Table des matières

ontenu			1
ste des Fi	igures		7
ste des Ta	ableaux		11
Introdu	ction Générale		13
La Loi d	e Newton		15
La Visc 3.1 La V 3.2 La V	osité /iscosité des Gaz	•	19 19 21
Fluides 4.1 Com 4.2 Com	Non-Newtoniens portement dépendant de la contrainte	•	23 23 24
Exemple 5.1 Bilar 5.1.1 5.1.2 5.2 Desc 5.3 Para 5.4 App	e: Ecoulement du film tombant n de quantité de mouvement		 27 27 28 29 30 31
Equation 6.1 Form 6.1.1 6.1.2 6.1.3 6.1.4 6.1.5 6.2 L'éq 6.3 Règl 6.4 Form 6.4.1 6.4.1	1s générales nes locales 1 Particule fluide dans son mouvement 2 Volume de contrôle fixe 3 Conservation de la masse 4 Conservation de la quantité de mouvement 5 Les équations constitutives 6 uation de Navier-Stokes 7 es de Similitude 8 nes intégrales : équations macroscopiques 9 Conservation de la masse		 33 34 35 36 37 40 42 43 47 47 40
	ste des Fi ste des Ta Introdu La Loi d La Visc 3.1 La V 3.2 La V Fluides 4.1 Com 4.2 Com Exemple 5.1 Bila: $5.1.1$ 5.2 Desc 5.3 Para 5.4 App Equation $6.1.5$ $6.1.4$ $6.1.5$ $6.1.4$ $6.1.4$ 6.3 Règi 6.4 Forn $6.4.1$	ste des Figures ste des Tableaux Introduction Générale La Loi de Newton La Viscosité 3.1 La Viscosité des Gaz. 3.2 La Viscosité des Gaz. 3.2 La Viscosité des Liquides Fluides Non-Newtoniens 4.1 Comportement dépendant de la contrainte 4.2 Comportement dépendant du temps . 4.2 Comportement dépendant du temps . 5.1 Fluides Non-Newtoniens 4.1 Comportement dépendant du temps . 5.2 Comportement du film tombant 5.1.2 Forces appliquées . 5.2 Description de l'écoulement 5.3 Paramètres de similitude . 5.4 Application numérique. 6.1 Formes locales . 6.1.1 Particule fluide dans son mouvement . 6.1.2 Volume de contrôle fixe . 6.1.3 Conservation de la masse . 6.1.4 Conservation de la quantité de mouvement . 6.1.5 Les équations constitutives . 6.1.4 Conservation de la quantité de mouvement . 6.1.5 Les équations constitutives . 6.2 L'équation de Navier-Stokes . 6.3 Règles de Similitude . 6.4 Formulation générale . 6.4 Formulation générale .	ste des Figures ste des Tableaux Introduction Générale La Loi de Newton La Viscosité 3.1 La Viscosité des Gaz. 3.2 La Viscosité des Liquides 3.2 La Viscosité des Liquides Fluides Non-Newtoniens 4.1 Comportement dépendant de la contrainte 4.2 Comportement dépendant du temps 5.1 Bilan de quantité de mouvement 5.1.1 Flux net de quantité de mouvement 5.1.2 Forces appliquées 5.2 Description de l'écoulement 5.3 Paramètres de similitude 5.4 Application numérique. 6.1 Formes locales 6.1.1 Particule fluide dans son mouvement 6.1.2 Volume de contrôle fixe 6.1.3 Conservation de la masse 6.1.4 Conservation de la masse 6.1.5 Les équations constitutives 6.1 Formes intégrales : équations macroscopiques 6.1.4 Formulation générale 6.14 Formes intégrales : équations macroscopiques 6.14 Formulation générale

		$6.4.3 \\ 6.4.4$	Conservation de la quantité de mouvement	$\begin{array}{c} 49 \\ 50 \end{array}$
7	Solu	tions o	d'écoulements visqueux	51
	7.1	Ecoule	ment en conduit cylindrique	51
	7.2	Ecoule	ment de Couette cylindrique	54
	7.3	Ecoule	ment plan oscillant	56
8	Eco	ulemer	nts quasi parallèles à faibles nombres de Reynolds	61
9	Eco	ulemer	uts à grands nombres de Revnolds	65
0	91	Lignes	de courant	65
	9.2	Ecoule	ments Potentiels	66
	9.3	Couche	es limites	68
	0.0	9.3.1	Concept de la couche limite	68
		932	Equations de la couche limite	69
		9.3.3	Profil de vitesse dans la couche limite	70
		9.3.4	Coefficient de frottement	72
		9.3.5	Méthode intégrale	72
10	Eco	ulemer	nts internes	77
	10.1	Introd	uction \ldots	77
	10.2	Un peu	ı d'histoire	77
	10.3	Ecoule	ments non-développés	79
		10.3.1	Régime laminaire	79
		10.3.2	Régime turbulent	81
	10.4	Ecoule	ments développés	81
		10.4.1	Régime laminaire	81
		10.4.2	Régime turbulent	82
	10.5	Modèle	e semi-théorique de la turbulence	83
		10.5.1	Contrainte de cisaillement turbulente	84
		10.5.2	Longueur de mélange de Prandtl	86
		10.5.3	Hypothèse de similitude de von Karman	87
		10.5.4	Profil de vitesse logarithmique	88
		10.5.5	Coefficient de perte de charge $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	89
		10.5.6	La sous-couche laminaire	90
	10.6	Condu	ites de raccordement	91
		10.6.1	Les coudes	91
		10.6.2	Changements de section	92
11	Eco	ulemer	nts dans les milieux poreux	95
	11.1	Introd	uction	95
	11.2	La por	osité	96
	11.3	Conser	vation de la masse	96
	11.4	Conser	vation de la quantité de mouvement	97

II	Transport d'Energie	101
12	Introduction	103
13	La Conduction	105
	13.1 La Loi de Fourier	105
	13.1.1. La conductivité des gaz	106
	13.1.2 La conductibilité des liquides	. 109
	13 1 3 La conductivité des solides	110
	13.2 Equation Générale de la Conduction	112
	13.2.1 Formulation du bilan thermique	. 112
14	Conduction morte en régime permanent	117
	14.1. Modèle plan	117
	14.2 Modèle cylindrique	121
	14.3 Modèle sphérique	121
	14.9 Modele spherique :	. 123
15	Surface à Ailottos	197
10	15.1 Modélisation de l'ailette	198
	15.2 Emploi opportun d'ailettos	120
	15.2 Emploi opportun d'anettes	130
	15.4 Efficacité de l'ailette	. 104 124
	15.5 Efficacité d'une surface ailetée	125
	13.5 Emicacite d'une sufface anetee	. 155
16	Conduction vive en régime permanent	137
	16.1 Modèle plan avec source de chaleur	. 137
	16.2 Modèle cylindrique avec source de chaleur	. 140
17	Conduction morte dépendante du temps	145
	17.1 Mur avec résistances internes et externes	. 145
	17.2 Corps sans résistance interne	. 150
	17.3 Massif semi-infini	. 152
	17.4 Mise en contact de deux corps	. 154
	17.5 Perturbation périodique en surface	. 157
18	Convection forcée	161
	18.1 Concept du coefficient de transfert de chaleur	. 161
	18.2 Couche limite thermique	. 163
	18.2.1 Equation de l'énergie dans la couche limite laminaire	. 164
	18.2.2 Equation intégrale de l'énergie	. 166
	18.2.3 Coefficient d'échange convectif en régime laminaire	. 169
	18.2.4 Equation de l'énergie dans la couche limite turbulente	. 170
	18.2.5 Coefficient d'échange convectif en régime turbulent	. 171
	18.2.6 Analogie avec le Coefficient de Frottement	. 172
	18.3 Convection pour des obiets ronds	174
	18.3.1 Cas du cylindre	174
	18.3.2 Cas de la sphère	177
		. 111

	18.4	Convection dans des conduites				•				•				•	. 177
		18.4.1 Régime thermohydraulique éta	abli												. 177
		18.4.2 Régime thermique non dévelop	ppé												. 181
		18.4.3 Ecoulement laminaire	•••						•	•					. 181
		18.4.4 Ecoulement turbulent	•••			•			•	•		•		•	. 182
10	Con	wastion Naturalla													185
19	10 1	Convection naturalle externe													195
	19.1	10.1.1. Diagua Diana Varticula	•••	• •	• •	•	• •	• •	• •	•	•••	•	•••	·	. 100 105
		19.1.1 Plaque Plane verticale	••	•••	• •	·	•••	• •	•	•	• •	·	•••	•	. 100 100
		19.1.2 Plaque plane norizontale	•••	•••	• •	·	• •	•••	• •	•	• •	•	• •	•	. 192
	10.0	19.1.3 Cynndre norizontal et sphere	• •	•••	• •	•	• •	• •	• •	•	• •	·	• •	·	. 193
	19.2	Convection naturelle confinee	•••	•••	• •	·	• •	• •	• •	•	• •	•	•••	•	. 194
		19.2.1 Parois planes verticales	•••	•••	• •	•	• •	•••	• •	•	• •	•	• •	•	. 194
	10.0	19.2.2 Parois planes horizontales	• •	•••	• •	•	•••	• •	• •	•	• •	·	•••	·	. 196
	19.3	Convection mixte	•••	•••	• •	•	• •	• •	•	•	• •	·	•••	•	. 197
20	Le I	Rayonnement Thermique													199
	20.1	Généralités				•			•	•		•			. 199
	20.2	Réception du rayonnement par un con	rps			•				•					. 200
	20.3	Grandeurs énergétiques d'une source				•									. 202
		20.3.1 Définitions			•	•						•			. 202
		20.3.2 Loi de Lambert \ldots \ldots	• • •		• •					•					. 203
	20.4	Lois du rayonnement thermique													. 204
		20.4.1 La loi de Planck								•					. 204
		20.4.2 Les lois de Wien \ldots \ldots													. 204
		20.4.3 La loi de Stefan-Botlzmann $$.													. 205
		20.4.4 Emission des corps réels								•		•			. 206
		20.4.5 Loi de Kirchhoff								•		•			. 207
	20.5	Echange radiatif entre corps noirs													. 209
	20.6	Echanges radiatifs entre surfaces grise	es opa	aqu	\mathbf{es}										. 211
		20.6.1 La radiosité d'une surface rayo	onnar	nte											. 211
		20.6.2 Enceinte à N surfaces grises .				•									. 211
		20.6.3 Schémas Analogiques	•••						•	•		•		•	. 213
21	Con	servation de l'énergie													217
	21.1	Introduction													217
	21.2	Formulation locale		• •	• •	•	• •	• •	•	•	•••	·	• •	•	217
		21.2.1 Premier principe de la thermo	dvna	 mic	nne me	•	• •	• •	•		• •	·	• •	•	217
		21.2.2 Energie totale	ajna		140	·	• •	• •	•••	•	•••	•	•••	•	218
		21.2.2 Duantité de chaleur	•••	• •	• •	•	•••	•••	•	•	• •	•	• •	•	219
		21.2.6 Quantité de charcar :		• •	• •	•	•••	•••	•	•	• •	•	•••	•	219
		21.2.5 Equation générale de l'énergie	total	е	•••	•	• •	•••	• •	•	• •	•	•••	•	220
		21.2.6 Equation de l'énergie mécaniq	11e		•••	•	• •	•••	• •	•	•••	•	•••	•	220
		21.2.7 Equation de l'énergie interne		• •	•••	•	•••	•••	• •	•	•••	•	•••	•	220
	21.3	Formulation macroscopique	•••	• •	•••	•	•••	•••	• •	•	•••	•	•••	•	222
	±1.0	21.3.1 Energie Totale	•••	•••	• •	·	• •	• •	• •	•	•••	•	•••	•	. 222 223
		21.3.2 Energie Mécanique	•••	•••	• •	•	• •	•••	•	•	• •	·	•••	•	225
			• • •	· ·	• •	•	• •	• •	•	•	• •	•	• •	·	

21.3.3	Energie Interne	
21.3.4	Entropie	

III	[]	Transport de Matière	229
22	Intr 22.1 22.2	oduction Généralités	231 231 232
	22.3	Définitions, notations et relations de base	233
		22.3.1 Concentration, fraction et flux massique	$\frac{233}{235}$
23	Diff	usion Ordinaire	237
	23.1	Milieu immobile	. 237
		23.1.1 Loi de Fick en unités massiques	237
		23.1.2 Loi de Fick en unités molaires ou pression partielle	239
	<u></u>	23.1.3 Coefficient de diffusion massique	240
	23.2	Fluide en mouvement laminaire	241
		23.2.1 Flux absolu en unités massiques	. 241
	ററാ	23.2.2 Flux absolu en unites molaires	241 941
	20.0	23.3.1 Evaporation d'un liquide	241 241
24	Εqι	uations générales de la diffusion	245
	24.1	Equations de conservation	245
	24.2	Types de conditions aux limites	246
	24.3	Exploitation des équations	248
		24.3.1 Film liquide tombant	. 248
		24.3.2 Diffusion avec réaction chimique	250
25	Tra	ansfert de matière convectif	253
	25.1	Convection forcée laminaire	253
	25.2	Corrélations de transfert massique	255
	25.3	Relations d'analogie	257
	25.4	Modèle de la paroi imperméable	257
	25.5	Exploitation des résultats	258
		25.5.1 Evaporation d'un film liquide étalé	258
		25.5.2 Thermomètre humide	259
\mathbf{IV}	F	Références	263

5

267

Table des figures

$2.1 \\ 2.2$	Définition d'un écoulement cisaillé parallèle	15 16
$4.1 \\ 4.2 \\ 4.3$	Modèles non-newtoniens stationnairesViscosité apparente de pseudo-plastiquesPhénomènes viscoélastiques	24 25 26
5.1	Ecoulement du film tombant	28
$ \begin{array}{r} 6.1 \\ 6.2 \\ 6.3 \\ 6.4 \\ 6.5 \\ \end{array} $	Volume de contrôle	35 37 41 47 50
$7.1 \\ 7.2 \\ 7.3$	Ecoulement de PoiseuilleEcoulement de Couette entre cylindres coaxiauxEcoulement plan oscillant	52 54 57
8.1	Ecoulement dans un sabot de lubrification	62
9.1 9.2 9.3 9.4 9.5	Visualisation d'un écoulement laminaire	65 66 69 72 74
$\begin{array}{c} 10.1 \\ 10.2 \\ 10.3 \\ 10.4 \\ 10.5 \\ 10.6 \\ 10.7 \\ 10.8 \\ 10.9 \\ 10.10 \\ 10.11 \end{array}$	Expérience de Reynolds	78 79 80 82 83 84 85 86 91 92 93
11.1	Coupe verticale dans un empilement de billes	96

11.2	Modèle d'un milieu poreux par faisceau de tubes	. 98
13.1	Conduction dans une nappe de gaz.	. 105
13.2	Conductivité thermique de divers gaz en fonction de la température	. 107
13.3	Conductivité thermique de divers liquides non-métalliques en fonction de	
	la température	. 110
13.4	Synthèse des observations	. 112
13.5	Volume de contrôle pour bilan thermique	. 113
1 / 1	Décister et la construction d'un construction de Décistat	110
14.1	Resistance inermique a un mur : conditions de Dirichiet	. 110
14.2	Conduction dans un mur composite	. 119
14.0		. 120
14.4	Resistance thermique a un mur : conditions mixtes	. 121
14.5	Cylindre creux a surfaces isothermes	. 121
14.6	Problème de la conduite isolée	. 123
14.7	Résistance thermique de contact	. 124
15.1	Exemples de surfaces ailetées	. 127
15.2	Application aux composants électroniques	. 128
15.3	Modèle stylisé de l'ailette	. 129
15.4	Profils de température adimensionnelle; Modèles thermiques des ailettes .	. 131
15.5	Efficacité d'une ailette	. 134
16.1	Paroi avec dissipation interne de chaleur	. 138
16.2	Conduction vive dans une paroi plane	. 139
16.3	Effet du nombre de Biot	. 142
$17\ 1$	Plaque éngisse quec condition mirte	146
17.2	Solution de l'équation 6 9	148
17.2	Effet du nombre de Biot	1/0
17.0	Corns à résistance interne néaligeable : analogie électrique	150
17.5	Sustème à plusieurs composante	. 150
17.0	Maggi equi infini	153
17.0 17.7	Profil de température dans un massif semi infini : condition de Dirichlet	. 150
17.0	Profil de température dans un massif semi-infini, condition mirte	155
17.0	1 Toju de temperature dans un massi semi- injini, condition mate Mise en contract de deux correc	155
17.9	Mise en contact de deux corps	157
17.10	Vonation perioaique en surjace	. 157
10 1		1.60
18.1	Conduction et convection	. 162
18.2		. 163
18.3	Définition de la couche limite thermique	. 164
18.4	Détail de l'équation de l'énergie	. 165
18.5	Volume de contrôle pour la méthode intégrale	. 167
18.6	Comportement relatif des couches limites	. 169
18.7	Nombre de Nusselt moyen	. 173
18.8	Ecoulement autour d'un cylindre	. 174
18.9	Transfert de chaleur localsur le cylindre obtenu par Giedt	. 176

$18.10 Effet d'entrée thermique \dots \dots$	181
18.11Longueur thermique d'établissement pour un écoulement turbulent en tube lisse	183
19.1Convection libre ou naturelle	$186 \\ 195 \\ 197$
20.1Le spectre électromagnétique.20.2Répartition de l'énergie rayonnante.20.3Cavité corps noir.20.4Propriétés géométriques d'une surface radiante.20.5Emittance monochromatique d'un corps noir.20.6Emissivité directionnelle de matériaux.20.7Equilibre radiatif entre corps et enceinte.20.8Echange entre deux surfaces noires.20.9Chambre d'un four parallélépipédique.20.10Schémas analogiques élémentaires.20.11Schéma analogique complet.	200 201 202 203 205 207 208 210 212 214 214
21.1 Transport d'énergie dans le volume fluide21.2 Définition d'un système complexe	218 223
22.1 Mélange par diffusion ordinaire	232
23.1 Diffusion massique binaire stationnaire23.2 Evaporation d'un liquide	238 242
24.1 Conditions aux limites en transfert massique24.2 Transfert de matière dans un film liquide tombant24.3 Diffusion avec réaction chimique	246 248 250
25.1Couche limite de transfert de matière25.2Schéma du thermomètre humide	253 261

Liste des tableaux

$3.1 \\ 3.2$	Unités de la viscosité dynamique 19 Viscosité dynamique de quelques fluides 20
7.1	Profondeur de pénétration
10.1	Coefficient de résistance d'un rétrécissement brusque
13.1 13.2 13.3 13.4	$\begin{array}{c} Conductibilité \ de \ certains \ gaz \ [W/m.K] \ \ldots \ $
14.1	Conductance de contact : Pression = $0.05 - 8$ [MPa] $\dots \dots \dots$
16.1	Analogie "Ecoulement Visqueux- Conduction thermique "
$17.1 \\ 17.2$	Ordre de Grandeur de l'effusivité
$\begin{array}{c} 18.1 \\ 18.2 \end{array}$	Conditions aux limites pour u et T
$19.1 \\ 19.2 \\ 19.3 \\ 19.4 \\ 19.5 \\ 19.6 \\ 19.7 \\$	Cas de la plaque verticale isotherme
20.1	Valeurs de l'émissivité totale normale
23.1	Valeurs de la diffusivité massique
$24.1 \\ 24.2$	Constante de Henri pour des couples gaz-eau [MPa] $\dots \dots \dots$
25.1 25.2 25.3 25.4	Analogie entre les couches limites $\dots \dots \dots$

Chapitre 1

Introduction Générale

De nombreux mécanismes physiques rencontrés dans les domaines des sciences fondamentales, appliquées et de l'ingénierie sont régis par des **phénomènes de transport**. Dès lors, il devient indispensable d'en connaître la description et d'établir les lois physiques et mathématiques qui les gouvernent pour en maîtriser les applications.

L'objectif de ce cours est de dégager les principes physiques et de présenter la modélisation des trois phénomènes de transport fondamentaux qui sont :

- 1. Le transport de quantité de mouvement. Il existe avec la présence d'un écoulement de fluide . Le paramètre physique macroscopique qui le contrôle est la viscosité. Il fait l'objet de la *PARTIE I* du cours.
- 2. Le transport d'énergie. Il s'appuie sur la conduction de la chaleur. Elle s'établit dans la matière, siège de variations spatiales de température. Le paramètre de transport macroscopique est le coefficient de **conductivité thermique** Nous noterons toutefois que le rayonnement thermique joue aussi un rôle important dans le transport d'énergie. Son cas est particulier ; il sera traité séparément. *PARTIE II* du cours.
- 3. Le transfert de matière . Il met en jeu les phénomènes de diffusion de différentes espèces matérielles entre elles. Il est dû à des variations de concentration massique et son paramètre caractéristique est le coefficient de **diffusivité** massique. Cette propriété traduit la façon dont un fluide se mélange avec un autre. *PARTIE III* du cours.

Nous constatons que les mécanismes de transport nécessitent tous la présence de **matière** pour se développer. De ce fait ne nous étonnons pas de constater l'implication profonde de la mécanique des fluides et de la thermodynamique dans leur description. Nous verrons par ailleurs que tous ces phénomènes, hormis le rayonnement thermique, possèdent de fortes analogies qui méritent d'être reconnues et qui offrent d'intéressantes méthodes de simulation et d'analyse.

part Transport de Quantité de Mouvement

Chapitre 2 La Loi de Newton

Pour introduire le transport de la quantité de mouvement nous considérons l'exemple de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible (masse volumique ρ =constante) entre deux parois parallèles séparées d'une distance δ . L'une est fixe et l'autre est en mouvement uniforme à la vitesse **Uo** dirigée suivant l'axe Ox comme le schématise la figure 2.1. Les parois sont supposées suffisamment longues pour qu'il existe une portion du canal où l'écoulement soit unidirectionnel, donc pas affecté par des effets d'entrée et de sortie. Cet écoulement de cisaillement simple est appelé écoulement plan de Couette.



FIG. 2.1 – Définition d'un écoulement cisaillé parallèle

L'observation expérimentale de cet écoulement nous conduit à faire les constatations suivantes :

- Le fluide adhère aux parois ; ce qui signifie que la vitesse est nulle en y = 0 et égale à celle de la paroi mobile en $y = \delta$.
- Le comportement du fluide en mouvement peut être assimilé à celui d'une série de couches se déplaçant parallèlement et relativement les unes par rapport aux autres, chacune ayant une vitesse propre, u; ce qui sous-entend l'établissement dans le fluide d'un profil ou d'une distribution de vitesse qu'il s'agira de déterminer.

Dans leur déplacement, deux lames de fluide adjacentes *frottent* l'une sur l'autre. Cette friction est le résultat du va-et-vient et des interactions constants des molécules en agitation qui traversent la surface de séparation. La figure 2.2 illustre le propos.



FIG. 2.2 – Filets fluides dans l'écoulement

Considérons dans notre écoulement deux couches fluides séparées d'une petite distance ℓ . La molécule **A** de masse m de par son mouvement aléatoire d'agitation quitte la couche lente **a** et entre dans la couche rapide voisine **b** avec la vitesse d'entraînement u - du, celle de la couche d'où elle provient.

De ce fait, en amenant une quantité de mouvement m(u - du), elle jouera un rôle ralentisseur pour la couche **b**. De façon analogue, la molécule **B** en provenance de la couche rapide injecte dans la couche lente une quantité de mouvement égale à m(u+du) donnera une impulsion. Une image amusante de ce mécanisme peut être tirée de la situation de deux trains qui se dirigent dans la même direction sur deux voies rigoureusement parallèles. Les passagers des deux trains se jettent des objets par les fenêtres. Les échanges de quantité de mouvement dus aux jets d'objets ont pour résultat d'accélérer le train lent et de ralentir le train rapide.

En définitive, nous retiendrons que la quantité de mouvement est transportée dans le sens couche rapide vers couche lente et que ce transport tend toujours à uniformiser le champ de vitesse. Nous vérifierons par la suite que ce comportement est en parfait accord avec le second principe de la thermodynamique.

Selon le principe fondamental de la mécanique nous pouvons énoncer que ce flux de quantité de mouvement qui traverse par unité de temps l'unité de surface entre les couches **a** et **b**, est égale à la force tangente à cette surface. Elle est appelée *contrainte visqueuse* ou *contrainte de cisaillement* et sera dénotée τ_{xy} . Remarquons que τ_{xy} a la dimension d'une pression. Son unité est donc le Pascal *Pa*.

L'expérience montre que le fluide entraîné par la plaque mobile supérieure possède un profil de vitesse u qui varie linéairement suivant la direction Oy:

$$u(y) = \mathbf{Uo}\frac{\mathbf{y}}{\delta} \tag{2.1}$$

De même, on observe que la force par unité de surface, c'est-à-dire τ_{xy} , qu'il faut vaincre pour maintenir le mouvement relatif des plaques est directement proportionnelle à **Uo** et inversement proportionnelle à δ ; ce qui s'écrit :

$$\tau_{xy} = \frac{F}{S} \sim -\frac{\mathbf{Uo}}{\delta} \tag{2.2}$$

Le signe moins rappelle que la tension s'oppose au mouvement. La comparaison des relations 2.1 et 2.2 conduit à formuler le cisaillement comme suit :

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{du}{dy} = -\mu \dot{\gamma} \tag{2.3}$$

C'est la **Loi de Newton**. Elle exprime que le flux de quantité de mouvement est de signe contraire au gradient de vitesse ou vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ dénommée aussi taux de déformation dont l'unité est s^{-1} . La loi de Newton fait intervenir le paramètre μ qui est la viscosité du fluide. Le chapitre suivant est consacré à la discussion de ce paramètre.

- Exercice

Une plaque de 3m de long et 1m de large se déplace à la vitesse de 1m/s parallèlement a une paroi horizontalement fixe distante de 0,005m. Pour ce faire, on doit appliquer une force de traction de 1,2 N. Comment est le profil de la contrainte de cisaillement. Quelle est la valeur de la viscosité du fluide et quelle est son unité?

Chapitre 3

La Viscosité

Le coefficient de proportionnalité μ qui apparaît dans la loi de Newton 2.3 est la viscosité absolue du fluide. Nous préciserons **viscosité dynamique** car elle est associée à une force. C'est le résultat macroscopique de l'échange de quantité de mouvement lié à l'agitation moléculaire. Elle a pour dimension :

$$\mu \equiv \frac{F}{S} \left[\frac{\mathbf{Uo}}{\delta} \right]^{-1} \equiv \frac{MLT^{-2}}{L^2} \cdot \left[\frac{L}{T} \cdot \frac{1}{L} \right]^{-1} = ML^{-1}T^{-1}$$
(3.1)

Le tableau 3.1 reprend les différentes unités de la viscosité dynamique rencontrées dans la littérature. Soulignons néanmoins que seule celle du système MKS est officielle et qu'un Poiseuille $(P\ell)$ équivaut à un Pascal.seconde (Pa.s). Des valeurs typiques de μ sont présentées au tableau 3.2

3.1 La Viscosité des Gaz.

La loi du cisaillement 2.3 peut être démontrée dans le cas des gaz en s'appuyant sur des considérations théoriques de la cinétique. Le gaz est composé de molécules en mouvement désordonné créé par l'agitation thermique et assimilées à des sphères rigides de masse m. Ce mouvement aléatoire est défini par le module de la vitesse moléculaire moyenne, \tilde{v} qui serait ressentie par un observateur se déplaçant avec la vitesse du fluide

Système	Unité	Symbole
CGS	$g/cm.s \Longrightarrow$ Poise	Р
MKS	$kg/m.s \Longrightarrow$ Poiseuille	$P\ell$

TAB. 3.1 – Unités de la viscosité dynamique

Fluide	T $[^{o}C]$	$\begin{array}{c} \mu\\ [P\ell \text{ ou } Pa.s] \end{array}$
Air	20	18.10^{-6}
Eau liquide	20	$0,\!001$
Glycérine	20	0,8
Zinc	450	$0,\!0033$

TAB. 3.2 – Viscosité dynamique de quelques fluides

u. En supposant l'agitation isotrope, la répartition de la vitesse des molécules se caractérise par une composante normale à la surface unitaire S qui délimite les deux couches. Cette composante est égale à $\tilde{v}/6$. Reprenons la figure 2.2 qui schématise une portion de l'écoulement. La distance ℓ est maintenant le libre parcours moyen des molécules.

Etablissons l'expression suivant l'axe Ox du flux de quantité de mouvement à travers S que nous situons à l'ordonnée quelconque y. Ce flux est la contribution des quantités de mouvement de toutes les molécules qui traversent S par unité de temps dans la direction y > 0 diminuée de la contribution dans le sens y < 0. La quantité de mouvement de la molécule \mathbf{A} , représentative de la couche à basse vitesse, est $mu|_{y-\ell}$.Le flux dans le sens positif des y est :

$$\Phi^+ = n \frac{\tilde{v}}{6} m u|_{y-\ell}$$

où n est le nombre de molécules présentes dans l'unité de volume. De même, le flux de quantité de mouvement dans le sens des y négatifs, dû aux molécules **B** venant de la couche à haute vitesse, est :

$$\Phi^- = n \frac{\tilde{v}}{6} m u|_{y+\ell}$$

Comme énoncé plus avant, la tension visqueuse τ_{xy} qui s'exerce parallèlement à S est égale au flux net de quantité de mouvement. Il vient :

$$\tau_{xy} = \Phi^+ - \Phi^- = mn \frac{\tilde{v}}{6} [u|_{y-\ell} - u|_{y+\ell}]$$
(3.2)

Puisque le libre parcours moyen des molécules est une très faible quantité, une variation linéaire de la vitesse sur la distance 2ℓ est admise et la relation 3.2devient :

$$\tau_{xy} = -\left[\frac{mn\tilde{\nu}\ell}{3}\right]\frac{du}{dy} \tag{3.3}$$

après avoir identifié le terme entre crochets comme étant la viscosité dynamique du gaz, nous retrouvons bien la loi de Newton avec :

$$\mu = \frac{\rho \tilde{v} \ell}{3} \tag{3.4}$$

où ρ est la masse volumique du gaz = nm.

La théorie cinétique des gaz fournit les expressions de ℓ et \tilde{v} qui sont respectivement :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d^2n} \tag{3.5}$$

 et

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{8\kappa_b T}{\pi m}} \tag{3.6}$$

La combinaison de 3.5, 3.6 avec 3.4 conduit à :

$$\mu = \frac{2}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{\kappa_b mT}{\pi}} \tag{3.7}$$

 κ_b est la constante de Boltzman (1,38x 10⁻²³ J/K).

La viscosité dynamique d'un gaz croît avec la température statique T (en degré K). Elle est indépendante de la masse volumique ou de la pression P; ce résultat théorique se trouve en défaut aux très basses comme aux très hautes pressions. En effet, quand le gaz est largement détendu, tel que dans les installations d'ultra vide où des pressions aussi faibles qu'une centaine de pascals sont atteintes, le libre parcours est essentiellement déterminé par les chocs des molécules contre les parois du récipient. Le libre parcours moyen devient quasi constant. C'est le régime de Knudsen. Dès lors, les collisions entre molécules deviennent trop rares pour assurer l'état d'équilibre sur lequel repose la théorie cinétique des gaz. En fait, la chute de P entraîne une diminution de n et donc du produit nm; en conséquence, μ diminue.

Par ailleurs, aux très grands taux de compression, le gaz devient si dense qu'il commence à présenter des propriétés proches de celles des liquides. A titre d'exemple, on note que la viscosité dynamique de la vapeur d'eau à 315 ^{o}C passe de 0,023 à 0,035 *Pa.s* quand la pression augmente de 0,7 à 5,4 *MPa*.

3.2 La Viscosité des Liquides

Compte tenu de la promiscuité moléculaire dense qui règne dans un liquide pur au repos, le mouvement de chaque molécule se limite à un état vibratoire dans une sorte de "cage" formée par ses voisines. Physiquement cette cage est une barrière énergétique représentée par l'énergie libre d'activation, $\Delta \tilde{G}_o$. La démarche théorique communément suivie consiste à assimiler le milieu liquide à un damier formé de cages (cases occupées) et de trous adjacents (cases vides). Le fluide, même au repos, vit en son sein un réarrangement continu qui se concrétise par le saut des molécules d'une cage vers un trou. La fréquence f_o de ces bonds est fonction de la température T du liquide :

$$f_o = \frac{\kappa_b T}{\hbar} \exp\left[\frac{\Delta \tilde{\mathbf{G}}_o}{\Re T}\right] \tag{3.8}$$

 \hbar est la constante de Planck $(6,63 \times 10^{-34} J.s)$ et \Re est la constante molaire des gaz parfaits (8314 J/kmole.K).

Quand le liquide s'écoule, la contrainte de cisaillement τ_{xy} qui s'établit dans le fluide induit une distorsion dans le potentiel énergétique qui devient :

$$\Delta \tilde{\mathbf{G}} = \Delta \tilde{\mathbf{G}}_o \mp \left(\frac{a}{\ell}\right) \left(\frac{\tau_{xy}\tilde{V}}{2}\right) \tag{3.9}$$

où \tilde{V} est le volume d'une mole liquide. Le second terme du membre de droite est une écriture approchée du travail à fournir pour franchir la barrière soit avec ou contre la force visqueuse. a est la longueur du saut et ℓ comme précédemment la distance entre filets fluides. Quand il y a écoulement, la fréquence de réarrangement des molécules est modifiée :

$$f_{\pm} = f_o \exp\left[\pm \frac{a}{\ell} \frac{\tau_{xy} \tilde{V}}{2\Re T}\right]$$
(3.10)

La couche de fluide dominée par des sauts vers l'amont (bonds moléculaires à contre courant) aura une vitesse d'ensemble moins grande que celle de sa voisine où les sauts se font le plus souvent vers l'aval (bonds moléculaires cocourants). Sur la base de la figure 2.2, nous pouvons écrire que la variation de vitesse entre les filets **A** et **B** est le résultat net de la différence de fréquence des bonds co- et concourants. En admettant un profil linéaire de vitesse sur la petite distance ℓ , on a :

$$-\frac{du}{dy} = \frac{a}{\ell}(f_{+} - f_{-})$$
(3.11)

Les fréquences de bond étant remplacées par leur expression 3.10 dans l'équation 3.11, il vient :

$$-\frac{du}{dy} = 2\frac{a}{\ell}f_o \sinh\left[\frac{a}{\ell}\frac{\tau_{xy}\tilde{V}}{2\Re T}\right]$$
(3.12)

L'expérience montre que l'énergie libre d'activation $\Delta \tilde{G}_o$ est proportionnelle à l'énergie interne de vaporisation du liquide, qui dépend elle-même linéairement de la température d'ébullition T_b conformément à la loi de Trouton.

Par ailleurs, pour les liquides newtoniens (voir chapitre 4) a et ℓ sont du même ordre de grandeur et l'argument du sinh est petit devant l'unité de sorte que la relation 3.12 prend la forme finale suivante :

$$\tau_{xy} = -\frac{\aleph\hbar}{\tilde{V}}\exp\left(3,8\frac{T_b}{T}\right)\frac{du}{dy}$$

d'où il est aisé d'extraire l'expression de la viscosité dynamique des liquides :

$$\mu = \frac{\aleph \hbar}{\tilde{V}} \exp\left(3, 8\frac{T_b}{T}\right) \tag{3.13}$$

 \aleph est le nombre d'Avogadro (6,023x 10^{23} molécules/g-mole).

En accord qualitatif avec l'observation expérimentale faite sur la plupart des liquides, la relation 3.13 indique que leur viscosité décroît exponentiellement avec l'élévation de la température. Par contre elle est quantitativement peu précise et n'est utilisable que pour avoir une première estimation, en particulier dans le cas de liquides à molécules longues et fines.

Chapitre 4

Fluides Non-Newtoniens

Les fluides sont classés en deux catégories.

- 1. Les fluides **newtoniens** pour lesquels la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la vitesse de déformation conformément à la formule de Newton 2.3. Tous les gaz et les liquides homogènes nonpolymériques ont un comportement newtonien.
- 2. Les fluides **non-newtoniens** pour lesquels il n'existe plus de relation linéaire et instantanée entre la contrainte et le gradient de vitesse. La viscosité absolue définie selon la relation 2.3 dépend de façon plus ou moins complexe de la contrainte appliquée et dans certaines situations du temps.

L'étude des caractéristiques très diverses des fluides non-newtoniens constitue la science de la rhéologie dont un des précurseurs était le Professeur Bingham du collège Lafayette. D'une façon générale, elle se préoccupe de la déformation et de l'écoulement de la matière. L'appareil de laboratoire qui permet la détermination des propriétés des fluides non-newtoniens est le rhéomètre.

4.1 Comportement dépendant de la contrainte

La figure 4.1 décrit les principaux comportements non-newtoniens qui ne font pas intervenir une évolution dans le temps de l'écoulement.

- 1. <u>Les viscoplastiques</u> De telles matières, aussi appelées plastiques de Bingham, se fluidifient et s'écoulent dès que la contrainte dépasse une valeur critique τ_c . Au delà de ce seuil, ils se comportent comme des fluides newtoniens (courbe 'b' de la figure 4.1). Le ciment frais approche bien ce comportement avec $\tau_c \simeq 50 \ Pa$ et une viscosité effective $\mu_e \simeq 0,0003 \ Pa.s$. Les pâtes de dentifrice, les boues de forages, certaines argiles et les suspensions de micro-particules de combustible nucléaire dans l'eau lourde sont d'autres exemples de fluides viscoplastiques.
- 2. <u>Les pseudo-plastiques</u>. Les pseudo-plastiques sont des fluides dont la viscosité apparente diminue lorsque la contrainte augmente (courbe 'c'de la figure 4.1). De nombreux fluides non-newtoniens ont des comportements pseudo-plastiques. Les exemples typiques sont les encres d'imprimerie, les peintures, les polymères liquides et les pâtes à papier. Pour ces fluides, l'augmentation de τ_{xy} induit un réarrangement des macromolécules qui s'alignent parallèlement avec l'écoulement ce qui facilite son établissement.



FIG. 4.1 – Modèles non-newtoniens stationnaires

Le résultat 3.12 obtenu au paragraphe 3.2 est une formulation du modèle de Eyring qui constitue un des descriptifs du comportement de ces fluides. Néanmoins, le modèle simple communément employé est la *loi en puissance* due à Ostwald et de Waele :

$$\tau_{xy} = \left[K_{\mu} |\dot{\gamma}|^{n-1} | \right] \dot{\gamma} \tag{4.1}$$

L'exposant n permet de quantifier l'écart par rapport au comportement newtonien. Quand n = 1 nous retrouvons la relation de Newton (courbe 'a' de la figure 4.1). Par contre n est inférieur à 1 pour les pseudo-plastiques. Le terme entre crochets de la relation 4.1 est la viscosité apparente μ_a du fluide et le paramètre K_{μ} est nommé la consistance.

Les courbes tracées à la figure 4.2 illustrent la variation de μ_a avec la vitesse de déformation pour certains pseudo-plastiques.

3. Les fluides dilatants. Contrairement aux pseudo-platisques, les fluides dilatants deviennent d'autant plus résistants à l'écoulement que la contrainte appliquée augmente (courbe 'b' de la figure 4.1). Ils possèdent une viscosité effective qui croît avec la vitesse de déformation. Un bel exemple est le sable mouillé dont les grains glissent les uns sur les autres sous l'effet de lubrification de l'eau aux faibles vitesses mais qui s'arc-boutent les uns sur les autres sous l'effet des frottements aux fortes contraintes. Le modèle de loi en puissance 4.1 s 'adapte bien pour décrire le comportement de ces fluides en prenant n supérieur à 1.

4.2 Comportement dépendant du temps

Jusqu'à présent nous avons supposé que la vitesse de déformation était indépendante du temps d'application de la contrainte. Ce n'est pas toujours le cas ; en effet on observe



FIG. 4.2 – Viscosité apparente de pseudo-plastiques

fréquemment que la viscosité apparente du fluide varie durant le temps d'imposition de la force et que ces modifications peuvent être réversibles ou irréversibles.

- 1. Les fluides thixotropes. Les fluides dont la viscosité effective diminue graduellement avec le temps d'application d'une contrainte constante et réaugmente après cessation de l'effort pour atteindre sa valeur initiale après un certain temps, sont appelés thixotropes. Cette propriété offre d'intéressantes applications pratiques comme l'enduction de la peinture ; pendant l'étalement, soumise à une forte contrainte sous l'effet du pinceau ou du rouleau, la peinture présente une viscosité faible. Par contre, après relaxation de la contrainte, la structure à forte viscosité se reconstitue et empêche d'éventuelles dégoulinades. La préparation de la mayonnaise repose sur le même phénomène. Les fluides qui subissent un accroissement de la viscosité apparente dans le temps sous contrainte constante sont anti-thixotropes ou **rhéopectiques**. La thixotropie se produit plus particulièrement dans les circonstances où les fluides sont des pseudo-plastiques. De même, la rhéopexie est usuellement associée aux fluides dilatants.
- 2. Les fluides viscoélastiques. En théorie de l'élasticité, la contrainte est proportionnelle à l'élongation ou à la contraction. Dans un fluide nous avons vu qu'elle dépend de la vitesse de cisaillement. Une substance pour laquelle ces deux effets se conjuguent est viscoélastique. Les fluides possèdent tous, à des degrés plus ou moins importants, les propriétés visqueuses et élastiques simultanément. En fait, le comportement final va dépendre du temps naturel ou de relaxation microscopique du matériau, t_r , et du temps caractéristique de la perturbation (du processus de déformation) appliquée au corps, t_p .

Suivant l'idée que nous pourrions observer toute matière s'écouler, même les montagnes si nous pouvions attendre longtemps, nous définissons le nombre de Déborah $D_e = t_r/t_p$. Lorsque ce nombre est plus petit que l'unité, le matériau présente un comportement fluide; par contre aux très grandes valeurs de D_e , cas d'une application de contrainte très rapide ou d'un temps naturel du matériau très long, le comportement sera du type solide élastique. La viscoélasticité traite des compor-



FIG. 4.3 – Phénomènes viscoélastiques

tements qui se situent entre ces deux extrêmes. Ainsi, lors d'une expérience lente la substance apparaîtra plus visqueuse qu'élastique et inversement lors d'une expérience rapide.

La nature viscoélastique de certains fluides se manifeste par des comportements *a priori* inattendus dont deux situations typiques sont représentées à la figure 4.3. Les écoulements des fluides viscoélastiques s'accompagnent de la formation de contraintes normales perpendiculaires à la direction du gradient de vitesse. Sous l'action de ces contraintes viscoélastiques, un fluide macromoléculaire va grimper le long d'un cy-lindre vertical mis en rotation alors qu'un fluide newtonien va s'en éloigner sous l'effet des forces d'inertie ; c'est l'effet Weissenberg. Le gonflement d'un jet de po-lymère liquide à la sortie d'un tube capillaire se rencontre régulièrement dans les procédés d'extrusion ; c'est l'effet Barus. Cette expansion est d'autant plus importante que le taux de cisaillement ou le débit est grand. Ce phénomène est le résultat d'une relaxation des tensions élastiques normales après l'orifice de sortie.

Chapitre 5

Exemple : Ecoulement du film tombant

La chute d'un film liquide le long d'un mur solide plan est un exemple d'écoulement unidirectionnel simple qui nous permet d'illustrer l'application de la loi de la quantité de mouvement. La figure 5.1 décrit la configuration du problème posé. La paroi, inclinée de l'angle Θ par rapport à la verticale Oy, est suffisamment longue pour admettre que l'écoulement liquide induit par la pesanteur soit établi sur une portion L; cette hypothèse implique que l'épaisseur du film δ et le débit massique total \dot{m} (comme le débit volumique puisque nous traitons le cas d'un fluide incompressible, $\rho = Cte$) au travers de la section transversale soient constants. Ils ne dépendent pas du point courant le long de Ox. Par ailleurs, nous nous limitons au régime laminaire c'est-à-dire aux conditions pour lesquelles le fluide se comporte comme s'il était constitué de très fines "lamelles" qui se déplaceraient parallèlement les unes par rapport aux autres

5.1 Bilan de quantité de mouvement

Le petit élément de contrôle ABCD d'envergure unitaire défini à la figure 5.1 représente une de ces couches fluides d'épaisseur dy. Appliquons-lui l'équation de la quantité de mouvement projetée dans la direction Ox. Le bilan s'énonce comme suit :

$$\begin{bmatrix} Flux de quantité \\ de mouvement \\ entrant \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Flux de quantité \\ de mouvement \\ sortant \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Somme \\ des forces \\ appliquées \end{bmatrix} = 0$$
(5.1)

5.1.1 Flux net de quantité de mouvement

Compte tenu de l'agitation moléculaire, discutée au chapitre 2, le flux entrant par le coté AB est :

$$\Phi_{AB}^+ = (\tau_{xy}|_y) L \tag{5.2}$$

De même, le flux sortant par le coté CD s'écrit

$$\Phi_{CD}^- = (\tau_{xy}|_{y+dy}) L \tag{5.3}$$

La condition de régime établi et la constance de \dot{m} le long de Ox signifient que l'écoulement se caractérise par une composante de vitesse, u, parallèle à la paroi. Elle possède



FIG. 5.1 – Ecoulement du film tombant

un profil suivant y mais ne varie pas avec x. Par conséquent le gradient de la vitesse normale aux cotés AD et BC est nul. Dès lors, la loi de Newton stipule que dans ce cas il n'y aura pas de contribution due à l'agitation moléculaire au travers de ces segments. Par contre, l'écoulement s'accompagne d'un mouvement d'entraînement macroscopique de l'impulsion (ρu) qui traverse ces sections transversales. Ces flux d'impulsion dus au mode d'advection sont égaux :

$$\Phi_{AD}^+ = \Phi_{BC}^- = \rho u^2 dy \tag{5.4}$$

Suivant la loi 5.1, le flux net de quantité de mouvement sur l'élément ABCD se réduit à :

$$\Delta \Phi_{ABCD} = \Phi_{AB}^+ - \Phi_{CD}^- + \Phi_{AD}^+ - \Phi_{BC}^-$$

d'où

$$\Delta \Phi_{ABCD} = L \left[\tau_{xy} |_y - \tau_{xy} |_{y+dy} \right] = -L \frac{d\tau_{xy}}{dy} dy$$
(5.5)

5.1.2 Forces appliquées

A ce stade du développement, nous injectons l'hypothèse, à vérifier *a posteriori*, que le film est suffisamment mince pour que la pression soit partout la même et égale à la pression atmosphérique. La seule force <u>extérieure</u> qui agit sur le volume de référence ABCD est la pesanteur. Le poids de l'élément projeté suivant Ox est

$$F_P = \rho g \cos(\Theta) L dy \tag{5.6}$$

g est l'accélération de la pesanteur.

Finalement l'équation de base qui décrit le mouvement du film liquide est obtenue en combinant 5.5 et 5.6. Il vient :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \rho g \cos(\Theta) \tag{5.7}$$

5.2 Description de l'écoulement

La relation 5.7 est une équation différentielle ordinaire du premier ordre dont l'intégration fournit une distribution linéaire de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{xy} = (\rho g \cos \Theta) y + C_1$$

La constante C_1 ne peut être déterminée que par l'introduction d'une condition aux limites physique. Portons notre attention sur l'interface entre le film et l'air environnant au repos. La très faible agitation moléculaire entre ces deux milieux n'induit que des échanges de quantité de mouvement infimes; ce qui se formule par :

à
$$y = \delta$$
 $\tau_{xy} = 0$ $\Longrightarrow C_1 = -(\rho g \cos \Theta) \delta$

L'expression analytique finale du profil de la tension visqueuse est :

$$\tau_{xy} = \rho g \cos(\Theta) [y - \delta] \tag{5.8}$$

Comme $y \leq \delta$, nous constatons que la contrainte τ_{xy} est toujours négative ou nulle, ce qui précise bien qu'elle s'oppose à l'écoulement. Elle prend une valeur maximale à la paroi où son module vaut :

$$|\tau_{xy}^{max}| = \rho g \delta \cos \Theta \tag{5.9}$$

et qui n'est rien d'autre que la composante du poids du film liquide par unité de longueur et d'envergure.

