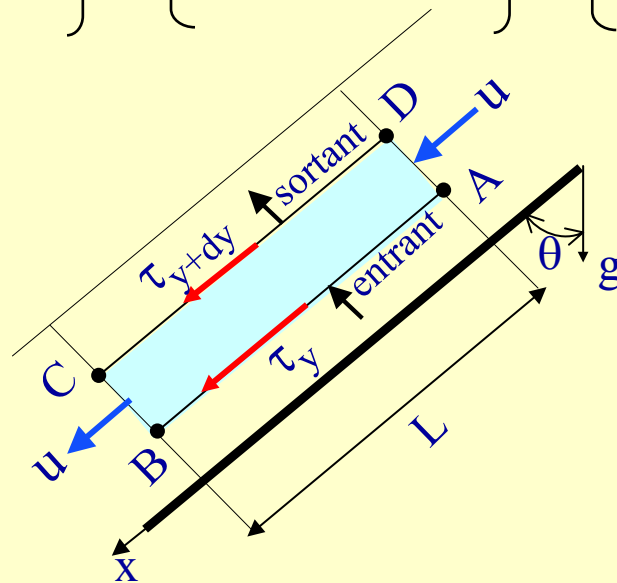
- ◆ Débit $\dot{m} = \text{constante } \forall x$
- ◆ $u \parallel \text{à la paroi} \rightarrow u(y)$



Application

FILM TOMBANT (2)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Flux de } q^t \text{ mouv} \\ \text{entrant} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Flux de } q^t \text{ mouv} \\ \text{sortant} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma \text{ forces} \\ \text{appliqués} \end{array} \right\} = 0$$



➤ Flux entrant

- ♦ Agitation moléculaire

$$\Phi_{AB}^+ = \tau|_y L$$

- ♦ Advection

$$\Phi_{AD}^+ = \rho u^2 dy$$

➤ Flux sortant

- ♦ Agitation moléculaire

$$\Phi_{CD}^- = \tau|_{y+dy} L$$

- ♦ Advection

$$\Phi_{BC}^- = \rho u^2 dy$$



Application

FILM TOMBANT (3)

❖ Quantité de mouvement: Bilan

$$\left\{ \Phi_{AB}^+ - \Phi_{CD}^- + \cancel{\Phi_{AD}^+} - \cancel{\Phi_{BC}^-} \right\} + F_P = 0$$

◆ Force appliquée

$$F_P = \rho g \cos(\theta) L dy$$

◆ Bilan

$$\tau|_y L - \tau|_{y+dy} L + \rho g \cos(\theta) L dy = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \cos(\theta)$$



Application

FILM TOMBANT (4)

❖ Equation différentielle

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \cos(\theta)$$

❖ Profil de la contrainte

◆ à $y = \delta$ $\tau=0$

$$\tau = \{\rho g \cos(\theta)\}(y - \delta)$$

◆ Contrainte pariétale

$$|\tau_{\max}| = \rho g \delta \cos(\theta)$$



Application

FILM TOMBANT (5)

❖ **Loi de Newton:** *Fluide newtonien*

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho g \cos(\theta)}{\mu} (\delta - y)$$

❖ **Profil de vitesse:** à $y = 0$, $u=0$

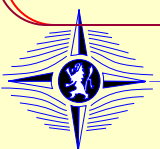
$$u = \left\{ \frac{\rho g \delta^2 \cos(\theta)}{2\mu} \right\} \left(2 - \frac{y}{\delta} \right) \frac{y}{\delta}$$

❖ **Débit**

$$\dot{m} = \rho \int_0^{\delta} u dy = \rho \left[\frac{\rho g \delta^3 \cos(\theta)}{3\mu} \right]$$

❖ **Vitesse débitante**

$$\langle u \rangle = \frac{\dot{m}}{\rho \delta} = \left[\frac{\rho g \delta^2 \cos(\theta)}{3\mu} \right]$$



Application

FILM TOMBANT (6)

Paramètres de similitude (1)

$$\left[\frac{\rho \langle u \rangle \delta}{\mu} \right]^{-1} * \left[\frac{\langle u \rangle^2}{\delta g \cos(\theta)} \right] = \frac{1}{3}$$

❖ Le nombre de REYNOLDS

$$Re = \frac{\rho \langle u \rangle \delta}{\mu} = \frac{\langle u \rangle \delta}{\nu}$$

Force d'inertie / Force de viscosité

◆ Viscosité cinématique : $\nu = \mu/\rho$

❖ Le nombre de FROUDE

$$Fr = \frac{\langle u \rangle^2}{\delta g \cos(\theta)}$$

Force d'inertie / Force de pesanteur



Application

FILM TOMBANT (7)

Paramètres de similitude (2)

❖ Corrélation

$$Re = 3Fr$$

❖ Coefficient de frottement

$$C_f = \frac{\tau_{\max}}{\frac{1}{2}\rho \langle u \rangle^2} = \frac{6}{Re} = \frac{2}{Fr}$$

◆ Pression dynamique

$$P_{dyn} = \frac{1}{2}\rho \langle u \rangle^2$$



PHENOMENES DE TRANSPORT
RÉSUMÉ 1

❖ Quantité de Mouvement

☞ Expérience de Couette

☞ Théorie Cinétique des Gaz

➤ **LOI DE NEWTON**

$$\vec{\tau} = -\mu \nabla \vec{U}$$

❖ Viscosité

☞ Fluides Newtoniens $\mu = C^{te}$

☞ Fluides Non-Newtoniens $\mu \neq C^{te}$

❖ Application : Film Tombant

☞ Nombres Adimensionnels

➤ **Reynolds et Froude**

➤ **Coefficient de Frottement**



Equations GENERALES

❖ **Forme locale**

- ➡ **Équation de continuité**
- ➡ **Équation de Navier-Stokes**
- ➡ **Nombres de Similitude**

❖ **Forme Intégrale**

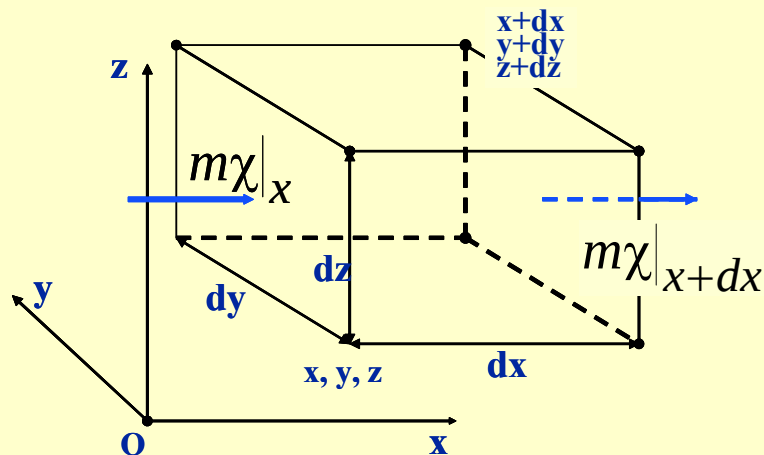
- ➡ **Système macroscopique**
- ➡ **Masse**
- ➡ **Quantité de Mouvement**
- ➡ **Applications**



EQUATION GENERALE DE LA CONSERVATION

Forme Locale

❖ Volume de contrôle fixe



❖ Équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

❖ Équation de Navier-Stokes ($\rho = C^{te}$)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \cdot (\bar{\bar{P}} + \mu \nabla \vec{V}) + \rho \vec{F}$$