Il est à noter que la formulation 5.8–5.9 reste valable quel que soit le type de liquide, newtonien ou pas et que seul le choix du fluide va conditionner le profil de vitesse. Considérons le cas d'un fluide newtonien et utilisons la relation de Newton, Eq. 2.3, en combinaison avec l'expression 5.8 : nous établissons ce faisant l'équation différentielle ordinaire du premier ordre qui régit le profil de vitesse u(y):

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho g \cos \Theta}{\mu} (\delta - y)$$

Après intégration et ayant imposé que le fluide, puisque visqueux, adhère à la paroi solide, c'est-à-dire que u = 0 à y = 0, nous obtenons :

$$u = \frac{\rho g \delta^2 \cos \Theta}{2\mu} \left[2 - \frac{y}{\delta} \right] \frac{y}{\delta}$$
(5.10)

La distribution de vitesse du film liquide est parabolique. Elle atteint son maximum à l'interface liquide-air :

$$u_{max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \Theta}{2\mu} \tag{5.11}$$

Recherchons l'expression du débit massique par unité d'envergure :

$$\dot{m} = \rho \int_0^\delta u(y) dy = \rho \left[\frac{\rho g \delta^3 \cos \Theta}{3\mu} \right]$$
(5.12)

Si nous définissons la vitesse moyenne débitante $\langle u \rangle$ telle que :

$$\dot{m} = \rho < u > \delta$$

alors de 5.12 et 5.11 nous voyons que :

$$\langle u \rangle = \left[\frac{\rho g \delta^2 \cos \Theta}{3\mu}\right] = \frac{2}{3} u_{max}$$
 (5.13)

5.3 Paramètres de similitude

L'ensemble de l'analyse présentée ci-avant peut être exploité pour faire ressortir des groupements sans dimension qui sont des combinaisons de variables ou paramètres. L'intérêt de ces nombres adimensionnels est de permettre une généralisation des résultats descriptifs en les traduisant sous forme de corrélations déduites de l'expérience et obtenues dans différentes conditions.

En particulier, l'expression de la vitesse moyenne, 5.13, peut être manipulée pour se mettre sous la forme suivante :

$$\left[\frac{\langle u \rangle^2}{\delta g \cos \Theta}\right] * \left[\frac{\rho \langle u \rangle \delta}{\mu}\right]^{-1} = \frac{1}{3}$$
(5.14)

Deux groupes adimensionnels importants sont ainsi mis à jour. Il s'agit du **nombre** de FROUDE (premier terme de gauche de 5.14) et du **nombre de REYNOLDS** (deuxième terme de gauche de 5.14).

• Le nombre de FROUDE. Il compare les effets d'inertie aux effets de gravité :

$$Fr = \frac{\langle u \rangle^2}{\delta q \cos \Theta}$$

Il joue un rôle prépondérant dans la plupart des écoulements à surface libre où la pesanteur intervient comme dans les phénomènes de ressauts hydrauliques par exemple.

• Le nombre de REYNOLDS. Il caractérise l'importance relative du transport de la quantité de mouvement par advection et par diffusion visqueuse. Son écriture

$$Re = \frac{\rho < u > \delta}{\mu} = \frac{\langle u > \delta}{\nu}$$

fait apparaître une nouvelle propriété du fluide, la viscosité cinématique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Elle a la dimension d'une diffusivité soit $[m^2/s]$. Par conséquent, le temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement sur l'épaisseur du film prise comme distance typique est de l'ordre de δ^2/ν . Par ailleurs le temps caractéristique d'advection, durée

du parcours de cette distance prise selon Ox est de l'ordre de $\delta/\langle u \rangle$. Le rapport de ces deux temps caractéristiques est le nombre de Reynolds. Nous retiendrons que le mécanisme dont la propagation sera la plus rapide, dominera l'écoulement et imposera l'organisation du champ de vitesse.

Si une campagne d'essais est menée sur le film tombant, la relation 5.14 suggère qu'une corrélation expérimentale linéaire entre Re et Fr soit trouvée :

$$Re = 3Fr \tag{5.15}$$

En fait, l'expérience montre que tant que Re reste inférieur à l'unité, les forces visqueuses ordonnent l'écoulement avec des lignes de courant parfaitement rectilignes et parallèles à la paroi. Le régime est laminaire et la relation 5.15 est vérifiée. L'augmentation du nombre de Reynolds au-dessus de cette valeur, va entraîner le frémissement de la surface libre, l'apparition de petites vaguelettes et la désorganisation de l'écoulement. Le régime devient turbulent pour $Re \simeq 100$ et les résultats analytiques obtenus ci-dessus ne sont plus valables.

Quant à la tension pariétale τ_{xy}^{max} , elle peut être exprimée sous forme d'un coefficient de frottement défini par :

$$C_f = \frac{|\tau_{xy}^{max}|}{\frac{1}{2}\rho < u > 2}$$
(5.16)

La norme, $\frac{1}{2}\rho < u >^2$, est la **pression dynamique** moyenne de l'écoulement. Avec les expressions 5.9, 5.11 et 5.15, le coefficient de frottement peut prendre les formes simples suivantes :

$$C_f = \frac{2}{Fr} = \frac{6}{Re} \tag{5.17}$$

5.4 Application numérique.

Prenons comme illustration, le cas d'une plaque de verre lisse, inclinée de 45 degrés et revêtue continûment par un film d'huile qui s'écoule avec un débit massique de 0,1 $kg.m^{-1}.s^{-1}$. L'huile a une masse volumique de 900 $kg.m^{-3}$ et une viscosité dynamique de 0,18 *Pa.s.* Recherchons l'épaisseur de la couche liquide en postulant un écoulement laminaire. L'équation 5.12 du débit nous permet de répondre à la question :

$$\delta = \left[\frac{3\nu\dot{m}}{\rho g\cos\Theta}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{3(\frac{0.18}{900})(0,1)}{(900)(9,81)(0,707)}\right]^{\frac{1}{3}} = 0,0021 \ m$$

La faible valeur de δ confirme la validité de l'hypothèse sur l'uniformité de pression. Vérifions si la solution est en accord avec la condition de laminarité. Pour ce faire calculons la vitesse débitante

$$\langle u \rangle = \frac{(900)(9,81)(0,0021)^2(0,707)}{2(0.18)} = 0,052 \ ms^{-1}$$

ce qui donne comme nombre de Reynolds

$$Re = \frac{(900)(0.052)(0.0021)}{(0.18)} = 0,546$$

La valeur critique de 1 n'étant pas atteinte, l'approche suivie est satisfaisante.

- <u>Exercice</u>

A titre d'exercice, on reprendra ce même problème en remplaçant l'huile par l'eau. Quelle conclusion tire-t-on?

Chapitre 6

Equations générales

Dans cette section du cours, nous abordons la description générale du comportement dynamique des écoulements multidimensionnels. Nous ferons abstraction des aspects énergétiques qui, faisant généralement intervenir des variations de température dans le fluide, seront traités dans la partie II du cours.

De plus, le fluide est supposé être un corps pur ou un mélange homogène de plusieurs espèces, caractérisé par une masse volumique ρ : les processus de transfert de matière soit diffusionnels soit convectifs ne sont pas considérés. Ces notions seront discutées dans la partie III.

Enfin rappelons que le fluide est modélisé par un milieu continu; concept qui reste valide tant que la dimension caractéristique de l'écoulement étudié, L, demeure largement supérieure à la longueur typique de l'agitation moléculaire comme par exemple le libre parcours moyen ℓ ($L \gg \ell$).

Les équations générales qui décrivent le mouvement d'un fluide s'appuient sur les lois fondamentales de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement ou d'impulsion. Elles peuvent prendre essentiellement deux formes. Effectuer un bilan sur un petit volume élémentaire entourant un point dans le fluide nous conduit à la forme ponctuelle ou locale des équations et se traduit par une écriture aux dérivées partielles. Raisonner sur une masse finie de fluide comprise dans un macro-domaine, généralement limité par les frontières du problème comme les parois solides du système physique, aboutit à la forme intégrale des équations de conservation et fait intervenir les propriétés globales de l'écoulement. Ces deux approches seront traitées successivement et l'accent sera placé sur les avantages offerts selon la spécificité de l'application envisagée.

Pour donner un caractère général à la mise en équation, nous allons travailler sur la conservation d'une grandeur extensive $m\chi$. m est la masse d'un petit paquet fluide et χ est soit un scalaire soit un vecteur selon l'équation de conservation considérée. Ainsi dans le cas de l'équation de la masse $\chi = 1$, pour l'équation de la quantité de mouvement $\chi = \vec{V}$ vecteur vitesse du fluide.

6.1 Formes locales

La formulation ponctuelle fait intervenir les bilans sur une particule fluide de masse dm comprise dans un volume de contrôle $d\mathcal{V}ol$ infiniment petit. La particule fluide est un élément de matière dont la taille $\equiv^3 \sqrt{d\mathcal{V}ol}$ est très petite devant les échelles de longueur de

l'écoulement L et très grande devant le libre parcours moyen ℓ . Si cette dernière condition n'était pas vérifiée, alors les molécules traverseraient le volume sans variation de quantité de mouvement et il serait impossible de définir une répartition moyenne significative de la vitesse dans la particule. Nous avons donc $dm = \rho d\mathcal{V}ol$ puisque nous sommes dans un milieu continu.

Pour déduire les formes locales des équations de conservation, deux approches peuvent être envisagées. Le volume $d\mathcal{V}ol$ est celui d'un élément fluide donné que nous suivons dans son mouvement ou bien un petit domaine de contrôle situé en un point fixe dans un repère, que traverse un certain débit de matière.

6.1.1 Particule fluide dans son mouvement

Notre particule fluide contient une quantité donnée d'atomes et de molécules qui s'agitent dans le volume $d\mathcal{V}ol$. Nous la suivons dans son mouvement. En accompagnant ce paquet fluide dans son déplacement nous étudions le comportement d'un système à masse dm constante mais dont le volume $d\mathcal{V}ol$ peut éventuellement varier si le fluide est compressible. Les frontières immatérielles de cet ensemble sont imperméables ; aucun débit ne les traverse ; il n'y a pas de transport de matière advectée au travers de ce volume. Nous décrivons cette situation en spécifiant que la variation de la quantité χdm convoyée par la particule fluide ne peut être due qu'aux apports nets engendrés par l'agitation microscopique (processus diffusionnels, résultant de gradients comme la tension visqueuse) ou par l'action du milieu extérieur à la particule fluide (forces de volume) puisqu'il n'y a pas d'apport advectif :

$$\frac{\mathcal{D}(\chi dm)}{\mathcal{D}t} = \sum (\text{ Apports Nets }) \tag{6.1}$$

L'opérateur $\mathcal{D}(..)/\mathcal{D}\mathbf{t}$ est la dérivée totale par rapport au temps (d(..)/dt) évaluée par un observateur qui suit la particule fluide dans son mouvement; elle se nomme **dérivée particulaire** ou dérivée de Stokes. Dans un repère cartésien xyz, que nous utiliserons communément par la suite, elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\mathcal{D}(..)}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial(..)}{\partial t} + \frac{\partial(..)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial(..)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial(..)}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
(6.2)

Le premier terme du membre de droite de l'expression 6.2 est la dérivée partielle par rapport au temps ; elle représente l'évaluation des variations temporelles de la quantité étudiée (...), faite par l'observateur indépendamment du mouvement du paquet fluide. **Dans un processus stationnaire, ce terme est nul**. Les trois autres termes sont les contributions dues au déplacement de l'élément fluide. Ils tiennent compte du changement de position de la particule fluide dans le temps. En remplaçant dx/dt par la composante de vitesse u suivant x et en faisant de même pour les autres directions (composantes v et w) nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{D}(..)}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial(..)}{\partial t} + u\frac{\partial(..)}{\partial x} + v\frac{\partial(..)}{\partial y} + w\frac{\partial(..)}{\partial z}$$
(6.3)

En notation vectorielle, l'expression de la dérivée particulaire d'une quantité quelconque Q devient :

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{Q}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\mathcal{Q}$$
(6.4)

Si \mathcal{Q} est un champ de vecteur, par exemple la vitesse du fluide, $\nabla \vec{\mathcal{Q}}$ est le tenseur gradient de $\vec{\mathcal{Q}}$ dont la forme est celle d'un produit dyadique (voir annexe).

Nous tirons parti du fait que $dm = \rho d\mathcal{V}ol$ est une constante pour présenter l'équation de conservation 6.1 sous la forme classique suivante :

$$\rho \frac{\mathcal{D}(\chi)}{\mathcal{D}t} = \sum (\text{ Apports Nets par unité de volume })$$
(6.5)

6.1.2 Volume de contrôle fixe

Définissons un petit volume de contrôle parallélépipédique de côtés respectifs dx, dy et dz représenté à la figure 6.1 Le volume considéré de taille figée $d\mathcal{V}ol = dxdydz$ est traversé par un débit de matière. L'augmentation ou la diminution de la quantité de χdm contenue dans le volume $d\mathcal{V}ol$ est maintenant égale à la différence des flux advectifs entrant et sortant additionnée à tous les autres apports non créés par l'advection.



FIG. 6.1 – Volume de contrôle

Ce qui se formule comme suit

$$\frac{\partial(\chi dm)}{\partial t} = \begin{bmatrix} Flux \ de \ m\chi \\ entrant \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Flux \ de \ m\chi \\ sortant \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum(algébrique \ des \ apports) \\ autres \ que \ advectifs \end{bmatrix}$$
(6.6)

Le débit massique de fluide à travers la surface dydz en x vaut $(\rho u)_x dydz$ et la quantité $m\chi$ qui traverse cette surface par unité de temps est $(\rho u\chi)_x dydz$. De même pour la section située en x + dx on obtient $(\rho u\chi)_{x+dx} dydz$. En appliquant le même raisonnement aux surfaces dxdz et dxdy, nous pouvons établir la différence de flux due à l'advection de χ :

$$(\rho u\chi)_x dy dz - (\rho u\chi)_{x+dx} dy dz + (\rho v\chi)_y dx dz - (\rho v\chi)_{y+dy} dx dz + (\rho w\chi)_z dx dy - (\rho w\chi)_{z+dz} dx dy dz + (\rho w\chi)_z dx dy dz + (\rho w$$

=

$$\left(\frac{\partial\rho u\chi}{\partial x} + \frac{\partial\rho v\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho w\chi}{\partial z}\right) = -d\mathcal{V}ol\nabla.(\rho\vec{V}\chi)$$

(6.7)

A cette étape du développement nous rappellerons un résultat mathématique utile liant les opérateurs de divergence $(\nabla . (-))$ et de gradient $(\nabla (-))$, qui a l'avantage de s'appliquer aussi bien à un scalaire qu'à un vecteur :

$$\nabla .(\rho \vec{V}\chi) = \chi \nabla .(\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \nabla \chi \tag{6.8}$$

En utilisant l'expression finale 6.7 du terme advectif, la relation 6.8 ci-dessus et après division par le volume constant $d\mathcal{V}ol$, l'équation de conservation 6.6 se ramène à :

$$\chi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla .(\rho\vec{V})\right) + \rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \vec{V}\nabla\chi\right) = \sum(\text{Apports Nets/Vol.})$$

ou, avec l'introduction de la dérivée particulaire (voir 6.4) à :

$$\chi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla .(\rho\vec{V})\right) + \rho\frac{\mathcal{D}\chi}{\mathcal{D}t} = \sum (\text{ Apports Nets/Vol. })$$
(6.9)

6.1.3 Conservation de la masse

L'équation de la conservation de la masse se déduit aisément de 6.9 en posant $\chi = 1$ et en notant que pour un fluide à une seule espèce ou parfaitement homogène il n'y a pas d'apports autres que ceux par advection. Nous arrivons ainsi à l'**équation de continuité** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla .(\rho \vec{V}) = 0 \tag{6.10}$$

A titre d'exercice on démontrera que l'équation de continuité peut aussi prendre la forme suivante :

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\nabla.\vec{V} = 0 \tag{6.11}$$

Trois applications directes de l'équation de continuité méritent d'être citées.

 Combinée linéairement avec l'expression de la dérivée particulaire, elle fournit une première forme du théorème du transport :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\chi}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \rho \chi}{\partial t} + \nabla .(\rho \chi \vec{V})$$
(6.12)

- Elle montre que la forme de l'équation de la conservation 6.9 se réduit bien à celle de l'équation 6.5.
- Dans l'observation de la particule fluide dans son mouvement, la conservation de la masse se traduit simplement par :

$$\frac{\mathcal{D}dm}{\mathcal{D}t} = 0$$

ce qui se développe en

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \frac{\rho}{d\mathcal{V}ol}\frac{\mathcal{D}d\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} = 0$$

En comparant ce résultat à la deuxième forme de l'équation de continuité (Eq. 6.11), on tire la conclusion que la divergence du champ de vitesse quantifie le taux de dilatation cubique du fluide ou la variation relative de volume par unité de temps :

$$\frac{1}{d\mathcal{V}ol}\frac{\mathcal{D}d\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} = \nabla.\vec{V}$$
6.1.4 Conservation de la quantité de mouvement

Pour établir l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous identifions \vec{V} à χ dans l'équation générale 6.9 qui devient en décomposant la dérivée particulaire selon 6.4 :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}.\nabla)\vec{V} = \sum (\text{ Apports Nets })$$
(6.13)

Dans le membre de gauche nous trouvons le terme purement temporel qui prend en compte les effets instationnaires et le terme d'accélération advective qui introduit un caractère non-linéaire dans l'équation.

Comme nous l'avons déjà précisé, le second membre de l'équation de conservation comprend l'ensemble des apports qui ne sont pas de source advective. Ce sont les termes qui tiennent compte :

 Des transferts moléculaires de par l'agitation microscopique qui induit des contraintes comme les forces de pression et les tensions visqueuses; ce sont des **forces de surface**,

Des actions des forces extérieures, c'est-à-dire des forces de volume.
 Etudions en détails ces deux dernières contributions.



FIG. 6.2 – Contraintes dues à l'agitation moléculaire

1. Forces de surface

La figure 6.2 représente le volume de contrôle et les différentes contraintes, résultat du mouvement des molécules, qui s'appliquent sur les facettes de l'élément fluide.

Dans un fluide au repos, la contrainte, valeur de la force qui s'exerce sur l'unité de surface, est **uniquement normale** aux facettes mais elle est **indépendante** de la direction de la normale de l'élément surfacique sur lequel elle agit; c'est la **pression hydrostatique**. Elle acte également dans toutes les directions tout en étant une fonction de la position dans le fluide.

Dans un fluide en mouvement il n'en est plus de même. L'observation révèle en plus l'apparition de contraintes **tangentes** aux facettes, reflet de l'effet de la viscosité du fluide qui donne naissance à des forces de frottement entre couches (voir loi de Newton, chapitre 2). Par ailleurs, les contraintes normales sont devenues des fonctions du vecteur normal à la facette. La notion de pression s'exerçant de manière équivalente en toute direction disparaÎt. Toutefois, on reconnaîtra plus après tout l'intérêt de garder dans le développement un scalaire jouant le rôle analogue d'une pression statique dans le sens où elle va représenter la quantité intensive qui subsisterait si on figeait subitement l'écoulement.

En définitive, sur notre volume de contrôle nous identifions trois tensions normales symbolisées par la notation avec indice répété (σ_{xx} , etc...) et six tensions tangentielles ($\sigma_{xy}, .., \sigma_{zy}$) appelées **contraintes de cisaillement**. Ces neuf composantes forment le **tenseur des contraintes**. C'est un tenseur de rang deux qui se présente sous la forme d'une matrice trois sur trois :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \left| \begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right|$$

En analysant l'équilibre des couples s'exerçant sur le volume fluide dxdydz, on démontre que le tenseur $\overline{\sigma}$ est symétrique et donc, d'une façon générale, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

De manière à bien mettre en évidence les parties du tenseur qui correspondent aux contraintes de pression – forces normales aux surfaces qui subsistent même en absence d'écoulement – et aux contraintes de viscosité, nous décomposons $\overline{\overline{\sigma}}$ sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$$
(6.14)

 \overline{I} est la matrice diagonale unitaire (ou indice de Kronecker). Comme nous l'avons introduit plus haut, P se veut être une grandeur analogue à la pression statique. Pour conserver les propriétés d'une pression locale, elle doit être indépendante de la direction de la normale à la facette. Or, la théorie des tenseurs nous informe que la moyenne des trois contraintes normales (termes sur la diagonale) est un invariant dans une rotation des axes de référence. Par conséquent, nous définissons la pression en un point quelconque de l'écoulement par la relation :

$$P = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \sigma_{i,i} \tag{6.15}$$

En définitive P désigne la pression prise au sens **mécanique** du terme, c'est-à-dire définie à partir des contraintes mécaniques qui s'exercent sur le volume fluide. Un écoulement n'étant pas un système en équilibre thermodynamique à chaque instant, il ne sera jamais rigoureux de baser la définition de la pression dans un fluide en mouvement sur des considérations purement thermodynamiques. Cependant, il est bon de garder à l'esprit que la pression P ainsi définie est effectivement le vrai paramètre accessible à l'observation d'un mécanicien des fluides : une quantité reposant sur des relations d'équilibre ne serait au mieux qu'une approximation de la propriété d'un fluide en mouvement. La contrainte de pression est précédée du signe négatif pour préciser qu'un fluide au repos est généralement en compression et que la contrainte doit être de sens opposé au vecteur normal à la facette qui pointe vers l'extérieur du volume (voir figure 6.2).

 $\overline{\tau}$ est l'ensemble des contraintes uniquement produites par des effets visqueux. Soulignons dès à présent que ce tenseur comporte aussi des termes diagonaux; en effet il peut arriver que le mouvement relatif des couches de fluide engendre des contraintes de viscosité normales qui, par ailleurs, peuvent dépendre de la direction (c'est-à-dire $\tau_{xx} \neq \tau_{yy} \neq \tau_{zz}$). C'est le cas des fluides viscoélastiques qui se particularisent par l'apparition de l'effet Weissenberg (voir figure 4.3). Toutefois on remarquera que la définition 6.15 a comme implication que la somme des éléments diagonaux de $\overline{\tau}$ s'annule; ce qui signifie qu'il n'y a pas de contribution des tensions de viscosité à la **contrainte normale moyenne**.

2. Forces de volume

Les forces de volume ou forces extérieures qui vont agir sur l'unité de masse du fluide peuvent avoir différentes origines. Celles rencontrées dans les applications courantes sont la force de pesanteur, la force électrostatique dans le cas des gaz ionisés, la force magnétique sur les plasmas dans le cas des procédés de MHD et la force de Coriolis quand l'on traite du mouvement dans des systèmes en rotation, des grandes structures atmosphériques et océaniques (référentiel tournant). Nous regrouperons sous la notation $\vec{\mathcal{F}}$ toutes les forces de volume par unité de masse.

Finalement, nous sommes maintenant en mesure d'établir l'équation de conservation de la quantité de mouvement (parfois nommée flux d'impulsion par certains auteurs). Avant tout soulignons que c'est une équation vectorielle; de ce fait, elle possède trois composantes. Pour illustrer sa formulation, considérons tout d'abord la projection des apports nets sur l'axe Ox. La résultante des forces de surface sur le segment [x, x + dx] donne :

$$(P|_{x} - P|_{x+dx}) \, dy dz + (\tau_{xx}|_{x} - \tau_{xx}|_{x+dx}) \, dy dz + (\tau_{yx}|_{y} - \tau_{yx}|_{y+dy}) \, dx dz + (\tau_{zx}|_{z} - \tau_{zx}|_{z+dz}) \, dx dy$$

Quant à la résultante des forces de volume, elle s'exprime simplement par $\rho \mathcal{F}_x$. Après avoir appliqué le développement en série de Taylor limitée au premier terme pour évaluer l'incrémentation de toute quantité entre x et x + dx,

$$(..)|_{x+dx} = (..)|_x + \frac{\partial(..)}{\partial x}dx$$

et divisé par le volume dxdydz, nous obtenons l'expression des apports nets le long de Ox:

$$\sum (\text{Forces de Surface et Volume}) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho \mathcal{F}_x$$

Les projections sur les axes Oy et Oz fournissent deux autres équations analogues à cette dernière (**à trouver à titre d'exercice**). En les regroupant toutes, nous arrivons à la forme vectorielle finale de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P - \nabla.\overline{\tau} + \rho \vec{\mathcal{F}}$$
(6.16)

Les contraintes de pression (action opposée au vecteur normal sortant) et de viscosité se combinent sous un seul opérateur de divergence dans le membre de droite :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\nabla .\overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{\mathcal{F}}$$
(6.17)

L'équation 6.17 s'applique à n'importe lequel des milieux continus. C'est l'archétype de l'équation de transport d'où nous tirons les enseignements suivants :

a- L'équation de transport évalue le taux total de variation de la grandeur massique (scalaire ou vectorielle) advectée par la particule fluide au moyen de la dérivée particulaire et l'égale aux apports nets. Ces derniers sont caractérisés par

- une contribution surfacique qui proviendra toujours d'un flux de diffusion au travers de la surface de l'élément fluide et se traduira par l'opérateur divergence
- une contribution volumique qui sera l'équivalent d'un terme source (ou puits).

b- Quand la grandeur en question est le vecteur vitesse, nous sommes en présence de l'équation du mouvement qui stipule qu'un échantillon de matière se déplaçant avec le fluide subit une accélération provoquée par l'ensemble des forces qui agissent sur lui. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est totalement équivalente à la **loi fondamentale de la dynamique** ou seconde loi de Newton.

6.1.5 Les équations constitutives

L'équation vectorielle 6.17 est une équation générale de **type conservatif** qui, dans sa forme actuelle, fait intervenir plus d'inconnues qu'elle ne fournit d'équations scalaires aux dérivées partielles. Son exploitation demande de la compléter par une série d'équations de **fermeture** ou du **type constitutif** destinées à relier certaines inconnues entre elles et à réduire l'ordre de l'indétermination.

Une des relations constitutives est l'équation "d'état" ; elle relit la pression à la masse volumique ; ici on présuppose l'équivalence des pressions thermodynamique et mécanique ! Dans le cas des gaz parfaits elle a la forme suivante :

$$P = \frac{\Re}{\mathcal{M}}\rho T$$

où \Re est la constante universelle des gaz parfaits (= 8314 J/kmol.K) et \mathcal{M} la masse molaire du gaz.

De l'analyse menée au chapitre 2 nous avons retenu que la tension visqueuse est liée au gradient de vitesse. Si le fluide est newtonien, cette dépendance est linéaire. Aussi allonsnous pousser plus avant l'investigation en supposant le fluide newtonien et en postulant que la linéarité des relations se conserve dans le cas de l'écoulement tridimensionnel.

Bien que la propriété de symétrie réduise le nombre des tensions visqueuses à six, la détermination de leur dépendance avec le champ de vitesse n'en reste pas moins délicate. Une des méthodes employées consiste à décomposer un déplacement infime de la particule fluide lors de son mouvement. Cette décomposition dite de Helmotz fait apparaître essentiellement trois contributions qui sont illustrées à la figure 6.3 dans le cas simple d'un écoulement plan :

La particule subit une translation et une rotation dites en bloc accompagnées d'une déformation qui résulte de la superposition d'étirements (ou contractions) linéaires et angulaires. On montre que la vitesse angulaire de la rotation en bloc est égale à la moi-



FIG. 6.3 – Déformation d'une particule fluide

tié du rotationnel du champ de vitesse $\omega = \frac{1}{2}\nabla x \vec{V}$ et que les vitesses de déformation correspondant aux distorsions linéaires et angulaires valent respectivement :

– déformations linéaires

$$\dot{\gamma}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \dot{\gamma}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \dot{\gamma}_{yy} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- déformations angulaires

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \text{et}$$
$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Ces six quantités forment le tenseur symétrique, $\overline{\overline{\gamma}}$, des vitesses de déformation. Le choix d'un fluide newtonien nous pousse à espérer une relation tensorielle linéaire :

$$\overline{\overline{\tau}} = ||\mathcal{C}||\overline{\overline{\gamma}}$$

qui signifie que les propriétés dynamiques des fluides newtoniens devraient en toute généralité dépendre des 36 coefficients constituant la matrice de passage $||\mathcal{C}||$. Fort heureusement, des considérations de symétrie et d'isotropie allègent de façon significative le problème et ramènent le nombre des éléments de $||\mathcal{C}||$ à deux paramètres que nous dénotons μ et μ' . Ils permettent de généraliser la loi de Newton 2.3 au cas du flot multidimensionnel :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\mu \left[\{ \nabla \vec{V} \} + \{ \nabla \vec{V} \}^{\mathcal{T}} \right] - \mu' [\nabla . \vec{V}] \overline{\overline{I}}$$
(6.18)

Le symbolisme $\{..\}^{\mathcal{T}}$ indique qu'il s'agit du produit dyadique transposé (voir annexe).

Dans un écoulement de fluide incompressible, ρ ne varie pas ; la divergence de la vitesse est par conséquent nulle (confère équation de continuité 6.11) et μ' n'intervient plus dans la loi générale de Newton. Dans un écoulement compressible on exploite le fait que la somme des contraintes normales de viscosité soit nulle (compte tenu de la définition de P). Un calcul sans difficulté (exercice à faire) donne le résultat suivant :

$$(2\mu + 3\mu')\nabla . \vec{V} = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour toutes les valeurs de la divergence de la vitesse, nous arrivons à la conclusion de Stokes :

$$\mu' + \frac{2}{3}\mu = 0$$

La forme générale de la loi de Newton 6.18 se simplifie en :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\mu \left[\{ \nabla \vec{V} \} + \{ \nabla \vec{V} \}^{\mathcal{T}} - \frac{2}{3} [\nabla . \vec{V}] \overline{\overline{I}} \right]$$
(6.19)

Reprenons l'écoulement simple de cisaillement utilisé au chapitre 2. Dans cet écoulement, le vecteur vitesse \vec{V} est orienté suivant la direction Ox et sa composante u ne dépend que de la coordonnée y. De la relation 6.19 nous tirons que le seul terme non nul de $\overline{\tau}$ est la composante τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le paramètre μ est bien la viscosité dynamique telle que nous l'avions définie précédemment en l'associant aux contraintes tangentielles dues au frottement des différentes plaquettes fluides entre elles.

6.2 L'équation de Navier-Stokes

En insérant la relation constitutive 6.19 dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous sa forme 6.16, nous obtenons l'équation (vectorielle) de Navier-Stokes. Le coefficient de viscosité est, en toute généralité, fonction de la pression et de la température (voir chapitre 3) et ne peut être sorti de sous le signe de dérivation :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P + \nabla \cdot \left[\mu \left[\{\nabla \vec{V}\} + \{\nabla \vec{V}\}^{\mathcal{T}} - \frac{2}{3} [\nabla \cdot \vec{V}]\overline{\overline{I}} \right] \right] + \rho \vec{\mathcal{F}}$$
(6.20)

Néanmoins, dans de nombreuses situations pratiques la variation du coefficient de viscosité dans le fluide est insignifiante et de plus l'écoulement peut être assimilé à celui d'un fluide incompressible. Dans ces conditions nous posons $\mu = constante$ et $\rho = constante$ Comme $\nabla . \vec{V}$ est nul, le terme visqueux se simplifie comme suit :

$$\left[-\nabla.\overline{\tau}\right] = \mu\left(\nabla.\{\nabla\vec{V}\} + \nabla.\{\nabla\vec{V}\}^{T}\right)$$

ou encore

$$[-\nabla.\overline{\tau}] = \mu \left([\nabla.\nabla]\vec{V} + \nabla.[\nabla.\vec{V}] \right) = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

L'opérateur ∇^2 est le Laplacien (voir annexe).

Finalement l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement de fluide incompressible à viscosité constante s'écrit :

$$\frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{\mathcal{F}}$$
(6.21)

où la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ est utilisée.

Une variante de l'écriture 6.21 est obtenue par application de l'opérateur rotationnel aux deux membres de l'équation de Navier-Stokes. Cette procédure a l'avantage d'éliminer la pression puisque $\nabla x \nabla (..) = \mathbf{0}$. Le passage au rotationnel du terme advectif $(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})$ de la dérivée particulaire mérite quelque précision : en effet l'analyse vectorielle nous apprend que :

$$(\vec{V}.\nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla\vec{V}^2 + \vec{V}\mathbf{x}\vec{\omega}$$
(6.22)

Ce qui conduit à la seconde forme de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial[\vec{\omega}]}{\partial t} - \nabla \mathbf{x}(\vec{\mathbf{V}}\mathbf{x}\vec{\omega}) = \nu \nabla^{\mathbf{2}}[\vec{\omega}]$$
(6.23)

- <u>Exercice</u>

Développer les projections de l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement liquide plan stationnaire dans le cas où la pression est éliminée.

6.3 Règles de Similitude

Combinée à l'équation de continuité 6.11, l'équation de Navier- Stokes 6.21 modélise l'ensemble des écoulements des fluides newtoniens incompressibles. Le modèle mathématique est formé par un système de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre dont les variables sont les trois composantes de la vitesse et la pression.

A noter que si l'écoulement est compressible, la masse volumique devient une inconnue supplémentaire. La compressibilité du fluide implique des variations de température. Il est alors nécessaire d'inclure l'équation de conservation de l'énergie et l'équation d'état comme relation constitutive dans la modélisation. Ce point sera présenté dans la partie II.

Le problème à résoudre n'est clairement posé qu'une fois les conditions aux limites et les conditions initiales sur le champ de vitesse et de pression précisées. En général, la résolution est difficile. Quelques solutions analytiques de l'équation de Navier-Stokes ont été obtenues dans des configurations d'écoulements simples. Nous en traiterons quelques exemples au chapitre 7 . Pour la plupart des cas, nous devons avoir recours à des méthodes de résolution numériques; méthodes aux différences finies, aux volumes finis, aux éléments finis... Ces dernières reposent sur des techniques de discrétisation des dérivées qui transforment le système différentiel d'origine en un système algébrique généralement non-linéaire. Des techniques de linéarisation et des algorithmes de calcul numérique appropriés conduisent à la valeur des variables en des points d'un maillage recouvrant le domaine physique. Des ouvrages spécialisés traitant de ces approches sont repris dans la liste des références. Malgré son caractère complexe, l'équation de Navier-Stokes, formulée sous une forme non dimensionnelle, apporte un certain nombre de renseignements pratiques à l'ingénieur. Des résultats fondamentaux peuvent être extraits à partir de considérations simples liées aux dimensions des diverses grandeurs physiques qui interviennent dans les écoulements de fluides visqueux.

Pour être fructueuse, l'adimensionnalisation d'une équation de transport ou de conservation doit respecter des critères bien précis :

- Rendre sans dimension une équation consiste à normer toutes les variables indépendantes et dépendantes du problème.
- Les grandeurs de normalisation sont choisies pour que les termes différentiels résultants soient de l'ordre de l'unité.

Illustrons cette approche dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible plan Oxy de vitesse moyenne débitante **Uo**. Il se développe dans un canal de forme quelconque caractérisé par une dimension longitudinale L suivant Ox et une dimension transversale δ suivant Oy. Imaginons de plus que cet écoulement subisse localement des oscillations temporelles de vitesse avec une période t_o que nous adoptons comme base de temps. Entre l'entrée et la sortie de ce conduit règne une différence de pression moyenne ΔP_o . Ces différentes grandeurs seront les normes du problème :

d'une part

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_o}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta}$$

d'autre part

$$\tilde{u} = \frac{u}{\mathbf{Uo}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\mathbf{Uo}} \quad \text{et} \quad \tilde{P} = \frac{P}{\Delta P_o}$$

L'équation de continuité prend la forme sans dimension suivante :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left[\frac{L}{\delta}\right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{6.24}$$

En convenant que la force de volume provienne de la pesanteur, avec \vec{g} accélération de la gravité agissant dans la direction Oy, et en utilisant l'équation de continuité 6.24, l'écriture adimensionnelle des deux projections de l'équation de Navier-Stokes devient :

Suivant Ox

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{\mathbf{Uot_o}} \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \left\{ \frac{L}{\delta} \right\} \frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{y}} =$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{\Delta P_o}{\rho \mathbf{Uo^2}} \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \begin{bmatrix} \frac{\nu}{\mathbf{Uo\delta}} \end{bmatrix} \left(\left\{ \frac{\delta}{L} \right\} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left\{ \frac{L}{\delta} \right\} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$
(6.25)

Suivant Oy

$$\left[\frac{L}{\mathbf{Uot_o}}\right]\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \left\{\frac{L}{\delta}\right\}\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{y}} =$$
(6.26)

$$-\left[\frac{\Delta P_o}{\rho \mathbf{Uo^2}}\right]\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \left[\frac{\nu}{\mathbf{Uo\delta}}\right]\left(\left\{\frac{\delta}{L}\right\}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left\{\frac{L}{\delta}\right\}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right) + \left\{\frac{L}{\delta}\right\}\left[\frac{\delta g}{\mathbf{Uo^2}}\right]$$

La normalisation des équations fait apparaître des groupes sans dimensions devant les termes différentiels. Le rapport L/δ est le facteur d'allongement \tilde{l} ; c'est le paramètre de forme qui caractérise la géométrie du domaine physique. Les termes entre crochets droits ([..]) sont les **nombres de similitude dynamique** du problème. Nous avons successivement :

– Le nombre de Strouhal

$$Sr = \frac{L}{\mathbf{Uot_o}}$$

Dans notre exemple, il compare le temps typique du phénomène instationnaire au temps moyen de transit d'une particule fluide dans le canal (L/Uo). Dans le problème typique du "fil qui chante", il permet de ramener la fréquence d'émission des tourbillons générés par l'écoulement autour d'un fil qui entre en résonance, au temps de passage du fluide autour de l'obstacle.

– Le nombre d'Euler

$$Eu = \frac{\Delta P_o}{\rho \mathbf{Uo^2}}$$

C'est un coefficient de pression qui compare les forces de pression aux forces d'inertie. Notons qu'il est au facteur 2 près le rapport entre la variation totale de pression dans le conduit et la pression dynamique caractéristique de l'écoulement. Bien qu'il y soit intimement relié, il ne faut pas confondre le nombre d'Euler avec le coefficient de frottement (voir section 5.3).

- Le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\mathbf{Uo\delta}}{\nu}$$

Ce nombre adimensionnel a déjà été introduit au problème du film liquide descendant. Il compare les forces de viscosité aux forces d'inertie. Sa seconde signification physique fondamentale est le rapport entre le temps caractéristique d'advection au temps caractéristique de diffusion par viscosité. Cette remarque importante guide le choix de la grandeur géométrique de référence qui intervient dans le nombre de Reynolds; ce sera **la longueur sur laquelle la diffusion visqueuse a l'effet le plus marqué**.

- Le nombre de Froude

$$Fr = \frac{\mathbf{Uo^2}}{\delta g}$$

Aussi présenté lors de l'étude de la chute du film liquide, il intervient quand l'influence la force de pesanteur sur le mouvement devient notable. C'est le rapport entre les forces d'inertie et de gravité. La longueur caractéristique correspond à la dimension géométrique selon laquelle agit la pesanteur. Il n'a de l'importance que si le problème implique la présence d'une surface libre.

Deux écoulements seront **semblables** si :

- Leur géométrie est identique à même facteur d'allongement.
- Les nombres de similitude dynamiques qui les caractérisent sont respectivement égaux.

Ces deux règles sont à la base de toutes les études expérimentales conduites sur maquettes à échelles différentes de la réalité. Par exemple, si les lois de similitude sont respectées, l'investigation d'un écoulement conduite sur modèle $((..)_m)$ réduit ou pas, permettra l'obtention de corrélations directement applicables à l'écoulement sur prototype $((..)_p)$ à l'échelle 1. Ce qui implique :

$$\tilde{l}_m = \tilde{l}_p$$

 $Sr_m = Sr_p, \quad Eu_m = Eu_p$

 et

$$Re_m = Re_p, \quad Fr_m = Fr_p$$

Certaines fois, le respect simultané des nombres de similitude demande de mener les expériences sur des fluides de propriétés physiques différentes. Ainsi une simulation Re - Fr effectuée dans le même champ gravifique impose les égalités suivantes :

Respect de
$$Re \Longrightarrow \frac{\mathbf{Uo}_m \delta_m}{\nu_m} = \frac{\mathbf{Uo}_p \delta_p}{\nu_p}$$

 et

Respect de
$$Fr \Longrightarrow \frac{\mathbf{Uo}_m^2}{d_m} = \frac{\mathbf{Uo}_p^2}{\delta_p}$$

De la combinaison de ces deux égalités nous obtenons la relation à satisfaire :

$$\nu_m = \nu_p \left(\frac{\delta_m}{\delta_p}\right)^{1,5} \tag{6.27}$$

D'où la conclusion suivante : dans une similitude simultanée de Reynolds et Froude, le fluide modèle doit être différent du fluide prototype et son choix dépend du facteur d'échelle utilisé.

En général, une similitude complète est très difficile, voire impossible. Le problème précédent en est un exemple frappant. Supposons que la similitude Re - Fr soit envisagée pour étudier un écoulement d'eau dans un prototype de très grandes dimensions (dizaine ou centaine de mètres). On songe à une étude laboratoire sur modèle à petite échelle (de l'ordre du centimètre ou du mètre), donc un facteur de réduction d'environ 1/100. Le critère de similitude 6.27 nous fixe le choix du fluide de simulation; il doit avoir une viscosité cinématique mille fois plus petite que celle de l'eau. Un tel fluide n'existe pas (excepté l'hélium liquide près du zéro absolu).

On doit alors évaluer l'importance relative des nombres adimensionnels, pour chercher à relâcher le respect de certains sans pour autant affecter la qualité de la simulation. Dans de nombreux cas il faudra se diriger vers une similitude partielle appelée **similitude de comportement**. Dans une étude de comportement de Reynolds, le nombre de Froude est relaxé et *vice et versa*. Si nécessaire on combinera linéairement les corrélations déduites de ces deux approches en présupposant implicitement la validité de la superposition des effets.

6.4 Formes intégrales : équations macroscopiques

6.4.1 Formulation générale

Dans le cas de systèmes complexes, s'attaquer à la détermination détaillée des champs de vitesse et de pression pour en déduire les transports de quantité de mouvement devient illusoire. Cette démarche demande d'importants efforts et moyens de calcul pour résoudre l'ensemble des équations aux dérivées partielles avec leurs conditions aux limites et initiales variées. L'ingénieur peut alors se diriger vers une étude **globale** ou **macroscopique** du système en utilisant les formes intégrales des équations du mouvement, complétées si besoin en est, par des renseignements expérimentaux ; ces derniers étant généralement traduits par des corrélations de nombres adimensionnels. Un grand intérêt de cette approche réside dans son applicabilité aux écoulements laminaires comme turbulents.

Dans cette approche, on définit le système par sa (ses) section (s) d'entrée S_1 , sa (ses) section (s) de sortie S_2 et sa (ses) paroi (s) solide (s) de surface S_p comme le schématise la figure 6.4.



FIG. 6.4 – Définition macroscopique d'un système

L'objectif est d'établir l'ensemble des équations macroscopiques qui décrivent le comportement global d'un fluide traversant ce domaine de volume $\mathcal{V}ol$. Pour garder un caractère général à la démonstration, nous partons de l'équation de conservation 6.17 à qui nous donnons l'écriture générique mais équivalente suivante :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\chi}{\mathcal{D}t} = -\nabla .\varphi + \Upsilon$$
(6.28)

Dans l'équation 6.28, φ désigne le flux par diffusion ; il peut être un vecteur ou un tenseur selon la nature de la quantité transportée χ . Ainsi nous avons vu que dans l'équation de la quantité de mouvement χ est le vecteur vitesse et φ est le flux de quantité de mouvement par agitation moléculaire, c'est-à-dire les contraintes visqueuses. Υ est le terme source ; il est soit scalaire (pour un mélange, création ou disparition d'une espèce par réaction) soit vecteur (forces extérieures). Passons à la forme intégrale de l'équation 6.28 et examinons chacun de ses termes :

- Terme 'Transport'

En vertu de la première forme du théorème du transport 6.12, nous pouvons décomposer la dérivée particulaire :

$$\int_{\mathcal{V}ol} \rho \frac{\mathcal{D}\chi d\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} = \int_{\mathcal{V}ol} \left[\frac{\partial \rho \chi}{\partial t} + \nabla .(\rho \chi \vec{V}) \right] d\mathcal{V}ol$$
(6.29)

Le volume du domaine physique est fixe dans le repère ; on peut écrire conventionnellement le terme intégral de la dérivée temporelle comme le taux de variation de la quantité totale $[m\chi]_{tot}$ comprise dans le volume $\mathcal{V}ol$:

$$\int_{\mathcal{V}ol} \frac{\partial \rho \chi}{\partial t} d\mathcal{V}ol = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}ol} \rho \chi d\mathcal{V}ol = \frac{d[m\chi]_{tot}}{dt}$$

En utilisant le théorème de la divergence (d'Ostrogradski- Gauss - voir annexe), on obtient la forme intégrale du théorème du transport :

$$\int_{\mathcal{V}ol} \rho \frac{\mathcal{D}\chi d\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} = \frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} + \int_{S} \rho \chi \vec{V}.\vec{n}_{e} d\mathcal{S}$$

 \vec{n}_e est la normale extérieure à la surface (voir figure 6.4)

- Terme 'Diffusion'

On transforme l'intégrale de volume du terme flux en intégrale de surface à l'aide de la formule de la divergence :

$$\int_{\mathcal{V}ol} \nabla .\varphi d\mathcal{V}ol = \int_{\mathcal{S}} \varphi . \vec{n}_e d\mathcal{S}$$

- Terme 'Source'

On définit le terme source totale Υ_{tot} par

$$\Upsilon_{tot} = \int_{\mathcal{V}ol} \Upsilon d\mathcal{V}ol$$

Finalement, en regroupant tous les termes on aboutit à une première forme intégrale de l'équation de conservation de la grandeur $m\chi$:

$$\frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} = -\int_{\mathcal{S}} \left(\rho\chi\vec{V} + \varphi\right) .\vec{n}_e d\mathcal{S} + \Upsilon_{tot}$$
(6.30)

Le terme 'intégrale d'advection' s'annule toujours le long de la surface solide imperméable puisque la vitesse est nulle par adhérence sur les parois fixes. Seules les deux sections d'entrée et de sortie font intervenir le flux d'advection de sorte que l'équation 6.30 se réduit à :

$$\frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} = -\int_{\mathcal{S}_1} \rho \chi \vec{V} \cdot \vec{n}_e d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}_2} \rho \chi \vec{V} \cdot \vec{n}_e d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} \varphi \cdot \vec{n}_e d\mathcal{S} + \Upsilon_{tot}$$
(6.31)

les intégrales sur les sections d'entrée et de sortie ne sont rien d'autre que les moyennes transversales $\langle \rho \chi V_n \rangle$ de la dite quantité au facteur \mathcal{S} près : en effet,

$$<\rho\chi V_n>=rac{1}{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{S}}\rho\chi\vec{V}.\vec{n}_e d\mathcal{S}$$

où V_n est la composante normale de la vitesse dans la section. On compte positivement V_{n1} dans le sens entrant dans le domaine et V_{n2} dans le sens sortant. On contracte l'écriture finale en introduisant l'opérateur 'différence' $\Delta_1^2 = < ... > S_2 - < ... > S_1$:

$$\frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2(\langle \rho\chi V_n \rangle S) - \int_{\mathcal{S}} \varphi . \vec{n}_e dS + \Upsilon_{tot}$$
(6.32)

6.4.2 Conservation de la masse

Nous considérons le cas d'une seule espèce. Il n'y a pas d'injection ni de soutirage de masse dans le domaine. De la forme ponctuelle 6.10 de l'équation de continuité viennent $\chi = 1, \varphi = 0$ et $\Upsilon = 0, d$ 'où :

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = <\rho V_n >_1 \mathcal{S}_1 - <\rho V_n >_2 \mathcal{S}_2 = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$
(6.33)

Dans l'expectative d'un apport ou d'un retrait de masse, \dot{m}_{ad} , au travers de parois éventuellement poreuses placées dans le système il faut rajouter ce terme au membre de droite de l'équation 6.33.

6.4.3 Conservation de la quantité de mouvement

De l'équation locale 6.17, on identifie $\chi = \vec{V}, \varphi = \overline{\sigma}$ et $\Upsilon = \vec{\mathcal{F}}$. Une analyse d'ordre de grandeur montre qu'il est légitime de négliger les flux de quantité de mouvement associés aux effets visqueux ou turbulents dans les sections d'entrée et de sortie devant les termes de pression (contraintes normales). Ce faisant, le terme 'flux' s'éclate de la façon suivante :

$$-\int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}_e d\mathcal{S} = _1 \vec{\mathcal{S}}_1 - _2 \vec{\mathcal{S}}_2 - \vec{\mathcal{F}}_p$$

avec $\vec{S_1} = -S_1 \vec{n_e}$ et $\vec{S_2} = S_2 \vec{n_e}$ ainsi que la figure 6.4 le montre. $-\vec{\mathcal{F}_p}$ représente la résultante des forces exercées sur le fluide par les parois. Il faut garder à l'esprit que cette force est la somme de toutes les contraintes de cisaillement, visqueuses et/ou turbulentes, et toutes les forces de pression qui agissent sur les parois.

En symbolisant par \mathcal{P}_{tot} la quantité de mouvement totale contenue dans le système et considérant que la force extérieure est due à la gravité, l'équation macroscopique de la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 [\langle \rho V^2 \rangle + P] \vec{\mathcal{S}} - \vec{\mathcal{F}}_p + m_{tot} \vec{g}$$
(6.34)

Il est coutume d'exprimer la quantité $\langle \rho V^2 \rangle \vec{S}$ en fonction du vecteur débit $\vec{m} = \langle \rho V \rangle \vec{S}$ et du rapport $\langle V^2 \rangle / \langle V \rangle$. En toute rigueur, ce dernier facteur ne peut être calculé que si la distribution de vitesse est connue : en effet, la moyenne du carré de la vitesse n'est pas en général égale au carré de la vitesse moyenne. Toutefois, on pourra pour la plupart des applications approximer ce ratio par $\langle V \rangle$. Cette simplification est d'autant plus justifiée que le profil de vitesse est plat, donc que l'écoulement est turbulent. Sur la base de ces notations, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[\frac{\langle V^2 \rangle}{\langle V \rangle} \vec{m} + P\vec{\mathcal{S}} \right] - \vec{\mathcal{F}}_p + m_{tot}\vec{g}$$
(6.35)

Pour un système à l'état stationnaire, le bilan macroscopique de quantité de mouvement montre que la force qui agit sur les surfaces solides du système peut être facilement déterminée par la mesure de la variation du débit d'impulsion (terme d'advection) et de la variation de pression entre l'entrée et la sortie du système.

$$\vec{\mathcal{F}}_{p} = -\Delta_{1}^{2} \left[\frac{\langle V^{2} \rangle}{\langle V \rangle} \vec{m} + P \vec{\mathcal{S}} \right] + m_{tot} \vec{g}$$

$$(6.36)$$

6.4.4 Application : Elargissement brusque

Comme illustration de l'application des bilans globaux de masse et de quantité de mouvement, nous considérons l'écoulement turbulent d'un fluide homogène incompressible dans une canalisation circulaire qui présente un tronçon avec un élargissement brusque tel que le montre la figure 6.5. Le domaine du système à étudier est limité par les sections de passage S_1 et S_2 et la paroi solide imperméable.



FIG. 6.5 – Canalisation avec élargissement brusque de section

Nous cherchons à exprimer la variation de pression qui résulte de cet accident géométrique. L'écoulement est permanent. L'équation de continuité 6.33 nous indique que le débit de matière qui entre dans le volume est égal à celui qui sort :

$$\langle \rho V \rangle_1 \,\mathcal{S}_1 = \langle \rho V \rangle_2 \,\mathcal{S}_2 \tag{6.37}$$

Ce qui s'écrit aussi en omettant l'opérateur 'moyenne' < .. > pour simplifier :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1} = f_{ela}$$

 f_{ela} est le facteur d'élargissement, toujours > 1. L'axe du conduit est horizontal et la force de pesanteur n'intervient pas dans le bilan de quantité de mouvement qui conduit à :

$$\dot{m}[V_1 - V_2] + P_1 \mathcal{S}_1 - P_2 \mathcal{S}_2 - \mathcal{F}_p = 0 \tag{6.38}$$

Le tronçon est suffisamment cours pour nous autoriser à négliger les forces de frottement sur les parois (voir chapitre 10 sur les pertes de charge en conduites). Par ailleurs, on remarque que l'action de la pression sur la paroi latérale cylindrique est symétrique; elle n'intervient pas dans la résultante des forces. Il ne reste que l'effet de la pression sur les surfaces de décrochage (ou de ressaut) qui forment l'élargissement. On suppose que la pression qui règne dans cette section est P_1 . Elle agit dans le sens négatif sur une portion surfacique $S_2 - S_1$ d'où la force $\mathcal{F}_p = P_1(S_2 - S_1)$. En substituant l'expression de \mathcal{F}_p et la relation 6.37 dans l'équation 6.38 et après division par S_2 on arrive au résultat remarquable,

$$P_2 - P_1 = [f_{ela} - 1]\rho V_2^2 > 0$$

qui prédit que l'augmentation de section produit une récupération de la **pression sta**tique du fluide.

Chapitre 7

Solutions d'écoulements visqueux

Nous allons illustrer l'exploitation de l'équation de Navier-Stokes en présentant quelques solutions analytiques d'écoulements simples. Dans chaque exemple on tâchera de souligner les aspects appliqués et les retombées pratiques des résultats.

7.1 Ecoulement en conduit cylindrique

De nombreux problèmes d'ingénierie mettent en jeu des écoulements en conduites droites, courbées et de section variable. Ces écoulements internes, traités plus particulièrement au chapitre 10, recouvrent en effet une vaste gamme d'applications allant du domaine des échangeurs de chaleur à la conception des souffleries en passant par le dimensionnement des réseaux de distribution (ventilation, conditionnement d'air, convoyage pneumatique, alimentation de réacteurs *etc...*).

A la base de ces types d'écoulement, il y a le mouvement d'un fluide incompressible et isotherme dans un tube cylindrique de diamètre constant D. Nous nous plaçons assez loin de l'entrée pour ne nous intéresser qu'à la longueur L du tube où l'écoulement est dit **développé** c'est-à-dire indépendant de la position axiale Ox. C'est **l'écoulement de Poiseuille**. La figure 7.1 en précise les caractéristiques. Le vecteur vitesse est en tout point parallèle à l'axe du tube avec une composante axiale u qui ne varie qu'avec la coordonnée radiale r. Cet écoulement est induit par une différence de pression ΔP_o qui règne entre les deux extrémités de cette portion du conduit. Pour un tel problème à champ de vitesse axisymétrique et où les termes d'advection sont identiquement nuls, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

- Projection orthoradiale

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \Theta} + g \sin \Theta$$

 Θ est la coordonnée angulaire définie par le rayon vecteur vertical dirigé vers le haut pour $\Theta=0.$

- Projection radiale

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g \cos \Theta$$

Projection axiale

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$



FIG. 7.1 – Ecoulement de Poiseuille

Les deux premières projections confirment notre intuition que l'effet de la pesanteur produit un gradient de pression hydrostatique dans la section du tube sans influencer l'écoulement. On s'aperçoit que la variation axiale de pression demeure indépendante de r et Θ et que l'on peut poser :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = constante = \frac{\Delta P_o}{L}$$

puisque u n'est que fonction de r. Il est alors pratique de mettre la projection axiale de l'équation de la quantité de mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\Delta P_o}{\mu L} \tag{7.1}$$

Les conditions aux limites du problème sont :

axisymétrie
$$\implies$$
 à $r = 0;$ $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$
adhérence pariétale \implies à $r = R = \frac{D}{2};$ $u = 0$

L'intégration de l'équation 7.1 suivie de l'imposition des conditions aux limites fournit la distribution radiale de la vitesse :

$$u = \frac{\Delta P_o D^2}{16\mu L} \left(1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2 \right) \tag{7.2}$$

On trouve que le maximum de vitesse se situe sur l'axe du tube et vaut

$$\mathbf{U_{max}} = \frac{\Delta P_o D^2}{16\mu L}$$

Le débit volumique de fluide est déterminé par intégration du profil de vitesse sur la section de la conduite :

$$\dot{\mathcal{V}ol} = \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{\pi}{128\mu} \cdot \frac{\Delta P_o D^4}{L}$$

C'est la **loi de Poiseuille**. Elle énonce que la quantité de matière qui s'écoule par unité de temps dans un tube est proportionnelle au gradient de pression, inversement proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide et varie en raison de la quatrième puissance du diamètre du tube.

L'application directe de la loi de Poiseuille est le débitmètre tubulaire. Un conduit cylindre instrumenté de deux prises de pression pariétales distantes de L comme le montre la figure 7.1 devient un instrument simple de mesure de débit volumique pour un fluide incompressible. La mesure de ΔP_o est une indication directe de $\dot{\mathcal{Vol}}$. Il est facile d'améliorer la sensibilité du dispositif par une réduction de sa section ou une augmentation de sa longueur puisque :

$$\frac{d\Delta P_o}{d\dot{\mathcal{V}ol}} \sim \frac{L}{D^4}$$

La vitesse moyenne débitante Uo se déduit aisément de l'expression du débit :

$$\mathbf{Uo} = \frac{\mathcal{Vol}}{\pi \mathbf{D}^2/4} = \frac{\mathbf{\Delta}\mathbf{P_o}\mathbf{D}^2}{32\mu\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{U_{max}}}{2}$$
(7.3)

Tirons parti de la relation 7.3 en faisant apparaître les nombres de similitude Eu et Re. Il vient :

$$Eu = \frac{32}{Re} \cdot \frac{L}{D}$$
(7.4)

avec

$$Eu = \frac{\Delta P_o}{\rho \mathbf{Uo^2}}$$
 et $Re = \frac{\mathbf{UoD}}{\nu}$

L'analyse aboutit à la conclusion que le coefficient de pression ou de **perte de charge** exprimé par le nombre d'Euler se corrèle avec le nombre de Reynolds et le rapport d'aspect L/D. Elle précise qu'il varie de façon inversement proportionnelle à Re et croît linéairement avec l'allongement du tube. L'expérience confirme ce résultat tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à une valeur critique d'environ 2300. Au-delà de ce seuil, l'écoulement quitte le régime laminaire, idéalisé par un 'glissement' parallèle des couches visqueuses les unes sur les autres, se déstabilise et rentre dans le régime turbulent caractérisé par un ensemble de structures fluides fluctuantes de nature généralement désordonnée et chaotique. Le traitement de ce sujet est rapporté plus loin dans le texte au chapitre 10.

Dans une même idée nous allons déterminer l'expression du coefficient de frottement, C_f . La contrainte de viscosité s'exprime à partir de la distribution de vitesse :

$$\tau_{xr} = -\mu \frac{du}{dr} = 4\mu \mathbf{Uo} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}^2}$$

C'est un profil linéaire qui atteint sa valeur maximale, τ_{xr}^{max} , à la paroi du tube. D'après la définition de C_f (relation 5.16) nous obtenons :

$$C_f = \frac{16}{Re}$$

Ce qui souligne bien la distinction entre le nombre d'Euler et le coefficient de frottement pariétal.

7.2 Ecoulement de Couette cylindrique

L'écoulement d'un fluide incompressible induit par le mouvement relatif de deux cylindres concentriques de rayons R_1 et R_2 tournant avec des vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 autour de leur axe confondu avec l'axe Ox, est l'extension cylindrique de l'écoulement plan de Couette traité au Chapitre 2. Une description de l'écoulement est proposée à la figure 7.2. Il n'y a pas de force de volume à considérer dans ce problème.



FIG. 7.2 – Ecoulement de Couette entre cylindres coaxiaux

Aux faibles vitesses de rotation, la structure de l'écoulement est simple et stationnaire : il est purement orthoradial. L'équation de continuité montre que la composante de vitesse radiale est identiquement nulle. Seule la composante orthoradiale v_{Θ} intervient dans l'équation de Navier-Stokes qui donne :

- Projection radiale

$$-\frac{v_{\Theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

Le membre de gauche est la force inertielle centrifuge engendrée par la courbure des lignes de courants ; en équilibrant le gradient radial de pression, elle joue le même rôle que la pesanteur dans le problème de Poiseuille. Remarquons que ce terme explique la variation de la pression hydrostatique mais ne contribue pas au mouvement du fluide.

– Projection orthoradiale

Les termes d'advection et de pression sont identiquement nuls. Seule reste la contribution visqueuse dont l'expression est le laplacien de la vitesse :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dv_{\Theta}}{dr}\right] - \frac{v_{\Theta}}{r^2} = 0$$

Le champ de vitesse qui satisfait cette équation et vérifie les conditions d'adhérence du fluide aux parois :

$$v_{\Theta}(R_1) = R_1 \Omega_1$$
 et $v_{\Theta}(R_2) = R_2 \Omega_2$

est donné par :

$$v_{\Theta}(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

avec

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

C'est parce que cet écoulement est uniquement dû aux frottements visqueux que paradoxalement la distribution de vitesse devient indépendante de la viscosité.

- <u>Exercice</u>

Quelle est l'expression du profil de pression?

Nous retrouvons le résultat de l'écoulement de Couette plan en faisant tendre les rayons vers l'infini tout en gardant la distance entre parois $\delta = R_2 - R_1$ constante.

Faire tourner les deux cylindres à la même vitesse angulaire résulte en un profil radial de vitesse linéaire typique d'une rotation d'ensemble du fluide.

On peut supprimer l'effet du cylindre extérieur en donnant à R_2 une valeur infinie et en imposant $\Omega_2 = 0$. Cette procédure simule le champ de vitesse d'un écoulement plan tourbillonnaire caractérisé par

$$v_{\Theta} = \frac{\Omega R^2}{r}$$

- Exercice

Que vaut le rotationnel de la vitesse dans ce type d'écoulement?

L'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux est à la base de méthodes pour déterminer la viscosité dynamique des liquides. En effet, considérons l'exemple d'un montage où seul tourne le cylindre intérieur. Le profil de la contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{\Theta r} = -\mu r \frac{d}{dr} \left[\frac{v_{\Theta}}{r} \right] = 2\mu \frac{B}{r^2}$$

A partir de cette distribution, il est facile de calculer le module du couple Γ produit par la friction visqueuse sur le cylindre mobile :

$$\Gamma = 2\pi R_1^2 \tau_{\Theta r}(R_1) = 4\pi B\mu$$

ou plus explicitement :

$$\mu = \frac{(R_2^2 - R_1^2)\,\Gamma}{4\pi\Omega_1 R_1^2 R_2^2}$$

En mesurant sur ce dispositif le couple résistant exercé par le liquide sur le cylindre en rotation et ce pour une vitesse angulaire fixée nous obtenons un signal directement proportionnel à la viscosité dynamique du liquide. Ici encore, il faut noter que la présente analyse est limitée et que l'ensemble des résultats établis ne sont consistants que pour $\Omega < \Omega_c$. Au dessus de ce seuil critique Ω_c , la circulation fluide se complique en donnant naissance à des cellules convectives en forme de tore. Chaque rouleau se place dans un plan perpendiculaire à l'axe des cylindres distant de son voisin de l'intervalle $\delta = R_2 - R_1$. Nous sommes en présence de l'instabilité de Taylor- Couette. Le groupe adimensionnel caractéristique de cette réorganisation de l'écoulement est le nombre de Taylor basé sur le rayon moyen \overline{R} :

$$Ta = \frac{\Omega_1^2 \overline{R} \delta^3}{\nu^2}$$

Il compare l'ordre de grandeur des effets centrifuges (force motrice) et des effets visqueux (force de freinage). L'écoulement purement orthoradial bascule vers l'agencement en cellules toroïdales quand la force motrice l'emporte sur la force de freinage; ce seuil correspond à la valeur critique $Ta_c = 1712$.

- <u>Exercice</u>

Quelle est l'expression du coefficient de frottement dans le cas du seul cylindre intérieur mis en rotation ?. On justifiera le choix de la définition du nombre de Reynolds qui intervient dans la corrélation.

7.3 Ecoulement plan oscillant

Le mouvement d'un fluide incompressible visqueux est engendré par une surface solide de dimensions infinies qui oscille à la fréquence ϖ dans un plan horizontal orthogonal au plan Oxy. Lors des déplacements de la paroi, le champ de vitesse reste parallèle à la paroi avec une composante horizontale u suivant Ox comme le présente la figure 7.3. Dans ce cas, et compte tenu de la bidimensionnalité du problème, l'équation de conservation de la masse se résume à :

$$\nabla . \vec{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

u de dépend pas de x et le problème possède une invariance par translation dans la direction Ox. La dérivée particulaire de la vitesse ne donne qu'un seul terme, la dérivée partielle par rapport au temps, la contribution des termes d'advection étant identiquement nulle. Les projections de l'équation de Navier-Stokes s'écrivent :

- Suivant Oy

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}-g$$

Le champ de pression est une fonction de la seule coordonnée y ce qui signifie que la force de volume, en l'occurrence la pesanteur, produit un gradient de pression hydrostatique sans affecter le mouvement car $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

- Suivant Ox

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.5}$$

Le va-et-vient de la paroi est un mouvement oscillatoire harmonique du type :

$$U_p = U_{p,max}\cos(\varpi t) = \varpi \mathcal{A}\cos(\varpi t)$$



FIG. 7.3 – Ecoulement plan oscillant

 \mathcal{A} est l'amplitude du déplacement de la surface solide.

On recherche une solution de l'équation 7.5 sous la forme d'une fonction d'onde périodique :

$$u(y,t) = u_{max}(y)\cos(\varpi t + \phi)$$

 u_{max} est le terme d'amplitude et ϕ le déphasage. En imposant la condition d'adhérence $u(o,t) = U_p$ on trouve :

$$u(y,t) = U_{p,max} \exp(-ky) \cos(\varpi t - ky)$$

k est le vecteur d'onde fonction de la fréquence et de la viscosité cinématique :

$$k = \sqrt{\frac{\varpi}{2\nu}}$$

Sous l'action de la paroi, le fluide se met à osciller avec un déphasage ky par rapport à la source d'excitation. L'oscillation se propage à l'intérieur du fluide suivant une onde transversale perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement induit. La propriété majeure de cette onde est son amortissement rapide (effet du facteur $\exp(-ky)$). Pour quantifier l'atténuation importante de l'oscillation, on définit conventionnellement la *profondeur de pénétration* δ comme étant la distance au plan solide pour laquelle l'amplitude de la vitesse du fluide est 1% de celle de la vitesse de la paroi. Nous retrouverons également cette définition lors de l'identification de *l'épaisseur de couche limite* d'un écoulement sur un corps (voir chapitre 16.2). A cette profondeur, on estime que l'entraînement du fluide est minime et que le milieu peut être considéré au repos. En substituant cette condition dans le profil de vitesse il vient :

$$\frac{u_{max}}{U_{p,max}} = 0.01 \Longrightarrow \delta = 6.5 \sqrt{\frac{\nu}{\varpi}}$$
(7.6)

Fluide	air	eau	huile	mercure
$ \nu \mathrm{en} \left[\frac{m^2}{s} \right] $	15.10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	$1,2.10^{-7}$
δ en $[mm]$	25	6,5	205	2,2

TAB. 7.1 – Profondeur de pénétration

Dans <u>tous les problèmes de propagation par mécanismes de diffusion</u>, comme ceux de l'effet de peau en électricité ou des variations diurnes et saisonnières de température dans le sol (voir Partie II), nous retrouverons une dépendance de la profondeur de pénétration avec la fréquence de l'excitation et du paramètre phénoménologique de transport. Une équation du type 7.5 modélisera le phénomène. Dans le cas d'une excitation quelconque, la nature linéaire de l'équation 7.5 permet d'envisager la méthode de superposition et de combiner les solutions obtenues aux différentes fréquences et amplitudes de la source.

Pour se fixer les idées sur les valeurs que peut prendre δ , considérons l'exemple d'une excitation de 1 Hz et de quatre fluides ; l'air, l'eau, l'huile et le mercure. Les résultats sont repris au tableau 6.1.

Les métaux liquides avec des coefficients de diffusion de quantité de mouvement très bas seront moins sensibles aux perturbations pariétales. Notons aussi que les gaz vont ressentir plus profondément que l'eau les déplacements de la paroi. D'une façon générale, les liquides organiques avec leur grande viscosité cinématique seront les plus affectés.

• La conclusion pratique de cette analyse est qu'il est très difficile de propager

à grande distance une onde de cisaillement dans un fluide.

Cherchons à établir la corrélation entre la force de frottement sur le plan oscillant et les paramètres de l'écoulement. La contrainte visqueuse à la paroi se détermine selon la loi de Newton :

$$\tau_{xy}\big|_{y=0} = -\left.\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

 soit

$$\tau_{xy}|_{y=0} = -\mu k \varpi \mathcal{A}[-\cos(\varpi t) + \sin(\varpi t)]$$

qui se contracte en :

$$\tau_{xy}|_{y=0} = -\mathcal{A}\varpi^{1,5}\sqrt{\rho\mu}\cos(\varpi t - \frac{3\pi}{4})$$

L'amplitude du flux de quantité de mouvement pariétal est proportionnelle à l'amplitude du déplacement du plan. Elle varie en raison de la puissance 3/2 de la fréquence de l'excitation et croît linéairement avec le groupement $b = \sqrt{\rho\mu}$. Ce dernier est **l'effusivité visqueuse**, coefficient typique des échanges instationnaires par diffusion. C'est toujours le produit du numérateur et du dénominateur du rapport définissant la diffusivité. On pourrait l'assimiler au produit des coefficients moteur et résistant qui contrôlent le mécanisme de transport. Nous retrouverons son équivalence lors de l'analyse des flux de chaleur transmis par un mécanisme de conduction instationnaire entre deux milieux mis soudainement en contact (voir chapitre 17de la Partie II). On constate que la contrainte de frottement à la paroi est en retard de phase de trois huitièmes de période sur la vitesse U_p .

Le coefficient de frottement C_f est basé sur la valeur crête de la force visqueuse et la pression dynamique de référence prend $U_{p,max} = \varpi \mathcal{A}$ comme vitesse caractéristique :

$$C_f = \frac{\left|\tau_{xy}\right|_{y=0}}{1/2\rho\varpi^2\mathcal{A}^2} = \sqrt{2}\frac{\delta}{A} = \frac{2}{\sqrt{Re}}$$

en ayant construit le nombre de Reynolds à partir du déplacement et de la vitesse maximum du plan :

$$Re = \frac{\varpi \mathcal{A}^2}{\nu}$$

La dépendance en racine carrée de l'inverse du nombre de Reynolds est plus lente que celle trouvée pour les écoulements de Poiseuille et de Couette.

Chapitre 8

Ecoulements quasi parallèles à faibles nombres de Reynolds

Le cas limite des écoulements lents de fluides très visqueux où les forces de viscosité deviennent prépondérantes devant les forces d'inertie, se rencontrent dans la lubrification des paliers hydrauliques et dans la plupart des procédés de revêtement par film liquide. Ces écoulements sont caractérisés par de faibles valeurs du nombre de Reynolds et des géométries à grand allongement, $L/\delta > 10$. Le calcul des forces sur les éléments d'un palier lubrifié ou de la dynamique de l'étalement du film dans une technique d'enduction peut être mené en considérant que l'écoulement est quasi parallèle et se développe principalement dans la direction du film.

En travaillant le cas d'un écoulement bidimensionnel et stationnaire dans le plan Oxy, l'équation de continuité adimensionnalisée 6.24 montre que la composante verticale de vitesse v sera de l'ordre de :

$$v \simeq u \frac{\delta}{L}$$

où L et δ sont respectivement la longueur et l'épaisseur du film liquide. Sur la base de considérations précisées ci-dessus, nous voyons que v est suffisamment petite devant u pour admettre que l'écoulement est localement unidirectionnel (suivant Ox). La conséquence de cette simplification est la disparition des termes d'advection dans l'équation de Navier-Stokes qui prend alors le nom **d'équation de Stokes** et dont la projection principale nondimensionnelle s'écrit (voir pour mémo Eq. 6.25)

$$-Eu\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}} + \frac{1}{Re}\left(\left\{\frac{\delta}{L}\right\}\frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^{2}} + \left\{\frac{L}{\delta}\right\}\frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^{2}}\right) = 0$$

De même, l'analyse des termes de la contribution visqueuse nous montre que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

de sorte que la forme approchée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la lubrification devient :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \tag{8.1}$$

- Exercice

On démontrera que l'équation de Stokes se traduit aussi par le laplacien de la pression nul :

$$\nabla^2 P = 0$$

L'équation de lubrification 8.1permet d'analyser l'écoulement d'un liquide lubrifiant provoqué par le glissement d'un sabot parallèle à une paroi fixe. Le sabot est schématisé à la figure 8.1. Il est incliné d'un petit angle ϑ par rapport à la surface horizontale. La distance δ entre les deux parois varie avec x; elle est donnée par :

$$\delta(x) = \delta_1 + \vartheta x$$

en ayant assimilé

$$\vartheta \simeq \tan \vartheta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{L}$$

L est ici la longueur du biseau. L'écoulement vu par un observateur lié au sabot est permanent; dans cette convention, le plan horizontal se meut à la vitesse U_p du sabot. La solution de l'équation 8.1 qui satisfait aux conditions aux limites (adhérence) est :

$$u(x,y) = U_p\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) - \left[\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{dP}{dx}\right]\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)$$
(8.2)

L'interstice entre paroi est trop petit que pour tenir compte de la variation de la pression avec y. C'est pourquoi le gradient de pression est exprimé par la dérivée totale par rapport à x dans l'équation 8.2.

Nous remarquons que le champ de vitesse obtenu est la superposition d'un écoulement de Couette plan - terme linéaire en y - et d'un écoulement de Poiseuille - terme parabolique en y. L'évolution du profil de vitesse est illustrée sur la figure 8.1. Il existe des sections où l'écoulement est inversé.



FIG. 8.1 – Ecoulement dans un sabot de lubrification

La connaissance du profil de vitesse permet d'exprimer la condition de conservation du débit (ici volumique puisque le fluide est incompressible) :

$$\dot{\mathcal{V}ol} = \int_0^\delta u dy = \frac{U_p \delta}{2} - \frac{\delta^3}{12\mu} \cdot \frac{dP}{dx}$$
(8.3)

 $\dot{\mathcal{Vol}}$ est un débit constant par unité d'envergure (direction Oz). La relation 8.3 est l'équation différentielle ordinaire qui gouverne la répartition de pression dans le sabot. Réécrivons la comme suit :

$$\frac{dP}{dx} = 12\mu \left[\frac{U_p}{2\delta^2} - \frac{\mathcal{Vol}}{\delta^3} \right] \tag{8.4}$$

En x = 0, la faible épaisseur du film nous autorise à poser P = Pe, pression extérieure qui est constante. L'intégration de l'équation 8.4 conduit à :

$$P = Pe + \frac{6\mu U_p}{\vartheta} \left[\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_1} \right] - \frac{6\mu \mathcal{V}ol}{\vartheta} \left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta_1^2} \right]$$
(8.5)

L'expression finale du débit s'obtient en spécifiant que dans l'équation 8.5 que la pression vaut également Pe à l'extrémité x = L du sabot :

$$\dot{\mathcal{V}ol} = U_p < \delta > \tag{8.6}$$

où l'intervalle moyen $< \delta >$ est donné par :

$$<\delta>=rac{\delta_1\delta_2}{\delta_1+\delta_2}$$

- <u>Exercice</u>

On montrera que la pression passe par un maximum dans la section correspondant à $\delta = <\delta >$.

Une distribution typique de pression est tracée à la figure 8.1. La surpression résultante crée la force de sustentation du sabot, F_y (par unité d'envergure). Elle est donnée par l'intégrale :

$$F_y = \int_0^L (P - Pe) dx$$

Le calcul fournit :

$$F_y = \frac{6\mu U_p}{\vartheta^2} \left[\ln \kappa - 2\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right]$$

où $\kappa = \delta_1/\delta_2$ est le rapport des épaisseurs du film entrée-sortie. Retenons que dans cette formulation $\vartheta = (\kappa - 1)\delta_2/L$.

Similairement, nous pouvons exprimer la force de frottement tangente à la plaque (toujours par unité d'envergure) :

$$F_x = \int_0^L \left. \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dx$$

soit :

$$F_x = \frac{2\mu U_p}{\vartheta} \left[\ln \kappa - 3\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right]$$

L'étude montre que F_y est optimale pour $\kappa\simeq 2,2$ et que sa valeur vaut :

$$F_{y,max} = 0.16 \frac{\mu U_p L^2}{\delta_2^2}$$

La force de friction subséquente, $\,F_x^*$ est :

$$F_x^* = 0.75 \frac{\mu U_p L}{\delta_2}$$

d'où le rapport :

$$\frac{F_x^*}{F_{y,max}} \simeq 5 \frac{\delta_2}{L} \ll 1$$

Dans les processus de lubrification, tels que ceux rencontrés dans les paliers de machines tournantes, la force de freinage tangentielle est au moins d'un ordre de grandeur inférieure à la force de portance. Il suffit de petits angles de biseau pour pouvoir supporter de très lourdes charges. La magnitude des forces normales atteintes dans certains paliers hydrauliques peut entraîner localement des déformations élastiques des parois. On touche alors au domaine de **l'élastohydrodynamique**.

- <u>Exercice</u>

Qu'adviendrait-il si l'inclinaison du sabot était nulle?

Chapitre 9

Ecoulements à grands nombres de Reynolds

9.1 Lignes de courant

Dans la plupart des cas, les études expérimentales des écoulements s'appuient sur des méthodes de visualisation. Pour ce faire, on ensemence le fluide porteur soit avec de très fines particules soit avec des filets de colorant ou de fumée. Si le choix et l'injection de ces traceurs sont pertinents, alors la visualisation fournit une image fidèle du comportement du fluide. Ainsi, la figure 9.1 est un exemple typique d'une visualisation d'un écoulement laminaire autour d'un profil d'aile.



FIG. 9.1 – Visualisation d'un écoulement laminaire

On observe que la structure de l'écoulement se compose de lignes le long desquelles les cellules fluides se déplacent. Ces trajets sont appelées **lignes de courant**. Elles peuvent être aisément modélisées dans le cas de l'écoulement bidimensionnel (Oxy) d'un fluide incompressible. En effet, dans ces conditions l'équation de continuité se trouve vérifiée par une fonction scalaire Ψ si le champ de vitesse dérive de cette fonction comme suit :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
 et $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ (9.1)

 car

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{9.2}$$

Par ailleurs, on constate que le produit scalaire du gradient de Ψ par le vecteur vitesse \vec{V} est identiquement nul :

$$\vec{V}\nabla\psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \tag{9.3}$$

Cette propriété indique que le vecteur vitesse est tangent aux courbes d'équations $\Psi(x, y) = C^{te}$ qui représentent les lignes de courant de l'écoulement. Deux lignes de courant définissent un tube de courant dans lequel le débit de fluide reste constant. Démontrons-le en s'appuyant sur le schéma de la figure 9.2



FIG. 9.2 – Tube de courant

Evaluons le débit volumique traversant la section AB du tube de courant :

$$\dot{V}_{AB} = \int_{y_1}^{y_2} u dy = = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = = \int_{1}^{2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$$
(9.4)

Le débit passe aussi dans la section BC :

$$\dot{V}_{BC} = \int_{x_1}^{x_2} v dy = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \int_{1}^{2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$$
(9.5)

Nous vérifions bien que le débit reste constant et est égal à la différence des deux valeurs de la fonction de courant qui définissent le tube. En régime stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires suivies par les particules fluides.

9.2 Ecoulements Potentiels

Quand la contribution des contraintes de cisaillement devient négligeable devant les termes d'inertie et de pression, le milieu se comporte comme un **fluide parfait** c'està-dire non visqueux. Cette situation est souvent bien approchée quand on se situe **loin du corps** et que l'écoulement incident n'est pas turbulent. Elle est souvent adoptée pour modéliser l'écoulement d'un gaz à vitesse élevée **au loin d'une paroi** ou d'un corps solide qu'il contourne, cas fréquent dans les applications à l'aéronautique. Dans ces conditions, le mouvement du fluide se particularise par une valeur élevée du nombre de Reynolds et se décrit par une forme dégénérée de l'équation de Navier-Stokes, **l'équation d'Euler** :

$$\frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{\mathcal{F}}$$
(9.6)

En considérant que les forces de volume dérivent généralement d'un potentiel, $\mathcal{F} = -\nabla \phi$, de l'équation 9.6, il ressort que les écoulements des fluides parfaits sont en permanence irrotationnels s'ils le sont au départ. Ce résultat est en tout point conforme avec la forme 6.23 de l'équation de Navier-Stokes quand on annule les termes visqueux. Par conséquent :

$$\nabla \mathbf{x} \vec{V} \equiv 0 \tag{9.7}$$

La propriété est intéressante : elle permet de qualifier ces flots d'écoulements potentiels car l'identité 9.7 signifie implicitement que le champ de vitesse dérive d'un potentiel de vitesse Φ :

$$\vec{V} = \nabla \Phi \tag{9.8}$$

En considérant le cas d'un **fluide parfait incompressible**, on fait usage de la formule 6.22 tirée de l'analyse vectorielle pour transformer l'équation 9.6 et obtenir une première version de **l'équation de Bernoulli** :

$$\nabla \left[\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} + P + \rho \phi \right] = 0 \tag{9.9}$$

Sa forme intégrée

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} + P + \rho \phi =$$
 Charge constante dans l'écoulement (9.10)

exprime qu'un écoulement irrotationnel dans tout son volume travaille à charge ou **pression totale** constante.

Pour un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire, l'équation 9.10 prend une forme plus simple mais d'application plus restrictive. Explicitons la en multipliant l'équation d'Euler par le vecteur vitesse \vec{V} . L'équation résultante qui devient scalaire est celle de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \left[\frac{V^2}{2} \right] = -(\vec{V} \cdot \nabla) \left[\frac{P}{\rho} + \phi \right] = -\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \left[\frac{P}{\rho} + \phi \right]$$
$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \left[\frac{V^2}{\rho} + \frac{P}{\rho} + \phi \right] = 0$$

 soit

$$\rho \frac{\vec{V}^2}{2} + P + \rho \phi =$$
 Charge constante le long d'une ligne de courant (9.11)

9.3 Couches limites

9.3.1 Concept de la couche limite

Le passage à la limite, $\nu \to 0$, dans les équations de Navier-Stokes, réduit l'ordre du système d'un degré pour arriver aux équations d'Euler. On touche ainsi à un problème de perturbation singulière car toutes les conditions aux limites physiques ne peuvent plus être satisfaites. En effet, au fur et à mesure que l'on se rapproche du corps solide, la condition d'adhérence impose que le profil de vitesse du fluide parfait doive se modifier pour s'annuler sur les parois. Ce raccordement de profil est illustré à la figure 9.3. Il s'effectue sur une petite zone dénommée **couche limite**. Dans cette région, comme nous le verrons, d'autant plus mince que le nombre de Reynolds est grand, les termes de viscosité deviennent du même ordre de grandeur que les termes d'advection et l'équation d'Euler n'est plus valable. Prandtl introduisit ce concept et développa sa théorie mathématique.

Continuons à envisager un écoulement plan en **régime laminaire** et évaluons l'épaisseur de cette couche à gradient de vitesse. Bien entendu, cette région n'est pas nettement délimitée car la transition entre l'écoulement de paroi et le flot potentiel est continue. Nous prenons l'exemple, schématisé à la figure 9.3, d'un champ de vitesse uniforme, \mathbf{U}_{ext} arrivant parallèlement à une plaque plane semi-infinie alignée avec l'axe Ox. Dès l'attaque de l'arête de la plaque, c'est-à-dire en x = 0, l'écoulement ressent la présence de la paroi. Ceci se concrétise par une perturbation de vitesse qui est transportée par diffusion visqueuse de la paroi vers l'écoulement libre (direction Oy). Se référant au problème, phénoménologiquement analogue, de l'écoulement plan oscillant (section 7.3), il est légitime de penser que cette diffusion se propage sur une distance δ proportionnelle à la racine carrée du produit de la viscosité cinématique par un temps caractéristique \overline{t} de transport (inverse de la fréquence pour la profondeur de pénétration dans le cas de la plaque oscillante, voir relation 7.6) :

$$\delta \sim \sqrt{\nu \overline{t}}$$

Cependant, le fluide se déplace dans un mouvement parallèle à la paroi avec une vitesse typique de l'ordre de \mathbf{U}_{ext} . Les perturbations diffusives naissant au bord d'attaque vont être advectées vers l'aval pour atteindre un point situé à la distance x de l'arête après le temps $\overline{t} = x/\mathbf{U}_{ext}$. A cette abscisse, le processus de diffusion par viscosité répartit les gradients de vitesse sur une petite zone de taille :

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{\mathbf{U}_{ext}}}$$

 $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche limite sur laquelle s'établit la transition entre l'écoulement loin de la plaque où le fluide se comporte en fluide parfait, et l'écoulement pariétal qui doit vérifier la condition d'adhérence. Une simple écriture nous montre qu'elle est trÈs petite devant la dimension x et qu'elle s'amincit avec le nombre de Reynolds Re_x basé sur cette distance :

$$\left|\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{x \mathbf{U}_{ext}}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \ll 1\right| \tag{9.12}$$



FIG. 9.3 – Concept de la couche limite

9.3.2 Equations de la couche limite

Nous venons d'identifier deux échelles de longueurs de taille très différente. Dans la direction principale de l'écoulement, nous avons comme longueur de référence une abscisse L comptée à partir du bord d'attaque. A noter d'une part, que la plaque semi-infinie ne possède pas de dimension géométrique et que d'autre part, la distance L est directement reliée au temps de transit d'une particule fluide affectée par sa rencontre avec l'arête de la plaque. Dans la direction normale à la paroi, la dimension typique est l'épaisseur de la couche limite $\delta(L)$ à cette abscisse ; c'est une profondeur de pénétration des effets visqueux dans l'écoulement extérieur. Utilisons ces deux normes de longueur pour évaluer l'ordre de grandeur des termes de l'équation de Navier-Stokes et rechercher d'éventuelles simplifications. L'exemple de l'écoulement plan dépeint à la figure 9.3 est conservé. Ajoutons, sans casser le caractère général du résultat, que le mouvement est stationnaire et que le fluide est incompressible et de viscosité constante. Si la norme de vitesse suivant Ox est évidemment la vitesse de l'écoulement uniforme \mathbf{U}_{ext} , nous devons nous interroger sur la vitesse typique à attribuer à la direction Oy. L'équation de continuité permet de répondre à la question. Posons a priori \mathbf{V}_{ref} cette vitesse de référence et normons l'équation de la masse intégrée de y = 0 à $y = \delta$:

$$\frac{\mathbf{V}_{ref}}{\mathbf{U}_{ext}}\frac{L}{\delta} = -\int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y} \simeq O[1]$$

Il s'en suit que la norme de vitesse suivant Oy est de l'ordre de :

$$|\mathbf{V}_{ref}| \simeq \mathbf{U}_{ext} \frac{\delta}{L} \ll \mathbf{U}_{ext}$$
 (9.13)

En s'aidant de l'équation normalisée 6.25 de Navier-Stokes suivant Ox où l'on substitue les normes de longueur et de vitesse définies ci-dessus on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \left[\frac{\nu}{L\mathbf{U}_{ext}}\right] \left[\frac{L^2}{\delta^2}\right] \left(\left\{\frac{\delta^2}{L^2}\right\}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right)$$
(9.14)

Dans cette équation, la pression adimensionnelle résulte d'une simple normalisation par $\rho \mathbf{U}_{ext}^2$.

La conjecture sur laquelle repose le concept de couche limite suppose que les termes d'inertie et de viscosité soient du même ordre lorsque Re_L tend vers de très grandes valeurs. L'équation 9.14 montre que pour que ce postulat soit physiquement acceptable il faut, comme nous l'avions déjà trouvé, que :

$$\left[\frac{L}{\delta}\right]^2 \left[\frac{1}{Re_L}\right] \simeq O[1] \tag{9.15}$$

D'autre part, des deux termes visqueux de l'équation 9.14, seule le cisaillement suivant Ox subsiste, l'autre devenant négligeable quand $Re_L \to \infty$. Finalement on remonte facilement à l'équation dimensionnelle de la couche limite suivant Ox:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
(9.16)

Une approche identique est menée pour la projection de l'équation de Navier-Stokes sur Oy. Elle conduit à la forme suivante :

$$\left[\frac{\delta}{L}\right]^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re_L} \left(\left\{\frac{\delta}{L}\right\}^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right)$$
(9.17)

Compte tenu de la condition 9.15, il en ressort que tous les termes sont de l'ordre de $(\delta/L)^2$. Le gradient de pression suivant Oy est négligeable aux grands nombres de Reynolds et l'équation du mouvement dans cette direction traduit une des propriétés importantes de la couche limite,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{9.18}$$

à savoir que la pression reste constante à travers l'épaisseur de la couche limite et est égale à la pression de l'écoulement potentiel extérieur, \mathbf{P}_{ext} .

Toutefois, il faut garder à l'esprit que pour des valeurs trop élevées de Re_L , la couche limite devient instable puis turbulente. La convection turbulente fait augmenter δ plus rapidement que dans un écoulement laminaire et la déduction 9.15 n'est plus valable.

9.3.3 Profil de vitesse dans la couche limite

On cherche à déterminer la distribution de vitesse dans la couche limite qui se développe sur la plaque plane horizontale ; le problème est celui décrit à la figure 9.3. L'écoulement potentiel est incompressible et uniforme. D'après l'équation d'Euler, il s'en suit que les quantités à la frontière extérieure de la couche limite sont constantes et en particulier $P = \mathbf{Pe}$ et $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ partout.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

à $y = \delta$ définition de la couche limite $u = 0,99\mathbf{U}_{ext}$

à y = o adhérence u = v = 0

Blasius a résolu le problème en introduisant les variables suivantes :

$$\eta = \frac{y}{2x}\sqrt{Re_x}$$
 et $\Psi = \nu\sqrt{Re_x}f(\eta)$

où Ψ est la fonction de courant discutée au paragraphe 9.1

à

On vérifiera, à titre d'exercice, que dans cette nouvelle formulation les composantes de vitesse u et v s'écrivent :

$$u = \frac{\mathbf{U}_{ext}}{2} f'(\eta) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{U}_{ext}\nu}{x}} \left[\eta f' - f\right]$$
$$\text{avec} \quad f' = \frac{df}{d\eta}$$

L'introduction de la variable indépendante η implique un profil u **autosimilaire**, c'est-àdire que la variation de la composante de vitesse horizontale selon y est toujours la même au facteur d'échelle $\sqrt{\nu x/\mathbf{U}_{ext}}$ près.

La substitution de ces résultats dans l'équation fondamentale aux dérivées partielles 9.16 de la couche limite aboutit à une équation différentielle ordinaire du troisième ordre non linéaire, appelée **équation de Blasius**. On s'exercera à la démontrer :

$$f''' + ff'' = 0 (9.19)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. Son intégration est obtenue par voie numérique en imposant les conditions aux limites suivantes :

à
$$\eta = 0$$
 adhérence $f = f' = 0$
 $\eta \to \infty$ dans l'écoulement potentiel $f' \to 2$

L'algorithme de Runge-Kutta se prête bien à la résolution de cette équation; il donne accès aux valeurs de f'', f' et f (tabulées en annexe) et permet de déterminer u et v. La figure 9.4 montre les profils des composantes de vitesse horizontale et verticale dans la couche limite.

La vitesse u tend rapidement vers l'unité quand η augmente. A $\eta = 2, 5$ correspond $u/\mathbf{U}_{ext} = 0.99$ considérée conventionnellement comme la définition de l'épaisseur de la couche limite δ . De cette valeur de η on tire :

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.20}$$

On retiendra que la couche limite laminaire grossit de façon parabolique avec la distance à l'arête de la plaque plane :

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{\mathbf{U}_{ext}}} \tag{9.21}$$



FIG. 9.4 - Profil de u et v dans une couche limite laminaire

9.3.4 Coefficient de frottement

L'intérêt de la solution de Blasius est de permettre facilement le calcul du coefficient de frottement pariétal. Rappelons sa définition; c'est la contrainte de cisaillement à la paroi divisée par la pression dynamique de l'écoulement extérieur :

$$C_f = \frac{-\left.\tau_{xy}\right|_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho \mathbf{U}_{ext}^2}$$

Utilisant la loi de Newton on a :

$$-\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\mathbf{U}_{ext}}{4} f'' \sqrt{\frac{\mathbf{U}_{ext}}{\nu x}}$$

Sachant que f''(0) = 1,328 il vient :

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.22}$$

9.3.5 Méthode intégrale

Il existe une méthode plus générale mais moins rigoureuse, qui convient bien au calcul du coefficient de frottement de paroi et pour laquelle la connaissance exacte du champ de vitesse n'est pas essentielle. Elle consiste à intégrer les équations du mouvement suivant l'épaisseur de la couche limite et à postuler une forme de profil de vitesse vérifiant les conditions aux limites physiques. Cette **méthode intégrale approchée** prend toute sa justification dans l'étude des couches limites autour des corps de géométrie quelconque pour lesquelles il est quasiment impossible d'arriver à des solutions exactes. Illustrons la dans le cas de la plaque plane.

La forme intégrale de l'équation de continuité se présente ainsi :

$$\int_{0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -v(\delta) \tag{9.23}$$
Elle montre que le débit dans la couche limite croît avec x et que cette augmentation est quantifiée par la composante de vitesse v.

L'application de l'opérateur "intégrale" à l'équation 9.16 conduit à :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + [uv]_0^{\delta} = -\frac{\tau_{xy}|_{y=0}}{\rho}$$
(9.24)

En substituant $v(\delta)$ au moyen de l'égalité 9.23 dans l'équation 9.24 et après réarrangement des différents termes on arrive facilement à l'expression du coefficient de frottement C_f comme défini plus avant :

$$C_f = 2\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \left(\frac{u}{\mathbf{U}_{ext}} - \frac{u^2}{\mathbf{U}_{ext}^2} \right) dy \right]$$
(9.25)

Le terme entre crochet de la relation 9.25 a la dimension d'une longueur. On le nomme épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, δ^{**} . Son expression est :

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_{0}^{1} \frac{u}{\mathbf{U}_{ext}} \left(1 - \frac{u}{\mathbf{U}_{ext}}\right) \frac{dy}{\delta}$$
(9.26)

Physiquement, elle caractérise la variation de la quantité de mouvement à l'intérieur d'un tube de courant et plus exactement, la hauteur $h + \delta^{**}$ d'une section nécessaire pour avoir le même flux de quantité de mouvement qu'au travers d'une section de hauteur h dans l'écoulement non visqueux.

D'après l'équation 9.25, la valeur locale du coefficient C_f est donc directement proportionnelle à la variation élémentaire de δ^{**}

$$C_f = 2\frac{d\delta^{**}}{dx} \tag{9.27}$$

Pour tirer profit de l'équation intégro-différentielle 9.25 ou 9.27, il convient de se donner la forme de la distribution de vitesse au sein de la couche limite. Pour mieux souligner l'influence de ce choix, nous allons comparer les résultats obtenus pour un profil linéaire puis parabolique de vitesse :

$$\frac{u_1}{\mathbf{U}_{ext}} = \frac{y}{\delta}$$
 et $\frac{u_2}{\mathbf{U}_{ext}} = -\left[\frac{y}{\delta}\right]^2 + 2\frac{y}{\delta}$

Les deux répartitions de vitesse u satisfont à la condition d'adhérence et considèrent que la jonction avec l'écoulement potentiel $u = \mathbf{U}_{ext}$ se situe à $y = \delta$. La distribution linéaire s'accompagne d'une discontinuité dans le gradient de vitesse au raccordement avec l'écoulement potentiel. Par contre, le second type de profil en imposant une contrainte de cisaillement nulle à la frontière $(du/dy = 0 \text{ à } y = \delta)$ permet une jonction continue.

Le calcul fera l'objet d'un exercice. Les grandes étapes de la méthode de résolution sont successivement :

- 1. Calculer δ^{**} en fonction de δ en introduisant le profil de vitesse dans l'intégrale 9.26.
- 2. Déterminer la contrainte pariétale et par suite le coefficient de frottement C_f en fonction de δ en employant la distribution de vitesse.
- 3. Avec les aboutissants des deux premières étapes, l'équation 9.27 permet de tirer la dépendance de δ et de C_f avec Re_x .