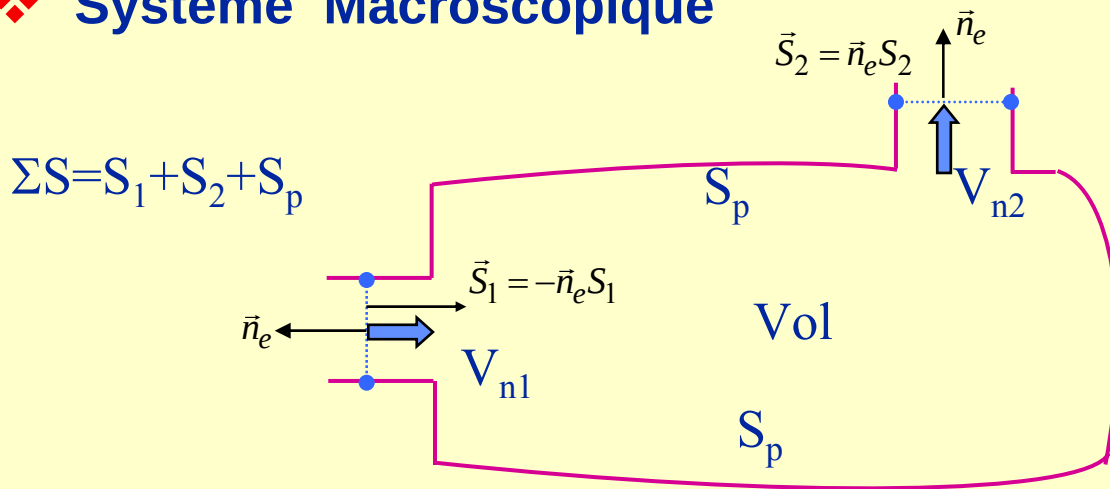


PHENOMENES DE TRANSPORT

EQUATIONS GENERALES

Formes Intégrales

❖ Système Macroscopique



❖ Equation générique

$$\rho \frac{D\chi}{Dt} = -\nabla \cdot \phi + Y$$

☛ Transport (Advection) $\int_{Vol} \rho \frac{D\chi}{Dt} dVol$

Théorème de la divergence

☛ Diffusion $\int_{Vol} -\nabla \cdot \phi dVol = \int_{\Sigma S} -\phi \cdot \vec{n}_e dS$

☛ Source $\int_{Vol} Y dVol$



PHENOMENES DE TRANSPORT

EQUATIONS GENERALES

Formes Intégrales

❖ **Transport**

$$\int_{\text{Vol}} \rho \frac{D\chi}{Dt} d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} \left[\frac{\partial \rho \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \chi) \right] d\text{Vol}$$

◆ **Volume fixe**

$$\int_{\text{Vol}} \frac{\partial \rho \chi}{\partial t} d\text{Vol} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\text{Vol}} \rho \chi d\text{Vol} \right) = \frac{d[m\chi]_{\text{tot}}}{dt}$$

◆ **Utilisation du Théorème de la Divergence**

$$\int_{\text{Vol}} \rho \frac{D\chi}{Dt} d\text{Vol} = \frac{d[m\chi]_{\text{tot}}}{dt} + \int_{\Sigma S} \rho \chi \vec{V} \cdot \vec{n}_e dS$$



PHENOMENES DE TRANSPORT EQUATIONS GENERALES

Formes Intégrales

❖ Terme 'Flux'

$$\int_{Vol} -\nabla \cdot \varphi dVol = - \int_{\Sigma S} \varphi \cdot \vec{n}_e dS$$

❖ Terme 'Source'

$$Y_{tot} = \int_{Vol} Y dVol$$

❖ Equation de conservation

Taux de variation

Source

$$\frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} = - \int_{\Sigma S} (\rho\chi\vec{V} + \varphi) \cdot \vec{n}_e dS + Y_{tot}$$

Flux de surface



PHENOMENES DE TRANSPORT EQUATIONS GENERALES

Formes Intégrales

❖ Equation de conservation

$$\frac{d[m\chi]_{\text{tot}}}{dt} = - \int_{\Sigma S} (\rho\chi\vec{V} + \varphi) \cdot \vec{n}_e dS + Y_{\text{tot}}$$

👉 $\vec{V} = 0$ à la paroi fixe (S_p)

👉 Moyenne sur la section

$$\langle \rho\chi V_n \rangle S = \int_S \rho\chi \vec{V} \cdot \vec{n}_e dS$$

👉 Opérateur ' Différence '

$$\Delta_1^2 = \langle \dots \rangle_2 S_2 - \langle \dots \rangle_1 S_1$$

❖ Forme finale

$$\begin{aligned} \frac{d[m\chi]_{\text{tot}}}{dt} + \Delta_1^2 (\langle \rho\chi V_n \rangle S) = \\ - \int_{\Sigma S} \varphi \cdot \vec{n}_e dS + Y_{\text{tot}} \end{aligned}$$



PHENOMENES DE TRANSPORT
EQUATIONS GENERALES
Formes Intégrales

❖ **Conservation de la masse**

☞ $\chi = 1, \quad \varphi = 0 \text{ et } Y=0$

$$\frac{d[m\chi]_{\text{tot}}}{dt} = \langle \rho\chi V_n \rangle_1 S_1 - \langle \rho\chi V_n \rangle_2 S_2 \\ = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

Débit massique [kg/s] = $\dot{m}$

☞ **Etat stationnaire**

$$\langle \rho V_n \rangle_1 S_1 = \langle \rho V_n \rangle_2 S_2$$

☞ **Apport / Retrait de masse**

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_{\text{ad}}$$



PHENOMENES DE TRANSPORT EQUATIONS GENERALES

Formes Intégrales

❖ Conservation de la quantité de mouvement

👉 $\chi = \vec{V}$; $\varphi = \bar{\bar{\sigma}}$ et $Y = \vec{F}$ (ex : $\vec{g}$)

👉 Action du fluide sur la paroi: Force $\vec{F}_p$

$$-\int_{S_p} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}_e dS = \vec{F}_p$$

👉 Effets visqueux faibles en S_1 et S_2

$$-\int_S \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}_e dS = -\Delta_1^2 [\langle P \rangle S] + \vec{F}_p$$

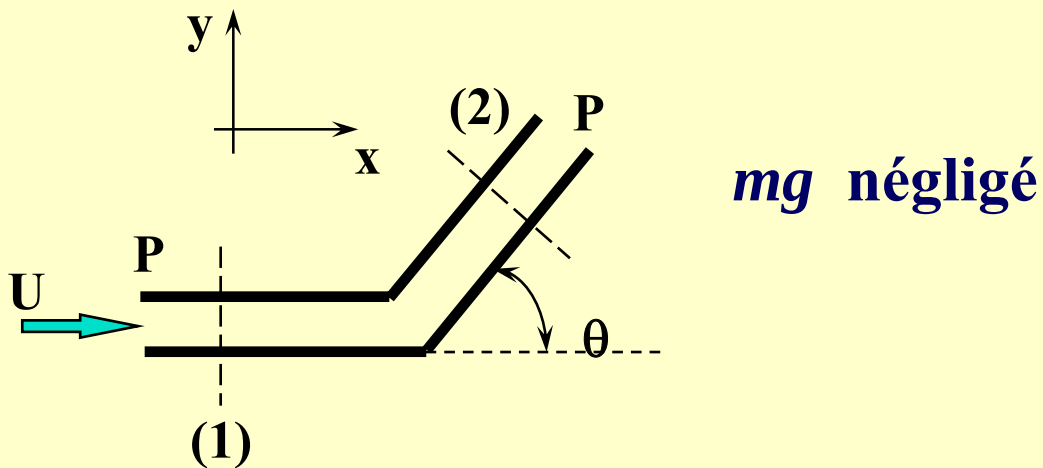
👉 Quantité de mouvement totale $\vec{P}_{\text{tot}}$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta_1^2 [\langle \rho V^2 \rangle + P] \vec{S} - \vec{F}_p + m_{\text{tot}} \vec{g}$$