Cette procédure mène aux résultats suivants :

– Profil de vitesse linéaire

$$\delta^{**} = \frac{\delta}{6} \quad , \quad \delta = \frac{3.46x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{0.58}{\sqrt{Re_x}}$$

– Profil de vitesse parabolique

$$\delta^{**} = \frac{2\delta}{15} \quad , \quad \delta = \frac{5.477x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}}$$

La conclusion à tirer de cet exercice comparatif est qu'avec des profils de vitesse de forme simple, la méthode intégrale permet d'approcher très correctement la solution exacte de Blasius puisque le coefficient de frottement est prédit avec environ 10% d'écart.

- Exercice

Quels resultats obtient-on avec un profil de vitesse cubique en ce qui concerne δ et C_f ?

De manière analogue à l'épaisseur de quantité de mouvement on définit l'épaisseur de déplacement δ^* . Elle indique de combien les lignes de courant sont déviées de l'horizontalité par le grossissement de la couche limite. Attention, **la frontière de la couche limite n'est en aucun cas une ligne de courant**; on s'en souviendra en observant qu'il y a un flux de masse entrant et une composante de vitesse v. La figure 9.5 donne une représentation de l'évolution d'un tube de courant affecté par le développement de la couche limite. Evaluons la quantité δ^* en recherchant la variation de débit volumique entre une section de hauteur h du tube de courant située dans l'écoulement amont uniforme et une autre section du même tube de courant mais de hauteur $h + \delta^*$ prise à l'abscisse x; h est choisi pour être largement plus grand que δ . L'équation de continuité nous dit que :



FIG. 9.5 – Tube de courant d \hat{u} à la couche limite

$$\int_0^h \mathbf{U}_{ext} = \int_0^{h+\delta^*} u dy$$

On peut transformer cette égalité comme suit :

$$\int_0^h \mathbf{U}_{ext} dy = \int_0^{h+\delta^*} (u - \mathbf{U}_{ext}) dy + \int_0^{h+\delta^*} \mathbf{U}_{ext} dy$$

ou encore

Après avoir noté que la différence de vitesse $u - \mathbf{U}_{ext}$ est nulle en dehors de la couche limite, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ext}h - \mathbf{U}_{ext}(h + \delta^*) &= \int_0^\delta (u - \mathbf{U}_{ext}) dy \\ \frac{\delta^*}{\delta} &= \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{\mathbf{U}_{ext}}\right) \frac{dy}{\delta} \end{aligned}$$

76

Chapitre 10

Ecoulements internes

10.1 Introduction

Le sujet des écoulements internes couvre un très vaste domaine de la mécanique des fluides. Il concerne l'étude du mouvement de tous les types de fluide et ce, dans des conduites de forme quelconque. Leur champ d'applications s'étend de l'écoulement à une phase (gaz ou liquide) aux écoulements à phases polydispersées tels que les suspensions de particules solides ou de gouttelettes sans oublier les écoulements diphasiques avec changement de phase comme l'ébullition et la condensation convectives. On les retrouve dans la majorité des applications des phénomènes de transport comme par exemple, les réseaux de distribution aéroliques et hydrauliques, les échangeurs de chaleur, les installations de ventilation et de conditionnement d'air, les tours de refroidissement etc...

Dans ce cours, nous nous confinerons aux aspects fondamentaux des écoulements internes à simple phase en mettant l'accent sur les pertes de charges qui leur sont associées. En effet, le concepteur d'un système vise au meilleur compromis entre les coûts d'investissement et les coûts de fonctionnement qu'implique son projet. Pour réduire la facture énergétique, facteur 'clef' actuel de tous procédés industriels, il est important d'aboutir au dimensionnement qui entraîne les plus faibles chutes de pression. Une localisation précise des parties du réseau où une réduction des pertes de charge est envisageable, constitue une première étape dans l'amélioration.

10.2 Un peu d'histoire

Le comportement des écoulements en tuyauterie fait depuis longtemps l'objet d'études approfondies. Les principales contributions qui ont fait progresser la compréhension et la modélisation de ces écoulements sont énumérées ci-après.

****** Reynolds (1842-1912), en visualisant le mouvement de l'eau en conduite par un fin filet de colorant comme le schématise la figure 10.1, mit en évidence l'existence de deux régimes d'écoulements. Il observa un premier régime régulier où le filet coloré se propage rectilignement le long d'une ligne de courant; c'est l'écoulement laminaire avec ses couches de fluide qui glissent continûment les unes sur les autres. Il vit apparaître un second régime, instationnaire et chaotique, qui commence par une perte de stabilité du traceur et se termine toujours par un mélange important du colorant au sein de l'écoulement que l'on qualifie alors de **turbulent**. O. Reynolds rapporta ses observations dans un article intitulé " An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water will be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels" publié en 1883 dans " The Philosophical Transactions of the Royal Society'. Il précisa que le critère adimensionnel du passage régime laminaire – régime turbulent, fait intervenir la vitesse moyenne de l'écoulement **Uo**, le diamètre du tuyau D, et la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre sans dimension porte son nom et permet d'identifier la nature de l'écoulement :

$Re_D =$	UoD _	ſ	< 2300	Laminaire	
	$\overline{\nu}$	ĺ	> 2300	Turbulent	



Toutefois, il faut savoir qu'un dessin soigné de la bouche d'entrée du tube permet de repousser l'apparition de la turbulence à des nombres de Reynolds aussi élevés que 5.10^4 .

La visualisation proposée à la figure 10.2 souligne la différence du comportement du fluide entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent qui se caractérise par la présence de tourbillons de tailles macroscopiques (*eddies* en anglais). Ces fluctuations rapidement advectées dans le fluide masquent les transferts microscopiques dus aux mouvements aléatoires des molécules (viscosité) en surimposant un transport intense à grandes échelles. Sa nature complexe captive toujours l'attention du monde scientifique.

Enfin, pour la petite histoire il est bon de reconnaître à ce sujet le caractère précurseur de Léonard de Vinci (1452-1519) qui mentionnait déjà de telles représentations d'écoulements dans ses écrits et cahiers de dessins (musée du Clos-Lucé).

FIG. 10.1 – Expérience de Reynolds



FIG. 10.2 – Ecoulement laminaire et écoulement turbulent

Blasius suite à une analyse détaillée d'une large banque de données expérimentales proposa une corrélation empirique pour déterminer les pertes de charge dans le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire.

Prandtl (1875-1953) et **von Karman** (1881-1963) travaillèrent sur la modélisation et proposèrent un traitement semi-empirique de l'écoulement turbulent en se basant sur le concept de la **longueur de mélange**.

Nikuradse (1894-1979) au travers d'une étude expérimentale systématique de l'écoulement en conduit, souligna plus particulièrement l'effet des rugosités de paroi sur les pertes de charges.

10.3 Ecoulements non-développés

10.3.1 Régime laminaire

En traitant le problème de Poiseuille (section 7.1) nous avons considéré que l'écoulement laminaire était hydrodynamiquement développé c'est-à-dire qu'il possédait un profil de vitesse indépendant de la position axiale. En réalité, le schéma de la figure 10.3 montre que cette distribution de vitesse n'est atteinte qu'après une certaine distance L_d de l'entrée. En supposant l'écoulement initial quasiment uniforme – cas d'une entrée douce convergente– on sait que les paquets de fluide près de la paroi vont être ralenties par l'effet d'adhérence. C'est un phénomène étroitement lié à celui de la couche limite : il se traduit aussi par le grossissement de la couche visqueuse pariétale qui se développe vers l'aval.

L'épaississement de cette couche s'accompagne d'une augmentation de la vitesse du fluide dans le cœur de l'écoulement pour satisfaire la conservation de la masse et donc d'une diminution de la pression locale en vertu de l'équation de Bernoulli.

A l'abscisse $x = L_d$ la couche visqueuse a envahi toute la section du tube et le profil de vitesse a la forme parabolique 18.38 établie au paragraphe 7.1.



FIG. 10.3 – Ecoulement d'entrée

Ce comportement est à nouveau contrôlé par un processus d'advection-diffusion. Nous pouvons donc estimer sa longueur d'établissement L_d sur des considérations identiques à celles avancées pour les couches limites. La relation 9.15 est adaptée au présent problème en remplaçant δ par D (~ à l'épaisseur finale de la couche visqueuse) et L par L_d :

$$\frac{L_d}{D} \sim \frac{\mathbf{UoD}}{\nu} = Re_D$$

ou, sous une forme adimensionnelle :

$$\tilde{L}_{d,\ell} = \frac{L_d}{DRe_D} = C^{te} \tag{10.1}$$

Les différentes simulations expérimentales et numériques effectuées dans le cadre de ce problème ont permis de déterminer la valeur de $\tilde{L}_{d,\ell}$,

$$\tilde{L}_{d,\ell} = 0,0565$$

et ont montré que dans la région d'entrée, la variation de pression normée se corrèle avec l'abscisse adimensionnelle \tilde{x}_{ℓ} :

$$\Delta \tilde{P} = 13,74\sqrt{\tilde{x}_{\ell}} + \frac{1,25 + 64\tilde{x}_{\ell} - 13,74\sqrt{\tilde{x}_{\ell}}}{1 + 0,00021(\tilde{x}_{\ell})^{-2}}$$
(10.2)

où

$$\tilde{x}_{\ell} = \frac{x}{DRe_D}$$
 et $\Delta \tilde{P} = 2\frac{P_o - P(x)}{\rho \mathbf{Uo^2}}$

 P_o est la pression de l'écoulement uniforme à l'entrée du tube. La relation 10.1 indique que la longueur d'établissement croît avec le nombre de Reynolds. Comme ordre de grandeur, on retiendra que 60 diamètres de canalisations sont nécessaires pour qu'un écoulement à $Re_D = 1000$ soit complètement développé ; ce faisant, la pression aura chuté de 5 pressions dynamiques.

10.3.2 Régime turbulent

En régime turbulent le problème est plus complexe. La présence des petits tourbillons dont le taux de formation dépend du nombre de Reynolds, favorise la diffusion dans l'écoulement. Par ailleurs, les éventuelles aspérités de paroi affectent plus sensiblement la variation de pression que dans le cas laminaire. On verra le pourquoi un peu plus loin dans le texte. L'établissement du profil de vitesse final s'effectue sur une plus petite longueur que celle prédite par la relation laminaire 10.1. En modifiant la définition de \tilde{L}_d , une bonne estimation de l'établissement de vitesse dans une canalisation circulaire lisse peut être déduite de la formule suivante :

$$\tilde{L}_{d,t} = \frac{L_d}{DRe_D^{0.25}} = 1$$
(10.3)

La corrélation qui décrit la variation de pression dans la région d'entrée s'écrit avec $\tilde{x}_t = x/DRe_D^{0.25}$:

$$\Delta \tilde{P} = 0,45\tilde{x}_t - 0,06\tilde{x}_t^2$$
(10.4)

Un écoulement turbulent, disons à $Re_D = 10000$, sera complètement développé après 10 diamètres de tube en subissant une chute de pression d'environ la moitié d'une pression dynamique. Ces valeurs relatives sont plus faibles qu'en écoulement laminaire.

•• L'ensemble des relations obtenues en canalisation cylindrique de section constante peut s'étendre au cas de la tuyauterie de coupe quelconque en substituant le diamètre D par le diamètre hydraulique D_h défini comme la surface de la section S divisée par le quart du périmètre \mho mouillé par le fluide :

 $\begin{aligned} D_h = 4 \frac{S}{\mho} & \left\{ \begin{array}{cc} 4 \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = D & \text{section circulaire de diamètre} & D \\ 4 \frac{a^2}{4a} = a & \text{section carrée de côté} & a \end{array} \right. \end{aligned}$

10.4 Ecoulements développés

La chute de pression ΔP_o dans une canalisation de longueur L et de diamètre équivalent D_h s'exprime conventionnellement au moyen du **coefficient de perte de charge** λ :

$$\Delta P_o = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho \mathbf{Uo^2}}{2}$$

10.4.1 Régime laminaire

En régime laminaire, l'analyse de l'écoulement de Poiseuille conduit à :

$$\lambda = 4C_f = \frac{64}{Re_D} \tag{10.5}$$

L'ensemble des mesures expérimentales supporte ce résultat analytique comme le confirme la figure 10.4 où la variation du coefficient de perte de charge est portée en fonction du nombre de Reynolds Re_D . Dans ce graphique logarithmique (*base décimale*), la pente de la courbe est -1.

10.4.2 Régime turbulent

De l'analyse de données expérimentales obtenues en régime turbulent pour des nombres de Reynolds limités à 10^5 , Blasius tire la corrélation suivante :

$$\lambda = \frac{0.316}{Re_D^{0.25}} \tag{10.6}$$

Cette courbe, représentée avec la pente -1/4 sur le graphe de la figure 10.4, reflète bien le comportement de l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire lisse.



FIG. 10.4 – Coefficient de perte de charge

L'effet de la rugosité des parois apparaît aux grandes valeurs de Re_D . Il se concrétise par des coefficients de perte de charge constants quelque soit le nombre de Reynolds. Comme l'indique la figure 10.4, la valeur de cette constante dépend de la rugosité relative, rapport de la taille moyenne des aspérités au diamètre de la canalisation $\Lambda = \Lambda/D_h$. L'explication de ce comportement se situe dans la représentation physique de l'écoulement auprès de la paroi. En réalité, l'écoulement ne présente pas un état turbulent dans la totalité de son volume. La figure 10.5 illustre le propos. Dans une petite région adjacente à la paroi que l'on nomme sous-couche laminaire, les fluctuations désordonnées deviennent très faibles, amorties par l'action de la paroi. A la frontière de cette couche très mince, δ_{sc} qu'on évitera de confondre avec la terminologie de la couche limite laminaire, δ , les mécanismes de transport aux échelles microscopiques (viscosité) et macroscopiques (tourbillons turbulents) sont du même ordre. Aux écoulements turbulents caractérisés par des valeurs de Re_D relativement faibles (5000 à 10000), l'épaisseur δ_{sc} est suffisamment importante et les rugosités sont novées dans la sous-couche laminaire. Dans ces conditions, l'écoulement est appelé hydrodynamiquement lisse et les effets visqueux de paroi contribuent à la perte de charge par le biais du nombre de Reynolds; c'est la relation de Blasius qui fait loi.

Par contre, quand le nombre de Reynolds augmente, δ_{sc} diminue et les rugosités deviennent d'une taille supérieure à la sous-couche laminaire. Les effets visqueux n'affectent pas la variation de pression car les pertes sont entièrement causées par l'interaction entre le noyau de l'écoulement turbulent et les aspérités. Dès que ce régime est atteint, l'écoulement est catalogué d'**hydrodynamiquement rugueux** et seule compte la grandeur des protubérances de paroi : à ces grandes valeurs du nombre de Reynolds, la turbulence est totalement développée et ses propriétés ne varient plus tellement avec Re_D . La corrélation de Nikuradse est alors applicable :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,868 \ln \tilde{\Lambda}$$
 (10.7)

Elle est représentée par la famille des courbes de pente 0 à la figure 10.4. Dans la plage intermédiaire de transition entre ces deux types d'écoulement, Colebrook compléta la relation 10.7 de Nikuradse pour prendre en compte à la fois les effets du nombre de Reynolds et de la rugosité :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,868 \ln\left(\tilde{\Lambda} + \frac{9,34}{Re_D\sqrt{\lambda}}\right)$$
(10.8)

Cette corrélation empirique est une équation transcendante en λ qui peut être résolue graphiquement ou par itérations numériques. Elle est applicable tant que $\tilde{\Lambda} Re_D \sqrt{\lambda} \leq 200$ mais ne convient pas pour les écoulements turbulents en canalisations dont les parois présentent des ondulations d'amplitude égale à Λ . Leurs comportements qui s'apparentent plus à ceux en tuyauterie lisse, suivent une loi de type Blasius avec une constante numérique plus élevée.



FIG. 10.5 – Notion de paroi rugueuse

10.5 Modèle semi-théorique de la turbulence

On peut mesurer finement et localement la vitesse instantanée d'un écoulement turbulent au moyen de l'anémométrie à fil chaud ou de la vélocimétrie laser à effet Doppler. La prise de mesure peut s'effectuer sur des volumes de contrôle de l'ordre d'une fraction de millimètre et des variations rapides de vitesse peuvent être suivies sur des temps de quelques dixièmes de millisecondes voire microsecondes. Le signal typique fournit par un de ces instruments placé dans un de champ de vitesse turbulent, donc intrinsèquement instationnaire, est reproduit à la figure 10.6. Pour exploiter une telle information, on commence par modéliser la turbulence en décomposant chaque composante de vitesse (ainsi que chaque paramètre physique) en une quantité moyenne \overline{u} et une quantité fluctuante u'. Notons que le comportement des fluctuations est essentiellement aléatoire comme l'illustre la figure 10.6 :

$$u = \overline{u} + u'$$

 t_m est l'intervalle de temps sur lequel est déterminée la vitesse moyenne. Le choix de cette période de moyennage est délicat : elle doit être suffisamment grande devant les échelles temporelles de la turbulence pour couvrir un large nombre de fluctuations et vérifier la relation suivante :

$$\overline{u'} = \frac{1}{t_m} \int_t^{t+t_m} u' dt = 0$$

Par ailleurs, elle doit être assez courte pour éviter tout filtrage des variations temporelles d'un écoulement moyen évoluant plus lentement dans le temps.

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{t_m} \int_t^{t+t_m} u dt$$

En laboratoire, des bases de temps de l'ordre de la seconde sont courantes, en météorologie et océanographie, elles se comptent en dizaines de minutes.



FIG. 10.6 – Signal de vitesse locale en écoulement turbulent

10.5.1 Contrainte de cisaillement turbulente

Les fluctuations turbulentes u' engendrent des mouvements erratiques de macro-cellules fluides qui se superposent au mouvement d'ensemble représenté par le champ de vitesse moyenne \overline{u} . Ces paquets de fluide constituent dans leurs déplacements aléatoires, des vecteurs d'échange qui augmentent considérablement les mécanismes de transport et de mélange à travers les couches visqueuses. Donnons une description analytique de ce comportement en traitant le cas d'un écoulement incompressible turbulent et unidirectionnel dans un tube de section circulaire constante. A la manière d'un écoulement laminaire, nous pouvons partager l'écoulement turbulent **moyen** en couches fictives de fluide parallèles les unes aux autres comme le suggère le schéma de la figure 10.7. La cinématique du problème se résume à :

$$u = \overline{u}(r) + u'$$
 et $v = v'$

v' est la composante fluctuante de vitesse radiale, moteur des échanges intenses de quantité de mouvement entre les couches de fluide. Exprimons les flux de quantité de mouvement à travers une surface unitaire dS parallèle à l'axe Ox du tube (précisée sur la vue agrandie du volume d'analyse dessiné à la figure 10.7). Suivant que les macro-cellules turbulentes se meuvent de bas en haut (vitesse moyenne \overline{u}_A et composantes fluctuantes u'_A et v'_A) ou inversement (vitesse moyenne \overline{u}_B et composantes fluctuantes u'_B et v'_B) le flux instantané de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho v'_A \left[\overline{u}_A + u'_A \right] \quad \text{ou} \quad \rho v'_B \left[\overline{u}_B + u'_B \right] \tag{10.9}$$



FIG. 10.7 – Agitation turbulente et longueur de mélange

Dans cet écoulement, les composantes fluctuantes de vitesse ne sont pas indépendantes : elles se corrèlent de façon à ce que u' soit toujours de signe contraire à v'. En moyennant les flux de quantité de mouvement instantanés exprimés par les relations 10.9 sur l'intervalle de moyennage t_m , on obtient la contribution de la turbulence à la contrainte de cisaillement soit τ_{xr}^t :

$$\tau_{xr}{}^t = -\frac{1}{t_m} \int_t^{t+t_m} \rho v' \left[\overline{u} + u'\right] dt = -\frac{1}{t_m} \int_t^{t+t_m} \rho v' u' dt \neq 0$$

Ce terme n'est pas nul par définition. C'est une pseudo- contrainte qui représente le flux moyen de quantité de mouvement dû aux effets macroscopiques engendrés par la turbulence. On la nomme **contrainte** ou **tension turbulente de Reynolds** et on l'écrit conventionnellement :

$$\tau_{xr}{}^t = \rho \overline{u'v'} \tag{10.10}$$

Dans un écoulement turbulent général tridimensionnel, on aurait aboutit, comme pour les contraintes visqueuses, à un tenseur de contraintes turbulentes avec des termes $\rho \overline{u'w'}$, $\rho \overline{v'w'}$, etc... Finalement, la contrainte de cisaillement totale résulte de la combinaison de l'agitation moléculaire et du désordre macroscopique :

$$\tau_{xr} = \tau_{xr}^{\ \ell} + \tau_{xr}^{\ t} = -\mu \frac{d\overline{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'} \tag{10.11}$$

Il va s'en dire qu'en écoulement franchement turbulent, la contrainte τ_{xr}^{t} est de loin supérieure à la contrainte laminaire τ_{xr}^{ℓ} sauf au voisinage immédiat de la paroi où, nous l'avons mentionné, la contribution visqueuse devient du même ordre de grandeur que la contribution turbulente (existence d'une sous-couche laminaire). Comparativement au cas laminaire, l'intensité accrue des transferts turbulents se traduit par des profils de vitesse très renflés donc des contraintes pariétales plus importantes. La figure 10.8 en donne un exemple.



FIG. 10.8 – Profils de vitesse laminaire et turbulent dans un tube

La difficulté majeure posée par la turbulence est que les contraintes induites sont des fonctions du champ des fluctuations de vitesse. A l'heure actuelle (et pour longtemps encore) il est tout à fait impossible de prédire de façon générale ces composantes qui dépendent et de la nature du fluide et des propriétés de l'écoulement (conditions aux limites, géométrie *etc*). Aussi, doit-on recourir à des approches semi-théoriques (ou semi-empiriques) qu'on a coutume de classer sous la terminologie de **modélisation de la turbulence**. Une de ces méthodes qui s'applique bien aux couches limites sur les plaques planes et aux écoulements internes est discutée ci-après.

10.5.2 Longueur de mélange de Prandtl

Boussinesq (1877) s'inspirant de la loi de Newton, formalisa les contraintes de Reynolds en introduisant le concept de la viscosité turbulente, en quelque sorte analogue à la viscosité apparente des fluides non-newtoniens :

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{d\overline{u}}{dr} \tag{10.12}$$

A la différence de la viscosité moléculaire qui est une spécificité intrinsèque du fluide, le coefficient de diffusivité turbulente ν_t (eddy diffusivity en anglais) dépend des caractéristiques de l'écoulement. Pour exploiter cette notion, il fallait lui donner un formalisme mathématique. Prandtl songea à la relier aux propriétés de l'écoulement moyen et, s'inspirant de la définition du libre parcours moyen, introduisit le concept de la longueur de mélange ℓ_m . Il postula que la composante fluctuante u' d'une couche quelconque de l'écoulement, était due au mouvement radial (ou transversal) d'un amas de fluide venant d'une autre couche située à une petite distance ℓ_m . Le principe est schématisé à la figure 10.7. En atteignant la couche placée en r, le corpuscule fluide garde la vitesse \overline{u} de la couche de départ en $r \pm \ell_m$ et gagne une composante fluctuante uniquement créée par la différence de vitesse moyenne qui existe en son point d'arrivée :

$$u' = \overline{u}(r \pm \ell_m) - \overline{u}(r) = \pm \ell_m \frac{d\overline{u}}{dr}$$

En s'appuyant sur l'équation de continuité et des observations expérimentales, il admit une relation de proportionnalité entre u' et v' et exprime finalement la contrainte de Reynolds comme suit :

$$\overline{u'v'} = -\ell_m^2 \frac{d\overline{u}}{dr} \left| \frac{d\overline{u}}{dr} \right|$$
(10.13)

Le coefficient de proportionnalité est introduit dans la longueur de mélange. De la comparaison des relations 10.12 et 10.13 nous tirons :

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dr} \right| \tag{10.14}$$

La diffusivité turbulente de quantité de mouvement est un *facteur local* qui dépend d'une *échelle de longueur locale* du mélange turbulent et du taux de cisaillement moyen.

10.5.3 Hypothèse de similitude de von Karman

von Karman développa plus avant la théorie de la longueur de mélange en tirant profit du fait expérimental suivant :

Les distributions de vitesse dans la partie centrale de l'écoulement, obtenues lors de plusieurs tests expérimentaux, tous effectués avec la même contrainte de frottement à la paroi τ_p mais pour différents diamètres de canalisation et conditions de rugosité, se tracent suivant une courbe unique si le déficit de vitesse $\mathbf{U}_{\max} - \overline{u}$ normé par la vitesse de frottement $u^* = \sqrt{\tau_p/\rho}$ est représenté en fonction du rayon adimensionnel $\tilde{r}: r/R$

$$\frac{\mathbf{U}_{\max} - \overline{u}}{u^*} = \mathcal{F}(\tilde{r})$$

Si ce fait s'avère correcte, alors $\mathcal{F}(\tilde{r})$ est une fonction universelle applicable dans toute la gamme des écoulements turbulents et la forme du profil de vitesse en chaque point est essentiellement contrôlée par des facteurs locaux liés à la contrainte locale de cisaillement mais totalement indépendante de facteurs globaux comme le diamètre de la conduite ou la vitesse débitante. Par conséquent, il existe une relation différentielle qui décrit la forme du profil de vitesse sans faire intervenir le moindre paramètre global. Il est aussi légitime de supposer que ces facteurs locaux agissent de manière semblable aux différents points du profil de sorte que si on compare les résultats en deux points distincts (r_1 et r_2), on observe une similitude dynamique; les différences n'étant qu'une question d'échelle. Cette réflexion se formule en exprimant la variation de la vitesse moyenne autour de ces points et en utilisant le développement en série de Taylor :

$$\overline{u}(r_1 + dr) = \overline{u}(r_1) + \overline{u}'_1 dr + \overline{u}''_1 \frac{dr^2}{2}$$

 et

$$\overline{u}(r_2 + dr) = \overline{u}(r_2) + \overline{u}'_2 dr + \overline{u}''_2 \frac{dr^2}{2}$$

Les ' et " symbolisent les dérivées première et seconde par rapport à r. L'hypothèse de similitude nous demande d'accepter une proportionnalité entre les différents facteurs affectant la forme du profil de vitesse. Ce qui donne :

$$\frac{\overline{u}_1'}{\overline{u}_2'} \simeq \frac{\overline{u}_1''}{\overline{u}_2''}$$

soit encore

$$\frac{\overline{u}_1'}{\overline{u}''_1} \simeq \frac{\overline{u}_2'}{\overline{u}''_2} \simeq \ell_m$$

Chaque rapport des dérivées première/seconde a la dimension d'une longueur qui doit être proportionnelle à l'échelle caractéristique, notamment la longueur de mélange de Prandtl :

$$\ell_m = \pm \mathcal{K} \frac{\overline{u}'}{\overline{u}''}$$

Le facteur de proportionnalité \mathcal{K} doit être une constante universelle. L'expérience le confirme et fournit la valeur $\mathcal{K} = 0, 4$. Finalement, la contrainte de cisaillement turbulente s'exprime seulement en fonction des caractéristiques locales, c'est-à-dire des différentielles du profil de vitesse moyenne :

$$\tau_{xr}^{t} = \rho \mathcal{K}^2 \frac{\overline{u}^{\prime 4}}{\overline{u}^{\prime 2}} \tag{10.15}$$

10.5.4 Profil de vitesse logarithmique

Considérons un petit volume cylindrique de rayon r et de longueur dx placé dans un écoulement développé en conduite. Cet élément de fluide est en équilibre dynamique quand la résultante des forces de pression qui agissent sur ses deux surfaces transversales est égale à la force de frottement qui s'applique le long de la surface latérale :

$$\pi r^2 * \left[P(x+dx) - P(x) \right] = -2\pi r dx \tau_{xr}$$

$$\boxed{\tau_{xr} = -\frac{dP}{dr} \frac{r}{2} = \tau_p \frac{r}{R}}$$
(10.16)

 soit

vitesse. Ce faisant, il faut être attentif au fait que dans cette approche nous négligeons la contribution des contraintes visqueuses, τ_{xr}^{ℓ} .

L'équation différentielle devient :

$$\rho \mathcal{K}^2 \frac{\overline{u}'^4}{\overline{u}''^2} = \tau_p \frac{r}{R}$$

Une première intégration fournit :

$$\overline{u}'^{-1} = -\frac{2\mathcal{K}\sqrt{\tilde{r}}}{u^*} + C^{te}$$

La valeur de la constante est déterminée avec une précision suffisante en considérant que le gradient de vitesse devient très grand près de la paroi : $\overline{u}' \mapsto \infty$ quand $\tilde{r} \mapsto 1$. Une seconde intégration conduit à l'expression finale du profil de vitesse :

$$\frac{\overline{u} - \mathbf{U}_{\max}}{u^*} = \frac{1}{\mathcal{K}} [\sqrt{\widetilde{r}} + \ln(1 - \sqrt{\widetilde{r}})]$$
(10.17)

La relation 10.17 est la fonction universelle cherchée. Il est logique que cette distribution fasse apparaître des valeurs infinies de la vitesse près de la paroi puisque le frottement dû à l'agitation moléculaire, terme prédominant de cette région (sous-couche laminaire) a été omis. Une démarche mieux adaptée consiste à arrêter l'analyse à une petite distance du mur. La solution peut prendre la forme adimensionnelle suivante :

$$\overline{\frac{\overline{u}}{u^*}} = \frac{1}{\mathcal{K}} \ln Y^+ + C^{te}$$
(10.18)

où Y^+ est une distance à la paroi normalisée et conventionnellement basée sur le nombre de Reynolds de frottement Re^* :

$$Y^+ = (1 - \tilde{r})Re^* \quad \text{avec} \quad Re^* = \frac{Ru^*}{\nu}$$

Les prédictions tirées de la relation 10.18 sont en bon accord avec les données expérimentales obtenues par Nikuradse tant près de la paroi que dans le cœur turbulent quand la constante prend la valeur 5,5. Il est à noter que Prandtl arriva au même type de profil de vitesse pour un écoulement turbulent établi dans un canal formé par deux plaques parallèles en postulant que la longueur de mélange augmentait proportionnellement à l'éloignement de la paroi : $\ell_m = \mathcal{K}y$

10.5.5 Coefficient de perte de charge

Il est aisé de montrer que le coefficient de perte de charge est lié à la vitesse de frottement u^* et la vitesse moyenne débitante **Uo**. Pour ce faire, il suffit de se reporter à la définition de λ et de la combiner avec la relation du bilan des forces 10.16. On obtient :

$$\lambda = 8 \left[\frac{u^*}{\mathbf{Uo}} \right]^2$$

Pour mettre en évidence la fonctionnelle $\lambda - Re_D$, il est nécessaire de déterminer l'expression de **Uo**. On intègre la distribution de vitesse 10.18 sur la section de passage en adoptant la valeur de 5,5 pour la constante. Il vient :

$$\frac{\mathbf{Uo}}{u^*} = 2,5\ln Re^* + 1,75$$

De ces deux dernières relations, on peut extraire la formule transcendante suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,88\ln\left(Re_D\sqrt{\lambda}\right) - 0,91\tag{10.19}$$

- <u>Exercice</u>

On propose d'une part de mettre en graphique les prédictions venant de la corrélation implicite 10.19 avec celles fournies par la relation empirique de Blasius et de la comparer d'autre part à la corrélation de Colebrook 10.8 quand $\tilde{\Lambda} = 0$.

10.5.6 La sous-couche laminaire

Aux abords proches de la paroi, la contrainte de cisaillement est quasiment égale à la contrainte pariétale; on peut linéariser le problème et approcher le profil de vitesse dans la sous-couche laminaire par :

$$\frac{\overline{u}}{u^*} = Y^+$$

puisque $\tilde{r} \mapsto 1$.

En interceptant le profil de vitesse dans la région turbulente avec celui de la sous-couche visqueuse, on peut déterminer le point $Y_{\ell,t}^+$ où les contributions laminaire et turbulente sont égales :

$$Y_{\ell t}^+ = 11, 6$$

C'est un point de repère dans l'estimation des ordres de grandeur. Il s'avère en fait que les effets turbulents sont négligeables devant les effets visqueux quand $Y^+ < 5$, tandis que dans la plage $5 < Y^+ < 70$ les deux contributions sont à considérer et que pour $Y^+ > 70$ l'échange de quantité de mouvement est purement turbulent. Compte tenu de ces critères de zone d'influence, on en déduit que l'épaisseur de la sous-couche laminaire est donnée par :

$$\delta_{sc} \approx \frac{5\nu}{u^*}$$

Comme cela a été soulevé, les canalisations rencontrées dans la pratique industrielle ont des parois le plus souvent rugueuses et les écoulements qui s'y établissent sont à des nombres de Reynolds élevés. Il est important de pouvoir faire ressortir des critères qui précisent si elles se comporteront en régime hydrauliquement lisse ou pas, afin de sélectionner la corrélation de perte de charge appropriée. La comparaison de la taille moyenne des protubérances de paroi Λ à l'épaisseur de la sous-couche laminaire appuyée par la définition des zones d'influence introduites plus avant, nous amène à proposer les distinctions suivantes :

•
$$\frac{\Lambda u^*}{\nu} < 5 \quad \mapsto \quad \lambda = \lambda(Re)$$
 régime lisse •

•
$$5 < \frac{\Lambda u^*}{\nu} < 70 \quad \mapsto \quad \lambda = \lambda(Re, \Lambda)$$
 régime de transition •
• $\frac{\Lambda u^*}{\nu} > 70 \quad \mapsto \quad \lambda = \lambda(\Lambda)$ régime rugueux •

10.6 Conduites de raccordement

10.6.1 Les coudes

Un réseau hydraulique est composé de canalisations droites connectées entre elles par des tronçons courbes, voire à angle droit. Ces configurations sont très fréquentes dans les installations pipe-lines, les unités de distribution des centrales et les échangeurs de chaleur industriels. En s'écoulant dans une tuyauterie courbée, le fluide subit l'action d'une force centrifuge induite par la courbure du coude. Cette force en se surimposant à la force créée par le gradient de pression axial, provoque la formation d'un écoulement secondaire transverse à l'écoulement primaire d'ensemble. En effet, les filets fluides se déplaçant près de l'axe du tube avec une plus grande vitesse vont être sujets à une composante centrifuge plus intense que celle qui agit dans la région pariétale externe où une plus faible vitesse existe. Ejectées vers la paroi, ces particules fluides vont distordre le profil de vitesse principal comme le schématise la figure 10.9. Un excédent de vitesse apparaît près de la paroi externe accompagné d'un déficit d'écoulement près de la paroi à petit rayon de courbure r_c . Bien qu'un tronçon coudé soit généralement de petite longueur, il n'en reste pas moins vrai que cette distorsion de vitesse peut persister sur une distance de plusieurs diamètres de tube (10 à 30 D).



FIG. 10.9 – Ecoulement dans un coude

Dans une canalisation courbe, les pertes de charges dépendent de la nature du fluide (newtonien ou pas), du nombre de Reynolds et du rapport de courbure D/r_c . En écoulement laminaire, régime plus sensible à l'effet de courbure que le turbulent, le groupe sans dimension qui corrèle le coefficient de perte de charge est le **nombre de Dean Dn** :

$$Dn = \frac{Re}{2} \sqrt{\frac{D}{2r_c}}$$

Plusieurs corrélations plus ou moins sophistiquées ont été avancées dans la littérature sur le sujet. On retiendra pour sa simplicité, celle proposée par Prandtl :

$$\lambda_{c,\ell} = 0.37 \lambda_{\ell} D n^{0.36}$$
 pour $20 < Dn < 500$

 λ_{ℓ} reste le coefficient de perte de charge d'un écoulement laminaire en canalisation rectiligne. En écoulement turbulent, les travaux de White conduisent à la relation suivante :

$$\lambda_{c,t} = \lambda_t \left[1 + 0,075 R e^{0.25} \sqrt{\frac{D}{2r_c}} \right]$$

Le nombre de Dean ne constitue plus le paramètre indépendant du phénomène.

10.6.2 Changements de section

Contraction brusque

La présence d'un rétrécissement brusque de section dans une tuyauterie se caractérise par la formation d'une **vena contracta** des lignes de courants au droit du ressaut comme l'indique la figure 10.10.



FIG. 10.10 – Contraction brusque et vena contracta

Cette réduction de section constitue une résistance hydraulique et entraîne par conséquent une chute de pression. Le bilan massique macroscopique relie la vitesse débitante de sortie V_2 à celle qui règne dans la section minimum de facteur de contraction $f_c = S_c/S_2$:

$$V_c = \frac{V_2}{f_c}$$

On exprime la perte de charge en fonction du paramètre de résistance K_c et de la pression dynamique de sortie :

avec

$$\Delta P_o = K_c \frac{\rho V_2^2}{2}$$
$$K_c = \left[\frac{1}{f_c} - 1\right]^2$$

 K_c dépend du rapport de surface S_2/S_1 ; ses valeurs sont reprises au tableau 9.1.

Elargissement- Diffuseur

Le cas de l'élargissement brusque a été traité comme exemple illustratif des équations macroscopiques du mouvement (voir chapitre 6). Le résultat majeur est l'accroissement de pression statique qui résulte de la diminution de vitesse moyenne. De la même manière, un diffuseur est un moyen aérodynamique qui convertit l'énergie cinétique en pression. En écoulement subsonique (vitesse du fluide inférieure à la vitesse du son), le diffuseur est de forme conique avec une section qui s'élargit graduellement comme le précise la figure 10.11.

$\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K_c	$0,\!47$	0,46	$0,\!44$	0,41	$0,\!37$	0,28	0,18	$0,\!09$	0,04

TAB. 10.1 – Coefficient de résistance d'un rétrécissement brusque



FIG. 10.11 – Diffuseur aérodynamique

En appliquant une analyse macroscopique, on montre que la récupération de pression théorique dans un diffuseur parfait s'évalue par la relation suivante :

$$\Delta P_o|_{\text{idéal}} = \frac{\rho V_2^2}{2} [f_{ela}^2 - 1]$$

où f_{ela} représente toujours le facteur d'élargissement. Dans la pratique, on trouve que :

$$\Delta P_o = C_d \Delta P_o|_{idéal}$$
 avec $C_d < 1$

Le coefficient C_d du diffuseur dépend principalement de la nature et de la qualité de l'écoulement d'entrée ainsi que de l'angle d'ouverture Θ du cône. Quand Θ est trop grand, les veines de courant n'épousent pas la forme du diffuseur et l'écoulement se détache de la paroi. Ces zones où les filets fluides décollent sont génératrices de tourbillons qui dissipent une partie de l'énergie mécanique de l'écoulement et entraînent une mauvaise récupération de pression. Quand Θ est trop petit, l'écoulement adhère correctement à la paroi mais le diffuseur devient trop long à rapport de section fixé ; la chute de pression par frottements pariétaux qui en résulte dégrade les performances du diffuseur. Un bon compromis se situe aux environs de $\Theta = 5$ degrés. Le coefficient de récupération varie quasi linéairement avec le paramètre $\Theta^* = \delta_1^{**} \Theta/D_1$, où δ_1^{**} et D_1 sont respectivement l'épaisseur de quantité de mouvement et le diamètre à l'entrée du diffuseur. Typiquement C_d varie de 0.8 à 0.65 quand Θ^* augmente de 0.02 à 0.1. Dans la pratique, les diffuseurs sont conçus avec des parois très lisses et possèdent un facteur d'élargissement d'environ 4.

Chapitre 11

Ecoulements dans les milieux poreux

11.1 Introduction

Une grande variété de procédés industriels, agronomiques et de production d'énergie repose sur les mécanismes thermo- hydrauliques qui interviennent dans les milieux poreux. Pour ne citer que quelques exemples, on les trouvent dans les techniques de séchage des matériaux pulvérulents et de filtrage microbiologique, les phénomènes géothermiques, l'extraction renforcée du pétrole, la dispersion de polluants dans les nappes phréatiques, la congélation des sols, le stockage de chaleur, l'analyse de sécurité des réacteurs nucléaires, les régénérateurs thermiques, les pompes thermo-capillaires et les caloducs.

Un milieu poreux est une matrice solide constituée de cavités que l'on nomme des pores. Ces vides sont partiellement (les 'bras morts') ou totalement reliés entre eux par de petits canaux. Un milieu poreux peut être formé par une poudre frittée, le compactage de grains solides, l'empilement de particules, l'assemblage de mousses ou de tissus *etc...*. Un exemple typique de structure poreuse est donné à la figure 11.1; il s'agit d'une vue interne de l'arrangement de billes sphériques dans une colonne à garnissage. La taille des pores est très petite et la surface d'échange entre fluide et solide très importante. On atteint facilement la valeur de 500 m^2/m^3 . Ces propriétés font du milieu poreux un extraordinaire dispositif de transfert de matière et de chaleur. En contre partie et compte tenu de la grande résistance à l'écoulement, il faut s'attendre à subir des pertes de charge significatives.

L'objet de ce chapitre est de présenter un aperçu des caractéristiques des écoulements de fluides dans les milieux poreux. Les aspects touchant aux transferts thermiques et aux échanges de matières seront discutés respectivement aux parties II et III du cours. On distingue plusieurs classes d'écoulements dans les milieux poreux. Quand la matrice solide est complètement remplie par le fluide gazeux ou liquide, comme le sol imbibé d'eau, le milieu est dit saturé. Par contre il existe des situations où il y a coexistence de plusieurs fluides, miscibles ou non, au sein des cavités ; les écoulements relatifs de ces différentes phases mettent en jeu un ensemble de ménisques dans les pores et sont fortement gouvernés par des forces capillaires ; ces phénomènes sortent du cadre du cours mais sont traités en détail dans les ouvrages spécialisés cités en référence.



FIG. 11.1 – Coupe verticale dans un empilement de billes

11.2 La porosité

Le paramètre de base d'un milieu poreux est la porosité ε . C'est le rapport entre le volume occupé par les cavités, $\mathcal{V}ol_{pores}$, et le volume de la matrice, $\mathcal{V}ol_{matrice}$:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{V}ol_{pores}}{\mathcal{V}ol_{matrice}} = 1 - \varsigma$$

 ς est la compacité qui quantifie la concentration de solide dans le milieu. Dans un matériau poreux homogène et isotrope, la porosité de volume est égale à la porosité de surface.

Pour être applicable, la notion de porosité doit se limiter à un volume suffisamment gros pour contenir plusieurs cavités et grains solides : en-dessous d'une échelle équivalente à la taille du pore, la porosité devient binaire (0 ou 1) et il n'est plus concevable de traiter le système avec une approche de milieu continu. Pour décrire les mécanismes de transport dans les milieux poreux, on utilise des grandeurs macroscopiques qui sont des quantités moyennées sur un volume élémentaire représentatif (VER) grand par rapport à celui des pores. De façon analogue à la particule fluide, la dimension du VER doit être nettement supérieure à la taille du pore mais beaucoup plus petite que la longueur typique de la matrice poreuse.

La porosité des milieux perméables peut varier dans une large gamme. Dans un empilement compact de particules sphériques, la valeur de la porosité peut se situer entre 0,25 (arrangement ordonné cubique) et 0.4 (arrangement aléatoire). Il existe des matrices très poreuses présentant jusqu'à 80% de vide et contrairement des milieux très denses avec une compacité de plus de 80%.

11.3 Conservation de la masse

Le principe de la conservation de la masse dans le volume élémentaire représentatif de la matrice poreuse s'exprime à l'aide de l'équation de continuité telle qu'elle a été formulée pour une particule fluide :

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\nabla.\vec{V} = 0$$

où \vec{V} représente maintenant le vecteur vitesse obtenu par moyennage sur le VER et relié au vecteur vitesse dans les pores \vec{V}_{por} par la porosité :

$$\vec{V} = \varepsilon \vec{V}_{por}$$

Dans la majorité des écoulements en simple phase, les variations de la masse volumique sont suffisamment faibles pour considérer une approche de fluide incompressible.

11.4 Conservation de la quantité de mouvement

Le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement dans un milieu poreux est basé sur la vitesse moyenne V et la taille typique de la cavité ou du canal de connexion d. Dans la gamme des faibles valeurs du nombre de Reynolds, $Re \leq 5$, le comportement hydrodynamique est décrit par la **loi de Darcy** qui stipule qu'en écoulement stationnaire, le gradient de pression est proportionnel à la vitesse du fluide : on retrouve une ressemblance avec la loi de Poiseuille appliquée à chaque pore (voir exploitation plus après). Sous sa forme vectorielle et en présence de la pesanteur, elle s'écrit comme suit :

$$\vec{V} = -\frac{\kappa}{\mu} \left(\nabla P - \rho \mathbf{g}\right) \tag{11.1}$$

Le facteur de proportionnalité κ est la **perméabilité** du milieu; elle s'exprime en $[m^2]$. Une unité courante est le Darcy; il vaut $9.81 \times 10^{-13} m^2$ soit environ $1 \ \mu m^2$. En général, κ est une constante empirique déterminée par mesure du débit et de la perte de charge. Elle peut être aussi estimée à partir de modèles simples en assimilant l'arrangement des pores à des faisceaux de tubes capillaires parallèles de diamètre d comme le schématise la figure 11.2. En appliquant la loi de Poiseuille à un tube seul horizontal et de longueur L, on tire :

$$\Delta \dot{m} = \frac{\pi}{128\nu} \frac{\Delta P}{L} d^4$$

Si n est le nombre de canaux par unité de section perpendiculaire à la direction de l'écoulement, alors :

$$V = \frac{n\Delta \dot{m}}{\rho} = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} d^4 = \frac{\kappa}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

Comme

$$\varepsilon = n \frac{\pi d^2}{4}$$

il en résulte que la perméabilité dans la direction du mouvement fluide est donnée par :

$$\kappa = \frac{\varepsilon d^2}{32}$$

Les hétérogénéités dans le milieu poreux, comme les bras morts (voies sans issue), allongent le trajet effectif et le temps de séjour du fluide dans la matrice. On prend en compte ces facteurs en introduisant le paramètre de **tortuosité** \mathcal{T} qui, dans le modèle du faisceau de tube, est le rapport entre la longueur réelle du capillaire (représenté par un tube ondulé à la figure 11.2) L_{cap} et la longueur d'un capillaire rectiligne L:

$$\mathcal{T} = \frac{L_{cap}}{L}$$

Le facteur de tortuosité dépend fortement de la texture du milieu poreux; il est souvent fort différent de l'unité.



FIG. 11.2 – Modèle d'un milieu poreux par faisceau de tubes

Si le milieu poreux est modélisé par une collection de sphères solides de diamètres d_p , on peut appliquer la relation de Kozeny :

$$\kappa = \frac{\varepsilon^3}{182(1-\varepsilon)^2} d_p^2$$

La loi de Darcy fait naître la remarque judicieuse suivante : Pour κ et μ constants (un cas fréquent), l'équation 11.1 sous-entend que le champ de vitesse \vec{V} dérive d'un potentiel puisque $\nabla x \vec{V} = 0$:

$$\vec{V} = -\nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \frac{\kappa}{\mu} \left(P - \rho \mathbf{g} z \right)$$

De plus, en condition d'incompressibilité, $\nabla . \vec{V} = 0$ et

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Nous retrouvons ici les relations typiques des fluides parfaits. Or, étant donné la petite dimension des pores et des canaux de liaison, il ne fait aucun doute que l'écoulement dans la matrice est dominé par les effets de la viscosité! Ce paradoxe est facilement expliqué en notant que la vitesse \vec{V} n'est pas une quantité locale mais, comme nous l'avons souligné plus avant, une grandeur macroscopique, moyenne sur le volume élémentaire représentatif. Ce moyennage masque tous les effets visqueux qui interviennent au niveau du pore individuel.