Equation Macroscopique de la Quantité de Mouvement

Force sur un Coude (1)



$$\vec{F}_p = -\Delta_1^2 [\rho U^2 + P] \vec{S} + m_{tot} \vec{g}$$

❖ Composante suivant Ox

$$F_{p,x} = \rho U^2 S (1 - \cos \theta)$$

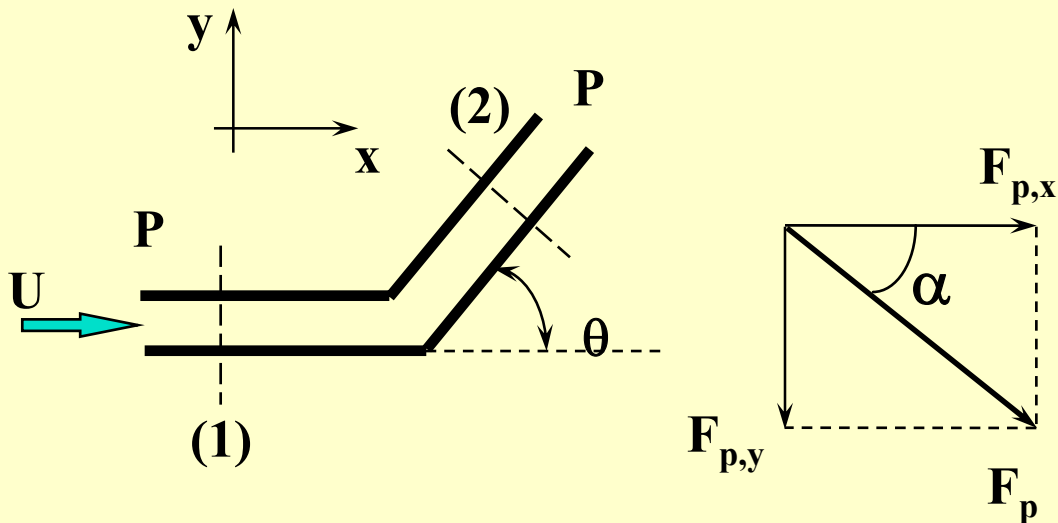
❖ Composante suivant Oy

$$F_{p,y} = -\rho U^2 S \sin \theta$$



Equation Macroscopique de la Quantité de Mouvement

Force sur un Coude (2)



❖ Angle d'Inclinaison α

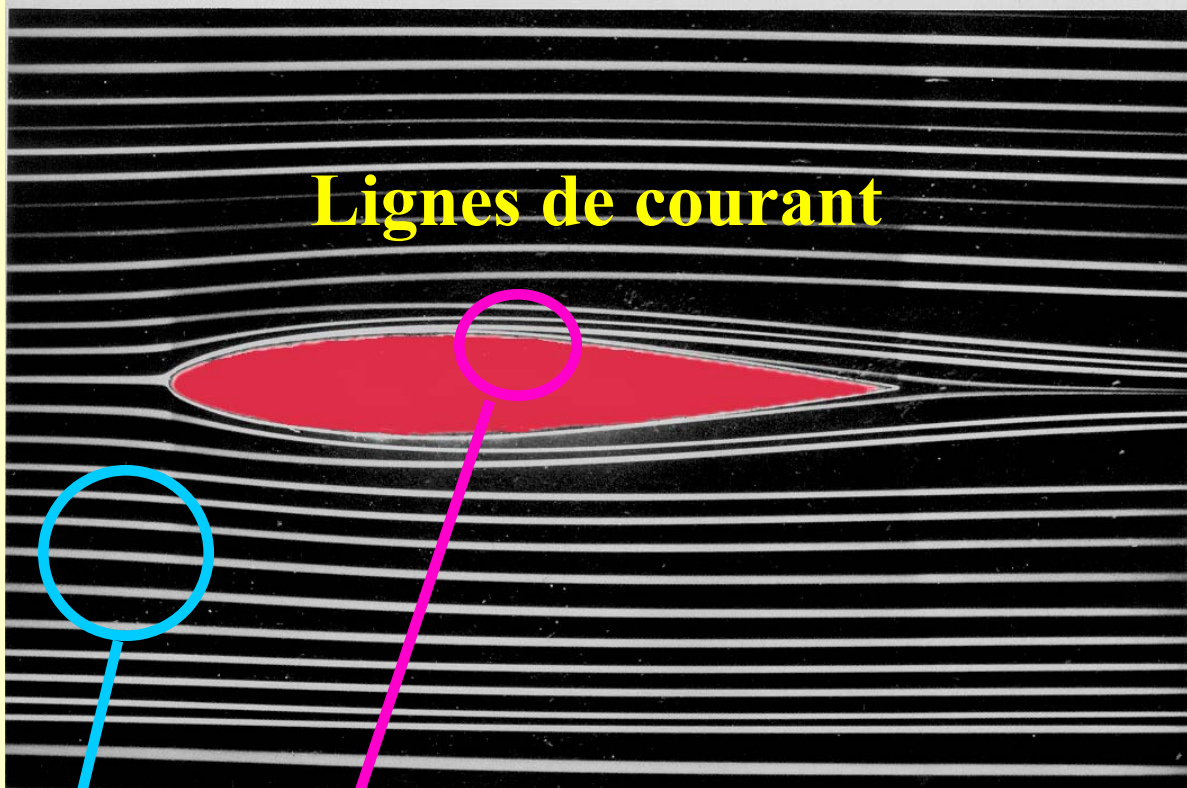
$$\tan \alpha = \frac{F_{p,y}}{F_{p,x}} = \frac{-\sin \theta}{(1 - \cos \theta)}$$

❖ Module de la Force

$$\frac{|\vec{F}_p|}{\rho U^2 S} = \frac{\sqrt{F_{p,x}^2 + F_{p,y}^2}}{\rho U^2 S} = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$



Écoulements Externes



❖ Effet visqueux faible
➡ Équation de Bernoulli

❖ Effet visqueux important
➡ Couche Limite



FLUIDES PARFAITS

❖ Effets Visqueux Négligés: $\mu \equiv 0$

◆ Équation d'Euler

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \cancel{\mu \nabla^2 \vec{V}} + \rho \vec{F}$$

❖ Forces de Volume: $\vec{F} = -\nabla \phi$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla (P + \rho \phi) \quad \phi = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

❖ Équation de l'Énergie Cinétique

$$\rho \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\boxed{\vec{V} \cdot \nabla (P + \rho \phi)}$$

❖ Fluide incompressible & État stationnaire

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho \frac{V^2}{2} + P + \rho \phi \right) = 0$$



FLUIDES PARFAITS

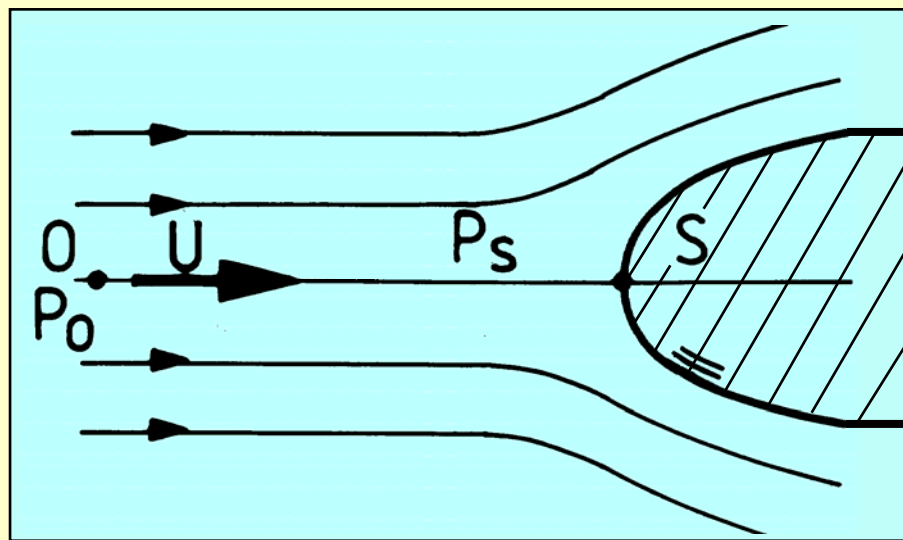
❖ Équation de Bernoulli N ° 1

Le long d'une ligne de courant

$$\rho \frac{V^2}{2} + P + \rho \phi = C^{\text{te}} = P_{\text{tot}}$$

❖ Mesure de la Pression Totale

◆ Point de Stagnation

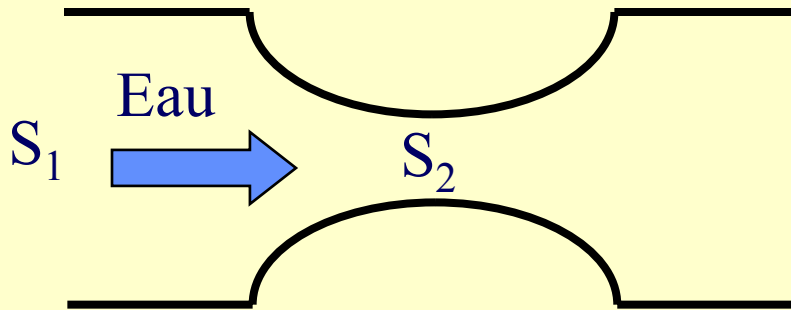


$$P_S = \rho \frac{U^2}{2} + P_o$$



CAVITATION DES LIQUIDES

Localement $P < \text{tension de vapeur ?}$



❖ Écoulement unidirectionnel

👉 Équation de continuité

$$\rho U_1 S_1 = \rho U_2 S_2$$

👉 Équation de Bernoulli

$$P_2 + \rho \frac{U_2^2}{2} = P_1 + \rho \frac{U_1^2}{2}$$

👉 Pression au col

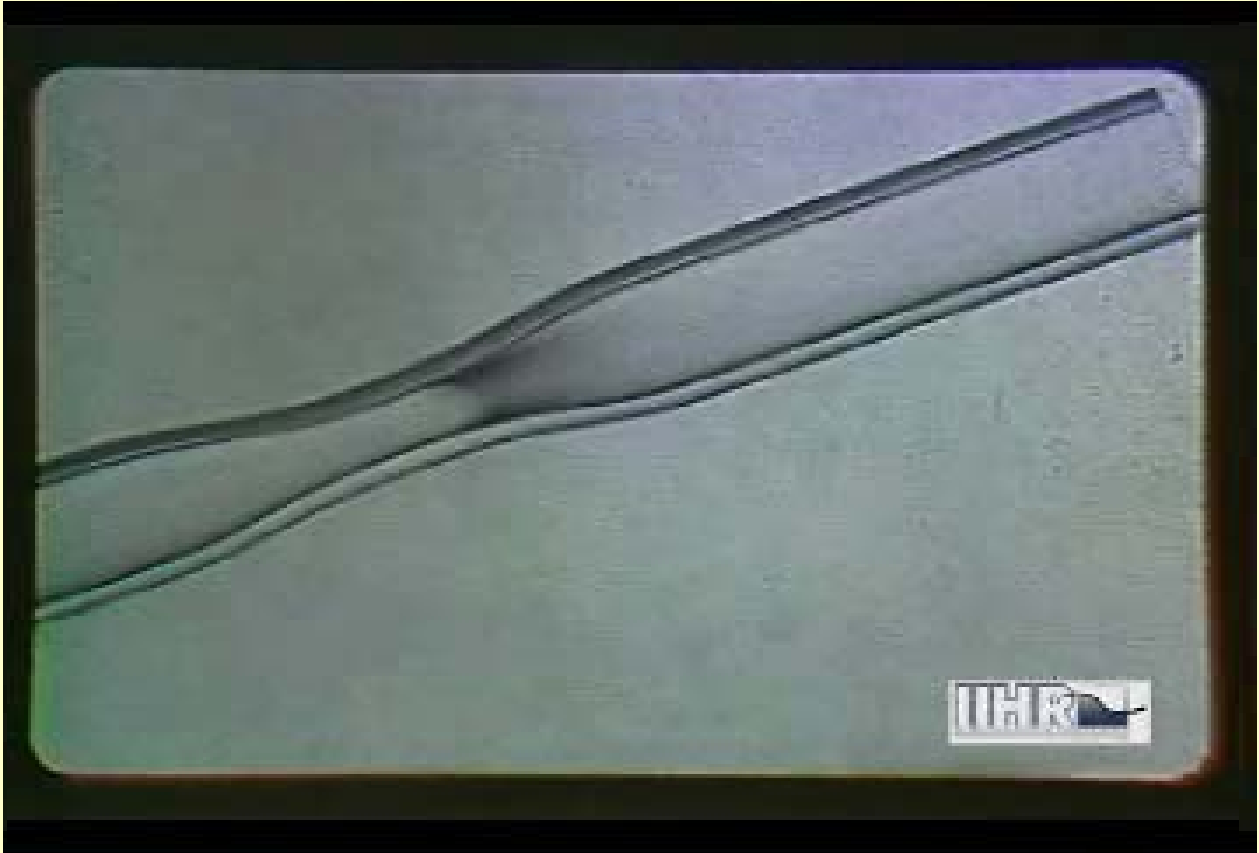
$$P_2 = P_1 - \rho \frac{U_1^2}{2} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Selon P_1 , U_1 , $S_1/S_2 \Rightarrow P_2$ peut être $< P_v$