Quand le nombre de Reynolds devient grand devant l'unité, la relation pression-vitesse s'éloigne du comportement linéaire. La loi de Darcy doit être corrigée par un terme inertiel du deuxième degré qui donne lieu à **l'équation d'Ergun** :

$$-\nabla P = \frac{\mu}{\kappa} \vec{V} + \frac{\rho}{\eta} |\vec{V}| \vec{V} - \rho \mathbf{g}$$
(11.2)

Cette équation introduit un second paramètre, η , qui est la **passabilité** du milieu poreux. Elle a la dimension d'une longueur : elle s'exprime en [m]. Pour un assemblage de sphères, Ergun propose d'utiliser :

$$\eta = \frac{\varepsilon^3}{1,75(1-\varepsilon)}d_p$$

D'autres modifications du modèle de Darcy ont été développées. Ainsi, Brinkman en s'intéressant aux mouvements de fluides très visqueux dans des matrices poreuses de grandes perméabilités est arrivé à l'équation suivante :

$$\vec{V} - \nabla^2 \vec{V} = \frac{\kappa}{\mu} \left(-\nabla P + \rho \mathbf{g} \right)$$

Vafai and Tien ont proposé un modèle qui établit le pont entre le modèle de Darcy-Ergun et l'équation de Navier- Stokes. Ils arrivent à la formulation suivante :

$$\frac{\mathcal{D}\vec{V}}{\mathcal{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{\nu}{\kappa}\vec{V} - \frac{1}{\eta}|\vec{V}|\vec{V} + \nu\nabla^2\vec{V} + \mathbf{g}$$

Quand κ augmente sensiblement alors η croît aussi et on retrouve la formulation de Navier-Stokes

Deuxième partie Transport d'Energie

Chapitre 12

Introduction

Le transport d'énergie qui fait l'objet de ce cours repose sur les mécanismes de transferts thermiques. Le transfert de chaleur est un mode d'échange énergétique qui joue un rôle essentiel dans le domaine des sciences pures comme dans celui des applications technologiques.

L'étude des transferts thermiques fait intervenir les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. Ces deux notions sont intimement liées aux principes mêmes de la thermodynamique. Le premier principe formule l'équivalence de la chaleur et du travail. Le second stipule que la différence de température entre deux points va fixer le sens et l'intensité du flot énergétique.

On distingue trois mécanismes de transmission de chaleur chacun d'entre eux étant lié à un processus physique bien déterminé. En gagnant ou perdant de leur énergie cinétique, les constituants fondamentaux comme les molécules, les atomes et les électrons vont fixer les échanges thermiques du milieu qu'ils composent. Quand il s'agit d'interactions directes entre particules voisines, il y a transfert thermique par **conduction**. Quand les interactions impliquent des phénomènes d'émission et/ou d'absorption de radiations électromagnétiques nous aurons à faire au **rayonnement thermique**. Dans le cas d'un fluide, les échanges résultant du mélange à l'échelle macroscopique de paquets de matière à des températures différentes donnent lieu au mode de transfert de chaleur par **convection**. En fait, nous constaterons que ce dernier prend sa source dans le mécanisme de conduction. Dans certaines situations techniques, nous nous trouvons face à des combinaisons de ces trois modes de base auxquels viennent s'ajouter des phénomènes de **changement de phase** tels que la vaporisation, la condensation, la fusion ou la solidification qui vont faire office de source ou de puits dans les processus d'échange.

Chapitre 13

La Conduction

13.1 La Loi de Fourier

Pour introduire les aspects fondamentaux de la transmission de chaleur par conduction, nous allons analyser le comportement thermique d'une nappe gazeuse immobile contenue entre deux parois planes parallèles, très longues, séparées de la distance δ et maintenues à des températures constantes T_1 et T_2 comme l'indique le schéma de la figure 13.1.



FIG. 13.1 – Conduction dans une nappe de gaz.

Admettons que T_1 soit supérieure à T_2 . Il s'établit un flux de chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide qui se concrétise, en régime permanent, par une distribution de température linéaire suivant Oy. Essayons de déterminer l'expression de ce flux thermique q_y traversant une surface unitaire S. L'approche suivie est en tous points semblable à celle que nous avons décrite au chapitre 3 de la Partie I pour la quantité de mouvement des gaz monoatomiques. La théorie cinétique des gaz nous a appris via l'équation 3.6 de la Partie I que l'agitation locale des molécules est d'autant plus intense que la température du gaz est élevée. Récrivons cette relation en faisant intervenir la moyenne temporelle de l'énergie cinétique d'agitation, $\overline{v^2}$, des molécules, assimilées à des sphères de masse m, et la température absolue T dans la forme suivante :

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\kappa_b T \tag{13.1}$$

Lors des collisions, les molécules à faible niveau énergétique, siégeant dans les zones à basse température, vont acquérir un surplus d'énergie cinétique fourni par les molécules à haut niveau énergétique provenant des zones à température plus élevée. C'est le fondement du transfert thermique par conduction.

Nous avons vu que dans un milieu isotrope les molécules se déplacent équitablement suivant les trois directions et dans les deux sens. De ce fait seulement un sixième du nombre n de molécules occupant le volume de contrôle va traverser la surface S. Le flot de molécules à considérer est $\dot{n} = n\tilde{v}/6$. Par ailleurs le libre parcours moyen ℓ est assimilé à la distance où s'est passée la dernière collision (voir à la Partie I, figure 1.2 et Eq. 2.5 au chapitre 2). Le flux de chaleur à travers S est égal au flux net des énergies cinétiques :

$$q_y = \frac{1}{2} \dot{n}m \left[\tilde{v}^2|_{y-\ell} - \tilde{v}^2|_{y+\ell} \right] = \frac{3}{2} \kappa_b \dot{n} \left[T|_{y-\ell} - T|_{y+\ell} \right] \qquad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$
(13.2)

Sur la distance 2ℓ le gradient de température est constant et la formulation 13.2 s'exprime comme suit :

$$q_y = -\left[\frac{1}{2}n\tilde{v}\kappa_b\ell\right]\frac{dT}{dy}|_y \tag{13.3}$$

Nous venons d'établir la **loi de Fourier**. Elle énonce que le flux calorifique est proportionnel au gradient de température et que la chaleur s'écoule en sens inverse du gradient thermique en accord avec le second principe de la thermodynamique (augmentation de l'entropie). Le terme entre crochets qui apparaît dans la relation 13.3 est appelé *coefficient de conductibilité* ou *conductivité*, *k*. D'où la formulation générale :

$$q_y = -k\frac{dT}{dy}|_y \tag{13.4}$$

La conductivité thermique s'exprime en [W/m.K] ou, de manière équivalente, en [W/m.C]. Comme pour les gaz, la loi de Fourier s'applique de la même façon aux liquides et solides. Elle se généralise aux cas tridimensionnels simplement en adoptant la notation vectorielle suivante ¹:

$$\vec{q} = -k\nabla T \tag{13.5}$$

D'une façon générale, le coefficient de conductibilité k dépend des propriétés du matériau considéré et de la température.

13.1.1 La conductivité des gaz

De la comparaison des équations 13.3 et 13.4 nous identifions

$$k = \frac{1}{2} n \kappa_b \tilde{v} \ell \tag{13.6}$$

 $^{^1\}nabla$ est l'opérateur nabla

En remplaçant dans 13.3 ℓ et \tilde{v} par leur expression respective, relation 3.5 et relation 3.6 de la Partie I, il vient :

$$k = \frac{1}{d^2} \sqrt{\frac{\kappa_b^3}{\pi^3 m} T} \tag{13.7}$$

A l'instar de la viscosité dynamique, la conductivité des gaz monoatomiques augmente avec la température ce qui est bien vérifié par l'expérience comme le montre la figure 13.2. La relation 13.7 précise que k est indépendant de la pression. Encore une fois il y a une exception aux très basses pressions (paragraphe 3.1 en Partie I); c'est le régime de Knudsen où le libre parcours moyen n'est plus dicté par les chocs intermoléculaires mais par les impacts des molécules sur les parois de l'enceinte. Dans ces conditions, le coefficient de conductivité augmente progressivement avec la pression jusqu'à atteindre une valeur finale pour $p \simeq 10$ torrs.



FIG. 13.2 – Conductivité thermique de divers gaz en fonction de la température

Le dernier terme de l'équation 13.2 peut aussi s'écrire en termes de chaleur advectée par le mouvement de translation des molécules à travers S:

$$q_y = \dot{n}mC_p \left[T|_{y-\ell} - T|_{y+\ell} \right]$$
(13.8)

où C_p est la chaleur massique à pression constante (en [J/kg.K]). Comme précédemment la différence de température sur la petite distance 2ℓ se traduit en fonction du gradient thermique ce qui donne après substitution de \dot{n} par sa valeur :

$$q_y = \frac{1}{3} nm C_p \tilde{v} \ell \frac{dT}{dy}|_y \tag{13.9}$$

En comparant la relation 13.9 à la définition de k et en remplaçant nm par $\rho,$ on en déduit directement :

$$k = \rho C_p \left[\frac{\tilde{v}\ell}{3} \right] \tag{13.10}$$

L'égalité 13.10 est à la base d'une série de remarques fondamentales. Tout d'abord elle nous amène à définir un nouveau paramètre qui est la **diffusivité thermique** α :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} (\text{pour les gaz monoatomiques}) = \frac{\tilde{v}\ell}{3}$$
(13.11)

Elle compare la facilité du milieu à transférer de la chaleur par conduction (k) à la capacité d'en emmagasiner (ρC_p). Elle qualifie la performance de stockage thermique du corps (faibles α) mais aussi son pouvoir à homogénéiser le champ thermique (forts α). Comme pour tous les coefficients de diffusion, dont la viscosité cinématique fait partie, son unité est le $[m^2/s]$. Dans le cas particulier des gaz monoatomiques, la confrontation de l'expression de ν (à tirer de la relation 3.4 vue à la Partie I) à celle de la diffusivité thermique conduit à :

$$\alpha = \nu = \frac{\tilde{\nu}\ell}{3} \tag{13.12}$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'il existe une correspondance directe entre les mécanismes diffusifs de la quantité de mouvement et de la chaleur; ceux-ci étant essentiellement dus à l'agitation moléculaire. Le rapport sans dimension, nommé **nombre de Prandtl**

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$$

évalue la distorsion qui pourrait exister entre ces deux processus. D'après 13.12, il est théoriquement unitaire pour les gaz monoatomiques ce qui signifie une parfaite analogie.

Dans le cas des gaz polyatomiques, les molécules possèdent en plus de leur énergie cinétique de translation, des énergies de vibration et de rotation de sorte que la relation 13.10 n'est plus d'application. A la suite d'une approche semi- empirique, Eucken aboutit à la relation suivante :

$$k = \left(C_p + \frac{5}{4}\frac{\Re}{M}\right)\mu\tag{13.13}$$

où M est la masse molaire [kg/kmole]. Sachant que $C_p = 5/2.\Re/M$, la relation 13.13 se ramène à :

$$Pr = \frac{2}{3}$$

Il se trouve que pour la majorité des gaz on obtient bien

$$\frac{2}{3} \le Pr < 1$$

On retiendra que pour l'air aux conditions normales Pr = 0.72. Le tableau 13.1 fournit la valeur typique de la conductibilité de quelques gaz.
Gaz	H_2	He	CH_4	Air	$\rm CO_2$	$\mathrm{CH}_{2}\mathrm{Cl}_{2}$
k	0,17	0,14	0,03	0,026	$0,\!015$	0,007

TAB. 13.1 – Conductibilité de certains gaz [W/m.K]

13.1.2 La conductibilité des liquides

Dans les liquides, les mécanismes de transfert de chaleur par conduction sont similaires à ceux des solides décrits au paragraphe suivant. Dans les liquides organiques ou classiques, on retiendra l'effet de la propagation de proche en proche des vibrations des molécules du fluide. Dans les métaux à l'état liquide, ce sont les électrons libres responsables de la conduction électrique qui assureront la conduction de la chaleur. En possédant de plus une bonne capacité calorifique, ces derniers sont de très bons fluides caloporteurs ; de noter à ce titre l'emploi du sodium liquide (Na) dans certaines filières de réacteurs nucléaires.

A l'heure actuelle, la description théorique du comportement d'un liquide reste délicate. Il n'y a pas encore de consensus sur le sujet. A défaut, on peut retenir la (vieille) théorie simple proposée par Bridgman en 1923 qui a été établie pour un liquide pur monoatomique. L'arrangement des molécules est représenté par un réseau cubique. L'énergie se transporte d'une face à l'autre à la vitesse du son v_s . Il est supposé que la relation 13.10 reste d'application si la vitesse d'agitation \tilde{v} est remplacée par v_s et la capacité calorifique par celle d'un solide à très haute température = $3\kappa_b \mathcal{V}m$ où $\mathcal{V}m$ est le volume du réseau par molécule. Le libre parcours moyen quant à lui est assimilé à l'espacement entre face, soit $\mathcal{V}m^{1/3}$. L'expression de k devient :

$$k = 3\kappa_b \mathcal{V}m^{2/3}v_s \tag{13.14}$$

La propagation des sons à relativement basses fréquences se caractérise par une vitesse $v_s = \sqrt{(C_p/C_v)(\partial P/\partial \rho)_T}$, de sorte que la relation 13.14 prend la forme finale suivante :

$$k = \frac{3\kappa_b}{\mathcal{V}m^{2/3}} \sqrt{\frac{C_v}{C_p} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T}$$
(13.15)

On notera que le rapport des chaleurs massiques est proche de l'unité pour les liquides si les conditions ne sont pas proches du point critique Il s'avère que l'expérience confirme aussi cette loi pour les liquides polyatomiques si le coefficient 3 est corrigé en 2,8.

La variation de la conductibilité de quelques liquides classiques avec la température est représentée en graphique à la figure 13.3. Il n'y a pas, à proprement dit, une tendance générale alors que la conductibilité des métaux liquides, dont quelques valeurs sont précisées au tableau 13.2, décroît toujours avec la température.

A titre d'exemple, on retiendra que l'eau possède un coefficient de conductibilité de 0,6 [W/m.K] à 20 oC .



FIG. 13.3 – Conductivité thermique de divers liquides non-métalliques en fonction de la température

TAB. 13.2 – Conductibilité de métaux liquides [W/m.K]

Liquides	Na	K	Li	Pb	Hg^*
k	80	45	38	16	8

13.1.3 La conductivité des solides

Dans les solides, la conductibilité thermique est attribuée aux interactions moléculaires mais aussi aux mouvements des électrons libres. L'habilité des solides à conduire de la chaleur varie directement avec leur concentration en électrons libres. Aussi n'est-il pas surprenant de constater que les métaux purs sont les meilleurs conducteurs de chaleur.

Le mécanisme de transmission de chaleur par conduction créé par le déplacement des électrons libres est analogue au mécanisme de la conduction électrique. Pour le cas des métaux purs, la loi de Wiedeman-Franz-Lorenz relie la variation de la conductibilité, k à la résistivité électrique, r_e et la température absolue T:

$$\frac{kr_e}{T} = 2,45 \ 10^{-8} \qquad \qquad \frac{\text{W ohm}}{\text{K}^2}$$

Pour les métaux purs, k diminue quand T augmente. Pour les alliages et les solides non-métalliques on observe un comportement inverse.

Métaux k	Ag 420	Cu 390	Al 204	W 165	Fe 75
Alliages	Zn	Laiton $70/30$	Acier doux	Acier Inox	Ni-Cr 80/20
k	115	110	60	15	13

TAB. 13.3 – Conductibilité de métaux et alliages $\left[\mathrm{W}/\mathrm{m.K}\right]$

TAB. 13.4 – Conductibilité de solides non-métalliques $\left[\mathrm{W}/\mathrm{m.K}\right]$

Solides	k	Isolants	k
C L'	104*	т • 1	
Graphite	104^{+}	Laine de	0.050
AI_2O-3	30 C 10	rocne	0,050
SIO_2	0-10	т· 1	
Pierre	2-5	Laine de	
Glace	2,25	verre	0,041
Sol	0,5-2		
Neige	$0,\!4\text{-}0,\!64$	LiŁge	0,039
Bois	0, 1-0, 2		
Papier	$0,\!13$	Polyst.	
		expansé	0,027
		_	

Quelques conductivités de matériaux solides sont listées aux tableaux 13.3 et 13.4

La figure 13.4 propose une classification synthétique des performances des différents conducteurs de chaleur. En ce qui concerne l'effet de la température sur la conductibilité thermique, on pourra toujours partager le domaine en petites plages et exprimer la variation par une relation linéaire du type :

$$k = k_o [1 + \beta (T - T_o)]$$
(13.16)

où k_o est la conductibilité de référence à la température T_o et β le coefficient de température du matériau concerné.



FIG. 13.4 – Synthèse des observations

13.2 Equation Générale de la Conduction

13.2.1 Formulation du bilan thermique

Continuons à considérer un milieu immobile de conductivité k. Dans un souci de généralisation nous imaginons qu'il existe en son sein une production ou une absorption de chaleur par unité de temps et de volume \dot{Q}_v ([W/m³]). Ce terme de source ou puits peut être le résultat de l'effet Joule, d'une réaction chimique (exothermique ou endothermique) d'une activité nucléaire ou d'un changement d'état physique. Les différences de température qui s'établissent dans ce corps, vont engendrer un transport de chaleur par conduction. Exprimons le bilan thermique

$$\begin{bmatrix} \text{Taux de variation} \\ \text{d'énergie interne} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Chaleur} \\ \text{sortant} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Chaleur} \\ \text{entrant} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Source} \\ \text{et Puits} \end{bmatrix}$$

sur un petit élément de contrôle dx.dy.dz comme l'illustre la figure 13.5



FIG. 13.5 – Volume de contrôle pour bilan thermique

La quantité de chaleur entrant dans le volume élémentaire parallèlement à Ox est :

 $q_x dy dz$

Celle qui sort est :

$$(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx)dydz$$

La différence entre ce qui sort et ce qui entre est donc :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz$$

Un raisonnement identique fournit :

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz$$
 et $\frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy$

pour les différences suivant les directions Oy et Oz respectivement. L'accumulation de chaleur (au sens algébrique + ou -) provoque un changement de température de l'élément de contrôle. Ce terme est la variation d'énergie interne du milieu. Elle s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Finalement le bilan thermique prend la forme suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] = \dot{Q}_v \tag{13.17}$$

Nous introduisons la loi de Fourier pour chaque direction dans l'équation 13.17 :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_v \tag{13.18}$$

Nous obtenons ainsi l'équation de la transmission de la chaleur par conduction dans un repère cartésien. Sa forme générale peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur ∇ et du coefficient de diffusivité :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla . (\alpha \nabla T) + \dot{Q}_v \tag{13.19}$$

C'est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre qui décrit une multitude de phénomènes de conduction thermique. Pour en dégager un et établir sa description mathématique complète, il faut lui adjoindre les conditions **d'univalence**. Elles incluent :

- 1. Les conditions géométriques. Elles définissent la forme ainsi que la dimension du système où se développe le processus thermique.
- 2. La définition des propriétés physiques. Les paramètres thermo-physiques du corps et leur dépendance avec la température doivent être précisées. On indique aussi la répartition et l'intensité des sources internes.
- 3. La condition temporelle. C'est généralement une condition initiale qui décrit l'état thermique au début du processus.
- 4. Les conditions aux limites. Elles caractérisent la marche du processus à la surface du corps. On doit en imposer deux pour chaque direction. Quatre genres de conditions aux frontières sont rencontrés dans la pratique :
 - (a) La répartition de la température est connue en tout point $\vec{s_p}$ de la surface du domaine et à tout instant; c'est la condition de Dirichlet.

$$T_p = T_o(\vec{s}_p, t) \tag{13.20}$$

La condition d'isothermie est réalisée lorsque T_o est une constante.

(b) Le flux de chaleur est une fonction du temps et/ou du point courant sur la frontière : c'est la condition de Neuman.

$$q_p = -k \frac{\partial T}{\partial n}|_p = q_o(\vec{s_p}, t) \tag{13.21}$$

Elle revient à imposer la dérivée normale de la température à la surface. La condition d'adiabaticité correspond à $q_o = 0$.

(c) Il existe une relation entre le flux de chaleur et la température pariétale ; c'est la condition mixte :

$$q_p = -k\frac{\partial T}{\partial n}|_p = h(T_p - T_f)$$
(13.22)

Cette relation est essentielle quand il s'agit de quantifier les échanges thermiques entre un corps solide et un milieu fluide caloporteur (voir chapitres suivants en particulier sur la convection). On l'appelle la loi de convection de Newton. Le paramètre h est le coefficient de transfert de chaleur ou coefficient de convection. Il dépend essentiellement de l'écoulement fluide, de la géométrie de la surface et, dans certaines circonstances, de la température. Son unité est le $[W/m^2.K]$. T_f est la température du fluide loin de la paroi. Par ailleurs, nous verrons au chapitre 20 sur le rayonnement thermique qu'il peut être très pertinent d'exprimer les flux énergétiques rayonnés et absorbés par les surfaces en vis à vis à l'aide de la relation 13.22. Par analogie avec la convection, le paramètre h est alors nommé coefficient de transfert thermique par rayonnement et la température de référence T_f et remplacée par la température T'_p des corps voisins qui participent aux échanges radiatifs. (d) Le dernier type de conditions aux limites s'énonce en partant de l'égalité des flux thermiques qui passent par la surface de contact entre deux corps A et B de conductivité respective, k_A et k_B :

$$k_A \nabla T_A = k_B \nabla T_B \tag{13.23}$$

Dans un contact thermique parfait les deux corps ont la même température à l'interface. $T_A = T_B$. Cependant la réalité est plus complexe : au niveau de la jointure se forment des micro pores remplis de fluide qui contrarient l'écoulement de chaleur. Tout se passe comme s'il se formait une *résistance thermique* de contact. Ce phénomène est traité au paragraphe 14.4 du chapitre 14

Chapitre 14

Conduction morte en régime permanent

Dans ce qui suit, sont considérés, sauf si précisé, des milieux isotropes, homogènes et aux propriétés thermo-physiques, ρ , C_p et k constantes. Il n'y a pas de dissipation ou d'absorption interne de chaleur et seuls les états stationnaires sont considérés. On traitera donc de la *conduction morte* établie.

14.1 Modèle plan

Reprenons notre exemple précédent de la nappe fluide prise entre deux parois isothermes (voir figure 13.1). Le flux thermique est permanent et unidirectionnel (Oy). Il n'y a pas de terme source. L'équation de la chaleur 13.19 se ramène à :

$$\frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad k\frac{dT}{dy} = constante = C_1 \tag{14.1}$$

La densité de flux de chaleur est constante. En supposant l'écart de température pas trop important, on peut admettre raisonnablement que le coefficient de conductivité garde une valeur unique dans le milieu fluide. Dans ce cas, le gradient thermique est constant et la variation de température est linéaire :

$$T(y) = \frac{C_1}{k}y + C_2 \tag{14.2}$$

Les deux constantes C_1 et C_2 se déduisent des conditions aux limites. Le fluide immédiatement au contact de la paroi doit prendre la température du solide :

à
$$y = 0$$
, $T = T_2$ et à $y = \delta$, $T = T_1$ (14.3)

Compte tenu des conditions 14.3, nous pouvons préciser la forme finale de l'équation 14.2 :

$$T(y) = (T_1 - T_2)\frac{y}{\delta} + T_2$$
(14.4)

et le flux thermique s'exprime comme suit :

$$q_y = -k\frac{T_1 - T_2}{\delta} \tag{14.5}$$

Le signe moins rappelle que la chaleur s'écoule bien dans le sens de T_1 vers T_2 (direction des y négatifs).

Il est intéressant de noter l'absence du coefficient de conductivité dans l'expression du profil de température. Ceci est dû au fait que nous avons imposé les températures comme conditions aux limites. En effet, imaginons que le flux de chaleur soit connu par une mesure pariétale sur la paroi "1", $C_1 = |q_o|$, et que seule la température T_2 soit fixée. On vérifiera alors que la solution de l'équation de la chaleur devient :

$$T = T_2 + \frac{|q_o|}{k}y$$
 (14.6)

On reconnaît dans l'équation 14.5 la forme générale de la loi d'Ohm : $E_1 - E_2 = RI$ dans laquelle les potentiels électriques E sont remplacés par les températures T et l'intensité de courant, I, par le flot de chaleur $\dot{Q} = Sq_y$ où S est la surface traversée par le flux thermique. Cette remarque nous conduit à définir la résistance thermique \mathcal{R}_{th} du milieu :

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} = \frac{\delta}{kS} \qquad \equiv \left[\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right] \tag{14.7}$$

Le concept de la résistance thermique facilite souvent la description des phénomènes conductifs en régime stationnaire. Nous verrons qu'il s'applique également à la transmission de chaleur par convection (chapitre 18) et par rayonnement (chapitre 20). Il nous informe que l'ensemble des lois de l'électricité relatives à l'association en série et/ou en parallèle de résistances vont être d'application. Cette analogie, illustrée à la figure 14.1, constitue une méthode simple et commode pour résoudre de nombreux problèmes thermiques.



FIG. 14.1 – Résistance thermique d'un mur : conditions de Dirichlet

Le problème du mur composite illustre clairement ce propos. La figure 14.2 décrit la situation. Le système est formé de N parois planes très longues d'épaisseur δ_i et de conductivité k_i .

Dans un premier temps nous abordons le cas où les faces extrêmes sont maintenues à des températures T_1 et T_2 . Le contact thermique entre les parois est parfait; il y a donc continuité de la température aux interfaces. Sous l'action du potentiel thermique $T_1 - T_2$, un écoulement de chaleur unidimensionnel et constant \hat{Q} traverse successivement les parois qui se comportent comme une série de résistances $\mathcal{R}_{thi} = \delta_i / Sk_i$:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_{th_i}}$$
(14.8)

La résistance totale est donnée par :

$$\mathcal{R}_{th,tot} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_{thi}$$
(14.9)

La température en un point d'abscisse y est donnée par la relation :

$$T(y) = T_1 - \left(\sum_{i=1}^{i-1} \mathcal{R}_{thi} + \frac{y_i}{Sk_i}\right) \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{thi}}$$
(14.10)



FIG. 14.2 – Conduction dans un mur composite

Si le mur composite est formé de strates horizontales de sections de passage et de conductivités différentes comme l'exemplifie la figure 14.3, le schéma analogique est constitué par des résistances en parallèle. La relation du flux de chaleur s'écrit toujours sous la forme 14.7 :

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{R}_{th,tot}} \tag{14.11}$$

mais la résistance thermique totale se calcule comme suit :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{th,tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mathcal{R}_{thi}}$$
(14.12)

Considérons maintenant le mur en contact avec deux fluides comme le suggère la figure 14.4. La face 1 est baignée par le fluide à la température constante T_{f1} , la face 2 par le fluide à la température T_{f2} . Entre le mur et les fluides s'établit un échange convectif.



FIG. 14.3 – Mur composite à résistances en parallèle

La chaleur cédée par le fluide chaud (T_{f1}) , traverse le mur pour être reçue par le fluide froid (T_{f2}) . Ecrivons cette conservation d'énergie en profitant de la condition mixte introduite précédemment :

$$\dot{Q} = h_1 S(T_{f1} - T_1) = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{thi}} = h_2 S(T_2 - T_{f2})$$
(14.13)

ou encore

$$\dot{Q} = \frac{T_{f1} - T_1}{1/h_1 S} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{thi}} = \frac{T_2 - T_{f2}}{1/h_2 S}$$
(14.14)

La comparaison des termes de l'équation 14.14 incite à définir les résistances thermiques convectives de la façon suivante :

$$\mathcal{R}_{th,c_1} = \frac{1}{h_1 S} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{th,c_2} = \frac{1}{h_2 S} \tag{14.15}$$

Nous pouvons exprimer la quantité de chaleur sur la base des températures de fluide :

$$\dot{Q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\mathcal{R}_{th,tot}} \tag{14.16}$$

où $\mathcal{R}_{th,tot}$ est la résistance thermique globale qui vaut la somme des résistances partielles

$$\mathcal{R}_{th,tot} = \mathcal{R}_{th,c_1} + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_{thi} + \mathcal{R}_{th,c_1}$$
(14.17)

Dès lors, nous sommes amenés à introduire le coefficient d'échange global entre les deux fluides, h_{tot} :

$$\frac{1}{h_{tot}} = S\mathcal{R}_{th,tot} = \frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\delta_i}{k_i} \right] + \frac{1}{h_2}$$
(14.18)



FIG. 14.4 – Résistance thermique d'un mur : conditions mixtes

Et la relation 14.16 de s'érire ainsi :

$$q_y = h_{tot}(T_{f1} - T_{f2}) \tag{14.19}$$

14.2 Modèle cylindrique

Dans le cas du mur plan, la surface de passage du flux de chaleur ne varie pas tout au long du parcours thermique. Il n'en est plus de même quand la géométrie du corps devient complexe. Considérons à titre d'exemple le problème du cylindre creux schématisé à la figure 14.5. Il est de très grande longueur L par rapport aux rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 et les surfaces latérales sont des isothermes à T_1 et T_2 .



FIG. 14.5 – Cylindre creux à surfaces isothermes

La transmission de chaleur s'effectue radialement. Sa traduction mathématique se déduit directement de l'équation 13.19 explicitée en coordonnées radiales :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$
(14.20)

La solution générique de cette équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est classique :

$$T(r) = C_1 \ln(r) + \ln(C_2) = \ln(C_2 r^{C_1})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déduites de l'application des conditions aux limites :

$$T_1 = \ln \left(C_1 r_1^{C_2} \right)$$
 et $T_2 = \ln \left(C_1 r_2^{C_2} \right)$

La distribution radiale de température est donnée par l'expression analytique suivante :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$
(14.21)

De la loi de Fourier 13.5 en découle la densité de flux thermique :

$$q_r = -k\frac{dT}{dr} = -k\frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)}\frac{1}{r}$$
(14.22)

Contrairement au cas plan, la densité de flux de chaleur q_r n'est pas constante au travers de l'épaisseur du cylindre, elle diminue; c'est la conséquence de la variation de la surface cylindrique de passage $S = 2\pi rL$ qui augmente avec r. Par contre, la quantité totale de chaleur est bien conservée :

$$\dot{Q} = Sq_r = 2\pi kL \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$$
(14.23)

De la relation 14.23 nous identifions la résistance thermique du cylindre creux :

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{1}{2\pi kL} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{14.24}$$

On vérifiera que pour une coque mince cylindrique d'épaisseur $e = r_2 - r_1$, la relation 14.24 s'approxime par :

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{e}{2\pi r_1 kL}$$

Pour illustrer l'applicabilité de l'ensemble de ces résultats, nous étudions le cas d'une conduite cylindrique en acier de longueur L contenant de l'eau. Elle est recouverte sur sa face externe par un matériau isolant qui la protège des baisses éventuelles de la température de l'air. Un dépôt calcaire s'est formé sur sa face interne. Trois milieux solides et deux milieux fluides composent le système comme le dépeint la figure 14.6.

Entre l'eau et l'air s'établit, via les différentes couches solides coaxiales supposées en contact idéal, un échange de chaleur \dot{Q} . Nous l'exprimons au moyen de la résistance globale et du potentiel thermiques :

$$\dot{Q} = \frac{T_{eau} - T_{air}}{\mathcal{R}_{th,tot}} \tag{14.25}$$

Par un raisonnement analogue à celui du mur composite (relations 14.17 et 14.18 et en reprenant l'expression de la résistance thermique individuelle d'un cylindre creux, nous obtenons (voir figure 14.6 pour la définition des paramètres) :

$$\mathcal{R}_{th,tot} = \frac{1}{2\pi L} \left[\frac{1}{r_o h_{eau}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\ln(r_i) - \ln(r_{i-1})}{k_i} + \frac{1}{r_N h_{air}} \right]$$
(14.26)

où h_{eau} et h_{air} sont les coefficients de convection entre l'eau et le calcaire d'une part et l'air et l'isolant d'autre part. Dans le cas présent N = 3.



FIG. 14.6 – Problème de la conduite isolée

14.3 Modèle sphérique

- <u>Exercice</u>

A titre d'exercice on recherchera l'expression de la résistance thermique d'une sphère creuse de rayon intérieur r_1 et rayon extérieur r_2 dont les surfaces extrêmes sont à des températures uniformes et constantes T_1 et T_2 . Pour ce faire on procédera comme ci-dessus; on commencera par résoudre l'équation de la conduction dans son écriture appropriée et on établira successivement les expressions du profil radial de la température et du flux de chaleur.

14.4 Résistance thermique de contact

Quand deux solides A et B de conductivité thermique k_A et k_b et à des températures différentes T_A et T_B sont mis en contact, il s'établit un écoulement de chaleur \dot{Q} entre ces deux milieux. Dans un contact thermique idéal, la température de la surface A est égale à la température de la surface B. Si les coefficients de conductibilité des deux corps sont différents, la courbe traçant la distribution de température subit une simple réfraction au passage de l'interface

Dans la pratique la rugosité de paroi rend l'adhérence thermique imparfaite. De ce fait, la jointure se caractérise par une *résistance thermique de contact*, R_{ct} créée par les microcavités fluides (gazeuses) logées dans les aspérités de surface. Le contact se concrétise par une discontinuité de température visualisée sur la figure 14.7. Cette brusque variation de température s'effectue sur une petite distance, ℓ_g , de la taille moyenne des rugosités. L'écoulement de chaleur au travers de l'interface suit deux voies parallèles; une *via* le contact solide-solide, l'autre dans le fluide. Désignons respectivement par S_s et S_f les surfaces de passage solide-solide et de portion fluide, par k_f la conductivité du fluide emprisonné dans les interstices et par T_c la température de contact des aspérités. La



FIG. 14.7 – Résistance thermique de contact

Type	Rugosité	h_c
Interface	$[\mu { m m}]$	$\left[\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2.^o\mathrm{C}) ight]$
Acier Inox	0,2 - 0,4 1 - 1,5	300 - 11000 200 - 2100
Al	0,3	1500 - 32000
Cu	$0,\!2$	6500 - 14000

TAB. 14.1 – Conductance de contact : Pression= 0,05 - 8 [MPa]

quantité de chaleur qui emprunte le chemin solide-solide est donnée par :

$$\dot{Q}_s = \frac{k_A S_s}{\ell_g/2} (T_A - T_c) = \frac{k_B S_s}{\ell_g/2} (T_c - T_B)$$
(14.27)

Celle qui passe par le fluide est :

$$\dot{Q}_f = \frac{k_f S_f}{\ell_g} (T_A - T_B)$$
(14.28)

La puissance totale échangée \dot{Q} , somme de ces deux contributions, se traduit au moyen de la résistance de contact :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_f = \frac{T_A - T_B}{R_{ct}}$$
 (14.29)

L'identification de R_{ct} s'obtient en combinant les relations 14.27, 14.28 et 14.29 :

$$R_{ct} = \ell_g \left(\frac{2k_A k_B S_s}{k_A + k_B} + k_f S_f\right)^{-1}$$
(14.30)

La résistance de contact sera d'autant plus importante que la conductivité du fluide sera faible (cas des gaz), que le grain de rugosité sera gros ($\ell_g \nearrow$). Par contre, elle sera diminuée par serrage des deux solides (écrasement $S_s \nearrow$) et enduction des surfaces de contact par une graisse thermiquement conductrice (par exemple la Dow 340). Des résistances de contact de l'ordre de 1 °C/W voire plus ne sont pas inhabituelles même pour des matériaux métalliques.

Dans la pratique, les surfaces S_f et S_s sont très difficiles à déterminer et on préfère englober leur effet dans un paramètre qui s'apparente à un coefficient de transfert de chaleur, h_c la *conductance de contact* :

$$\boxed{\dot{Q} = h_c S \Delta T} \tag{14.31}$$

Le tableau 14.1 liste des valeurs typiques de h_c

Chapitre 15 Surface à Ailettes

L'extraction de chaleur d'un corps par un milieu fluide peut être significativement améliorée par une modification géométrique de la surface de contact avec l'ambiance. La technique utilisée est l'adjonction d'ailettes sur la paroi. Le nervurage peut présenter différentes configurations comme l'illustrent les vues présentées à la figure 15.1. Les ailettes sont droites, annulaires ou de profils arbitraires selon l'installation concrète envisagée (dimensions, prix ...).



FIG. 15.1 – Exemples de surfaces ailetées

Le concept de la surface ailetée est largement exploité dans le domaine des échangeurs de chaleur d'unités industrielles, des radiateurs de voitures, des moteurs à combustion interne, des installations frigorifiques, des chaudières et du chauffage central, des économiseurs de centrales thermiques des transformateurs électriques et des petits composants électroniques comme le montre la figure 15.2. On retiendra que ces surfaces auxiliaires sont prioritairement placées du coté de la paroi où correspond le plus faible coefficient de transfert de chaleur.

L'étude des ailettes a pour objectif de déterminer les conditions optima pour augmenter l'échange thermique. Il peut arriver que l'on souhaite l'effet contraire. L'exemple typique en est le fil de thermocouple fixé à une paroi chaude dont il s'agit de mesurer la température : la jonction de thermocouple se comporte comme un puits et les pertes thermiques par conduction le long du fil qui en résultent entraînent une erreur de mesure qui fausse la lecture par défaut. La théorie des ailettes permet d'estimer cette déviation et d'en corriger l'effet.



FIG. 15.2 – Application aux composants électroniques

15.1 Modélisation de l'ailette

La propagation de la chaleur dans un corps solide avec échange latéral vers un milieu ambiant fluide est cataloguée comme problème de l'ailette. Il combine intimement les mécanismes de conduction et convection.

La figure 15.3 schématise un exemple typique. Il s'agit d'une barre (cylindrique ou parallélépipédique) de section constante S et de longueur L nettement supérieure aux dimensions transversales. Le matériau est un bon conducteur de chaleur. Le pied de l'ailette est scellé dans la paroi mère, massif de grande capacité appelé base et maintenue à la température T_b . La chaleur diffuse dans la direction Ox vers la tête de l'ailette tout en se déversant graduellement vers l'extérieur à T_f par convection au travers de la surface latérale. La bonne conductivité du matériau autant que la minceur de la barre (faible facteur de forme = épaisseur/longueur) présupposent que l'évacuation radiale s'accompagne de faibles gradients de sorte que chaque section droite peut être assimilée à une surface isotherme. La température pariétale T_p et égale à celle du cœur car le profil radial est uniforme quelque soit x. Le problème se traite par une approche unidimensionnelle en écrivant le bilan thermique pour l'élément de volume Sdx. La chaleur entrant diminuée de la chaleur sortant suivant Ox est égale à la chaleur évacuée par convection.

$$d\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}|_x - \dot{Q}|_{x+dx} = d\dot{Q}_{conv}$$
(15.1)



FIG. 15.3 – Modèle stylisé de l'ailette

La surface latérale impliquée dans l'échange convectif est le périmètre \mho multiplié par l'incrément dx. Les pertes de chaleur s'écrivent selon la loi de Newton :

$$d\dot{Q}_{conv} = \mho h(T(x) - T_f)dx$$

La formulation finale conduit à l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h\mho}{kS}(T - T_f) = 0$$
(15.2)

Pour lui donner une forme adimensionnelle, nous définissons les variables normées suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, \qquad \Theta = \frac{T - T_f}{T_b - T_f}$$

et le groupement,

$$\lambda^2 = \frac{h\mho L^2}{kS}$$

qui détermine avec quelle rapidité l'échauffement s'estompe le long de l'ailette. L'équation différentielle adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{d^2\Theta}{dX^2} - \lambda^2\Theta = 0 \tag{15.3}$$

La solution générale de 15.3 est la fonction primitive de la forme :

$$\Theta = C_1 \exp(\lambda X) + C_2 \exp(-\lambda X) \tag{15.4}$$

Les expressions de C_1 et C_2 dépendent des conditions aux limites considérées. Nous savons que la température en pied de barre est fixée ; $T(x = 0) = T_b$ soit $\Theta = 1$. Par contre, trois cas physiques peuvent être envisagés en tête de l'ailette.

- Cas 1 : La barre est suffisamment longue (L → ∞) pour que la température au bout soit celle du fluide environnant. Ceci se traduit par $\Theta \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$ et la solution devient :

$$\Theta = \exp(-\lambda X) \tag{15.5}$$

− Cas 2 : La dissipation thermique en tête d'ailette est négligeable et nous appliquons ce faisant la condition d'adiabaticité $\nabla \Theta = 0$ à X = 1. La solution de deuxième forme qui en découle est :

$$\Theta = \frac{\cosh(\lambda(1-X))}{\cosh(\lambda)} \tag{15.6}$$

 Cas 3 : Quand toute la puissance n'est pas dissipée par les surfaces latérales, l'extrémité de la barre est traversée par un flux convectif régit par la loi de Newton. C'est le cas complexe des ailettes courtes. C'est aussi le modèle général qui peut reprendre l'ensemble des situations précédentes.

$$-k\frac{dT}{dx}|_{x=L} = h_e(T(L) - T_f)$$

soit encore

$$\frac{d\Theta}{dX} = Bi\Theta$$

Un nouveau groupement sans dimension apparaît; le nombre de Biot

$$Bi = \frac{h_e L}{k}$$

Il quantifie le rapport entre la chaleur évacuée par convection en bout de barre à celle transmise par conduction dans le solide. Nous détaillerons et exploiterons plus amplement sa signification physique au sous-chapitre 15.2. La solution prend la forme :

$$\Theta = \frac{\cosh(\lambda(1-X)) + Bi/\lambda\sinh(\lambda(1-X))}{\cosh(\lambda) + Bi/\lambda\sinh(\lambda)}$$
(15.7)

Dans ces dites relations, la distinction entre le coefficient d'échange de la section droite en tête d'ailette, h_e et celui s'appliquant sur la surface latérale permet de faire varier Biindépendamment de λ et de couvrir ainsi les deux premières conditions d'extrémités à savoir :

$$Bi \Rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \Theta = 0$$
$$Bi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla\Theta = 0$$

Des prédictions typiques tirées des relations 15.5, 15.6 et 15.7 sont comparées à la figure 15.4.

15.2 Emploi opportun d'ailettes

Avant de placer des surfaces auxiliaires sur une paroi mère, il est judicieux de s'assurer que cette opération va s'avérer profitable du point de vue thermique. Pour répondre à une telle question, nous allons nous donner les conditions d'utilisation, c'est-à-dire que h et $T_b - T_f$ seront fixés, et regarder s'il est avantageux d'adjoindre des ailettes sur la paroi.

Il s'agit par conséquent de rechercher s'il existe des valeurs critiques des paramètres de dimensionnement pour lesquelles l'implantation d'ailettes aura un effet neutre voire néfaste sur le flux de chaleur total à dissiper.



FIG. 15.4 – Profils de température adimensionnelle; Modèles thermiques des ailettes

En régime permanent, la puissance totale, \dot{Q} , dégagée par une ailette quelconque est égale au flux transféré par conduction à l'abscisse x = 0 multipliée par l'aire de la section droite au pied :

$$\dot{Q} = -kS\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{kS}{L}(T_b - T_f)\frac{d\Theta}{dX}$$

Exprimons la sur la base du profil général 15.7 :

$$\dot{Q} = \sqrt{kh\mho S}(T_b - T_f)\frac{\frac{Bi}{\lambda} + \tanh(\lambda)}{1 + \frac{Bi}{\lambda}\tanh(\lambda)}$$
(15.8)

Analysons cette fonctionnelle en cherchant la (les) condition (s) qui annule (ent) sa dérivée par rapport à la longueur de l'ailette :

$$\frac{d\dot{Q}}{dL} \propto \frac{d\dot{Q}}{d\lambda} \propto \frac{\operatorname{sech}^2(\lambda)}{\left[1 + \frac{Bi}{\lambda} \tanh(\lambda)\right]^2} \left[1 - \left(\frac{Bi}{\lambda}\right)^2\right]$$
(15.9)

Nous constatons que seul le rapport Bi/λ , qui est d'ailleurs indépendant de L, est la grandeur critique du problème. Pour des valeurs de ce paramètre inférieures à l'unité la dérivée du flux total est positive quelle que soit la longueur L. Dans ce cas, la présence d'ailettes va améliorer l'échange calorifique. Si les valeurs de ce paramètre se situent au dessus de l'unité, l'adjonction d'ailettes va produire un effet nuisible en provoquant une diminution de la quantité de chaleur évacuée.

En supposant que $h_e = h$ ce qui est communément vérifié, ce critère devient :

$$\left(\frac{Bi}{\lambda}\right)^2 = Bi_a = \frac{h\tilde{e}}{k} \le 1 \tag{15.10}$$

où \tilde{e} est une épaisseur caractéristique ou effective de l'ailette définie par le rapport S/\Im (exemple \tilde{e} = épaisseur réelle /2 pour une ailette longitudinale). Bi_a est nommé le

nombre de Biot de l'ailette basé sur cette épaisseur typique. Il possède une signification physique très importante que l'on fait clairement ressortir en récrivant la relation 15.10 comme suit :

$$Bi_a \le 1 \Longrightarrow \frac{1}{h} \ge \frac{\tilde{e}}{k}$$
 (15.11)

C'est le rapport entre la résistance thermique d'un mur d'épaisseur \tilde{e} et la résistance spécifique par convection. L'interprétation physique de l'inégalité 15.11 nous conduit à la conclusion suivante : l'emploi d'une ailette sera opportun tant que la résistance thermique par conduction dans celle-ci restera faible devant la résistance convective. Des retombées pratiques en découlent :

- L'ailette doit être de faible épaisseur et conçue dans un matériau de grande conductivité.
- Elle se placera du coté où le fluide présente le plus petit coefficient d'échange thermique : on citera le cas d'un radiateur d'automobile où les ailettes sont situées du coté gazeux et non du coté liquide.

Si l'ailette est suffisamment courte le rapport de forme ne peut plus être considéré petit : l'écoulement de chaleur prend une nature bidimensionnelle et les développements précédents ne sont plus d'application directe. Cependant, mêmes dans ce cas, le critère de Biot continue de s'appliquer et l'utilisation d'ailettes reste intéressante à la condition que $Bi_a \leq 0.2$.

15.3 Dimensionnement des ailettes

Une fois assuré du bien fondé de l'emploi d'ailettes, l'étape suivante consiste à déterminer leur dimensionnement optimal compte tenu des conditions opératoires à maintenir. La procédure d'optimisation repose sur la recherche de la meilleure combinaison entre l'épaisseur et la longueur de l'ailette qui maximalise le flux de chaleur et minimalise la masse de cette surface auxiliaire. Sans modifier pour autant la généralité de l'approche et pour illustrer cette démarche d'optimisation, nous considérons le cas simple de l'ailette longitudinale de section rectangulaire constante, d'épaisseur e, d'envergure ℓ choisie unitaire et dont la tête est adiabatique. Nous pouvons exprimer la quantité de chaleur totale évacuée \dot{Q} en fonction d'une seule dimension, l'épaisseur par exemple puisque cette dernière est reliée à la longueur L via le volume de matière \mathcal{Vol} ; $e = \mathcal{Vol}/L\ell$. En injectant Bi = 0, substituant \mathfrak{V} et S par leur expression en fonction de e dans le résultat 15.8 et en supposant que e reste nettement inférieur à ℓ il vient :

$$\tilde{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{\ell(T_b - T_f)\sqrt{2kh}} = \sqrt{e} \tanh\left[\frac{\mathcal{V}ol}{\ell}\sqrt{\frac{2h}{k}}e^{-1.5}\right]$$
(15.12)

La valeur de l'épaisseur, e^* qui rend la fonction 15.12 maximum ($d\dot{Q}/de = 0$) est solution de l'équation transcendante suivante :

$$\tanh(\lambda^*) - 3\lambda^* \operatorname{sech}^2(\lambda^*) = 0 \tag{15.13}$$

La résolution de 15.13 s'effectue par voie numérique ou graphique. Elle fournit :

$$\lambda^* = \frac{\mathcal{V}ol}{\ell} \sqrt{\frac{2h}{k}} e^{*-1.5} = 1,419$$

Ce qui donne directement les expressions de l'épaisseur et la longueur optima :

$$e^* = \left[\left(\frac{\mathcal{V}ol}{\lambda^* \ell} \right)^2 \frac{2h}{k} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{15.14}$$

 et

$$L^* = \left[\left(\frac{\mathcal{V}ol(\lambda^*)^2}{\ell} \right) \cdot \frac{k}{2h} \right]^{\frac{1}{3}}$$
(15.15)

Pour un (e) volume (masse) donné (e), le flot thermique de dépendition sera maximum si le dimensionnement de l'ailette vérifie simultanément les relations 15.14 et 15.15. Il est remarquable de constater que la combinaison de ces deux relations fait à nouveau intervenir le nombre de Biot de l'ailette : en effet par élimination du groupement $\mathcal{V}ol/\ell$ on obtient :

$$\frac{e^*}{2L^*} = \frac{1}{\lambda^*} \sqrt{\frac{he^*}{2k}} = \frac{1}{\lambda^*} \sqrt{Bi_a^*}$$
(15.16)

D'où nous concluons que l'allongement optimum de l'ailette sera d'autant plus important que le nombre de Biot sera faible (mauvais coefficient de convection et/ou très bon matériau conducteur de chaleur)

Quand on conçoit des surfaces ailetées, en particulier pour le domaine de l'aéronautique et surtout de l'astronautique (dessin des satellites), le paramètre poids devient une contrainte pointue dans la conception du système. Il est primordial d'aboutir à une réalisation la plus légère possible. Les relations précédentes sont autant d'outils analytiques qui procurent des réponses à ce problème. Nous avons une certaine dépendition calorifique \dot{Q} à assurer au moyen d'ailettes. Nous nous plaçons aux conditions optimales de dimensionnement, c'est-à-dire à $e = e^*$ et $L = L^*$. Nous substituons λ par la valeur numérique λ^* dans la relation 15.12 qui reste évidemment d'application; ce qui nous donne l'épaisseur e^* en fonction de la puissance thermique à rejeter :

$$e^* = \left(\frac{\tilde{\dot{Q}}^*}{\tanh(\lambda^*)}\right)^2$$

En identifiant cette relation à 15.14 et après avoir évalué les constantes numériques, nous arrivons à l'expression du volume optimisé en terme du flux calorifique à satisfaire :

$$\mathcal{V}ol^* = \frac{0.504}{\ell^2 h^2 k} \left(\frac{\dot{Q}}{T_b - T_f}\right)^3 \tag{15.17}$$

A envergure fixée (longueur du tube à aileter), le volume de l'ailette augmente comme le cube de la puissance à dissiper. Ce qui nous amène la réflexion suivante : si nous avons à doubler la dépendition thermique totale ($\dot{Q}_2 = 2\dot{Q}_1$) nous pouvons soit implanter une seconde ailette identique soit utiliser une seule grosse ailette dont le volume (donc la masse) sera 8 fois supérieur à celui de la petite. La seconde décision est évidemment à rejeter car très pénalisante du point de vue du poids final. D'une façon générale, nous retiendrons qu'il est toujours préférable d'envisager l'emploi de plusieurs petites ailettes si la surface mère offre l'emplacement requis en gardant toutefois à l'esprit qu'une distance minimale entre ailettes doit être respectée afin d'éviter des interactions préjudiciables au transfert convectif : on admet que l'espacement entre deux ailettes doit être de l'ordre de deux couches limites thermiques (voir Chapitre 18)

- <u>Exercice</u>

De combien varie la longueur optimale de l'ailette si la puissance thermique totale double.

15.4 Efficacité de l'ailette

La qualité thermique de l'ailette est représentée par son efficacité. L'ailette idéale est une barre de conductivité infinie. Elle est donc isotherme à la température de base, T_b et dégage un flot thermique maximum :

$$\dot{Q}_{max} = h \mho L (T_b - T_f) \tag{15.18}$$

L'efficacité ϵ_a de l'ailette est le rapport entre sa performance effective (expression 15.8) et celle du système parfait (expression 15.18). Il vient

$$\epsilon_a = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\frac{Bi}{\lambda} + \tanh(\lambda)}{1 + \frac{Bi}{\lambda} \tanh(\lambda)} \right]$$
(15.19)

La figure 15.5 montre la variation de l'efficacité en fonction du paramètre λ . Les trois valeurs du nombre de Biot choisies illustrent les trois conditions thermiques qui peuvent être considérées en tête d'ailettes. On note que pour $\lambda \geq 2$, ϵ_a devient indépendant de Bi et qu'aux petites valeurs de λ le modèle n'est consistant que pour une tête d'ailette isolée.

La diminution de λ entraîne une augmentation des performances de l'ailette. Pratiquement, cela implique une fabrication des ailettes dans des matériaux très bons conducteurs de chaleur (k, \nearrow) , relativement courtes $(L \searrow)$ et épaisses $(\mho/S \searrow)$ et à se placer dans des conditions à coefficient d'échange faible. Cette dernière constatation est pour le moins surprenante mais elle résulte de l'effet du refroidissement convectif qui diminue progressivement le potentiel thermique local $T(x) - T_f$.



FIG. 15.5 – Efficacité d'une ailette

15.5 Efficacité d'une surface ailetée

La notion d'efficacité d'une ailette s'étend directement à une surface ailetée. La paroi extérieure du corps de surface originale S_b est maintenant pourvue de N ailettes identiques de surface d'échange S_a . L'efficacité du corps aileté est le rapport de la quantité de chaleur effectivement transmise par la surface totale $S_t = S_b + NS_a$ à la quantité de chaleur maximum échangée si cette même surface était maintenue uniforme et égale à la température au pied de l'ailette. En admettant que le coefficient de transfert de chaleur convectif, symbolisé par h, soit identique sur toute la paroi, ce rapport s'exprime comme suit :

$$\epsilon_t = \frac{hS_b(T_b - T_f) + \epsilon_a hNS_a(T_b - T_f)}{hS_t(T_b - T_f)}$$
(15.20)

Ce qui se simplifie en :

$$\epsilon_t = \frac{1 + \epsilon_a N S_a / S_b}{1 + N S_a / S_b} \tag{15.21}$$

Quand le nombre d'ailettes augmente, l'efficacité de la surface ailetée tend vers celle de l'ailette seule.

Chapitre 16

Conduction vive en régime permanent

Un certain nombre d'applications d'intérêt pratique fait intervenir la présence d'une génération interne de chaleur. C'est le cas, entre autres, des conducteurs électriques, des réacteurs chimiques, des piles nucléaires et le cas journalier des aliments dans les fours à micro-ondes. C'est pourquoi il est légitime de se demander quelle est la distribution de température à l'état stationnaire dans des systèmes soumis à des phénomènes de *conduction vive*.

16.1 Modèle plan avec source de chaleur

Nous abordons cette situation en choisissant l'exemple général mais rarement traité du massif solide plan d'épaisseur 2δ dans la direction Ox, dissipant une quantité uniforme \dot{Q}_v de chaleur et refroidi en permanence sur ses deux faces par un fluide. On se reportera à la figure 16.1 pour le schéma du système. Les dimensions du mur dans les deux autres directions Oy et Oz sont supposées très grandes pour admettre que la chaleur ne s'écoule que dans la direction Ox. Nous dénotons respectivement par T_{f1} et T_{f2} les températures du fluide au large de la paroi du coté de la face 1 et de la face 2. Il en est de même pour les coefficients de transfert de chaleur h_1 et h_2 . Le lecteur vérifiera que l'équation différentielle de la chaleur 13.17 qui régit ce problème, se ramène à une équation de Poisson unidimensionnelle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}_v}{k} = 0$$
(16.1)

Les conditions aux limites vont nous permettre de déterminer les constantes d'intégration de l'équation 16.1; elles traduisent la continuité du flux de chaleur sur chaque face. Par application de la loi de Newton, nous relions la densité de flux qui quitte le solide convectivement au potentiel thermique $T_p - T_f$, différence entre la température de peau du mur et celle du fluide :

– Face 1 : $x = -\delta$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-\delta} = -h_1 \left(T|_{x=-\delta} - T_{f1} \right) \tag{16.2}$$

– Face 2 : $x = \delta$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=\delta} = h_2 \left(\left. T \right|_{x=\delta} - T_{f1} \right) \tag{16.3}$$

On aura noté que les deux expressions ci-dessus sont de signe opposé. Cela tient compte du changement de direction du gradient thermique dans le passage de la face 1 à la face 2.



FIG. 16.1 – Paroi avec dissipation interne de chaleur

Le système formé par l'équation 16.1 et les deux relations des conditions aux limites peut être aisément réécrit sous une forme adimensionnelle simplificatrice en introduisant les variables normées et le paramètre source suivants :

$$X = \frac{x}{\delta} \quad , \Theta = \frac{T - T_{f1}}{T_{f2} - T_{f1}} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \frac{\delta^2 \dot{Q}_v}{k(T_{f2} - T_{f1})}$$

Il vient :

$$\frac{d^2\Theta}{dX^2} + \mathcal{S} = 0 \tag{16.4}$$

complété par

$$\left. \frac{d\Theta}{dX} \right|_{X=-1} = Bi_1 \left(\Theta \right|_{X=-1} \right) \tag{16.5}$$

 et

$$\left. \frac{d\Theta}{dX} \right|_{X=1} = -Bi_2 \left(\Theta \right|_{X=1} - 1 \right) \tag{16.6}$$

Les termes de transfert de chaleur par convection font de nouveau apparaître le nombre de Biot :

$$Bi_1 = \frac{h_1\delta}{k}$$
 et $Bi_2 = \frac{h_2\delta}{k}$

La solution générique de l'équation 16.1 est la distribution parabolique :

$$\Theta(X) = -\frac{SX^2}{2} + C_1 X + C_2 \tag{16.7}$$

La détermination des constantes C_1 et C_2 s'effectue via la résolution du système matriciel ci-après, obtenu par introduction des conditions aux limites 16.5 et 16.6 :

$$\begin{bmatrix} 1+Bi_1 & -Bi_1\\ 1+Bi_2 & Bi_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1\\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2+Bi_1)\frac{s}{2}\\ (2+Bi_2)\frac{s}{2}+Bi_2 \end{bmatrix}$$

La solution peut être facilement déduite par utilisation d'un logiciel de calcul symbolique (par exemple Maple). Ce qui donne

$$C_1 = \frac{\mathcal{S}(Bi_1 - Bi_2) + Bi_1Bi_2}{Bi_1 + 2Bi_1Bi_2 + Bi_2}$$

 et

$$C_2 = \frac{S}{2} + \frac{S(2 + Bi_1 + Bi_2) + Bi_1(1 + Bi_2)}{Bi_1 + 2Bi_1Bi_2 + Bi_2}$$

L'exploitation de la solution 16.7 est conduite au travers de quelques simulations illustrées à la figure 16.2.



FIG. 16.2 – Conduction vive dans une paroi plane

Pour S = 0 nous retrouvons bien le profil de température linéaire prédit par la théorie de la conduction morte. Pour $S \neq 0$ un extremum de température (maximum ou minimum selon le signe de S) s'établit dans la plaque et se situe toujours du coté de la paroi subissant le plus faible échange convectif (Bi le plus petit). Dans le cas où le nombre de Biot d'une face est nul, l'extremum se positionne sur cette paroi adiabatique. Faire tendre les deux coefficients de transfert par convection vers l'infini (Bi_1 et $Bi_2 \longrightarrow \infty$), revient à supposer la résistance convective négligeable et à imposer T_{f1} et T_{f2} sur chaque face. La relation 16.7 se simplifie en :

$$\Theta = \frac{1}{2}(1+X)(1+\mathcal{S}(1-X))$$

 Θ passe par un maximum (minimum) quand :

$$\frac{d\Theta}{dX} = -\mathcal{S}X + \frac{1}{2} = 0$$
 soit pour $X_m = \frac{1}{2\mathcal{S}}$

La valeur de cet extremum vaut :

$$\Theta_m = \frac{(1+2\mathcal{S})^2}{8\mathcal{S}}$$

Par conséquent, la densité de flux ne changera de signe et le profil de température de courbure que si le module du paramètre source satisfait au critère suivant :

$$|\mathcal{S}| > 0.5$$
 ou encore $|\dot{Q}_v \delta| > \frac{k|T_{f2} - T_{f1}|}{2\delta}$

Physiquement cette inégalité signifie qu'il y aura présence d'un extremum dans la paroi si l'amplitude de la source (puits) interne est assez grande pour supplanter l'effet de conduction morte créé par les seuls potentiels thermiques T_{f1} et T_{f2} . Dans le cas contraire, le flux de chaleur sera toujours positive (direction Ox) ou toujours négative (direction inverse à Ox) suivant le signe de $T_{f2} - T_{f1}$.

– <u>Exercices</u>

1- Quelle est l'expression du profil de température dans une plaque d'épaisseur δ en conduction vive si une des faces est thermiquement isolée et l'autre maintenue à la température T_1 . La source interne est constante et uniformément répartie. On établira la relation entre la quantité de chaleur qui quitte la plaque et la différence de température entre la paroi adiabatique et la surface à T_1 . Que conclure de la comparaison de cette relation avec celle qu'on obtiendrait en conduction morte. Quel commentaire vous incite à faire le remplacement de la paroi isotherme par une seconde paroi isolée ?

2- Une plaque de combustible nucléaire de 0.02 m d'épaisseur et de 10 W/m °C de conductivité thermique dissipe uniformément 15 MW/m³. Elle est refroidie par un fluide dont le mouvement induit un coefficient d'échange constant $h = 100 \text{ W/m}^2$. °C tout au long des deux faces. Quelle température du fluide doit on assurer pour éviter la formation d'un point chaud de 1500 °C à l'intérieur de la plaque.

16.2 Modèle cylindrique avec source de chaleur

Le corps est un objet cylindrique de section constante et de longueur L grande devant son rayon R. Il est soumis à une génération interne de chaleur. Nous pouvons supposer une distribution de température uniquement radiale et l'équation de Poisson qui décrit le champ thermique est :

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + r\frac{\dot{Q}_v}{k} = 0 \tag{16.8}$$

Dans le cas d'une source uniforme constante, elle possède une solution générale de la forme :

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_v}{4k}r^2 + C_1\ln(r) + C_2$$
(16.9)

La définition du problème permet de soulever l'indétermination des constantes C_1 et C_2 . Pour un cylindre plein, la condition en r = 0 impose le fait physique que la température doit rester finie; d'où $C_1 = 0$.

Ce résultat corrobore la condition de symétrie sur l'axe du cylindre. En r = R nous pouvons adopter la condition mixte de Fourier qui, nous l'avons vu précédemment, permet

de se ramener immédiatement à la condition de Dirichlet (température de peau, τ connue) en faisant tendre h vers l'infini ; soit :

$$\dot{q}(R) = h(\tau - T_f)$$

La solution complète est une fonction parabolique qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$T(r) = T_f + \frac{RQ_v}{2h} + \frac{R^2Q_v}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$
(16.10)

La température est maximale en r = 0 et vaut :

$$T_{max} = T_f + \frac{R\dot{Q}_v}{2h} \left[1 + \frac{Bi}{2} \right]$$
(16.11)

Expression qui fait apparaître le nombre de Biot basé sur le rayon du cylindre : Bi = hR/k. Quant à la température de peau elle s'exprime comme suit :

$$\tau = T_f + \frac{R\dot{Q}_v}{2h} \tag{16.12}$$

Pour *h* très important nous retrouvons effectivement que $\tau = T_f$. Le flux franchissant la surface cylindrique $A_r = 2\pi rL$ est égal à la puissance engendrée dans le volume $\pi r^2 L$ défini par cette surface; en particulier le flux quittant le corps vaut :

$$\dot{Q} = \pi R^2 L \dot{Q}_v \tag{16.13}$$

L'analyse des trois relations 16.11, 16.12 et 16.13 nous amène à tirer quelques conclusions intéressantes. Par exemple, nous constatons que :

1. La différence de température entre le centre et la surface du cylindre est proportionnelle à la puissance totale engendrée dans le solide :

$$\dot{Q} = 2kA_R \frac{T_{max} - \tau}{R} \tag{16.14}$$

2. Le nombre de Biot fixe directement le rapport des écarts de température cœursurface et surface-fluide, puisque, rappelons-le, il représente le rapport de la résistance de conduction à la résistance convective :

$$\frac{T_{max} - \tau}{\tau - T_f} = \frac{Bi}{2} \tag{16.15}$$

La figure 16.3 schématise la configuration du champ thermique selon l'importance du nombre de Biot. Nous retiendrons qu'aux faibles valeurs de Bi, la distribution de température dans le solide tendra vers une répartition uniforme. La valeur critique de Bi en-dessous de laquelle nous pourrons admettre cette hypothèse sera déterminée au chapitre suivant.

A ce stade du développement, nous pouvons réaliser l'étroite similitude qui lie le problème du cylindre intérieurement chauffé et l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tube circulaire (voir le chapitre 7 de la Partie I). Les procédés physiques impliqués dans l'un et l'autre problème sont analogues et leur correspondance est soulignée au tableau 16.1.



FIG. 16.3 – Effet du nombre de Biot

- <u>Exercices</u>

3- Comment se compare le résultat 16.14 avec celui obtenu dans l'exercice 1 ci-dessus? 4- Il s'agit de mener une analyse semblable pour le cas de la sphère de rayon R avec comme objectif l'expression de \dot{Q} en fonction de $T_{max} - \tau$. Encore une fois la comparaison des résultats avec les cas plan et cylindrique est judicieuse.

Portons maintenant notre attention sur la situation plus complexe mais plus proche de certains cas pratiques d'un système où la génération interne thermique est fonction de la température locale. C'est le cas de nombreuses réactions chimiques dont la production ou la demande en énergie volumétrique varie selon une loi exponentielle de la température. Comme exemple illustratif, nous traitons le problème du fil cylindrique très long parcouru

Caractéristiques	Ecoulement	Fil
	dans un tube	chauffé
1 ^{^Lre} Intégration	$ au_{rz}(r)$	$q_r(r)$
2 ^{iŁme} Intégration	u(r)	T(r)
Condition en $r = 0$	$ au_{rz}$ fini	q_r fini
Condition en $r = R$	u = 0	$T - T_R = 0$
Coefficient de transport	μ	k
Terme de source	$\Delta P_o / \triangle L$	\dot{Q}_v

TAB. 16.1 – Analogie "Ecoulement Visqueux- Conduction thermique"

par un courant électrique d'intensité constante I. La résistance électrique $\overline{\mathcal{R}}_{\acute{C}}$ du câble dépend sensiblement de la température. Une variation linéaire peut être adoptée (cas du cuivre pur dans des limites raisonnables de température) :

$$\overline{\mathcal{R}}_{\acute{\mathbf{C}}} = \overline{\mathcal{R}}_{\acute{\mathbf{C}},R}(1 + \alpha(T - \tau))$$

Les conditions de référence sont prises sur la surface du fil en r = R. Le coefficient de température α caractérise l'accroissement de résistance électrique pour une élévation de 1 ^{o}C . Etant donné que la production de chaleur par unité de volume est $\propto \overline{\mathcal{R}}_{\acute{C}}I^2$, l'équation différentielle 16.8 se modifie comme suit :

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + r\frac{\dot{Q}_v(R)(1+\alpha(T-\tau))}{k} = 0$$
(16.16)

Le changement de variable $\tilde{T} = 1 + \alpha(T - \tau)$ rend l'équation 16.16 homogène et la transforme en équation de Bessel;

$$r^{2}\frac{d^{2}\tilde{T}}{dr^{2}} + r\frac{d\tilde{T}}{dr} + \frac{\dot{Q}_{v}(R)\alpha r^{2}}{k}\tilde{T} = 0$$
(16.17)

dont la primitive générale est :

$$\tilde{T} = C_1 J_o(p.r) + C_2 Y_o(p.r)$$
(16.18)

où $J_o(p.r)$ et $Y_o(p.r)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce d'ordre zéro et de paramètre p

avec
$$p = \sqrt{\frac{\dot{Q}_v(R)\alpha}{k}}$$

L'exigence que la température reste finie au centre du fil est satisfaite en imposant C_2 nul car $Y_o(0) \longrightarrow -\infty$. La condition de peau $T = \tau$, soit $\tilde{T} = 1$ pour r = R, implique que $C_1 = 1/J_o(p.R)$. Finalement le champ thermique est décrit par la distribution radiale suivante :

$$T(r) = \tau + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{J_o(p.r)}{J_o(p.R)} - 1 \right]$$
(16.19)

La température est maximum sur l'axe du câble et décroît de façon monotone vers τ . Ce comportement se modifie radicalement quand le groupement p.R prend la valeur critique 2,4048 : en effet, la fonction de Bessel s'annule pour cette valeur (première racine) et la température devient infinie quelle que soit la position radiale. Pour cette condition et au delà de ce seuil, l'écart de température $T - \tau$ nécessaire pour évacuer radialement par conduction les calories produites par effet Joule va lui-même engendrer une augmentation de la chaleur (deuxième terme de l'équation 16.16) totalement incompatible avec le mécanisme de conductivité thermique. Pratiquement pour éviter la fusion du câble il faudra assurer que p.R se situe nettement sous cette borne supérieure. Traduit en terme d'intensité de courant électrique ce critère devient :

$$I < 2,4048 \sqrt{\frac{k\mathcal{V}ol}{\alpha R^2 \overline{\mathcal{R}}_{\acute{\mathbf{C}},R}}}$$
(16.20)

 $\mathcal{V}ol$ étant le volume du fil.
Chapitre 17

Conduction morte dépendante du temps

Les phénomènes naturels comme la plupart des activités humaines sont tels que l'état thermique stationnaire est très peu souvent un fait réel. Au contraire, il est fréquent de se trouver confronter à des situations où les échanges par conduction font intervenir non seulement les coordonnées spatiales mais aussi une fonction du temps.

Dès la mise en œvre de contraintes thermiques imposées aux frontières du système, le champ de température évolue continûment d'un état initial vers un état final qui, si permanent, est d'ailleurs théoriquement d'une durée d'établissement infinie. En traitant les situations instationnaires, on est généralement confronté à des problèmes thermiques cycliques ou apériodiques. Le régime cyclique se caractérise par des variations périodiques des causes comme, par exemple, les variations diurnes de température et d'ensoleillement qui influent sur le comportement des collecteurs solaires et des bâtiments. Les problèmes apériodiques sont typiques des transitoires d'installations suite à un démarrage ou un arrêt de machine.

Dans le cas de la conduction thermique sans source ou puits de chaleur interne en régime instationnaire, l'équation de la chaleur unidimensionnelle, déduite de 13.19, se réduit à :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{17.1}$$

 α est le coefficient de diffusivité du matériau.

17.1 Mur avec résistances internes et externes

Nous conservons la méthodologie adoptée précédemment en examinant un cas général pour en tirer les différents enseignements en l'exploitant sur des cas particuliers. Pour ce faire, analysons le comportement thermique d'une plaque homogène de très grande longueur et d'épaisseur 2δ . Initialement à la température uniforme T_o , elle se trouve subitement plongée dans un courant fluide maintenu à la température constante $T_f (\neq T_o)$. La figure 17.1 définit le problème. Les dimensions linéaires des surfaces de la plaque dans le sens des axes Oy et Oz étant supposées illimitées, le champ thermique peut être considéré unidimensionnel dans la direction Ox. Les changements de la température se font uniquement suivant l'épaisseur. Placé dans ce potentiel thermique, le corps solide tend vers un équilibre selon un transitoire totalement régi par l'importance relative des résistances de conduction et de convection.

La symétrie des conditions aux limites par rapport au plan médian implique qu'à tout moment le champ de température est également symétrique. Dès lors, il devient commode de situer l'origine des coordonnées au centre de la plaque en orientant l'axe Ox suivant la normale à la surface léchée par le fluide (voir figure 17.1).



FIG. 17.1 – Plaque épaisse avec condition mixte

La mathématique du problème repose sur l'équation différentielle de la thermocinétique 17.1 complétée par les conditions d'univalence suivantes :

A
$$t = 0$$
 nous avons $T = T_o \quad \forall x$
A $x = 0$ par symétrie $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ pour $t > 0$ (17.2)
 $x = \delta$ Loi de Newton $k \frac{\partial T}{\partial x} = -h(T - T_f)$ pour $t > 0$

La formulation est rendue sans dimension par l'introduction des variables adimensionnelles suivantes :

$$Fo = \frac{\alpha t}{\delta^2}$$
, $X = \frac{x}{\delta}$ et $\Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f}$

Fo est nommé nombre de Fourier; il compare le temps physique t au temps que mettrait une perturbation thermique pour diffuser dans la demi-épaisseur de la plaque. Le système se ramène à :

$$\boxed{\frac{\partial\Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}} \tag{17.3}$$

avec

А

$$\Theta = 1$$
 à $Fo = 0$ et $\forall x$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \quad \text{à} \quad X = 0 \quad \text{pour} \quad Fo > 0 \tag{17.4}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = -Bi\Theta \quad \text{à} \quad X = 1 \quad \text{pour} \quad Fo > 0$$

où réapparaît le nombre de Biot $Bi = h\delta/k$.

Pour résoudre le problème ainsi posé nous appliquons la méthode de séparation des variables. Elle consiste à chercher la solution Θ sous la forme d'un produit de deux fonctions :

$$\Theta(X, Fo) = \Xi(Fo)\Upsilon(X)$$

et dont la substitution dans l'équation 17.3 conduit à :

$$\frac{1}{\Xi}\frac{\partial\Xi}{\partial Fo} = \frac{1}{\Upsilon}\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial X^2} = C \tag{17.5}$$

Le premier membre de l'équation 17.5 ne dépendant pas de la coordonnée X, et le deuxième du temps normé Fo, il s'en suit que C doit être une constante. Lors du transitoire thermique, que la plaque soit réchauffée ou refroidie, Θ ne fait que décroître dans le temps ; par conséquent la constante C doit être négative. En posant $C = -\xi^2$ et en résolvant les équations 17.5 nous obtenons :

$$\Xi(Fo) = C_1 \exp(-\xi^2 Fo) \tag{17.6}$$

 et

$$\Upsilon(X) = C_2 \sin(\xi X) + C_3 \cos(\xi X) \tag{17.7}$$

La condition initiale et les conditions aux limites vont permettre de déterminer les constantes d'intégration ainsi que ξ . La condition de symétrie impose que C_2 doit être nul. L'expression du champ de température adimensionnelle est de la forme :

$$\Theta(X, Fo) = C' \exp(-\xi^2 Fo) \cos(\xi X)$$
(17.8)

où $C' = C_1 C_3$.

L'application de la relation d'échange convectif de Newton, en utilisant l'expression 17.8 et sa dérivée par rapport à X prise en X = 1, aboutit à l'équation caractéristique de ξ :

$$\frac{\xi}{Bi} = \cot(\xi) \tag{17.9}$$

C'est une équation transcendante qui peut être résolue graphiquement ou par méthode numérique. Comme le montre la figure 17.2, l'équation 17.9 est vérifiée pour un nombre infini de valeurs de ξ qu'on appelle nombres propres et que nous désignerons par ξ_n . Les valeurs de ces racines dépendent du rang n et du nombre de Biot. Pour $Bi \to \infty$ la droite ξ/Bi coïncide avec l'axe des abscisses et les racines sont successivement (s'aider de la figure 17.2) :

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \xi_2 = \frac{3\pi}{2}; \quad \xi_3 = \frac{5\pi}{2}; \dots; \xi_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

Pour $Bi \rightarrow 0$ (sans jamais l'atteindre sinon la paroi serait adiabatique et aucune évolution temporelle thermique ne prendrait naissance) la droite ξ/Bi tend l'axe des ordonnées et les valeurs propres deviennent :

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \pi; \quad \xi_3 = 2\pi; \dots; \xi_n = (n-1)\pi$$



FIG. 17.2 – Solution de l'équation 6.9

Le problème étant linéaire, la solution générale est donc la somme des solutions particulaires :

$$\Theta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \exp(-\xi_n^2 Fo) \cos(\xi_n X)$$
(17.10)

La fonction Θ vérifie les conditions aux limites, puisque ces dernières le sont par tous les termes de la série. Reste à déterminer les coefficients C'_n à partir de la condition initiale. En effet, il faut remarquer que les C'_n sont les coefficients de Fourier de la fonction Θ développée suivant les cosinus sur l'intervalle [0, +1]. Pour les calculer il suffit de multiplier les deux membres de la solution 17.10 par $\cos(\xi_i X)$ et intégrer sur ledit intervalle en tirant profit de la propriété d'orthogonalité qui précise, si on y ajoute la relation implicite 17.9, que :

$$\int_0^{+1} \cos(\xi_i X) \cos(\xi_j X) dX = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ \int_0^{+1} \cos^2(\xi_i X) dX = & \text{pour } i = j \end{cases}$$

En se plaçant à l'instant initial, on a $\Theta = 1$ et il s'en suit que les coefficients C'_n ont pour expression :

$$C'_{n} = \frac{\int_{0}^{+1} \cos(\xi_{n} X) dX}{\int_{0}^{+1} \cos^{2}(\xi_{n} X)} = \frac{2/\xi_{n} \sin(\xi_{n})}{1 + 1/2\xi_{n} \sin(2\xi_{n})} = \frac{2\sin(\xi_{n})}{\xi_{n} + \sin(\xi_{n})\cos(\xi_{n})}$$

Finalement, nous arrivons à la forme finale de la solution générale

$$\Theta(X, Fo) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\xi_n^2 Fo) \frac{2\sin(\xi_n)}{\xi_n + \sin(\xi_n)\cos(\xi_n)} \cos(\xi_n X)$$
(17.11)

qui, on le vérifiera à titre d'exercice, peut aussi s'écrire en fonction du nombre de Biot :

$$\Theta(X, Fo) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Bi\sqrt{Bi^2 + \xi_n^2}}{\xi_n(Bi^2 + Bi + \xi_n^2)} \cos(\xi_n X) \exp(-\xi_n^2 Fo)$$
(17.12)

On aura noté que les valeurs des racines ξ_n croissent rapidement avec le numéro d'ordre n; aussi les termes consécutifs de la série jouent un rôle de plus en plus mineur avec l'élévation du rang. De plus, il convient de retenir que $\cos(\xi X)$ reste une grandeur limitée alors que $\exp(\xi^2 Fo)$ décroît rapidement. Dès lors, on montre que pour des temps tels que $Fo \geq 0.3$ la série converge très vite et peut être approximée avec une précision suffisante par le premier terme.

La figure 17.3 souligne l'effet du nombre de Biot sur la forme du profil de température. T_c est la température au centre de la plaque. Aux grandes valeurs du nombre de Biot, la résistance externe devient négligeable et la température de peau est égale à celle du fluide caloporteur. La distribution thermique présente une nette distorsion, résultat de la résistance interne qui freine l'uniformisation par conduction. Par contre aux faibles valeurs de Bi, le profil de température est beaucoup plus uniforme. On se rappellera que dans le cas de résistances en série, comme ici, ces dernières sont proportionnelles aux chutes de température; on en déduit qu'une petite valeur de Bi signifie une faible chute de température à l'intérieur du solide en comparaison de celle qui s'établit dans le film de convection près de la paroi. La variation spatiale de T dans la plaque est suffisamment faible pour que le comportement thermique de la plaque puisse se décrire par la seule évolution temporelle de la température moyenne. Les calculs montrent que cette description globale est acceptable tant que $Bi \leq 0, 1$. Quand ce critère est vérifié, la chute de température normée Θ reste inférieure à 5% sur toute l'épaisseur. On constate que cette analyse, menée sur une géométrie cylindrique ou sphérique, conduit aux mêmes conclusions pour autant que la dimension caractéristique qui intervient dans le nombre Biot soit le volume divisé par la surface mouillée. Dans ces conditions, le processus de réchauffement ou de refroidissement du corps se modélise par un comportement en bloc.



FIG. 17.3 – Effet du nombre de Biot

17.2 Corps sans résistance interne

Comme nous venons de le voir, un corps est assimilé à un solide sans résistance de conduction quand le nombre de Biot du problème est <u>inférieur à 0,1</u>. Une approche macroscopique s'avère alors suffisante et plus aisée pour décrire le transitoire thermique. Dans ce cas, le bilan énergétique relie la variation d'énergie interne du solide au flux de chaleur convectif. En supposant toujours les propriétés thermo-physiques constantes, cette formulation s'écrit :

$$\rho_s C_s \mathcal{V}ol \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_f) \tag{17.13}$$

 ρ_s et C_s sont respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du solide; $\mathcal{V}ol$ est le volume du corps et S la surface d'échange avec le fluide. Rappelons que le solide évolue en bloc avec une température T caractérisant l'ensemble du solide.

En considérant encore une température T_f constante, la solution de l'équation différentielle ordinaire 17.13 est immédiate :

$$\Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho_s C_s \mathcal{V}ol}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$$
(17.14)

L'argument $(\rho_s C_s \mathcal{V}ol)/(hS)$ représente un temps caractéristique du transitoire, τ_c . après une période de temps écoulé égale à τ_c le potentiel thermique $T - T_f$ tombe à 36,8% de sa valeur initiale et la différence de température $T - T_o$ atteint 63,2% de sa valeur finale $T_f - T_o$. La relation 17.14 permet d'estimer le temps nécessaire pour réchauffer ou refroidir le corps à une certaine température donnée. Elle montre aussi qu'il faudrait, en principe, attendre infiniment pour que le solide atteigne la température T_f .

L'équation 17.13 est analogue à celle du montage électrique schématisé à la figure 17.4. Elle illustre la décharge d'un condensateur électrique de capacité $C_{\text{él}}$ dans un circuit résistif $R_{\text{él}}$ à la fermeture d'un interrupteur sous un potentiel initial $E_o - E_{\infty}$.



FIG. 17.4 – Corps à résistance interne négligeable : analogie électrique

De l'analogie on identifie les équivalences suivantes :

$$C_{\text{\acute{e}l}} \equiv \rho_s C_s \mathcal{V}ol \quad \text{et} \quad R_{\text{\acute{e}l}} \equiv \frac{1}{hS}$$

accompagnées de la solution :

$$\frac{E - E_{\infty}}{E_o - E_{\infty}} = \exp\left(-\frac{t}{C_{\acute{e}l}R_{\acute{e}l}}\right)$$

La capacité calorifique quantifie l'inertie thermique du système; elle est proportionnelle au volume du corps, à la masse volumique et la chaleur massique du matériau. Au plus elle sera grande au plus le solide réagira lentement à l'effet du fluide caloporteur. L'élément résistif se situe à la surface du corps; il dépend de la vigueur de l'échange de chaleur pariétal.

L'approche en bloc, quand justifiée (critère de Biot!), permet de répondre à de nombreuses questions pratiques - temps de trempe d'une billette d'acier, réponse d'un thermocouple, accumulateur de chaleur *etc...* Une retombée intéressante de ce modèle est l'étude analytique du comportement d'un système à plusieurs corps. Un exemple typique est repris à la figure 17.5; un récipient, de matériau très bon conducteur, dont les parois n'ont pas une capacité calorifique négligeable $[\rho C \mathcal{V}ol]_s$, contient un liquide de capacité $[\rho C \mathcal{V}ol]_\ell$. Ce dernier est suffisamment bien agité pour que le coefficient équivalent de conductivité soit élevé. L'échange de chaleur entre le liquide et la surface intérieure du récipient S_ℓ est caractérisé par un coefficient de transfert par convection h_ℓ . La surface extérieure du conteneur S_f est exposée à un fluide dont la température T_f est constante.



FIG. 17.5 – Système à plusieurs composants

Pour résoudre le problème, il nous faut écrire une équation du type 17.13 pour le liquide de température uniforme T_{ℓ} (car bien agité) et une pour le récipient de température uniforme T_s (car bon conducteur) :

$$[\rho C \mathcal{V}ol]_{\ell} \frac{dT_{\ell}}{dt} = -h_{\ell} S_{\ell} (T_{\ell} - T_s)$$
(17.15)

$$[\rho C \mathcal{V}ol]_s \frac{dT_s}{dt} = h_\ell S_\ell (T_\ell - T_s) - h_f S_f (T_s - T_f)$$

Les deux équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants sont couplées. Elles expriment que la chaleur perdue (reçue) par un élément du système physique est reçue (perdue) par l'autre. A l'instant initial, nous supposerons que le contenu et le contenant sont à l'équilibre thermique; $T_{\ell o} = T_{so} = T_o$. Notons que cette condition implique que $dT_{\ell}/dt = 0$ à t = 0.

La démarche mathématique qui conduit à la solution est laissée en guise d'exercice. Après avoir posé

$$\Theta_{\ell} = \frac{T_{\ell} - T_f}{T_o - T_f} \quad \text{et} \quad \Theta_s = \frac{T_s - T_f}{T_o - T_f}$$

puis

$$F_1 = \frac{h_\ell S_\ell}{[\rho C \mathcal{V} ol]_\ell} \quad F_2 = \frac{h_\ell S_\ell}{[\rho C \mathcal{V} ol]_s} \quad F_3 = \frac{h_f S_f}{[\rho C \mathcal{V} ol]_s}$$

où les F_i sont les inverses des constantes de temps (fréquences), tous calculs faits, nous trouvons que le transitoire du milieu liquide est donné par :

$$\Theta_{\ell} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \exp(\Lambda_1 t) - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \exp(\Lambda_2 t)$$
(17.16)

avec

$$2\Lambda_1 = -(F_1 + F_2 + F_3) + \sqrt{(F_1 + F_2 + F_3)^2 - 4F_1F_3}$$

 \mathbf{et}

$$2\Lambda_2 = -(F_1 + F_2 + F_3) - \sqrt{(F_1 + F_2 + F_3)^2 - 4F_1F_3}$$

On s'aperçoit que les arguments Λ_1 et Λ_2 sont bien négatifs comme il se doit pour assurer une diminution de Θ_{ℓ} avec le temps.

- <u>Exercice</u>

Quelle est l'expression de Θ_s ? Quel est le milieu qui contrôle le transitoire?

17.3 Massif semi-infini

Quand le mur prend une très grande épaisseur, son comportement se rapproche de celui d'un massif semi-infini schématisé à la figure 17.6 :

L'équation de la thermocinétique 17.1 reste celle qui décrit le transitoire thermique de ce système. Envisageons que le massif, auparavant à la température uniforme T_o , soit soumis à l'instant t = 0 à une contrainte thermique brusque T_f sur sa face exposée au fluide. Dans ce problème, le système n'a pas de caractéristique géométrique qui pourrait servir de norme pour x. Aussi, comme pour tout problème de diffusion, introduit-on la longueur de pénétration thermique $\propto \sqrt{\alpha t}$.

On avait déjà procédé de la sorte pour résoudre le problème de l'écoulement induit par le plan oscillant (Partie I, chapitre 7) et pour évaluer l'épaisseur de la couche limite (Partie I, chapitre 16.2).

Par conséquent, les variables réduites sont :

$$Z = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_o - T_f}$$



FIG. 17.6 – Massif semi-infini

Les conditions d'univalence deviennent :

 $Z \mapsto \infty$ alors $\Theta = 1$

 et

 $Z \mapsto 0$ alors $\Theta = 0$

On démontre que la solution de ce problème est la fonction intégrale de Gauss qui conduit au profil de température adimensionnelle suivant :

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(Z)$$
(17.17)

оù

$$\operatorname{erf}(Z) = \int_0^Z e^{-y^2} dy$$

La figure 17.7 est une trace graphique de cette solution. On constate que le temps nécessaire pour que la température en un endroit choisi atteigne une température donnée sera proportionnel au carré de la profondeur x; ce qui se formule ainsi :

Pour
$$\Theta = \Theta_{\text{fix}\acute{e}}$$

 $\tilde{t} = \frac{\tilde{x}^2}{4\alpha}$

Les graphes de la figure 17.8 décrivent la réponse d'un massif semi-infini en présence d'une condition mixte à l'interface. Le nombre de Biot qui paramétrise ces courbes est basé sur la profondeur de diffusion.

La connaissance du profil de température permet de trouver la densité de flux de chaleur :

$$\dot{Q} = -kS\frac{dT}{dx} = \frac{kS(T_f - T_o)}{\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{4\alpha t}\right)}$$
(17.18)

et en particulier son expression à la surface du solide :

$$\dot{Q}(0,t) = \frac{bS(T_f - T_o)}{\sqrt{\pi t}}$$
(17.19)



FIG. 17.7 – Profil de température dans un massif semi- infini; condition de Dirichlet

A première vue, il peut être surprenant de constater que cette densité de flux est infinie à l'instant initial. Ce résultat vient de la nature de la condition initiale qui impose brutalement une discontinuité de température $T_o \mapsto T_f$ juste à l'interface. Le paramètre b qui intervient dans la relation 17.19 est appelé *l'effusivité* :

$$b = \sqrt{k\rho C_p} \qquad \equiv \qquad \left[\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{m}^2 \mathbf{K} \sqrt{\mathbf{s}}} \right]$$

Nous discuterons plus après de sa signification physique qui s'apprécie plus facilement quand on traite du problème de deux corps en contact.

L'intégration dans le temps du flux de chaleur en x = 0 permet d'exprimer le flux de chaleur cumulée qui représente soit la perte totale soit le gain total (selon le signe du potentiel thermique) d'énergie interne du massif :

$$\dot{Q} = 2bS(T_f - T_o)\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$
(17.20)

La relation 17.20 montre que pour un temps donné, le massif infini accumulera d'autant plus de chaleur que son effusivité sera grande. Quelques valeurs d'effusivité de certains matériaux sont présentées au tableau 17.1.

17.4 Mise en contact de deux corps

La mise en contact de deux corps, au départ à températures différentes T_0 et T'_0 , est une situation classique de l'ingénierie thermique. La figure 17.9 donne une description du problème. Tant que l'information de température n'a pas atteint la face opposée au plan du contact, les corps peuvent être assimilés à des massifs semi-infinis. Le contact est parfait ; les deux solides prennent une température commune T_c . Ecrivons l'égalité des flux de chaleur à l'interface :

$$(T_0 - T_c)\frac{b}{\sqrt{\pi t}} = (T'_0 - T_c)\frac{b'}{\sqrt{\pi t}}$$
(17.21)



FIG. 17.8 – Profil de température dans un massif semi- infini; condition mixte.

Puisque cette relation est vraie quelque soit t, on en tire l'expression de la température de contact :

$$T_{c} = \frac{bT_{o} + b'T_{o}'}{b + b'}$$
(17.22)

On trouve quelle est indépendante du temps et pondérée par les effusivités des deux solides. A l'aide de la relation 17.22 on élimine T_c dans l'expression de la densité de flux à l'interface. La forme finale se donne alors en fonction des températures initiales et des effusivités :

$$q(0,t) = (T_o - T'_o)\frac{bb'}{b+b'} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$



FIG. 17.9 – Mise en contact de deux corps

Une des applications les plus démonstratives de la notion d'effusivité que certains

MatiŁre	$b \; [J/m^2.K.\sqrt{s}]$
Cuivre Fonte Marbre Eau Verre Peau Bois Laine de verre Air	$36000 \\ 14700 \\ 2650 \\ 1600 \\ 1500 \\ 600 \\ 400 \\ 24 \\ 6$

TAB. 17.1 – Ordre de Grandeur de l'effusivité

TAB. 17.2 – Appréciation de température par la main

Contact avec	$T_c \ [^o\mathrm{C}]$	Sensation
Fonte	20,7	Froide
Marbre	23,3	Tiède
Bois	30,4	Chaude
Isolant	36,4	Très Chaude

auteurs nomment aussi coefficient d'arrachement thermique, est l'appréciation de la température par la main. Quand nous posons notre main sur un solide, disons une table pour prendre un exemple, nous apprécions la température de contact entre notre peau et la surface du plateau. Admettons que quatre tables respectivement en fonte, marbre, bois et la dernière recouverte de laine de verre soient toutes à la température de 20 °C. Quand notre main, supposée être à la température de 37 °C, touche successivement ces tables différentes sensations thermiques sont ressenties. Le tableau 17.2 reprend les différentes températures de contact ressenties au toucher. Le plateau en fonte ayant une beaucoup plus grande effusivité que celle de la main, va imposer sa température et une sensation de fraîcheur résultera du contact. Par contre, la pose de la main sur la table isolée va se traduire par une impression de chaud car l'effusivité de l'isolant est faible et la main va ressentir sa température. On explique, par des considérations identiques, la possibilité de passer rapidement son doigt au travers d'une flamme de bougie sans subir aucune brûlure. L'effusivité des gaz combustibles est si faible devant celle du corps humain que le doigt garde sa température pendant sa courte exposition au feu.

17.5 Perturbation périodique en surface

La description théorique du comportement thermique d'un massif semi-infini quand sa surface est soumise à des fluctuations cycliques de température a de nombreuses retombées pratiques. On citera comme exemple, les variations annuelles des sols, le stockage journalier de l'énergie solaire dans des unités d'accumulation, la fatigue thermique des moteurs à pistons et les systèmes d'asservissement basé sur un contrôle automatique des températures.

Comme le suggère la figure 17.10, on traite le cas d'une variation d'une périodique harmonique de pulsation ω :

FIG. 17.10 – Condition périodique en surface

On résout l'équation de thermocinétique classique 17.1 en utilisant les variables réduites appropriées au présent problème :

$$\Theta = \frac{T - T_o}{\mathcal{A}_o}, \quad X = \frac{x}{\tilde{L}} \quad \text{et} \quad \tau = \omega t$$

La longueur caractéristique du problème \tilde{L} est la profondeur typique de pénétration :

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$

La solution est obtenue comme précédemment par séparation des variables. En se limitant à la solution harmonique, il vient :

$$\Theta = e^{-X} \cos(\tau - X) \tag{17.23}$$

Le profil de température se compose d'un terme amplitude et d'un terme périodique qui fait apparaître un déphasage. L'amplitude \mathcal{A} s'explicite comme suit :

$$\mathcal{A} \propto e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}}$$

$$T = T_o + \mathcal{A}_o \cos(\omega t)$$

Elle décroît avec la profondeur et avec l'augmentation de la fréquence. Une faible diffusivité produit le même effet. Le déphasage ϕ est directement proportionnel à x:

$$\phi = x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$$

Il augmente avec la fréquence et la diminution de α . Le phénomène se caractérise aussi par une longueur d'onde λ et une vitesse apparente de propagation V_{ap} qu'il ne faut pas prendre pour une vitesse de propagation de la chaleur : c'est en fait une notion qui nous dit à quelle profondeur se situera un extremum à l'instant t s'il est observé à la surface à l'instant t';



FIG. 17.11 – Variations annuelles de la température du sol

$$V_{ap} = x/(t-t')$$
:
 $\lambda = 2\pi \tilde{L} = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$
 $V_{ap} = \sqrt{2\alpha\omega}$

 et

Cet extremum se déplacera d'autant plus vite dans le massif que la pulsation est élevée et le milieu fortement diffusif. Quant à la longueur d'onde λ , elle représente la distance minimale qui sépare deux points en phase. Elle est faible dans les solides peu diffusifs.

Une notion intéressante est la profondeur d'inversion L_{inv} . Elle représente l'abscisse où l'onde passe par un minimum (maximum) quand la perturbation source surfacique présente un maximum (minimum). C'est donc la distance par rapport à la surface qui correspond à un déphasage de π entre T(0) et $T(L_{inv})$:

$$L_{inv} = \pi \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} = \frac{\lambda}{2}$$

Donnons un exemple de son application. Il s'agit d'étudier les variations annuelles d'un sol défini par une diffusivité thermique $\alpha = 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Le cycle de la température de l'air

est de 8760 heures. La figure 17.11 montre les isochromes thermiques qui décrivent le comportement du sol dans l'année.

On trouve que la profondeur d'inversion est $L_{inv} = 3,14$ m. A cette distance la température sera minimum quand en surface il fera le plus chaud et vice versa. C'est ce qui explique l'existence de la glace dans certaines mines en été. 160

Chapitre 18

Convection forcée

Ce chapitre traite des notions de convection forcée et introduit le concept du coefficient de transfert de chaleur h. Les écoulements externes et internes sont successivement analysés. Le développement de la couche limite thermique le long d'une plaque plane est détaillé en régime laminaire. Les corrélations sous forme de nombres adimensionnels applicables en régimes laminaire et turbulent sont successivement présentées dans le cas de la plaque plane, du cylindre et de la sphère. L'écoulement dans un tube de section constante circulaire exemplifie la situation des écoulements internes. Un accent particulier est placé sur l'analogie avec le transfert de quantité de mouvement et le régime thermiquement non-développé.

18.1 Concept du coefficient de transfert de chaleur

D'un point de vue conceptuel, la convection n'est pas à proprement parler un mode de transfert de chaleur de base mais plutôt le résultat d'une symbiose entre le procédé de diffusion thermique - la **con**duction qui est un transfert d'énergie dû à des mouvements microscopiques - et le mouvement d'un fluide - l'ad **vection** qui est caractérisée par des déplacements macroscopiques d'agglomérats de molécules – d'où le vocable de **convection**.

La convection prend place quand un fluide est au contact d'une paroi solide et qu'il existe une différence de température au loin de leur interface et une vitesse relative entre eux. Contrairement à la convection naturelle (étudiée au chapitre 19), en convection forcée, le mouvement du fluide est induit par des causes indépendantes des écarts de température. Dans la majorité des situations les sources de pression, génératrices de l'écoulement, résultent de l'emploi de pompes, de ventilateurs, de compresseurs voire d'éjecteurs.