CAVITATION

Expérience du Tube de Venturi



- ➡ Bulles de vapeur au col
- ➡ Éq. de Bernoulli validée

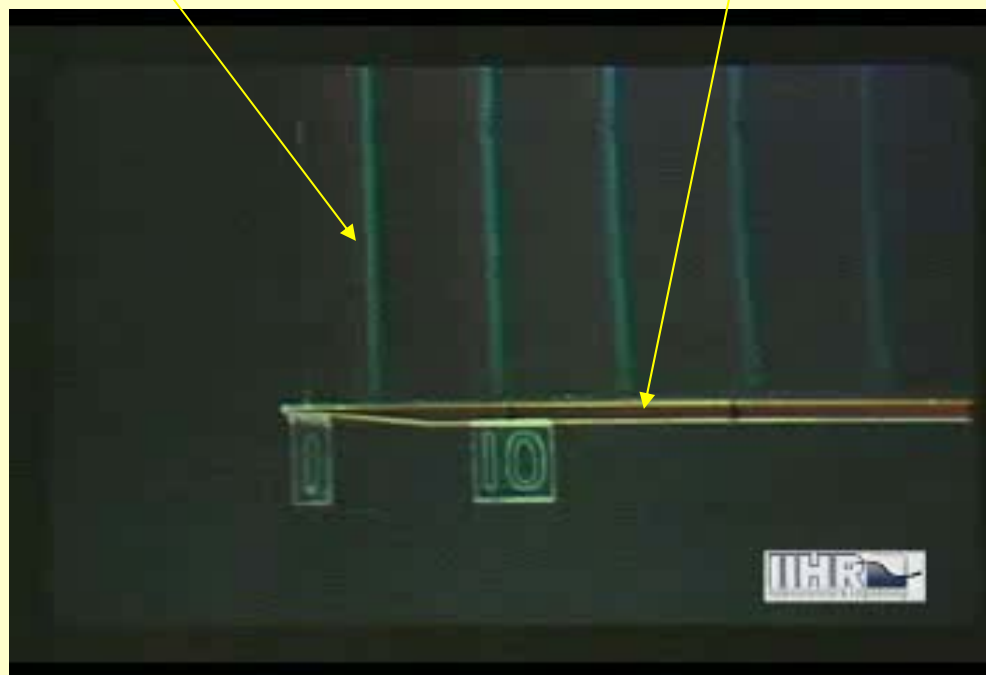
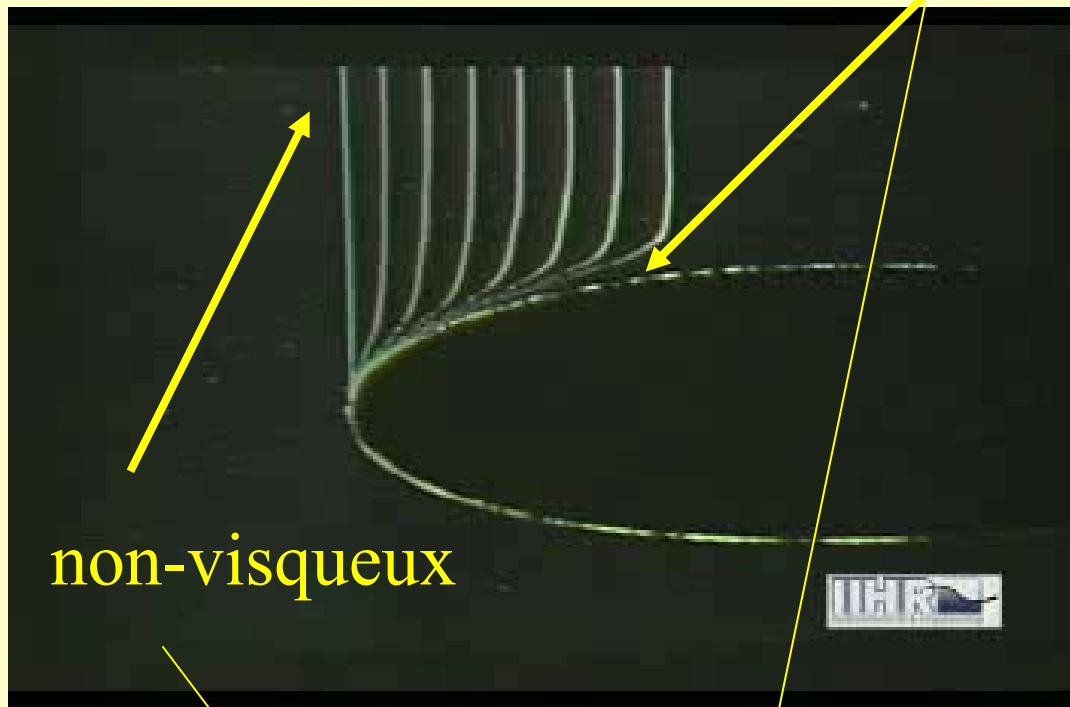


PHENOMENES DE TRANSPORT

Écoulements EXTERNES aux grands Re

LA COUCHE LIMITE

Couche limite $\equiv$ Écoulement visqueux

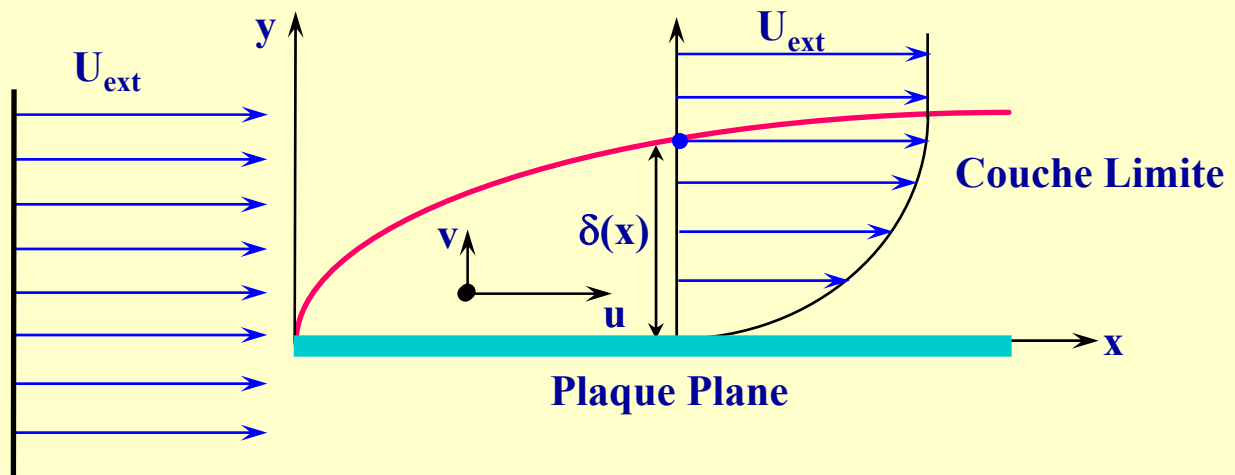


VKI - ULB

Visualisation par injection de bulles d'hydrogène

LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

❖ Le Concept



❖ L'Épaisseur δ ($\approx$ plan oscillant)

$$\delta \propto \sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu \frac{x}{U_{ext}}}$$

❖ L' Effet du nombre de Reynolds

$$\frac{\delta}{x} \propto \sqrt{\frac{\nu}{U_{ext} x}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \ll 1$$



❖ **Conservation de la Masse**

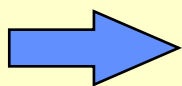
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

◆ **Normalisation**

$$\begin{aligned} \frac{U_{\text{ext}}}{L} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y} &= -\frac{V_{\text{ref}}}{\delta} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} \\ &= -\frac{V_{\text{ref}}}{\delta} [\tilde{v}]_0^1 \end{aligned}$$

◆ **Ordre de Grandeur**

$$\frac{V_{\text{ref}}}{U_{\text{ext}}} \cdot \frac{L}{\delta} = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y} = O[1]$$



$$V_{\text{ref}} \cong U_{\text{ext}} \frac{\delta}{L} \ll U_{\text{ext}}$$



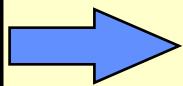
❖ **Navier-Stokes sur Ox**

$$\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \left[\frac{\nu}{LU_{\text{ext}}} \right] \left[\frac{L^2}{\delta^2} \right] \left(\left\{ \frac{\delta^2}{L^2} \right\} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

◆ **Inertie $\approx$ Viscosité**

$$\left[\frac{1}{\mathbf{Re}_L} \right] \cdot \left[\frac{L^2}{\delta^2} \right] \approx O[1]$$

◆ **Équation C.L sur Ox**



$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



❖ Navier-Stokes sur Oy

$$\left[\frac{\delta}{L} \right]^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\mathbf{Re}_L} \left(\left\{ \frac{\delta^2}{L^2} \right\} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

◆ Equation C.L sur Oy

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P_{C.L}(x) = P_{ext}(x) \text{ or } P_{ext}(x) = C^{te}$$