La figure 18.1 illustre le propos ; un fluide en mouvement et à la température uniforme T_{∞} vient refroidir un corps solide dont la température au cœur est T_{so} . Entre le solide est le fluide s'établit un transfert de chaleur caractérisé par une densité de flux q_p . Au passage solide-fluide, le profil de température reste continu et les deux milieux prennent la même température à l'interface $T_f = T_s = T_p$. Cependant, en ce point le gradient de température présente une discontinuité ; c'est le résultat de la conservation du flux de chaleur. En effet, étant donné que le fluide adhère à la paroi sa vitesse y est nulle (voir Partie I, le chapitre 16.2 sur la couche limite) et seul le mécanisme de conduction acte :

$$q_p = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \mid_{y=0} = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \mid_{y=0}$$
(18.1)

A priori, le fluide et le solide n'ont pas la même conductibilité et les gradients thermiques de part et d'autre de l'interface fluide-solide seront différents au prorata du rapport des coefficients de conduction.



FIG. 18.1 – Conduction et convection

A première vue, la relation 18.1 semble indiquer que l'évaluation du transfert de chaleur entre les deux milieux nécessitera toujours la connaissance précise de la distribution de température pour en déduire la valeur du gradient thermique à la paroi. Cette démarche demande des calculs détaillés, quelquefois fastidieux, qui impliquent souvent la résolution simultanée des équations de Navier- Stokes (y compris celle de l'énergie) pour le fluide et l'équation de la chaleur pour le solide. Une approche plus pragmatique pour l'ingénieur est l'utilisation d'un coefficient d'échange qui englobe dans son concept tous les mécanismes fondamentaux qui interviennent au niveau de la paroi mais qui s'appuie sur la connaissance de quantités simples comme le potentiel thermique $T_p - T_{\infty}$, la vitesse U_{∞} et les propriétés thermo-physiques du fluide au loin de la surface solide, la forme du corps et une longueur caractéristique L_f du domaine fluide. Ce paramètre, nommé **coefficient de transfert de chaleur par convection** ou **conductance thermique de convection**, est défini par la relation de Newton :

$$q_p = h\left(T_p - T_\infty\right) \tag{18.2}$$

On peut égaler les expressions 18.1 et 18.2 pour faire ressortir un groupement sans dimension où la longueur L_f devient la norme spatiale :

$$Nu = \frac{hL_f}{k_f} = \frac{\partial}{\partial(y/L_f)} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_\infty}\right)_{y=0}$$
(18.3)

Le groupe sans dimension Nu est le **nombre de Nusselt**. Sa signification primitive est le gradient adimensionnel de température pariétal. On peut pousser plus loin l'interprétation en examinant le schéma de la figure 18.2. On prolonge la pente du profil de température à la paroi pour définir une épaisseur caractéristique δ' qui permet d'écrire :



 $q_p = -k_f \frac{T_p - T_\infty}{\delta'} \tag{18.4}$

FIG. 18.2 – Interprétation de h

Les relations 18.2 et 18.4 nous conduisent aux égalités qui suivent :

$$h = \frac{k_f}{\delta'}$$
 et $Nu = \frac{L_f}{\delta'}$ (18.5)

L'échange convectif sera d'autant plus intense qu'il s'effectuera dans une couche très faible et que le fluide sera bon conducteur de chaleur. Le nombre de Nusselt est un rapport de deux longueurs; c'est un facteur de forme caractérisé par la dimension du domaine physique et la distance sur laquelle se produit le transfert de chaleur. Il y a une nette distinction à faire entre le nombre de Nusselt et le nombre de Biot qui, rappelons le, est un rapport de résistances thermiques (voir relations 15.10 et 15.11 du chapitre 15). Poursuivre l'analyse consiste à déterminer la grandeur δ' ou une équivalence. L'illustration de la démarche se fait dans le cas classique de l'écoulement d'un fluide sur une plaque horizontale en étudiant le développement de la couche thermique.

18.2 Couche limite thermique

Le problème est semblable à celui traité au chapitre 16.2 de la Partie I concernant la couche limite dynamique. La figure 18.3 le décrit. Un fluide aux propriétés ρ_f , C_{pf} et k_f constantes, arrive avec une distribution de vitesse \mathbf{U}_{ext} et de température T_{ext} uniforme sur une plaque plane horizontale et isotherme maintenue à la température $T_p \ (\neq T_{ext})$. Au contact du solide, le fluide échange de la chaleur. Un profil de température se développe tout au long de la plaque. Il satisfait à la condition de paroi, $T = T_p$ et récupère sa température T_{ext} à une certaine distance δ_{th} qui sera nommée épaisseur de la couche limite thermique.



FIG. 18.3 – Définition de la couche limite thermique

18.2.1 Equation de l'énergie dans la couche limite laminaire

L'équation complète de la conservation de l'énergie totale et les différentes autres formes qui en découlent font l'objet du chapitre 21. Nous nous intéressons ici à l'équation de l'énergie interne qui s'applique à la couche limite thermique sur une plaque plane. Pour ce faire, nous définissons un petit volume de contrôle dxdy placé au sein de la couche limite comme l'indique la figure 18.4 et considérons **le régime laminaire stationnaire**.

Le bilan énergétique se décrit par une équation de conservation dont la forme générique 6.28 a été établie au chapitre 6 de la Partie I. Il se précise en énonçant que l'énergie sortant par advection et conduction au travers des faces de droite et du dessus diminuée de l'énergie entrant par advection et conduction au travers des faces de gauche et du bas est égale au travail des forces visqueuses. Rappelons que la pression ne varie pas dans ce problème. Les différents termes qui interviennent dans l'équation thermique sont explicités à la figure 18.4.

– Flux net de l'énergie advectée par unité de temps

Le flux net de l'énergie thermique advectée donne la variation d'enthalpie du fluide. En négligeant tous les termes du second ordre venant des produits de dérivées, il vient :

$$\rho_f C_{pf} \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dxdy$$

Compte tenu de la condition d'incompressibilité, $\nabla \vec{V} = 0$, il se simplifie en :

$$\rho_f C_{pf} \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] dxdy$$

On notera que cette expression n'est rien d'autre que la dérivée particulaire de l'enthalpie du fluide.

- Flux net de l'énergie diffusée par unité de temps

$$-\left[k_f\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_f\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]dxdy$$

- Travail de la contrainte de cisaillement par unité de temps

La puissance dissipée en chaleur par l'effet visqueux est le produit de la contrainte τ_{xy} par le déplacement qu'elle effectue en une unité de temps $(\partial u/\partial y)dy$, soit :

$$\left[\mu\frac{\partial u}{\partial y}dx\right]\frac{\partial u}{\partial y}dy = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$



FIG. 18.4 – Détail de l'équation de l'énergie

En général, l'apport de la conduction axiale peut être négligé devant les autres termes. En divisant par $\rho_f C_{pf}$, l'équation du bilan s'écrit :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho_f C_{pf}} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$
(18.6)

Pour lui donner une forme adimensionnelle, on procède comme pour la couche limite dynamique. En choisissant $\Theta = (T - T_p)/(T_{ext} - T_p)$ comme température normée et en supposant pour l'instant que $\delta \simeq \delta_{th}$, on obtient :

$$\left[\tilde{u}\frac{\partial\Theta}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\Theta}{\partial\tilde{y}}\right] \left\{\frac{\delta}{L_f}\right\}^2 = \frac{1}{\mathbf{Pe}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\mathbf{Br}}{\mathbf{Pe}}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\right)^2$$
(18.7)

Deux groupes sans dimensions apparaissent. Il s'agit du **nombre de Peclet** Pe et du **nombre de Brinkman** Br. Le nombre de Peclet compare les effets d'advection aux effets de diffusion thermique. Il est égal au produit du nombre de Reynolds par le nombre de Prandtl :

$$Pe = \frac{\mathbf{U}_{ext}L_f}{\alpha} = \frac{\rho_f C_{pf} \mathbf{U}_{ext}L_f}{k_f} = RePr$$

Le nombre de Brinkman est surtout important quand le fluide considéré est très visqueux et/ou les gradients de vitesses élevés. Il évalue la production de chaleur par dissipation visqueuse au sein du fluide par rapport au flux thermique par conduction :

$$Br = \frac{\mu \mathbf{U}_{ext}^2}{k_f \Delta T}$$

Avec $\Delta T = T_p - T_{ext}$. On vérifie facilement que le rapport Br/Pe se ramène à un autre ratio Ec/Re où Ec est le **nombre d'Eckert** qui rapporte l'énergie cinétique du fluide à sa variation d'enthalpie au travers de la couche limite :

$$Ec = \frac{\mathbf{U}_{ext}^2}{C_{pf}\Delta T} = \frac{Br}{Pr}$$

Dans un écoulement incompressible à basse vitesse – prenons de l'air à 20 ^{o}C avec une vitesse $\mathbf{U}_{ext} = 50m/s$ sur une paroi à 100 ^{o}C et de 1 m de long pour se fixer les idées – le nombre de Brinkman est très faible ($\ll 1$), l'effet de viscosité sur le transport d'énergie peut être négligé sans retenue et la forme dimensionnelle de l'équation de l'énergie se ramène à :

$$\left| u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|$$
(18.8)

Il est judicieux de souligner la forte similitude entre l'équation 18.8 et l'équation de quantité de mouvement 9.16 en notant que le gradient de pression est nul (Chapitre 16.2 de la Partie I). La solution de ces deux équations aura exactement la même forme quand $\nu = \alpha$, c'est-à-dire quand le nombre de Prandtl est égal à l'unité. C'est le cas pour l'ensemble des gaz. Dans ces conditions, puisque les deux mécanismes de diffusion auront la même intensité, les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique seront identiques, $\delta = \delta_{th}$. Par contre, quand la viscosité cinématique différera sensiblement de la diffusivité α , une différence en taille existera entre les deux types de couche limite. Nous allons analyser ce comportement en nous aidant de la méthode intégrale.

18.2.2 Equation intégrale de l'énergie

La méthode intégrale nécessite la définition d'un volume de contrôle sur lequel est menée l'intégration de l'équation 18.8. Ce domaine physique est défini à la figure 18.5. Il s'agit du volume ABCD avec une longueur dx et une hauteur H supérieure aux deux épaisseurs de couche limite. L'enthalpie entrant sur la face AB est :

$$\rho_f C_{pf} \left(\int_0^H u T \, dy \right)$$

Celle sortant de la face CD est :

$$\rho_f C_{pf} \left(\int_0^H u T dy \right) + \frac{d}{dx} \left[\rho_f C_{pf} \left(\int_0^H u T dy \right) \right] dx$$

En nous aidant de l'équation 9.23 démontrée au paragraphe 9.3.5 du chapitre 16.2 de la Partie I, nous pouvons formuler le débit massique de fluide entrant dans la couche limite comme suit :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho_f u dy\right) dx$$

Cette quantité de fluide entrant par la face BC apporte une énergie égale à :

$$C_{pf}T_{ext}\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{H}\rho_{f}udy\right)dx$$

La chaleur venant de la plaque au travers de la face DA est la densité de flux de chaleur pariétal :

$$-k_f \frac{\partial T}{\partial y} \mid_{y=0} dx$$

La combinaison de toutes ces quantités conduit à la forme intégrale de l'équation thermique de couche limite :

$$\left[\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{H}\left(T_{ext}-T\right)udy\right] = \left.\alpha\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}\right]$$
(18.9)



FIG. 18.5 – Volume de contrôle pour la méthode intégrale

La résolution de l'équation 18.9 demande de postuler une distribution de vitesse et de température qui vérifie les conditions d'univalence. Au chapitre 16.2 de la Partie I, nous avons illustré la méthode intégrale en adoptant des profils de vitesse linéaire et parabolique. Nous prenons ici l'option d'un polynôme du troisième degré pour approximer u(y) et T(y):

$$u = C_o + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 aga{18.10}$$

$$T = C'_o + C'_1 y + C'_2 y^2 + C'_3 y^3$$
(18.11)

Les quatre coefficients C_i et C'_i des cubiques sont déterminés en imposant les conditions aux limites analogues pour les deux profils comme le montre le tableau 18.1. L'annulation de la dérivée seconde de la vitesse et de la température en y = 0 résulte respectivement de l'application de l'équation de quantité de mouvement et de l'énergie à la paroi. On vérifiera à titre d'exercice que les profils se mettent sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\tilde{u} = \frac{u}{\mathbf{U}_{ext}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{18.12}$$

$$\Theta = \frac{T - T_p}{T_f - T_p} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_{th}}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_{th}}\right)^3 \tag{18.13}$$

y	0	δ	δ_{th}
$u \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	0 - 0	\mathbf{U}_{ext}	- - -
$T \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$	T_p - 0	- -	$\begin{array}{c} T_{ext} \\ 0 \\ - \end{array}$

TAB. 18.1 – Conditions aux limites pour u et T

L'insertion des distributions 18.12 et 18.13 dans l'équation 18.9 conduit à :

$$(T_f - T_p)\mathbf{U}_{ext}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^H \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_{th}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_{th}}\right)^3\right]$$

$$(18.14)$$

$$\left[3\left(y\right) - 1\left(y\right)^3\right]_{-L} = 3\alpha(T_f - T_p)$$

$$*\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy\bigg\} = \frac{3\alpha(T_f - T_p)}{2\delta_{th}}$$

Pour solutionner l'intégrale de l'équation 18.14, il est nécessaire de se fixer qualitativement le rapport des épaisseurs :

$$\zeta = \frac{\delta_{th}}{\delta}$$

Considérons dans un premier temps que la couche thermique est beaucoup plus mince que la couche dynamique, donc que $\zeta \ll 1$, ce qui, d'après la remarque plus avant, correspond à un fluide avec un nombre de Prandtl supérieur à 1 (par exemple, l'eau, les huiles ...). L'intégrant est alors nul pour $y > \delta_{th}$ et 18.14 donne :

$$\frac{d}{dx}\left\{\delta\left(\frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{3}{280}\zeta^4\right)\right\} = \frac{3\alpha}{2\mathbf{U}_{ext}}\left(\frac{1}{\delta\zeta}\right) \tag{18.15}$$

Puisque le rapport ζ est petit devant l'unité, il en est de même de ζ^4 devant ζ^2 . On néglige ζ^4 dans l'équation 18.15 qui se simplifie :

$$\frac{3}{20}\frac{d}{dx}\left(\delta\zeta^2\right) = \frac{3\alpha}{2\mathbf{U}_{ext}}\left(\frac{1}{\delta\zeta}\right) \tag{18.16}$$

En convection forcée, rappelons le, le champ de vitesse gouverne le champ de température mais est découplé de ce dernier. Nous sommes donc en droit d'appliquer la méthode intégrale séparément à l'équation de quantité de mouvement seule et de rechercher l'équation qui exprime la variation de δ . Cette démarche a déjà fait l'objet d'une présentation au paragraphe 9.3.5 du chapitre 16.2 de la Partie I. On vérifiera que le choix d'un profil de vitesse cubique conduit à la différentielle suivante :

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{\mathbf{U}_{ext}} \tag{18.17}$$

La résolution du système d'équations 18.16 et 18.17 dont le détail est laissé à titre d'exercice, fournit les expressions finales suivantes :

$$\delta = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}} \tag{18.18}$$

 et

$$\delta_{th} = \left[\frac{0,975}{Pr^{\frac{1}{3}}}\right]\delta\tag{18.19}$$

La première solution est à comparer aux résultats trouvés à la Partie I, pour des distributions de vitesse linéaires et du deuxième degré. Re_x est le nombre de Reynolds basé sur la distance x à partir du bord d'attaque.

Une approche en tout point semblable peut se mener quand la couche thermique est nettement plus épaisse que la couche dynamique. Cette situation est typique des écoulements de métaux liquides qui sont des fluides à très faibles nombres de Prandtl ($0,003 \ge 0,07$). Dans ce cas, le profil de vitesse est quasi uniforme et l'approximation $u(y) = \mathbf{U}_{ext}$ est tolérée dans l'équation intégrale de l'énergie 18.14. La solution prend la forme suivante :

$$\delta_{th} = \left[\frac{0,610}{Pr^{\frac{1}{2}}}\right]\delta \tag{18.20}$$

D'une façon générale, à Re_x fixé et pour une famille de fluides donnée, l'épaisseur de la couche thermique diminue quand le nombre de Prandtl augmente. Une synthèse qualitative du comportement relatif des deux types de couche limite est fournie à la figure 18.6



FIG. 18.6 – Comportement relatif des couches limites

18.2.3 Coefficient d'échange convectif en régime laminaire

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le coefficient de transfert de chaleur. Compte tenu de sa définition 18.2 et du profil de température 18.13, il vient :

$$h_x = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_p}{T_p - T_{ext}} = \frac{3}{2} \frac{k_f}{\delta_{th}} \tag{18.21}$$

En remontant à la relation 18.5, nous constatons qu' en régime laminaire, l'épaisseur caractéristique δ' correspond aux 2/3 de δ_{th} . A l'aide des résultats 18.18, 18.19 et 18.20, nous explicitons l'expression 18.21 en termes de nombre de Nusselt local pour les différentes catégories de fluides :

- Gaz et liquides

$$\mathbf{N}\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}}{\mathbf{k}_{\mathbf{f}}} = \mathbf{0}, \mathbf{332}\mathbf{P}\mathbf{r}^{\frac{1}{3}}\mathbf{R}\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}}$$
(18.22)

Métaux liquides

$$Nu_{x} = 0,530 (PrRe_{x})^{\frac{1}{2}} = 0,53\sqrt{Pe_{x}}$$
 (18.23)

Les corrélations 18.22 et 18.23 expriment les valeurs locales du coefficient d'échange convectif le long de la plaque plane sur la base de la distance x comptée à partir du bord d'attaque. Une conductance thermique moyenne de convection peut être définie en intégrant les distributions locales sur la longueur L de la plaque. Pour généraliser la méthode, nous supposerons la fonctionnelle suivante :

$$h(x) = Cx^{-n}$$

La valeur moyenne de h sur L s'exprime ainsi :

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = \frac{1}{1-n} C L^{-n} = \frac{1}{1-n} h(x=L)$$
(18.24)

De ce fait, le nombre de Nusselt moyen ou global $\overline{\mathbf{Nu}}$ sur L se calcule connaissant sa distribution locale :

$$\overline{\mathbf{Nu}} = \frac{1}{1-n} N u(x = L) \tag{18.25}$$

Compte tenu de ces résultats, les corrélations de $\overline{\mathbf{Nu}}$ découlent directement de 18.22 et 18.23 :

- Gaz et liquides

$$\overline{\mathbf{N}\mathbf{u}} = \frac{\overline{h}L}{k_f} = 0,664\mathbf{Pr}^{\frac{1}{3}}\mathbf{Re}_{\mathbf{L}}^{\frac{1}{2}}$$
(18.26)

Métaux liquides

$$\overline{\mathbf{Nu}} = 1,060 \left(\mathbf{PrRe}_{\mathbf{L}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,06\sqrt{\mathbf{Pe}_{\mathbf{L}}}$$
(18.27)

Toute l'analyse ci-dessus se base sur l'hypothèse de propriétés de fluide constantes. Quand l'écart de température entre le fluide et la paroi solide devient trop important pour invalider cette condition, il est alors recommandé d'évaluer les caractéristiques physiques du fluide (viscosité, conductivité et masse volumique) à la température du film T_f donnée par la moyenne arithmétique entre T_{ext} et T_p .

18.2.4 Equation de l'énergie dans la couche limite turbulente

Quand la valeur du nombre Reynolds local avoisine **200000** à **500000**, l'écoulement dans la couche limite perd son état ordonné et rentre dans le régime turbulent. Comme

pour le champ de vitesse, la température en un point peut se décomposer en une valeur moyenne dans le temps \overline{T} et une composante fluctuante T':

 $T = \overline{T} + T'$

Avec,

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{t_m} \int_t^{t+t_m} T dt$$

où t_m est la période de temps sur laquelle est déterminée la température moyenne et pour laquelle la fluctuation thermique a une valeur moyenne nulle. En procédant de même pour la vitesse et en substituant les deux décompositions u et T dans l'équation thermique 18.9 on en dérive son expression pour le régime turbulent :

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial\overline{T}}{\partial y} = \alpha\nabla^{2}\overline{T} - \left[\frac{\partial\overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'T'}}{\partial y}\right]$$
(18.28)

La densité de flux de chaleur totale dans un écoulement turbulent comprend le terme de diffusion laminaire et une contribution turbulente qui est la moyenne du produit des fluctuations de vitesse et de température et qui est appelé le flux de Reynolds par analogie avec les contraintes de Reynolds (voir relation 10.10, Chapitre 10 de la Partie I). En négligeant les termes dans la direction axiale, généralement faibles devant les termes transversaux dans la couche limite, on en tire :

$$q_{y,tot} = -\rho_f C_{pf} \left(\alpha \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + \overline{v'T'} \right)$$

Le fondement de l'analogie qui repose sur l'hypothèse que le transport turbulent de l'énergie s'effectue de la même manière que celui de la quantité de mouvement, nous conduit à définir une diffusivité turbulente :

$$q_{y,tot} = -\rho_f C_{pf} (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$$
(18.29)

Dans la région turbulente de la couche limite $\nu_t \gg \nu$ et $\alpha_t \gg \alpha$. On définit le nombre de Prandtl turbulent :

$$\mathbf{Pr_{tur}} = \frac{\nu_{\mathbf{t}}}{\alpha_{\mathbf{t}}}$$

Contrairement au nombre de Prandtl **Pr**, caractéristique du fluide qui peut varier de 0,001 à 1000 suivant la substance, le nombre de Prandtl turbulent est plus fonction de l'écoulement. En considérant que les échanges de quantité de mouvement et de chaleur étaient de même grandeur dans un écoulement turbulent, Reynolds a implicitement supposé $\mathbf{Pr}_{tur} = \mathbf{1}$. Les études montrent que les valeurs numériques du nombre de Prandtl turbulent sont comprises entre 1 et 2. Pour les gaz, il s'avère que pour une couche limite sur la plaque plane l'hypothèse $Pr \simeq Pr_{tur}$ est acceptable.

18.2.5 Coefficient d'échange convectif en régime turbulent

En écoulement turbulent, l'étude analytique du développement de la couche limite devient plus compliquée et dépend du modèle de turbulence choisi. Pour déterminer le coefficient de transfert de chaleur, on a le plus souvent recours à l'expérience ou à l'analogie avec le coefficient de frottement. Cette dernière méthode est discutée au paragraphe suivant. Pour la plaque plane, la corrélation de Whitaker est conseillée pour autant que $\mathbf{Re}_{\mathbf{x}}$ soit supérieur à 200000 :

$$Nu_x = 0,029Pr^{0,43}Re_x^{0,8}$$
 (18.30)

La détermination de la valeur moyenne $\overline{\mathbf{Nu}}$ est ici délicate : à moins d'être artificiellement déclenchée par des générateurs de paroi, la couche limite turbulente est toujours précédée par une couche limite laminaire dans laquelle les mécanismes de transfert de chaleur sont corrélés différemment. Par conséquent, la moyenne devra être effectuée sur deux régions distinctes, la première purement laminaire et la seconde complètement turbulente. Simplifions le problème en acceptant que l'écoulement est laminaire sur la portion $0 \le x \le L_{\ell am}$ et turbulent sur le prolongement $L_{\ell am} \le x \le L$. Compte-tenu de la définition de la conductance thermique moyenne sur L, nous sommes amenés à écrire :

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \left(\int_0^{L_{\ell am}} h_{\ell am}(x) dx + \int_{L_{\ell am}}^L h_{tur}(x) dx \right]$$
(18.31)

Pour expliciter ces intégrales, on partira respectivement des corrélations 18.22 (fluides classiques) pour $h_{\ell am}(x)$ et 18.30 pour $h_{tur}(x)$. Intégration faite, on obtient la corrélation du nombre de Nusselt global de plaque :

$$\overline{\mathbf{Nu}} = 0,036\mathbf{Pr^{0,43}} \left(\mathbf{Re_{L}^{0,8} - Re_{c}^{0,8}} \right) + \mathbf{0},\mathbf{664Pr^{\frac{1}{3}}Re_{L}^{0,5}}$$
(18.32)

où $\mathbf{Re_c}$ est le nombre de Reynolds critique de transition, typiquement situé au environ de 200000. La figure 18.7 compare les prédictions du nombre de Nusselt moyen obtenues selon les différentes corrélations. On remarque que, très rapidement quand le nombre de Reynolds de la plaque s'élève, la corrélation mixte 18.32 se confond avec celle de l'écoulement entièrement turbulent sur la longueur L, signifiant que la contribution de la portion laminaire devient insignifiante et pourrait être négligée.

18.2.6 Analogie avec le Coefficient de Frottement

Nous avons montré au chapitre 16.2 de la Partie I que le coefficient de frottement local C_f dans une couche limite laminaire est relié au nombre de Reynolds local par la fonctionnelle suivante :

$$C_f(x) = \frac{Cte}{\sqrt{\mathbf{Re}_{\mathbf{x}}}} \tag{18.33}$$

La valeur numérique de la constante dépend de l'approche adoptée. La méthode intégrale fournit 0,58 pour un profil de vitesse supposé linéaire dans la couche limite, 0,73 pour une distribution parabolique et 0,646 pour la variation cubique 18.12. Nous prenons la valeur de 0,664 qui correspond à la solution exacte de Blasius (relation 9.22, Chapitre 16.2, Partie I).

Par ailleurs, la relation 18.22 peut se mettre sous une forme semblable à 18.33 en divisant chacun de ses membres par $\mathbf{PrRe_x}$:

$$\frac{\mathrm{Nu}_{\mathrm{x}}}{\mathrm{PrRe}_{\mathrm{x}}} = \mathrm{St}_{\mathrm{x}} = 0,332\mathrm{Pr}^{-2/3}\mathrm{Re}_{\mathrm{x}}^{-0,5}$$
(18.34)



FIG. 18.7 – Nombre de Nusselt moyen

Le groupement St, est appelé le nombre de Stanton :

$$\mathbf{St} = rac{\mathbf{h}}{
ho \mathbf{C_p} \mathbf{U_{ext}}}$$

Il compare la chaleur échangée par convection sous une différence de température ΔT à la variation d'enthalpie qui serait advectée sous le même potentiel thermique. Comme le coefficient de frottement, ce nombre prend de faibles valeurs ($\approx 0,001$). Ne nécessitant pas l'introduction d'une longueur de référence, il est souvent utilisé pour modéliser le transfert de chaleur dans les phénomènes d'aérodynamiques externes comme les vols supersoniques et hypersoniques ou les techniques de refroidissement des aubes de turbines à gaz.

Les relations 18.33 et 18.34, identiques au nombre de Prandtl près, fournissent **l'analogie de Colburn** :

$$\left| \mathbf{St_x Pr^{2/3}} = \frac{\mathbf{C_f}}{2} \right| \tag{18.35}$$

Le résultat 18.35 a de nombreuses implications dans la recherche du coefficient d'échange par convection puisqu'il indique que h peut être directement déterminé par la mesure de force sur une plaque où aucun transfert de chaleur prend place. A remarquer que l'inverse est aussi vrai puisqu'une évaluation du transfert thermique local permet de remonter à la valeur de la contrainte de cisaillement. Il s'avère que l'analogie se vérifie pour l'écoulement turbulent sur la plaque plane. Ce résultat confirme que les mécanismes de transport de quantité de mouvement par effet visqueux et d'échange thermique par diffusion sont liées à la fois sur les échelles microscopiques et sur les échelles macroscopiques.

18.3 Convection pour des objets ronds

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'échange de chaleur entre un objet cylindrique ou sphérique et le fluide s'écoulant autour. La géométrie du cylindre à section constante placé dans un écoulement uniforme normal à son axe est d'abord discuté. Le cas de la sphère est ensuite présenté.

18.3.1 Cas du cylindre

C'est une configuration fréquemment rencontrée dans la pratique, notamment dans les échangeurs à faisceaux de tubes. Néanmoins, la détermination de la force de traînée comme du coefficient d'échange demeure relativement difficile de part la complexité de l'écoulement au voisinage du cylindre. La figure 18.8 schématise les différentes situations qui peuvent être rencontrées selon la valeur du nombre de Reynolds du cylindre $\mathbf{Re}_{\mathbf{D}} = \mathbf{DU}_{ext}/\nu$.



FIG. 18.8 – Ecoulement autour d'un cylindre

Pour des valeurs de $\mathbf{Re}_{\mathbf{D}}$ proches de l'unité, les lignes de courant épousent la géométrie circulaire en la contournant sans présenter aucune séparation. La description analytique du mouvement du fluide en dehors de la couche limite est conforme à la théorie des écoulements potentiels (voir paragraphe 9.2 du chapitre 16.2, Partie I). Le champ de vitesse est donnée par la distribution de vitesse en coordonnées polaires, r, Θ :

$$V(r,\Theta) = \mathbf{U}_{ext}\sin\Theta\left(1 + \frac{D}{2r}\right) \tag{18.36}$$

La variation angulaire de la pression sur le cylindre (2r = D) se déduit de l'application de l'équation de Bernoulli (Eq. 9.11, chapitre 16.2, Partie I) et se traduit sous forme du coefficient de pression :

$$CP = \frac{2(P - \mathbf{Pe})}{\rho \mathbf{U}_{ext}^2} = 1 - 4\sin^2\Theta$$
(18.37)

La distribution de pression fait apparaître deux maxima et deux minima symétriquement situés. Le premier maximum est placé au point d'attaque appelé aussi point de stagnation ou d'impact frontal à $\Theta = 0^{\circ}$ le second à l'opposé au point de fuite à $\Theta = 180^{\circ}$. Quant aux minima, ils se positionnent dans le plan médian à $\Theta = 90^{\circ} \Theta = 270^{\circ}$. De par la symétrie dans la répartition de P, la force de traînée que subit le cylindre ne dépend pas des forces de pression; elle est seulement due aux forces de frottement visqueux dans la couche limite. A des nombres de Reynolds de l'ordre de 10, les forces d'inertie deviennent appréciables et l'on voit naître deux petits tourbillons contrarotatifs fixes derrière le cylindre où règne désormais une basse pression. A cause de cet écoulement de recirculation, la distribution de pression subit une distorsion et la symétrie amont-aval est détruite. La traînée de pression contribue maintenant pour environ 50% de la traîné totale. Quand le nombre de Reynolds atteint la centaine, les tourbillons deviennent instables et se détachent alternativement pour former un sillage qui s'étale sur une longue distance. Cette double rangée de grandes structures dites cohérentes et émises périodiquement est appelée l'allée des tourbillons de von Karman. La fréquence d'émission f est reliée au nombre de Strouhal $\mathbf{Sr} = \mathbf{fD}/\mathbf{U}_{ext}$ qui est plus ou moins constant et de l'ordre de 0,2. La traînée est dominée par les forces de pression. Dans la plage $1000 \leq \text{Re}_{D} \leq 100000$ la traînée de frottement devient négligeable. Le coefficient de traînée C_D , force divisée par le produit du maître couple et de la pression dynamique loin en amont, reste constant parce que la couche limite se maintient en régime laminaire du bord d'attaque jusqu'au point de séparation qui se situe entre $\Theta = 80$ et 85° . Au delà de $\mathbf{Re}_{\mathbf{D}}^{*} = \mathbf{10}^{5}$, valeur critique qui dépend en fait du niveau de turbulence de l'écoulement libre, le niveau d'énergie cinétique de l'écoulement est suffisant pour empêcher le décollement provoqué par le gradient de pression adverse dû à la courbure des lignes de courant. La couche limite a la possibilité de devenir turbulente en restant attachée au cylindre et le point de séparation se déplace vers plus loin vers l'aval aux alentours de $\Theta = 130^{\circ}$.

On retrouve la signature de ces différents comportements de l'écoulement dans l'évolution du coefficient d'échange de chaleur autour du cylindre dont quelques distributions angulaires sont tracées à la figure 18.9, le paramètre étant le nombre de Reynolds.

Le premier minimum de $h(\Theta)$ observé aux plus bas $\operatorname{Re}_{\mathbf{D}}$ dévoile l'apparition du décollement aux environs de $\Theta = 80^{\circ}$. En amont de ce point de séparation on retrouve des tendances semblables à celles observées sur la plaque plane, à savoir un maximum au point de stagnation ($\Theta = 0^{\circ}$) suivi d'une décroissance de h due à l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite laminaire. Après le point de décollement, une augmentation du coefficient de transfert thermique se dessine. C'est une région de grande turbulence contrôlée par le brassage provoqué par les tourbillons qui viennent balayer la paroi du cylindre. Toutefois, il faut noter que les valeurs de h ne surpassent pas celle du point d'impact. Aux plus grands nombres de Reynolds pour lesquels la couche limite laminaire ne décolle pas, apparaissent deux minima. Le premier correspond à la transition du régime laminaire-turbulent; l'écoulement change de nature, les mécanismes de transport s'améliorent et l'échange thermique augmente pour atteindre un maximum au point où la couche limite est totalement turbulente. De là, la conductance convective recommence à chuter pour atteindre le second minimum vers $\Theta = 130^{\circ}$ qui indique le décollement de la couche limite turbulente. La remontée de $h(\Theta)$ qui suit résulte du mélange hautement



FIG. 18.9 - Transfert de chaleur localsur le cylindre obtenu par Giedt

turbulent dans le sillage. Dans cette région, l'intensité de l'échange de chaleur peut être supérieure à celle qui caractérise la zone de stagnation.

La nature compliquée des processus de décollement rend impossible le calcul analytique du coefficient de transfert de chaleur. On utilise le plus souvent le nombre de Nusselt global qui représente la moyenne sur le périmètre du cylindre :

$$\overline{\mathbf{N}\mathbf{u}}=rac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathbf{N}\mathbf{u}(\mathbf{\Theta})\mathbf{d}\mathbf{\Theta}$$

La corrélation proposée par Whitaker qui s'applique aux gaz et aux liquides non métalliques reprend bien les différentes évolutions de l'écoulement :

$$\mathbf{Nu} = \left(\mathbf{0}, 4\mathbf{Re}^{\mathbf{0},\mathbf{5}} + \mathbf{0}, \mathbf{0}\mathbf{6Re}^{\frac{2}{3}}
ight) \mathbf{Pr}^{\mathbf{0},4} \left(rac{\mu_{\mathbf{ext}}}{\mu_{\mathbf{p}}}
ight)^{rac{1}{4}}$$

Elle s'accompagne du domaine d'applicabilité suivant :

$$40 \leq \mathbf{Re} = \frac{\mathbf{U_{ext}}\mathbf{D}}{\nu_{ext}} \leq \mathbf{10^{5}}$$
$$0, 67 \leq \mathbf{Pr} \leq \mathbf{300}$$
$$0, 25 \leq \frac{\mu_{ext}}{\mu_{p}} \leq 5, 2$$

Les viscosités μ_{ext} et μ_p sont respectivement calculées à la température T_{ext} et T_p .

La dépendance en $\sqrt{\mathbf{Re}}$ dénote de la contribution de la couche limite laminaire attachée alors que celle en $\mathbf{Re}^{2/3}$ caractérise la contribution du sillage dans la zone arrière du cylindre.

18.3.2 Cas de la sphère

L'écoulement autour d'une sphère présente de grandes similitudes avec celui autour du cylindre. On retrouve qualitativement les mêmes comportements en fonction du nombre de Reynolds. Il n'est donc pas étonnant d'aboutir à une expression corrélative pour le nombre de Nusselt moyen de même facture :

$$\mathrm{Nu_{sph}} = 2 + \mathrm{Nu_{cyl}}$$

avec comme domaine

$$3,5 \le \mathbf{Re} \le \mathbf{80000}$$
 , $\mathbf{0,7} \le \mathbf{Pr} \le \mathbf{380}$
 $1 \le \frac{\mu_{ext}}{\mu_p} \le 3,2$

Les deux corrélations ne diffèrent que par la constante additive de 2 qui représente le seuil de transfert par conduction pure. Démontrons ce fait. Considérons un objet sphérique placé dans un fluide au repos. Il n'y aucune convection forcée ou naturelle. A vitesse de fluide nulle, seule la conduction régit le transfert thermique. Le flux de chaleur donné par la loi de Fourier est uniquement radial :

$$Q = -4\pi r^2 k_f \frac{dT}{dr}$$

L'intégration de r = D/2 à $r \mapsto \infty$, permet de l'exprimer en fonction du potentiel thermique $(T_p - T_{ext})$ et donc d'introduire le coefficient de transfert de chaleur h; on obtient :

$$Q = 4\pi Rk_f (T_p - T_{ext}) = 4\pi R^2 h (T_p - T_{ext})$$

D'où l'expression de h et de **Nu** pour un régime de conduction pure entre une sphère et un fluide :

$$h = \frac{k_f}{R} \implies \mathbf{Nu} = \frac{\mathbf{hD}}{\mathbf{k_f}} = \mathbf{2}$$

18.4 Convection dans des conduites

18.4.1 Régime thermohydraulique établi

Ecoulement laminaire

Un fluide incompressible aux propriétés physiques constantes s'écoule en régime laminaire permanent dans une conduite cylindrique à section constante. C'est l'écoulement de Poiseuille étudié au chapitre 7 de la Partie I. Le champ de vitesse est de révolution et entièrement déterminé par le profil de la composante u:

$$\frac{u}{\mathbf{U_{max}}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{18.38}$$

R est le rayon de la conduite.

La chaleur dissipée par viscosité est supposée faible et donc négligée. Le tube est uniformément chauffé (ou refroidi) tout au long de la paroi : la densité de flux de chaleur pariétal q_p est donc constante et connue. En rejetant l'effet, considéré minime, de la conduction axiale, l'équation thermique du fluide se ramène à une formulation du type 18.8 écrite en coordonnées cylindriques x, r:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{18.39}$$

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{er} \quad \left. -\frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{q_p}{k_f} \tag{18.40}$$

On s'intéresse au régime thermique développé ce qui implique que les profils de température adimensionnalisés sont invariants avec la distance axiale x à un accroissement général près qui se calcule en évaluant la variation de la température moyenne sur une section < T > :

$$\dot{m}C_p \frac{d < T >}{dx} = \mho q_p$$

d'où :

$$\frac{d < T >}{dx} = \frac{\mho q_p}{\dot{m}C_p} = -\text{constante}$$

par conséquent :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Co = \text{ constante}$$
 (18.41)

L'introduction du profil de vitesse 18.38 et de la condition de profil établi 18.41 dans l'équation 18.39 permet l'intégration dont les constantes sont déterminées par les deux conditions aux limites 18.40. Le profil de température est donné par :

$$T - T_c = \frac{Co\mathbf{U}_{\max}R^2}{4\alpha} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right]$$
(18.42)

 T_c est la température sur l'axe du conduit.

Dans les écoulements internes, le coefficient d'échange par convection est basé sur la différence entre la température de paroi T_p et une température représentative de l'écoulement dans la section droite. La température de paroi T_p est obtenue en faisant r = R dans l'expression 18.42 :

$$T_p = T_c + \frac{3}{16} \cdot \frac{\mathbf{U}_{\max} R^2}{\alpha} Co$$

La température de section est la température moyenne < T > qui se déduit de la distribution 18.42 selon la définition suivante :

$$< T > = \frac{1}{\pi R^2 < u > \int_0^R \left[u(r)T(r) \right] 2\pi r dr$$

Rappelons que $\langle u \rangle = \mathbf{Uo} = \mathbf{0}, \mathbf{5U}_{\max}$ (voir résultat 7.3 du chapitre 7, Partie I). Tous calculs faits, on arrive à :

$$\langle T \rangle = T_c + \frac{7}{96} \cdot \frac{\mathbf{U}_{\max} R^2}{\alpha} Co$$
 (18.43)

Sur la base de ce potentiel thermique, le coefficient de transfert de chaleur pour un écoulement thermohydrauliquement développé dans un tube à flux pariétal constant devient :

$$h = \frac{k_f (\partial T / \partial r)|_{r=0}}{T_p - \langle T \rangle} = \frac{48}{11} \frac{k_f}{D}$$
(18.44)

Ce qui montre que le nombre de Nusselt correspondant basé sur le diamètre du tube est indépendant du nombre de Reynolds :

$$\mathbf{Nu}_{\mathbf{q}_{\mathbf{p}}} = \mathbf{4}, \mathbf{36} \tag{18.45}$$

Pour une conduite à paroi isotherme, l'approche est semblable mais les calculs un peu plus longs car ils impliquent une procédure itérative. Néanmoins, le résultat est qualitativement semblable : on retrouve une conductance qui ne varie pas avec **Re** et dont l'expression conduit à un nombre de Nusselt de valeur :

$$\mathbf{Nu_{T_p}} = \mathbf{3,66} \tag{18.46}$$

On retiendra qu'en régime laminaire, la nature de la condition thermique de paroi modifie la valeur du coefficient d'échange mais que ce dernier est indépendant du nombre de Reynolds.

Les relations 18.45 et 18.46 montrent que l'analogie avec le coefficient de frottement C_f va conduire à une formulation différente de celle établie par Colburn (relation 18.35). En effet, le nombre de Stanton s'écrit :

$$\mathbf{St} = rac{\mathbf{Nu}}{\mathbf{RePr}} = rac{\mathbf{C^{te}}}{\mathbf{RePr}}$$

et le coefficient de frottement déterminé au chapitre 7 de la Partie I s'exprime par :

$$C_f = \frac{16}{\mathbf{Re}}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\frac{\mathbf{StPr}}{C_f} = C^{te} \tag{18.47}$$

Ecoulement turbulent

Une approche analytique comme celle menée pour le régime laminaire, n'est pas si simple en écoulement turbulent : il est nécessaire dans une première étape de déterminer le profil de vitesse (un exemple a été présenté au chapitre 10 de la Partie I) sur la base d'un modèle de turbulence puis d'introduire un second modèle de diffusion turbulente pour la recherche de la distribution de température. Il existe, cependant, une autre façon d'attaquer le problème : elle consiste à conjecturer, ce qui s'est avéré correcte dans l'ensemble des cas, que les transports de quantité de mouvement et de chaleur dans un écoulement turbulent développé en conduite, s'effectuent au même taux. La densité de flux de chaleur turbulent est exprimée par la relation 18.29. De la même manière, la contrainte de cisaillement turbulente se traduit en terme de la viscosité turbulente. En ne prenant pas en compte les contributions laminaires et en adoptant q positif quand la chaleur rentre dans le fluide, la première écriture du postulat est :

$$\frac{\tau_{xr}}{\rho} = -\nu_t \frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{q}{\rho C_p} = \alpha_t \frac{d\overline{T}}{dr}$$
(18.48)

Il s'applique en tous points de la section et en particulier à la paroi. En introduisant le fait que le nombre de Prandtl turbulent est unitaire la seconde écriture se résume à :

$$\frac{q}{C_p \tau_{xr}} = \frac{q_p}{C_p \tau_p} = -\frac{d\overline{T}}{d\overline{u}} = \text{ constante}$$
(18.49)

On intègre l'équation 18.49 entre la valeur moyenne et la valeur pariétale pour obtenir :

$$\frac{q_p \mathbf{Uo}}{C_p \tau_p} = T_p - \langle \overline{T} \rangle \tag{18.50}$$

En comparant le résultat 18.50 à la loi de Newton réécrite pour l'écoulement turbulent dans un tube :

$$q_p = h\left(T_p - \langle \overline{T} \rangle\right)$$

on tire l'expression du coefficient d'échange par convection présenté sous forme du nombre de Stanton :

$$\mathbf{St} = \frac{\mathbf{h}}{\rho \mathbf{C}_{\mathbf{p}} \mathbf{U} \mathbf{o}} = \frac{\tau_{\mathbf{p}}}{\rho \mathbf{U} \mathbf{o}^2} \tag{18.51}$$

Or, nous avons vu au chapitre 10 de la Partie I que le coefficient de frottement, contrainte de cisaillement à la paroi normée par la pression dynamique, est proportionnelle au coefficient de perte de charge λ et que ce dernier est relié au nombre de Reynolds d'un tube lisse par la loi de Blasius (formule 10.6 du chapitre 10 de la Partie I). En substituant dans le dernier membre de la relation 18.51, l'expression de λ , il vient :

$$\mathbf{St} = \frac{\mathbf{Nu}_{\mathbf{D}}}{\mathbf{Re}_{\mathbf{D}}\mathbf{Pr}} = \frac{\lambda}{\mathbf{8}} = \mathbf{0}, \mathbf{0395}\mathbf{Re}_{\mathbf{D}}^{-\mathbf{0},\mathbf{25}}$$
(18.52)

Cette relation, souvent référée à l'analogie de Reynolds, conduit au résultat final :

$$Nu_{D} = 0,0395 Re_{D}^{3/4}$$
(18.53)

Comme dans cette analyse, les coefficients phénoménologiques de transport moléculaire n'ont pas été pris en considération, il est logique que la dépendance en $\mathbf{Pr}^{2/3}$ mis en évidence par l'analogie de Colburn n'apparaisse pas dans la relation 18.53. En fait, l'expérience montre qu'il y a un effet du nombre de Prandtl et qu'une bonne corrélation pour les écoulements turbulents développés et hydrauliquement lisses en conduite est :

$$Nu = 0,023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$
(18.54)
Pour le régime hydrauliquement rugueux, il est recommandé d'utiliser :

$$\mathbf{Nu} = \frac{\mathbf{0}, \mathbf{5C_f Pe}}{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{0}, \mathbf{5C_f}} (\mathbf{4}, \mathbf{5Re_{\Lambda}^{0,2} Pr^{0,5} - 8, 48})}$$
(18.55)

La corrélation 18.55 s'accompagne des conditions d'application suivantes :

$$\mathbf{Re} \ge \mathbf{10^4}$$

 $0, 5 \le \mathbf{Pr} \le \mathbf{10}$
 $0, 001 \le \tilde{\Lambda} \le 0, 05$

Avec

$$\operatorname{Re}_{\Lambda} = rac{\Lambda u^*}{
u}$$

où $\tilde{\Lambda}$ est la rugosité relative de la paroi et u^* la vitesse de frottement = $\sqrt{\tau_p}/\rho$.

18.4.2 Régime thermique non développé

18.4.3 Ecoulement laminaire

Il existe des situations caractérisées par un écoulement hydrodynamiquement développé alors que le profil de température continue d'évoluer. C'est le cas par exemple d'un tube composé d'une portion isotherme ou adiabatique suivie d'une zone de chauffe ou de refroidissement comme le schématise la figure 18.10. Dans ces conditions, la couche visqueuse commence par se développer pour envahir toute la section après une longueur L. Dès que débute la portion avec transfert de chaleur, une couche thermique diffuse dans l'écoulement jusqu'à ce que la distribution de température soit établie pour une longueur L_{th} . Le nombre sans dimension qui contrôle l'échange convectif dans un tel comportement thermohydraulique est **le nombre de Graetz** :

$$\mathrm{Gz}=\mathrm{Re}\mathrm{Pr}rac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}}=\mathrm{Pe}rac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}}$$



FIG. 18.10 – Effet d'entrée thermique

En particulier, la longueur d'établissement thermique dépend de sa valeur. Le tableau 18.2 compare les valeurs normées de L et L_{th} pour le cas de l'écoulement laminaire, différentes formes de conduite et les deux types de conditions aux limites pariétales.

Forme de section	$L/D_h \mathbf{Re}$	$\frac{L_{th}/D_h \mathbf{Pe}}{q_p \text{ et } T_p}$
Cercle	$0,\!056$	0,043 et 0,033
Carré	0,09	0,066 et 0,041
Parois $//$	$0,\!011$	0,012 et 0,008

TAB. 18.2 – Longueurs d'établissement

On conclut que les longueurs d'établissements hydrodynamique et thermique sont du même ordre de grandeur. Le transfert de chaleur est calculé via la corrélation suivante :

$$\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}_{\infty} + \mathbf{1}, \mathbf{86Gz^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{<\mu>}{\mu_{\mathbf{p}}}\right)^{\mathbf{0},\mathbf{14}}$$
(18.56)

Avec le domaine d'application suivant :

$$0, 48 \le \mathbf{Pr} \le \mathbf{16700}$$

 $0,0044 \le \frac{<\mu>}{\mu_p} \le 9,75$

 \mathbf{Nu}_{∞} est le nombre de Nusselt pour l'écoulement thermiquement développé.