◆ Equation C.L finale

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



❖ **Solution de Blasius**

◆ **Variables**

$$\eta = \frac{y}{2x} \sqrt{Re_x}$$

et

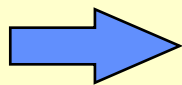
$$\Psi = \nu \sqrt{Re_x} f(\eta)$$

◆ **Profils de u autosimilaires**

$$\frac{u}{U_{\text{ext}}} = \frac{f'(\eta)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{v \sqrt{Re_x}}{U_{\text{ext}}} = \frac{1}{2} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]$$

avec $f' = \frac{df}{d\eta}$

◆ **Equation de Blasius**



$$f''' + f''f = 0$$



Solution numérique

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(\infty) \rightarrow 2$$

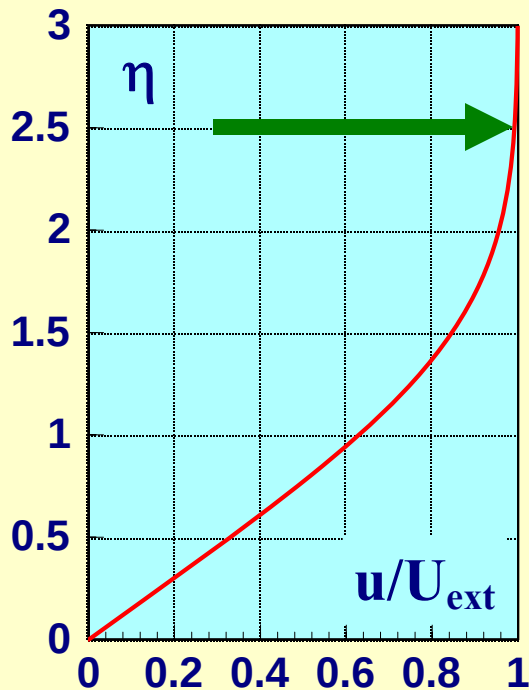


PHENOMENES DE TRANSPORT

Écoulements EXTERNES aux grands Re

LA COUCHE LIMITE : PLAQUE PLANE

❖ Profil de u



❖ Épaisseur δ : $u=0,99U_{ext}$

$$\eta = 2,5 = \frac{\delta}{2x} \sqrt{Re_x}$$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta \sim \sqrt{x}$$

❖ Coefficient de frottement

$$C_f = \frac{|\tau_{xy}|_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_{ext}^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_{ext}^2} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U_{ext}x}}$$

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$



PHENOMENES DE TRANSPORT

Écoulements EXTERNES aux grands Re

LA COUCHE LIMITE : METHODE INTEGRALE

❖ Objectif

- ◆ Calculer C_f
- ◆ Méthode approchée mais rapide

❖ Procédure

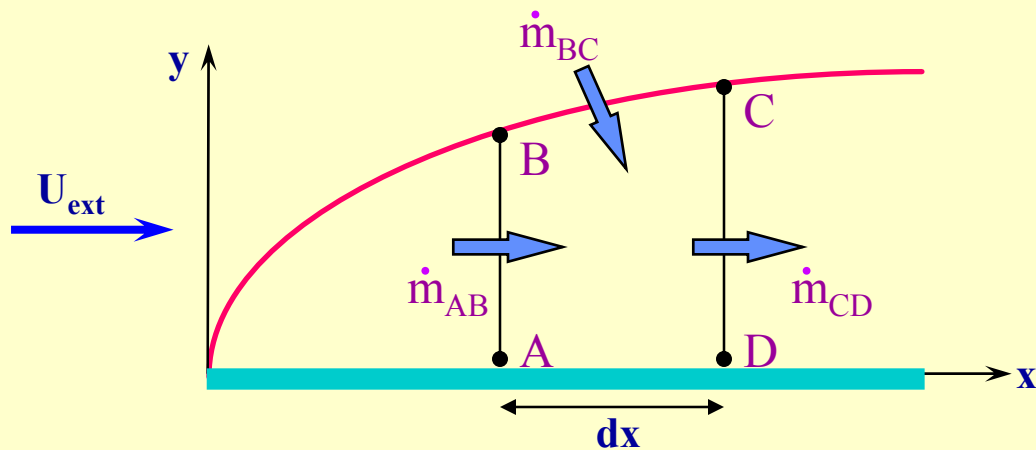
- ◆ Intégration des équations sur δ
- ◆ Nécessité de Postuler un profil de u

❖ Exemple

- ◆ Cas traité : Plaque plane
- ◆ Méthode généralisable



❖ Conservation de la masse



$$\dot{m}_{AB} + \dot{m}_{BC} = \dot{m}_{CD}$$

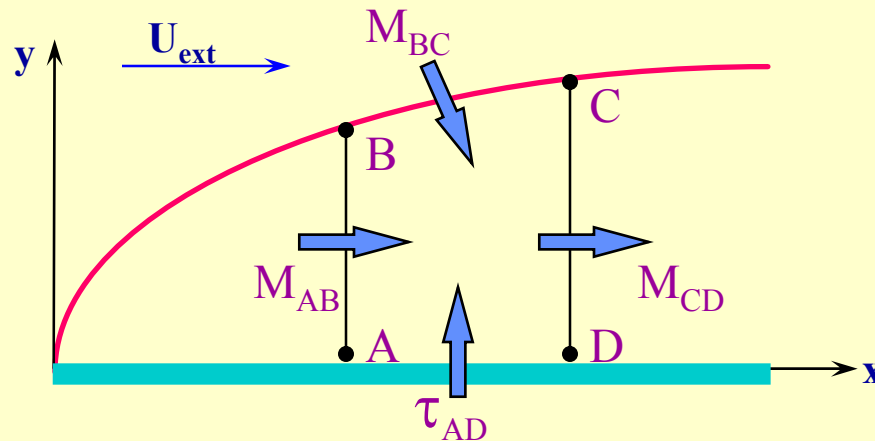
$$\dot{m}_{AB} = \int_0^{\delta} \rho u dy \quad \rightarrow \quad \dot{m}_{CD} = \dot{m}_{AB} + d\dot{m}_{AB}$$

soit

$$\dot{m}_{BC} = d\dot{m}_{AB} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] \cdot dx$$



❖ Équation de la quantité de mouvement



$$M_{AB} + M_{BC} + \tau_{AD}dx = M_{CD}$$

➡ $M_{AB} = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$ et $M_{CD} = M_{AB} + dM_{AB}$

➡ $M_{BC} = U_{ext} \dot{m}_{BC} = U_{ext} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] \cdot dx$

soit

$$\tau_{AD} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} \rho (u U_{ext} - u^2) dy \right]$$



PHENOMENES DE TRANSPORT

Écoulements EXTERNES aux grands Re

LA COUCHE LIMITE : METHODE INTEGRALE

❖ Coefficient de frottement

$$C_f = \frac{\tau_{AB}}{\frac{\rho U_{\text{ext}}^2}{2}} = 2 \frac{d}{dx} \int_0^1 \delta \cdot \left(\frac{u}{U_{\text{ext}}} - \frac{u^2}{U_{\text{ext}}^2} \right) \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

☛ Épaisseur de quantité de mouvement δ^{}**

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \left(\frac{u}{U_{\text{ext}}} - \frac{u^2}{U_{\text{ext}}^2} \right) \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

D'où

$$C_f = 2 \cdot \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

Remarque: Il faut connaître $u(y)$



❖ **Application**

☛ **Profil de Vitesse**

$$\frac{u}{U_{\text{ext}}} = \frac{y}{\delta}$$

☛ **Épaisseur δ^{**}**

$$\delta^{**} = \frac{\delta}{6}$$

☛ **Coefficient Frottement**

$$C_f = \frac{\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho U_{\text{ext}}^2} = \frac{2\mu}{\rho U_{\text{ext}} \delta} = \frac{2}{6} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_x}}$$

$$C_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0.58}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



Écoulements Internes

❖ Objectifs

- 👉 Description de l'écoulement
- 👉 Prédiction de la perte de charge

$$\Delta P_{tot} = P_{tot}^{entrée} - P_{tot}^{sortie}$$

- 👉 Dimensionner un réseau, la pompe, etc..

❖ Perte de charge régulière

- 👉 Conduite longue

$$\Delta P_{tot} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho U_o^2}{2}$$

❖ Perte de charge singulière

- 👉 Coude, restriction, élargissement ..

$$\Delta P_{tot} = K \cdot \frac{\rho U_{aval}^2}{2}$$



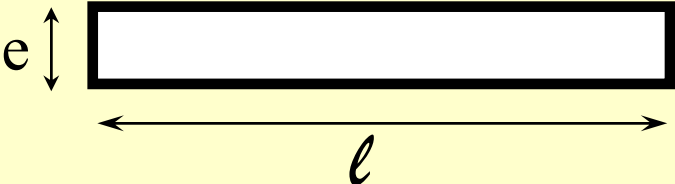
Écoulements Internes

❖ Diamètre hydraulique

$$D_h = 4 \frac{S}{\Omega}$$

☞ S Section de passage

☞ Ω Périmètre mouillé par le fluide

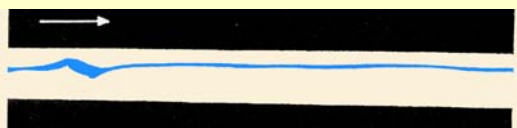
☞ Exemple 

$$D_h = \frac{2e\ell}{e + \ell}$$

$$D_{h\ell \rightarrow \infty} = 2e$$

❖ Reynolds critique

$$Re_{D_h} = \frac{U.D}{\nu}$$



☞ Laminaire $Re_{D_h} < 2300$



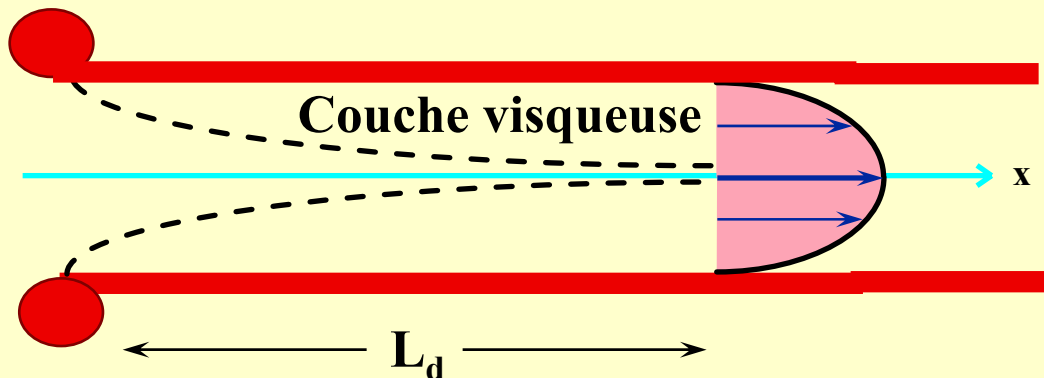
☞ Turbulent $Re_{D_h} > 2300$



Écoulements Internes

❖ Écoulement Développé

👉 Longueur d'établissement L_d



Laminaire $L_d = 0,057D.Re_D$

Turbulent $L_d = D.Re_D^{0,25}$

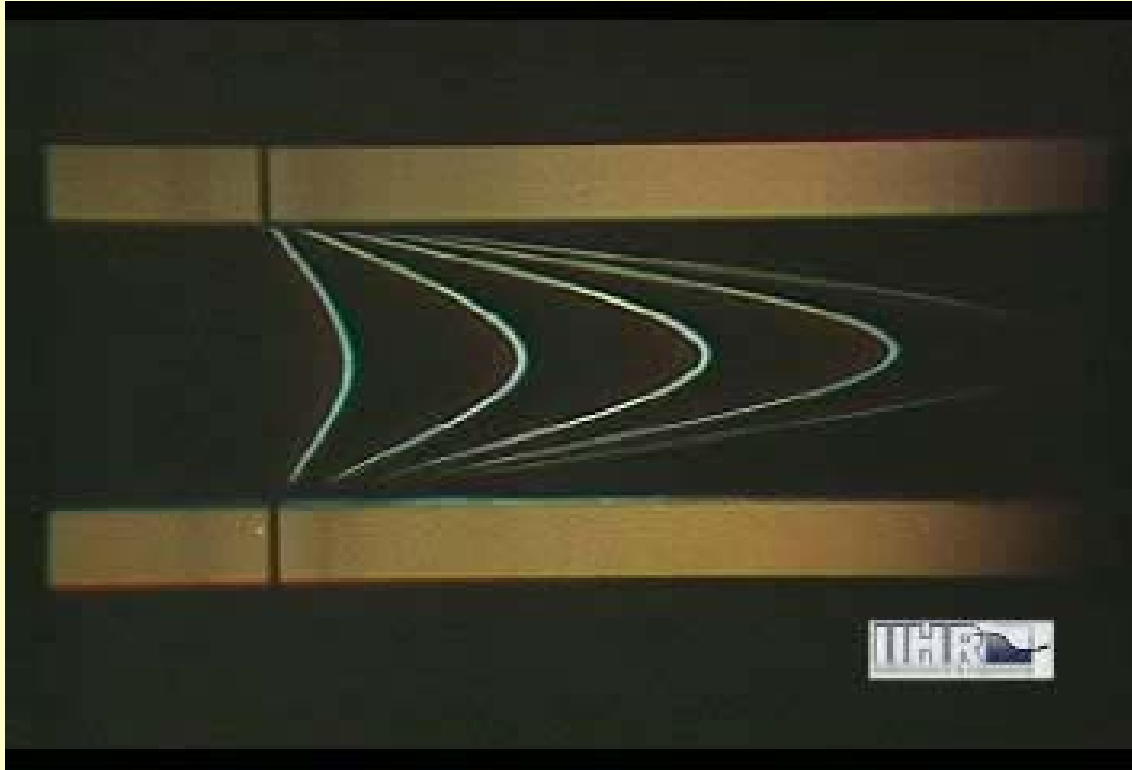
👉 Exemple

Re_D	L_d/D
1000	60
10000	5



Écoulements Internes

❖ Écoulement de Poiseuille



Visualisation par injection de bulles d'hydrogène

☞ Équation de Navier-Stokes

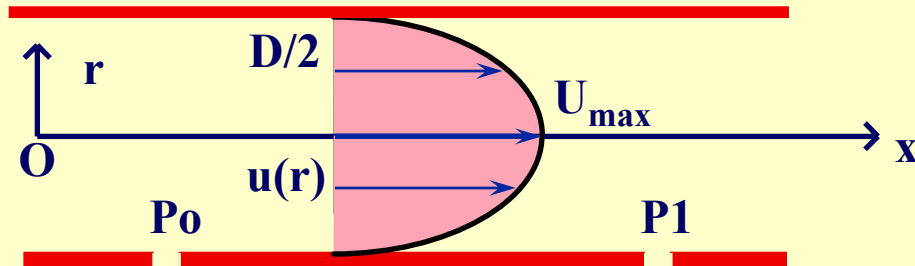
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{F}$$

☞ Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = C^{\text{te}}$$



Écoulements Internes Développés en Conduite



❖ Écoulement Laminaire

👉 Profil de vitesse parabolique

$$\frac{u(r)}{U_o} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad U_o = \frac{D^2}{32\mu} \cdot \frac{\Delta P_o}{L}$$

👉 Coefficient de perte de charge régulière

$$\lambda = \Delta P_o / \left(\frac{\rho U_o^2}{2} \right) \cdot \frac{D}{L} = \frac{64\mu}{\rho U_o D}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$



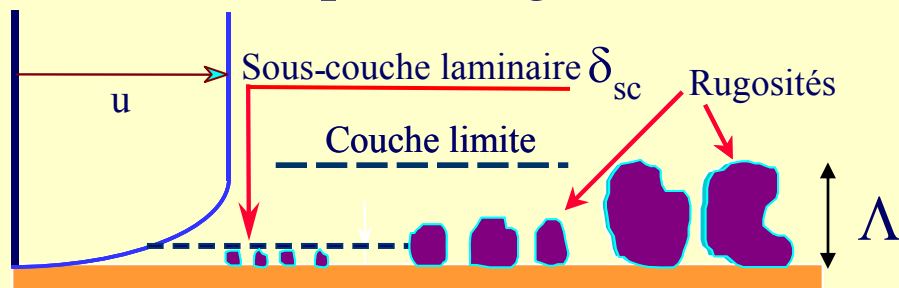
Écoulements Internes Développés en Conduite

❖ Écoulement Turbulent

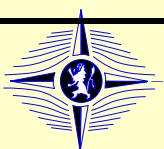
☞ Contrainte turbulente $\bar{\tau}_t = -\rho \nu_t \nabla \bar{V}$

☞ Viscosité équivalente $\nu_t = \nu_t(\bar{V})$

☞ Notion de paroi rugueuse

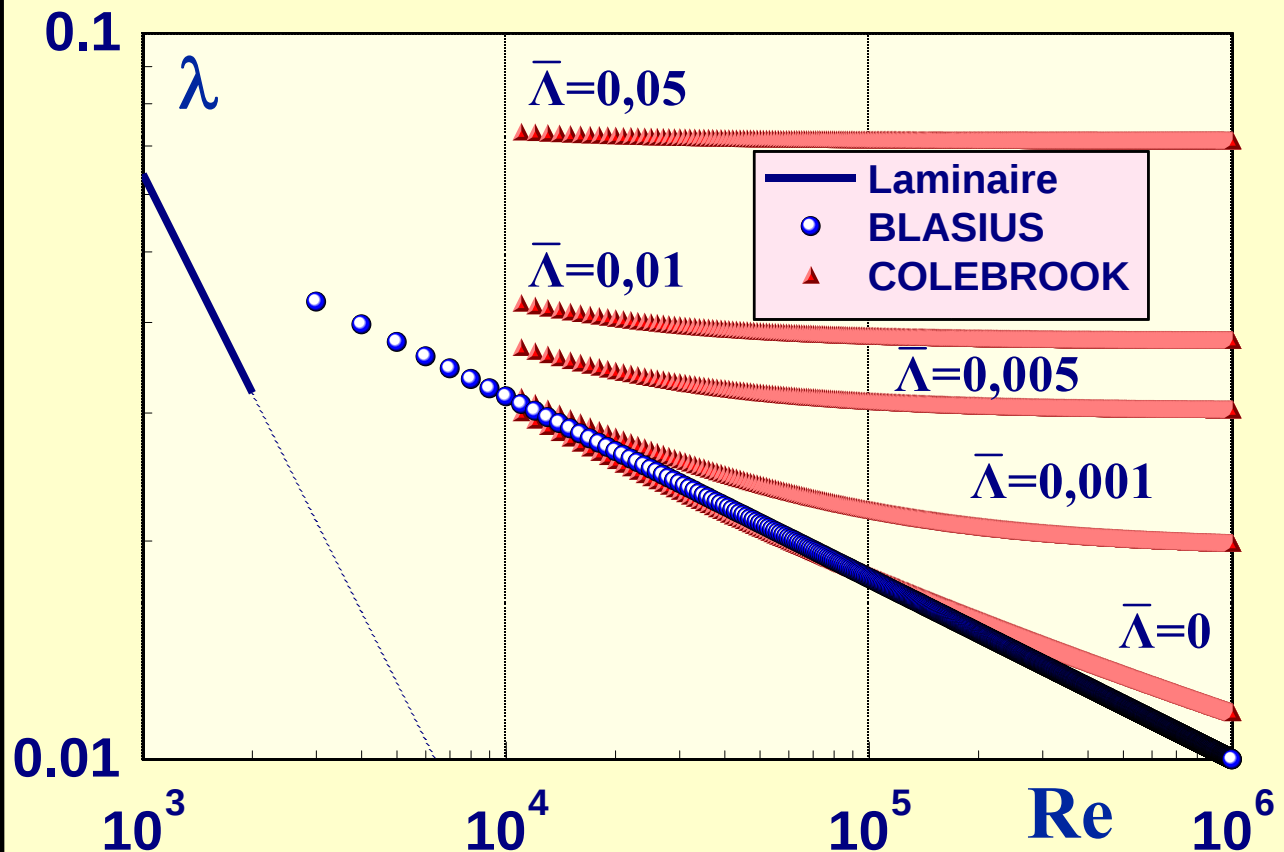


Λ/δ_{sc}	Régime	Corrélation
<1	Lisse	Blasius $\lambda = \frac{0,316}{Re_D^{0,25}}$
1→15	de Transition	Colebrook $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,87 \ln \left(\tilde{\Lambda} + \frac{9,34}{Re_D \sqrt{\lambda}} \right)$
>15	Rugueux	Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,87 \ln(\tilde{\Lambda})$



Écoulements Internes Développés

Abaque de Pertes de Charge Régulières



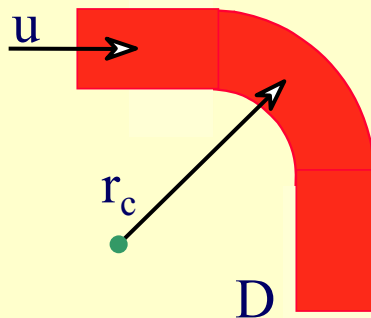
Aux grands $Re \rightarrow$ Régime Rugueux



Écoulements Internes Développés

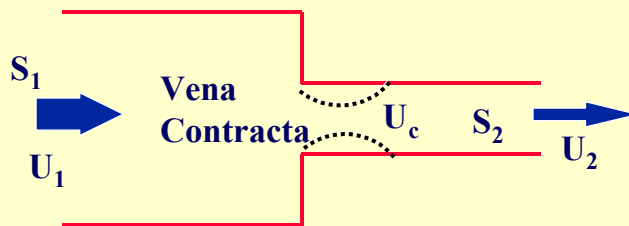
La Perte de Charge Singulière

Coude



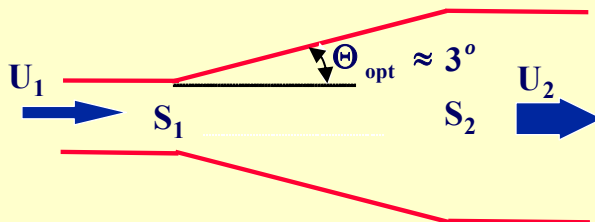
r_c/D	K_c
1	0,35
2	0,19
4	0,16
6	0,21
8	0,28
10	0,32

Contraction



D_2/D_1	K_e
0	0,5
0,2	0,49
0,4	0,42
0,6	0,27
0,8	0,20
0,9	0,1

Diffuseur



$D1/D2$	K_E
0	1
0,2	0,87
0,4	0,70
0,6	0,41
0,8	0,15

$$\Delta P_l = K \frac{\rho U^2}{2}$$