18.4.4 Ecoulement turbulent

En écoulement turbulent, les mécanismes de diffusion sont plus prononcés et les effets d'entrée thermique disparaissent plus rapidement qu'en écoulement laminaire. La figure 18.11 trace les variations de la longueur d'établissement dans un tube lisse en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl.

Pour les métaux liquides, la corrélation s'exprime en fonction du nombre de Peclet :

$$L_{th}/D_h = \frac{0,04\mathbf{Pe_D}}{1+0,002*\mathbf{Pe_D}}$$

Les prédictions sont en bon accord avec les courbes de la figure 18.11 dans la plage $190 < \mathbf{Pe} < \mathbf{1800}$.

Pour les fluides non métalliques, l'échange convectif peut être calculé par la corrélation de al-Arabi :

$$\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}_{\infty} \left[1 + \frac{1}{(\mathbf{x}/\mathbf{D_h})^{0,9} \mathbf{Pr^{1/6}}} \left(0, 68 + \frac{3000}{\mathbf{Re^{0,81}}} \right) \right]$$

qui est valable pour $x/D_h > 3$, $500 < \text{Re} < 10^5$ et 0, 7 < Pr < 75.



FIG. 18.11 – Longueur thermique d'établissement pour un écoulement turbulent en tube lisse

Pour les métaux liquides, la corrélation de Chen et Chiou est utilisée :

$${f Nu} = \left[{4,5 + 0,0156{Pe^{0,85}}}
ight] \left[{1 + rac{7}{{f x}/{D_h}} + rac{{2,8}}{{f x}/{D_h}}\ln \left({rac{{f x}/{D_h}}{{10}}}
ight)}
ight]$$

Chapitre 19

Convection Naturelle

La convection libre ou naturelle est la forme d'échange convectif la plus souvent ressentie dans la vie courante. L'écoulement du fluide est provoquée par l'action d'une poussée d'Archimède résultant d'une différence de masse volumique dans le fluide. Dans le cas du transfert thermique, une différence de température est à l'origine de la variation de masse volumique. Dans le cas du transfert de matière (traité à la Partie III), c'est le fruit d'un champ de concentration non uniforme. Dans ce contexte, la force de volume considérée est la force de pesanteur.

La masse volumique des gaz et des liquides dépend de la température. Généralement, elle diminue avec l'élévation du niveau thermique : c'est le phénomène de dilatation du fluide : $\partial \rho / \partial T < 0$. De ce fait, il y aura toujours un gradient de masse volumique associé à un gradient de température dans un fluide. Au contact d'un corps chaud, la température du fluide croît localement près de la paroi du solide et sa masse volumique diminue. Le fluide environnant à plus basse température va exercer une poussée vers le haut qui met en mouvement la masse de fluide chaud. Celle-ci est systématiquement remplacée par une arrivée d'air froid qui se réchauffe à son tour entretenant le mouvement. Une situation en tous points similaires serait obtenue en présence d'un corps froid si ce n'est que les courants convectifs se produiraient en sens inverses comme le précise la figure 19.1.

Après une certaine distance, l'écoulement perd son caractère laminaire et devient turbulent.

On distingue deux types de convection naturelle ; la convection externe qui se produit sur des surfaces placées dans un environnement fluide libre et la convection confinée qui s'établit dans des enceintes fermées, formées par des parois à températures différentes. Les propriétés de ces deux familles de convection libre sont traitées successivement.

19.1 Convection naturelle externe

19.1.1 Plaque Plane Verticale

On se penche sur l'analyse théorique de l'écoulement laminaire en considérant la situation classique de la plaque plane positionnée verticalement dans un fluide dont la température est plus basse que celle de la paroi solide. Les schémas a et c de la figure 19.1 présentent le problème physique. L'objectif est de décrire le comportement thermohydraulique (ou thermoaéraulique) du fluide en contact avec la plaque plane. Les champs de vitesse et de température sont intimement couplés et une seule couche limite se développe



FIG. 19.1 – Convection libre ou naturelle

le long de la plaque. La température T_p est supérieure à la température du fluide T_f au loin de la plaque; un mouvement ascendant du fluide en résulte. Les écarts de température restent modérés et toutes les propriétés physiques peuvent être supposées constantes. Considérons dans un premier temps la portion où l'écoulement possède un comportement laminaire permanent. Les équations fondamentales qui décrivent le transport de quantité de mouvement et de chaleur dans le fluide sont l'équation de conservation de la masse, l'équation du mouvement de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Les différences de température vont induire des variations locales de la masse volumique qui restent d'amplitudes suffisamment faibles pour ne pas être prises en compte dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{19.1}$$

Par contre, elles sont à l'origine de la force de volume extérieure, source motrice du phénomène, et doivent être retenues dans l'équation de quantité de mouvement. Nous sommes de nouveau en présence d'un problème de couche limite sur une surface plane; seule la composante suivant le mouvement principal Ox présente un caractère non trivial :

$$\rho_f\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_f g \tag{19.2}$$

En effet, l'écriture mathématique de la quantité de mouvement suivant Oy se résume à $\partial P/\partial y = 0$. La variation d'enthalpie du fluide et le transport par conduction transversale sont les deux termes qui constituent l'équation de l'énergie ; la chaleur dissipée par effet visqueux étant quasi inexistante eu égard aux faibles niveaux de vitesse d'un écoulement

en convection libre :

$$\rho_f C_{pf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
(19.3)

Pour déterminer le gradient de pression suivant l'axe Ox, on se place sur le bord de la couche limite. En ce lieu $y = \delta$, la composante u de la vitesse est nulle, la masse volumique est égale à celle du fluide au loin de la paroi $\rho_f = \rho_{ext}$ et l'équation 19.2 précise que :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{ext}g\tag{19.4}$$

Cette égalité nous permet d'apporter une écriture modifiée des forces extérieures :

$$-\rho_f g - \frac{\partial P}{\partial x} = (\rho_{ext} - \rho_f) g \tag{19.5}$$

Le changement de masse volumique est reliée à la variation de température par le **coef**ficient de dilatabilité ou d'expansion thermique du fluide β :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial T} \right)_P$$

En exprimant cette dérivée par un rapport de différences finies, $\Delta \rho$ et ΔT on montre que le terme moteur du mouvement qui porte le nom de **force d'Archimède**, s'exprime comme suit :

$$-\rho_f g - \frac{\partial P}{\partial x} = -\beta \rho_f \left(T_{ext} - T \right) g \tag{19.6}$$

L'équation de quantité de mouvement 19.2 prend la forme finale :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta \left(T - T_{ext}\right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
(19.7)

Si le fluide est un gaz parfait, on complète le système d'équations par la loi constitutive :

$$P = \rho \Re T$$

Dans ce cas, le coefficient β devient une simple fonction de la température T_{ext} :

$$\beta = \frac{(\rho_{ext}/\rho_f) - 1}{T - T_{ext}} = \frac{(T/T_{ext}) - 1}{T - T_{ext}} = \frac{1}{T_{ext}} \quad \equiv \quad [K]$$

En ce qui concerne les liquides, la valeur de β est généralement données dans les tables des propriétés physiques.

La normalisation des équations thermohydrauliques fait apparaître les nombres sans dimension qui gouvernent le phénomène. Pour ce faire, il est important de bien sélectionner les normes des grandeurs géométriques et physiques. La coordonnée axiale x est rapportée à la longueur de la plaque. La coordonnée transversale est réduite par l'épaisseur de la couche limite δ . La température adimensionnelle s'obtient en utilisant le potentiel thermique $\Theta = (T - T_{ext})/(T_p - T_{ext})$. Il n'y a pas à proprement parler de norme de vitesse bien définie étant donné que le champ extérieur est à vitesse nulle et que l'écoulement évolue tout au long de la plaque; on pose arbitrairement **Uo** vitesse de référence suivant Ox qu'il s'agira de déterminer par la suite et \mathbf{V}_{ref} son équivalente dans la direction Oy. L'équation normée de la conservation de la masse est :

$$\frac{\mathbf{Uo}}{L} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{\mathbf{V}_{ref}}{\delta} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right] = 0 \tag{19.8}$$

Les dérivées sont de l'ordre de un et la norme de vitesse suivant la direction transversale vérifie l'approximation $\mathbf{V}_{ref} \approx \mathbf{Uo}\delta/\mathbf{L}$. Faisant usage de cette relation, la forme adimensionnelle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\left[\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}\right] + \left[\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\right] = \frac{\mathbf{Gr}}{\mathbf{Re}^2}\left[\Theta\right] + \frac{1}{\mathbf{Re}}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}\right]$$
(19.9)

Avec $\mathbf{Re} = \mathbf{UoL}/\nu$ et $\mathbf{Pe} = \mathbf{RePr}$

Un nouveau nombre sans dimension apparaît dans l'équation normée du mouvement. Il s'agit du **nombre de Grashof Gr** :

$$\mathbf{Gr} = \frac{\mathbf{g}\beta \mathbf{L}^{\mathbf{3}} \left(\mathbf{T}_{\mathbf{p}} - \mathbf{T}_{\mathbf{ext}}\right)}{\nu^{\mathbf{2}}}$$
(19.10)

Il compare l'effet de flottaison produit par la force motrice d'Archimède à l'effet résistif induit par le cisaillement visqueux. Il est proportionnel à l'écart de température et varie comme le cube de la longueur suivant laquelle se fait le mouvement. En convection libre, le nombre de Grashof joue un rôle identique à celui qu'a le nombre de Reynolds en convection forcée; de ce fait, il contrôlera le passage du laminaire au turbulent et l'intensité des échanges de chaleur. Pour s'en convaincre il suffit de prendre pour vitesse de référence $\mathbf{Uo} = \mathbf{g}\beta(\mathbf{T_p} - \mathbf{T_{ext}})\mathbf{L}^2/\nu$ et de constater que $\mathbf{Gr} \equiv \mathbf{Re}$.

Dans le cas général, d'une convection mixte produite par la combinaison d'un écoulement forcé, caractérisé par une vitesse **Uo** connue, et d'un mouvement induit par des effets thermiques, l'équation 19.9 indique que si :

- 1. $\mathbf{Gr/Re^2} \cong \mathbf{1}$, les effets des convections libre et forcée sont du même ordre de grandeur. Le nombre de Nusselt dépendra des trois nombres adimensionnels **Re**, **Gr** et **Pr**. Ce point est abordé en fin de chapitre.
- 2. $\mathbf{Gr/Re^2} \ll \mathbf{1}$, l'échange thermique est essentiellement dû à la convection forcée et $\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr})$ (voir chapitre 18).
- 3. $Gr/Re^2 \gg 1$, l'écoulement est le résultat de la convection naturelle et Nu = Nu(Gr, Pr)

Dans le cas d'une convection libre laminaire sur une paroi verticale, la recherche de la corrélation de Nusselt peut être entreprise au moyen de la méthode intégrale. La démarche est identique à celle décrite en détails au paragraphe 18.2.2 du chapitre 18 sur la convection forcée ; aussi seules les grandes lignes sont reprises ci-après. La méthode se porte successivement sur la quantité de mouvement et l'énergie.

- Equation de la quantité de mouvement

Rappelons que l'intégrale de 0 à δ de la dérivée particulaire de la vitesse se combine avec l'équation de continuité pour faire disparaître la composante transversale de vitesse :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u^2 dy\right) =$$

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} + g\beta \int_0^\delta \left(T - T_{ext}\right) dy \tag{19.11}$$

- Equation de l'énergie

Elle est la même que l'équation 18.9 de convection forcée (chapitre 18).

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta u \left(T - T_{ext} \right) dy \right] = - \left. \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$
(19.12)

Le choix approprié des profils de vitesse et de température nécessaires à la méthode intégrale se base sur des considérations physiques. La distribution transversale de T doit être représentée par une fonction monotone de T_p à T_{ext} et assurer un gradient nul à $y = \delta$ (pas de flux conductif). Un polynôme du second degré suffit pour remplir ces conditions. Le profil de température adimensionnel se présente sous la forme :

$$\Theta = \frac{T - T_{ext}}{T_p - T_{ext}} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{19.13}$$

Quant à la vitesse, sa description mathématique doit simuler la présence d'un maximum dans la couche limite comme le précise la figure 19.1.c. Pour représenter une telle situation on choisit une cubique dont les quatre coefficients imposent quatre conditions. Trois sont évidentes ; ce sont successivement, la condition d'adhérence à la paroi, l'état du fluide au repos et pas de cisaillement à $y = \delta$. La quatrième découle de l'application de l'équation de quantité de mouvement 19.7 à la paroi où u = v = 0 et $T = T_p$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta}{\nu} \left(T_p - T_{ext}\right) \tag{19.14}$$

Moyennant ces quatre conditions, le profil de vitesse adimensionnel devient :

$$\frac{u}{\mathbf{U}_{\mathbf{x}}} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \tag{19.15}$$

La norme $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ varie localement avec x par le biais de l'épaisseur de la couche limite :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} \propto \frac{\mathbf{g}\beta \left(\mathbf{T}_{\mathbf{p}} - \mathbf{T}_{\mathbf{ext}}\right)\delta^{2}(\mathbf{x})}{4\nu}$$
(19.16)

La substitution des profils 19.13 et 19.15 dans les formes intégrales 19.11 et 19.12 fournit deux équations différentielles ordinaires gouvernant l'évolution axiale des deux variables $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ et δ :

- Equation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dx} \left(\mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{2} \delta \right) = 35g\beta \left(T_{p} - T_{ext} \right) \delta - 105\nu \frac{\mathbf{U}_{\mathbf{x}}}{\delta}$$
(19.17)

- Equation de l'énergie

$$\frac{d}{dx} \left[\mathbf{U}_{\mathbf{x}} \delta \right] = 60 \frac{\alpha}{\delta} \tag{19.18}$$

Pour résoudre ces deux équations, on postule que la variation de U_x et δ est en puissance de x:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{\mathbf{1}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \quad \text{et} \quad \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{\mathbf{2}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$$
 (19.19)

Selon la relation 19.16, on sait que a = 2b. L'introduction des fonctions 19.19 dans 19.17 et 19.18 donne a = 1/2 et b = 1/4 et conduit aux résultats suivants qu'on demande de démontrer à titre d'exercice :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{5}, \mathbf{17}\nu\sqrt{\mathbf{Gr}_{\mathbf{u}}}}{\sqrt{\mathbf{0}, \mathbf{952} + \mathbf{Pr}}} \mathbf{x}^{\mathbf{0.5}}$$
(19.20)

 Et

$$\delta = \frac{3,93 (0,952 + \mathbf{Pr})^{0,25}}{\sqrt{\mathbf{Pr}} \mathbf{Gr_u^{0,25}}} \mathbf{x^{0,25}}$$
(19.21)

Ce faisant, on introduit le nombre de Grashof unitaire basé sur l'unité de longueur :

$$\mathbf{Gr_u} = rac{\mathbf{g}eta\left(\mathbf{T_p} - \mathbf{T_{ext}}
ight)}{
u^2}.\mathbf{1^3}$$

En convection naturelle, l'épaisseur de la couche limite croît comme la racine quatrième de la distance comptée à partir du bord d'attaque alors qu'en convection forcée la dépendance est en racine carrée. La vitesse typique est d'autant plus faible que le nombre de Prandtl est grand; elle augmente avec la racine carrée du potentiel thermique (de $\mathbf{Gr}_{\mathbf{u}}$).

Moyennant la connaissance du profil de température, on est à même de déterminer le coefficient de transfert de chaleur et le nombre de Nusselt locaux ; ce qui donne :

$$h(x) = \frac{2k_f}{\delta}$$
 et $\mathbf{N}\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{h}.\mathbf{x}}{\mathbf{k}_{\mathbf{f}}} = 2\frac{\mathbf{x}}{\delta}$

Soit après remplacement de δ par sa valeur :

$$Nu_{x} = \frac{0,508\sqrt{Pr}}{(0,952 + Pr)^{0,25}}.Gr_{x}^{0,25}$$
(19.22)

où $\mathbf{Gr}_{\mathbf{x}}$ est le nombre de Grashof local :

$$\mathbf{Gr_x} = rac{\mathbf{g}eta\left(\mathbf{T_p} - \mathbf{T_{ext}}
ight)}{
u^2}\mathbf{x^3}$$

En convection naturelle laminaire sur une plaque plane verticale à température constante, le nombre de Nusselt local varie comme la puissance 1/4 du nombre de Grashof local ce qui signifie que la conductance thermique décroît avec la même puissance de x.

Dans les applications d'ingénierie, on est plus généralement concerné par le nombre de Nusselt moyen sur l'ensemble de la plaque tel que défini au chapitre 18 (relation 18.25) :

$$\overline{\mathbf{N}\mathbf{u}} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathbf{N}\mathbf{u}_{\mathbf{x}} \mathbf{d}\mathbf{x} = \frac{4}{3}\mathbf{N}\mathbf{u}_{\mathbf{x}=\mathbf{L}}$$

D'où

$$\overline{\mathbf{Nu}} = \frac{0,677\sqrt{\mathbf{Pr}}}{(0,952 + \mathbf{Pr})^{0,25}}.\mathbf{Gr}^{0,25}$$

Régime	Ra	C	n
Laminaire	$10^{4} - 10^{9}$	0,59	$\frac{1/4}{1/3}$
Turbulent	$10^{9} - 10^{13}$	0,10	

TAB. 19.1 – Cas de la plaque verticale isotherme

Corrélations expérimentales en laminaire et turbulent

Des études expérimentales sur la convection naturelle en régime laminaire et turbulent ont été menées pour les cas d'une plaque plane isotherme et à flux de chaleur constant. L'ensemble des résultats peuvent se corréler sous la forme générique du nombre de Nusselt moyen en fonction d'un seul groupe adimensionnel, **le nombre de Rayleigh** qui est en convection libre le pendant du nombre de Peclet défini en convection forcée :

$$\mathbf{Ra} = \mathbf{GrPr} = \frac{\mathbf{g}\beta \left(\mathbf{T_p} - \mathbf{T_{ext}}\right)\mathbf{L^3}}{\nu\alpha}$$

 Et

$$\overline{\mathbf{N}\mathbf{u}} = C\mathbf{R}\mathbf{a}^{\mathbf{n}} \tag{19.23}$$

Le tableau 19.1 précise les valeurs de la constante C et de l'exposant n pour le cas de la paroi isotherme. Les couches limites laminaire et turbulente sont considérées. Le nombre de Grashof critique de transition est de 10⁹. Il est intéressant de remarquer qu'en régime turbulent, l'exposant de 1/3 souligne que la valeur de h est indépendante de la longueur L.

Le tableau 19.2 se rapporte à la plaque verticale à flux de chaleur pariétal q_p constant. Le nombre de Rayleigh prend une autre définition :

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\mathrm{Pr} = rac{\mathrm{g}eta \mathbf{ar{q}_p}\mathrm{L}^4}{\mathrm{k_f}
u^2}\mathrm{Pr}$$

La transition se passe pour $\mathbf{Gr} = 2.10^{13}$ mais on note que la corrélation ne change pas de façon significative du laminaire au turbulent.

Estimons l'ordre de grandeur de la conductance thermique en convection naturelle.

- Exercice 1. Dans un premier exemple on considère le problème du pare-feu vitré de 1 m de haut et 1 m de large placé devant une cheminée d'appartement. A l'état stationnaire, le verre spécial atteint une température de 230 °C et la pièce est à 24 °C . Les propriétés physiques de l'air sont calculées à la température du film $T_f = (230+24)/2+273 = 400K$. La dilatabilité est de 0,0025 1/K. Les tables fournissent $\rho_f = 0,8826 \text{ kg/m}^3, k_f = 0,03365 \text{ W/m}^\circ C$, $\mu_f = 22,86 \text{ mPa.s}$ et $\mathbf{Pr} = \mathbf{0},689$. Le nombre de Rayleigh global vaut 5,2.10⁹. Le régime est turbulent et d'après le tableau 19.1, la corrélation appropriée est $\overline{\mathbf{Nu}} = 0,1\mathbf{Ra}^{1/3}$. La valeur de $\overline{\mathbf{Nu}}$ est

Régime	Ra	C	n
Laminaire Turbulent	$10^{5} - 10^{11}$ $2.10^{13} - 10^{16}$	0,75 0,645	1/5 0,22

TAB. 19.2 – Cas de la plaque verticale à q_p constant

environ 173 et le coefficient d'échange convectif vau
t $h=5,83 {\rm W/m^2.}^oC$. Le flux de chaleur évacué vers l'ambiance est donné par
 $\dot{Q}=5,83*(230-24)*1*1=1200$ W.

Exercice 2. Pour illustrer la situation d'une paroi à flux constant on recherche les performances d'échange thermique entre un mince panneau de 3m de haut et 1,5 m de large et l'air environnant. Le panneau est bien isolé sur sa face arrière et peint en noir sur sa face avant qui est exposée à une densité de flux solaire de 600 W/m^2 . Toute l'énergie rayonnée est absorbée par ce capteur solaire qui, nous le supposons bien qu'une partie soit émise, la dissipe sous forme de convection naturelle dans l'air ambiant à $27^{\circ}C$. Dans ce problème, la température de la paroi et la conductance thermique ne sont pas connues. La méthode est donc itérative. On commence par se donner une estimation de h, disons 6 W/m² sur la base de l'expérience acquise lors de l'exercice précédent. On calcule une première valeur de la température du panneau au moyen de la loi de Newton : $T_p = 27 + 600/6 = 127 \ ^oC$. La température du film serait donc : $T_f = 0, 5*(127+27) = 77 \ ^oC$. Les propriétés de l'air évaluées à cette température sont $\beta = 0,00285 \ 1/K, k_f = 0,030 \ W/m^o C$, $\nu_f = 20,76 \ mm^2/s$ et $\mathbf{Pr} = \mathbf{0}, \mathbf{697}$. La valeur du nombre \mathbf{Ra} adapté aux conditions de flux constant est 7,3*10¹³. La convection est turbulent. Au tableau 19.2 on trouve C = 0,645 et n = 0,22 ce qui conduit à un nombre de Nusselt global de 724 et une conductance thermique $h = 7,24 \text{ W/m}^2.^oC$. Avec cette valeur du coefficient d'échange on calcule les nouvelles températures du panneau et du film fluide. On obtient $T_p \simeq 110^{\circ}C$ et $T_f = 68, 4^{\circ}C$. Puisque les propriétés physiques du fluide ne vont pas beaucoup changer entre les deux valeurs de T_f , une seconde itération n'est pas nécessaire.

Ces deux exercices montrent que le coefficient de transfert de chaleur en convection naturelle reste faible : Il faut au mieux s'attendre à des valeurs de l'ordre de 5 à 10 W/m ².°C Il sera opportun de comparer ces taux d'échange avec ceux obtenus par rayonnement thermique (voir chapitre 20).

19.1.2 Plaque plane horizontale

La forme corrélative est encore du type 19.23. Les valeurs numériques des coefficients dépendent de l'orientation de la plaque, des conditions de paroi et du régime de l'écoulement.

Le tableau 19.3 résume l'ensemble des résultats. Pour une plaque chaude orientée vers

Orientation	Régime	${ m Ra}$	С	n
Face chaude ↑ Face froide ↓	Laminaire Turbulent	$10^5 - 2.10^7$ $2.10^7 - 10^{10}$	0,54 0,14	1/4 $1/3$
Face chaude ↓ Face froide ↑	Laminaire	10^5 - 10^{10}	0,27	1/4

TAB. 19.3 – Cas de la plaque horizontale isotherme

TAB. 19.4 – Cas de la plaque horizontale à q_p constant

Orientation	Régime	Ra	C	n
Face chaude ↑	Laminaire Turbulent	$< 2.10^8$ $5.10^8 - 10^{11}$	$\substack{0,13\\0,16}$	$rac{1/3}{1/3}$
Face chaude ↓		$10^6 - 10^{11}$	0,58	1/5

le bas, le régime reste laminaire ce qui est attendu car cette configuration est de nature stable puisque le gradient de température est contraire à la pesanteur et devrait favoriser la stratification; ce sont les mouvements d'échappatoire du fluide aux extrémités de la plaque qui provoquent la convection dans ce cas. Les caractéristiques du transfert de chaleur pour une paroi horizontale à flux constant sont listées au tableau 19.4. L'exposant 1/3 pour le cas de la face chaude orientée vers le haut indique que le coefficient convectif ne varie pas localement et est indépendant de la longueur de la plaque. Par contre l'exposant 1/5 pour la face chaude orientée vers le bas suggère que le régime est toujours laminaire.

19.1.3 Cylindre horizontal et sphère

Pour ces configurations, les nombres sans dimension sont basés sur le diamètre du corps :

$$\overline{\mathbf{N}\mathbf{u}}_D = C\mathbf{R}\mathbf{a}_{\mathbf{D}}^{\mathbf{n}}$$

Le tableau 19.5 reprend les valeurs du coefficient et de l'exposant de la corrélation. On observe une nette variation de ces paramètres avec le nombre de Rayleigh. Pour la sphère,

${ m Ra}$	C	n
$ \begin{array}{r} 10^{-10} \cdot 10^{-2} \\ 10^{-2} \cdot 10^{2} \\ 10^{2} \cdot 10^{4} \\ 10^{4} \cdot 10^{7} \\ 10^{7} \cdot 10^{12} \end{array} $	0,675 1 0,85 0,48 0,125	$\begin{array}{c} 0,058\\ 0,148\\ 0,188\\ 0,250\\ 0,333\end{array}$

TAB. 19.5 – Cas du cylindre horizontal

on utilise la corrélation suivante qui inclut le facteur 2 dû à la conduction pure :

$\overline{\mathbf{Nu}}_D = 2 + 0,5\mathbf{Ra}_{\mathbf{D}}^{0,25}$

Pour

$$3.10^5 < \mathbf{Ra_D} < 8.10^8$$

19.2 Convection naturelle confinée

La convection naturelle dans des espaces confinés ou fermés intervient dans un grand nombre de problèmes industriels et d'ingénierie ainsi que dans la vie courante. Comme exemples sont cités le refroidissement des composants électroniques, l'évacuation naturelle de chaleur dans les procédés de stockage en génie nucléaire, l'optimisation des doubles vitrages, l'isolation par calorifuges poreux, les collecteurs solaires mais aussi comment chambrer le vin !

La configuration typique de la convection libre en milieux confinés est la lame de fluide emprisonnée entre deux parois parallèles de longueur L séparées par un espacement e. Deux situations au comportement différent peuvent se présenter.

Dans la première, les plaques sont verticales et de températures différentes. La seconde concerne le volume de fluide limité par deux plaques planes horizontales, celle du bas étant à température plus élevée.

19.2.1 Parois planes verticales

La lame de fluide est contenue entre deux longues plaques verticales respectivement à température T_1 et T_2 . Imaginons que les deux extrémités soient fermées par des cloisons adiabatiques comme le montre la figure 19.2. Le nombre de Grashof caractéristique du comportement thermohydraulique de ce système est communément basé sur la distance e entre plaques :

$$\mathbf{Gr_e} = \frac{\mathbf{g}\beta\left(\mathbf{T_1} - \mathbf{T_2}\right)\mathbf{e^3}}{\nu^2}$$

La figure 19.2 passe en revue les différents types d'écoulements rencontrés quand $\mathbf{Gr}_{\mathbf{e}}$ augmente progressivement. Aux petites valeurs du nombre de Grashof, les courants convectifs

sont très faibles voire inexistants, l'échange de chaleur s'effectue par conduction pure et le profil de température est linéaire. En maintenant une formulation sous forme de nombre de Nusselt, on obtient :

$$q = k_f \frac{(T_1 - T_2)}{e} = h (T_1 - T_2)$$

Soit, en régime conductif :

$$\mathbf{Nu_e} = \frac{\mathbf{he}}{\mathbf{k_f}} = \mathbf{1}$$

Avec l'augmentation de $\mathbf{Gr}_{\mathbf{e}}$, la force motrice d'Archimède prend le meilleur sur la force résistive de viscosité. Au delà d'un seuil critique $\mathbf{Gr}_{\mathbf{e}}^*$, une circulation convective s'établit dans la cavité. Pour mieux cerner les aspects physiques du problème, on commence par considérer le cas des grandes valeurs du nombre de Grashof. Supposons l'écart de température $\Delta T_{12} = T_1 - T_2$ constant. L'espacement entre plaque est large, une couche limite ascendante sur la plaque chaude (T_1) et pareillement une couche limite descendante (T_2) sur la face froide se développent sans interférer. L'écoulement de retour aux extrémités est complexe et n'entre pas en ligne de compte dans la présente discussion. Entre ces deux écoulements, le fluide est au repos et la température est uniforme (figure 19.2). Le nombre de Grashof est important et une seule cellule convective laminaire ou turbulente existe. Pour cette configuration, le facteur de forme ou d'allongement $\tilde{L} = L/e$ influence l'échange convectif.



FIG. 19.2 – Convection naturelle en cavité verticale

Si au même ΔT_{12} , les plaques sont proches, les valeurs de Gr_e redeviennent modérées car e est petit et l'interaction des couches limites empêche leur développement naturel sur toute la hauteur. L'écoulement est alors composé de cellules convectives bien distinctes comme si l'espace entre plaques était virtuellement cloisonné par des entretoises horizontales. La figure 19.2 schématise cet écoulement cellulaire. Dans ce cas, il n'y a moins

Fluide	Ra	С	n	m
Gaz	< 2000 2000-2.10 ⁵ 2.10 ⁵ -10 ⁷	$ \begin{array}{c} 1 \\ 0,197 \\ 0,073 \end{array} $	$\begin{array}{c} 0 \\ 1/4 \\ 1/3 \end{array}$	0 -1/9 -1/9
Liquide	10 ⁴ -10 ⁷ 10 ⁶ -10 ⁹	$\substack{0,45\\0,046}$	$1/4 \ 1/3$	-0,3 0

TAB. 19.6 – Lame de fluide verticale

d'influence de \hat{L} sur le nombre de Nusselt. Pour exprimer le transfert de chaleur qui s'établit entre les deux plaques, on introduit un coefficient de conductibilité équivalente ou effective k_e tel que :

$$q_{12} = \frac{k_e}{e} \Delta T_{12} \implies \mathbf{N} \mathbf{u}_{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{k}_{\mathbf{f}}}$$

Les études montrent que ce coefficient se corrèle bien avec le nombre de Rayleigh et le facteur d'allongement :

$$\mathbf{Nu}_{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{k}_{\mathbf{f}}} = \mathbf{CRa}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{m}}$$
(19.24)

Le tableau 19.6 rassemble les valeurs des exposants et du coefficient C selon la nature du fluide et le régime d'écoulement. On retiendra que le seuil critique de convection arrive pour $\mathbf{Ra}_{\mathbf{e}}^* = \mathbf{2000}$.

- **Exercice 3** Evaluons l'ordre de grandeur de cette conductibilité apparente. On considère une lame d'air de 15 mm d'épaisseur emprisonnée entre deux parois verticales maintenues respectivement à $23 \, {}^{o}C$ et $24^{o}C$. Ces valeurs de température conduisent aux mêmes propriétés physiques que pour l'exercice ci-dessus concernant la plaque verticale seule : elles permettent de faire une comparaison des coefficients d'échange entre les deux situations. Le nombre de Rayleigh vaut à peu près 17500 et, compte tenu des informations fournies au tableau 19.6, le calcul du nombre de Nusselt donne 2,26 ; soit une conductibilité équivalente d'environ deux fois celle de l'air.

19.2.2 Parois planes horizontales

La cavité est maintenant placée horizontalement. Si la température de la paroi inférieure est plus basse que la température de la plaque supérieure, le fluide le plus dense se situe au-dessous et la stratification est stable. Il n'y a pas de mouvement induit et l'échange de chaleur est purement conductif; $\mathbf{Nu}_{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$. C'est une situation bien connue dans l'atmosphère lorsqu'il y a le phénomène d'inversion. Des nappes d'air chaud bloquent d'autres plus froides au sol. Le brouillard qui se forme dans les couches en altitude arrête le rayonnement solaire et renforce le phénomène en empêchant le réchauffement des couches basses. Par contre, une situation instable existe si le fluide est chauffé par le bas. Au seuil

Fluide	Ra	C	n
Gaz	< 1700	1	0
	1700 - 7000	$0,\!059$	0,4
	$7000 - 3,2.10^5$	0,212	1/4
	$>3,2.10^{5}$	0,061	1/3
Liquide	1700 - 6000	$0,\!012$	$0,\!6$
	$6000 - 3,7.10^4$	$0,\!375$	0,2
	$3, 7.10^4 - 10^8$	$0,\!13$	0,3
	$> 10^{8}$	$0,\!057$	1/3

TAB. 19.7 – Lame de fluide horizontale

d'un nombre de Rayleigh critique de 1700, se déclenche une instabilité convective qui se caractérise par la formation de rouleaux parallèles, contigus, contrarotatifs et de section quasi circulaire dont le diamètre est très voisin de l'espacement entre plaques ; ce sont les cellules de Rayleigh-Bénard schématisées à la figure 19.3.



FIG. 19.3 – Convection naturelle en cavité horizontale

Le transfert thermique se traduit par une corrélation de la forme 19.24 dont les paramètres sont précisés au tableau 19.7.

19.3 Convection mixte

Comme nous l'avons soulevé au début du chapitre, un certain nombre de situations pratiques implique un transfert convectif qui résulte de la combinaison des deux modes de convection en particulier quand un fluide est soufflé à basse vitesse sur une surface très chaude ou très froide. Dans ce cas, les corrélations d'échange thermique font intervenir le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds. En particulier pour les écoulements dans les tubes $\mathbf{Re}_{\mathbf{D}}$ est remplacé par le nombre de Graetz pour prendre en compte les effets d'entrée comme l'indique la relation de Brown et Gauvin :

$$\mathrm{Nu_{D}} = 1,57 \left(\mathrm{Gz_{D}} + 0,012 \left[\mathrm{Gz_{D}Gr_{D}^{1/3}}
ight]^{4/3}
ight)^{1/3} \left(rac{<\mu_{\mathbf{f}}>}{\mu_{\mathbf{p}}}
ight)^{0,14}$$

Chapitre 20

Le Rayonnement Thermique

Ce chapitre aborde un mode de transfert d'énergie thermique qui contrairement à la conduction et la convection ne nécessite aucun support matériel, solide ou fluide, entre les milieux qui participent à l'échange de chaleur.

20.1 Généralités

Le rayonnement thermique fait partie de l'ensemble des échanges d'énergie qui s'établissent à distance entre corps par ondes électromagnétiques. Dès que la température d'un corps excède le zéro absolu, l'agitation moléculaire qui règne en son sein se traduit par un rayonnement électromagnétique porteur d'énergie calorifique. Cette transformation d'énergie se fait aux dépens d'une partie de l'énergie interne et se caractérise par une émission dont le spectre s'étend sur l'intervalle des longueurs d'onde $0,3 \le \lambda \le 1000 \mu m$ Il se situe pour sa plus grande partie dans le domaine de l'infrarouge comme l'indique la figure 20.1. Conventionnellement, le spectre de l'infrarouge se subdivise lui-même en infrarouge proche $\approx 0.75 \mu m$ à 25 μm et infrarouge lointain , de 25 μm à 1000 μm .

On prendra soin de distinguer le rayonnement thermique des autres formes d'émission d'énergie par rayonnement comme la fluorescence, la phosphorescence, l'électroluminescence, la chimioluminescence et la triboluminescence par exemple.

Tout milieu-solide, liquide ou gaz est à la fois une source et un récepteur. Il émet vers et reçoit des autres corps qu'il voit un rayonnement thermique et ce sans interruption.

Le rayonnement peut être décomposé en radiations monochromatiques définies par leur fréquence $f = C\lambda$. C est la vitesse de propagation des ondes dans l'espace traversé. Elle est reliée à la célérité de la lumière dans le vide, $C_o = 2,998.10^8$ m/s, par l'indice de réfraction n du milieu traversé; $C = C_o/n$. La rigueur veut de rapporter les grandeurs monochromatiques à leur fréquence, car seule cette propriété demeure constante lors de la propagation dans des milieux d'indices de réfraction différents comme par exemple les systèmes semi-transparents non homogènes. Cependant, en ingénierie thermique où la plupart des transferts radiatifs se font entre surfaces séparées par de l'air dont l'indice nest proche de l'unité, l'habitude a été prise de se référer à la longueur d'onde.

Différentes descriptions théoriques du rayonnement thermique ont été proposées. Certaines reposent sur la théorie ondulatoire de Maxwell et de Lorentz, d'autres sur la théorie corpusculaire de Planck et de Einstein ou sur leur synthèse réalisée par la mécanique ondulatoire de Broglie. Le plus simplement on considère que l'onde est portée par une



FIG. 20.1 – Le spectre électromagnétique

particule neutre de masse nulle, le photon, qui transporte une énergie :

$$E_{ph} = \frac{\hbar C_o}{n\lambda} \tag{20.1}$$

 \hbar est la constante de Planck = 6,626.10⁻³⁴ J.s. On constate que le rayonnement thermique sera d'autant plus porteur d'énergie calorifique que sa longueur d'onde sera petite (donc sa fréquence élevée). Ainsi, toute chose gardée, une radiation d'ultra-violet sera plus énergétique qu'une émission d'infrarouge. Comme ordre de grandeur on retiendra qu'un corps chauffé à plus de 1000 °C produit un rayonnement thermique dans la plage du proche infrarouge alors que le rayonnement solaire avec sa température équivalente de 5800 °C et avant la traversée de l'atmosphère, est compris pour la majorité entre 0,1 et 4 μ m avec son maximum situé sur la longueur d'onde du vert, $\lambda_{vert} = 0.5 \ \mu$ m.

Par ailleurs, la relation 20.1 indique que la transmission de chaleur par rayonnement est (quasi) **instantanée** (\approx vitesse de la lumière) par opposition aux autres modes qui s'accompagnent d'une certaine inertie.

20.2 Réception du rayonnement par un corps

D'une façon générale, quand une énergie rayonnante, **l'éclairement E**, atteint un milieu matériel, elle se divise en trois parties qui sont illustrées à la figure 20.2; une fraction est réfléchie, une autre est transmise en traversant le milieu sans altération et la troisième est absorbée. Cette répartition énergétique se traduit en termes de coefficients de réflectivité ρ_{λ} , de transmittivité τ_{λ} et d'absorptivité \mathbf{a}_{λ} . Leur valeur dépend de la nature, de l'état de surface et de la température du corps récepteur mais aussi de la longueur

d'onde de la radiation incidente. Pour s'en souvenir on s'en tiendra à la comparaison avec la feuille d'une plante qui absorbe le rouge et réfléchit le vert; éclairée en lumière rouge, elle apparaîtra noire. La feuille a un coefficient d'absorption maximum pour le rouge et nul pour le vert.



FIG. 20.2 – Répartition de l'énergie rayonnante

La réflectivité monochromatique est la propriété que possède le milieu à réfléchir l'éclairement \mathbf{E}_{λ} dans la bande λ et $\lambda + d\lambda$

$$arrho_{\lambda} = rac{\mathbf{q}_{\mathbf{r},\lambda}}{\mathbf{E}_{\lambda}}$$

Le coefficient de transmittivité monochromatique est le quotient du flux transmis au flux total pour la longueur d'onde considérée :

$$\tau_{\lambda} = \frac{\mathbf{q}_{\mathbf{t},\lambda}}{\mathbf{E}_{\lambda}}$$

L'absorptivité monochromatique est la proportion d'énergie incidente sous λ qui est absorbée par le milieu.

$$\mathbf{a}_{\lambda} = rac{\mathbf{q}_{\mathbf{a},\lambda}}{\mathbf{E}_{\lambda}}$$

Tous ces coefficients sont bornés par 0 et 1 et le bilan énergétique s'exprime simplement par :

$$\mathbf{a}_{\lambda} + \tau_{\lambda} + \varrho_{\lambda} = \mathbf{1} \tag{20.2}$$

Un milieu totalement transparent au rayonnement thermique est appelé corps diathermane; sa transmittivité est unitaire. C'est le cas du vide mais aussi dans certaines proportions de l'air sec et l'air humide sur de faibles distances. Un milieu qui s'oppose totalement au passage de l'énergie rayonnante est un corps opaque ou athermane; sa transmittivité est nulle.

Un corps idéal qui, à toutes les températures et quelle que soit λ , absorbe toute le rayonnement incident est appelé **corps noir** :

$${f Corps} {f Noir} {f a}_\lambda = {f 1}$$

Bien que quelques corps se rapprochent assez bien de cette substance, aucun ne répond rigoureusement à cette propriété. Certains noirs de fumée dont l'absorptivité varie peu autour de 0,98 pour λ allant de 1 μ m à 25 μ m, des peintures mais aussi la peau humaine ont un comportement proche de celui du corps noir. Par contre on peut réaliser artificiellement un tel corps avec une cavité percée d'une faible ouverture. La figure 20.3 en schématise le principe ; l'énergie radiante qui va pénétrer à l'intérieur de la cavité va subir une multitude de réflexions et d'absorptions de sorte que la fraction qui en ressort est extrêmement faible. L'ouverture de la cavité se comporte pratiquement comme un corps noir.



FIG. 20.3 – Cavité corps noir

Les corps pour lesquels à une température donnée, l'absorptivité monochromatique est indépendante de la longueur d'onde sont nommés **corps gris**. Ces corps absorberont de la même manière toutes les radiations thermiques monochromatiques :

${\bf Corps} \ {\bf Gris} \quad {\bf a}_{\lambda} = {\bf a}$

20.3 Grandeurs énergétiques d'une source

20.3.1 Définitions

Les grandeurs physiques relatives à l'ensemble du spectre thermique sont dites *totales* par opposition à *monochromatiques*. De même, les radiations qui concernent l'ensemble des directions de l'espace, seront appelées *hémisphériques* par opposition à *directionnelles*.

- Le flux total \dot{Q} exprimé en [W] désigne la puissance émise par une source dans tout l'espace où elle rayonne.
- L'intensité totale directionnelle \mathcal{I}_{ox} de la source est la portion du flux $d\dot{\mathbf{Q}}_{ox}$ rayonné dans un angle solide $\delta\Omega$ entourant une direction donnée Ox comme le supporte la figure 20.4. Cette quantité s'exprime en Watt par stéradian :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{ox}} = rac{\mathbf{d}\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ox}}}{\mathbf{d}\Omega} \quad \equiv \quad \left[rac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}
ight]$$

L'axe Ox est repéré par l'angle θ qu'il fait avec la normale ON à la surface élémentaire dS du corps.

 L'émittance totale est le flux par unité de surface de la source ; c'est la densité de flux émise par le corps dans l'ensemble des directions (*emissive power* en anglais) :

$$\mathcal{M} = \frac{d\dot{Q}}{dS} \equiv \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

- La **luminance totale** suivant Ox d'une source d'aire dS est l'intensité \mathcal{I}_{ox} rapportée à l'aire apparente $dS' = dS \cos \theta$ de la surface émettrice dans cette direction (voir figure 20.4-b)

$$\mathcal{L}_{ox} = \frac{\mathcal{I}_{ox}}{dS\cos\theta} \equiv \left[\frac{W}{m^2sr}\right]$$



FIG. 20.4 – Propriétés géométriques d'une surface radiante

20.3.2 Loi de Lambert

Il existe des corps qui émettent uniformément dans l'espace. La source est diffuse et l'émission isotrope. Ces corps sont appelées **surfaces lambertiennes**. Dans ce cas, la luminance totale est indépendante de la direction; ce qui permet d'écrire à l'appui de la figure 20.4 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ox} = \frac{\mathcal{I}_{ox}}{dS \cos \theta} = \frac{\mathcal{I}_{on}}{dS}$$

soit la loi de Lambert (ou loi du cosinus)

$$\mathcal{I}_{\mathbf{ox}} = \mathcal{I}_{\mathbf{on}} \cos \theta \tag{20.3}$$

 \mathcal{I}_{on} étant l'intensité totale suivant la normale. En partant de ces expressions, on peut calculer l'émittance d'une émission lambertienne en intégrant la densité de flux rayonnée sur l'angle solide hémisphérique $(2\pi sr)$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{L} \int_{\text{hémisp}} \cos \theta \mathbf{d} \mathbf{\Omega} = \pi \mathcal{L}$$
(20.4)

20.4 Lois du rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est principalement décrit par cinq lois de base. La loi de Planck donne l'émittance monochromatique du corps noir $\mathcal{M}^{o}_{\lambda}$. Les deux lois de Wien fournissent respectivement l'abscisse et la valeur du maximum de $\mathcal{M}^{o}_{\lambda}$ dans le spectre. La loi de Stefan-Boltzmann fournit l'émittance totale du corps noir. La loi de Kirchhoff fait apparaître l'équivalence entre l'absorption et l'émission d'un milieu.

20.4.1 La loi de Planck

A partir de considérations thermodynamiques, on montre que le corps noir est l'émetteur parfait qui rayonne le maximum d'énergie calorifique à chaque température et longueur d'onde. L'émittance spectrale de cet étalon de rayonnement est régie par la **loi de Planck** :

$$\mathcal{M}_{\lambda}^{\mathbf{o}} = \frac{2\pi\hbar\mathcal{C}^{2}\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{\hbar\mathcal{C}}{\kappa_{\mathrm{b}}\lambda\mathbf{T}}\right) - 1}$$
(20.5)

T est la température absolue du corps (degré Kelvin) et κ_b la constante de Boltzmann = 1,3805.10⁻²³ J/K. Dans la pratique courante, quand le milieu où se propage le rayonnement peut être assimilé à un environnement diathermane, on utilise la forme concise suivante :

$$\mathcal{M}_{\lambda}^{\mathbf{o}} = \frac{\mathbf{C}_{1}\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{\mathbf{C}_{2}}{\lambda\mathbf{T}}\right) - 1}$$
(20.6)

Les deux constantes physiques ayant pour valeurs respectives $C_1 = 3,7415.10^{-16}$ W.m² et $C_2 = 0,014388$ mK. Une représentation graphique de cette loi est proposée à la figure 20.5.

Chaque courbe est une isotherme ; elle représente la quantité d'énergie rayonnée par le corps noir à cette température pour la longueur d'onde considérée. Toutes passent par un maximum situé à λ_{max} qui dépend de la température. L'énergie émise croît rapidement aux courtes longueurs d'onde et décroît lentement pour les grands λ . Lorsqu'un matériau s'échauffe, il commence par émettre de l'infrarouge aux basses températures. Aux environs de 500°C et dans une ambiance obscure, les premières radiations visibles apparaissent ; elles sont rouges. Si la température du corps continue à augmenter des rayonnements à des longueurs d'onde plus courtes viennent s'ajouter pour finalement produire une lumière blanche, superposition de toutes les radiations monochromatiques du spectre visible.

La figure 20.5 fait aussi remarquer que la partie utile du spectre solaire ($T \approx 5800$ K et $\lambda = 4\mu$ m) ne recouvre pratiquement pas le spectre rayonné par les corps de température peu supérieure à l'ambiante ($T \approx 300$ K). Cette propriété permet de réaliser l'effet de serre et le captage de l'énergie solaire par les collecteurs thermiques.

20.4.2 Les lois de Wien

En dérivant la loi de Planck 20.6 par rapport à λ et en cherchant la condition qui annule cette dérivée, on aboutit à la **première loi de Wien** qui montre que l'émittance



FIG. 20.5 – Emittance monochromatique d'un corps noir

maximum se déplace vers les faibles longueurs d'onde quand la température augmente :

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{T} \quad \text{en} \quad [\mu \text{m} \tag{20.7}]$$

En substituant ce résultat dans la relation de Planck, on tire la valeur de $\mathcal{M}_{\max,\lambda}^{o}$. C'est la **deuxième loi de Wien** :

$$\mathcal{M}^{\mathbf{o}}_{\max\lambda} = 4,0948.10^{-12} \mathrm{T}^5 \tag{20.8}$$

Ces deux lois corroborent bien le fait soulevé plus avant, que les ondes courtes correspondant à des températures plus élevées (Eq 20.7) seront plus énergétiques (Eq. 20.8).

Dans les applications où les niveaux de température avoisinent l'ambiance ($\simeq 20$ °C), le pic d'émittance se situe aux alentours de 10 μ m. Par contre si le procédé implique des intensités thermiques plus élevées, disons un millier de degrés, alors la longueur d'onde du flux maximal tombe vers 2 μ m. Ce comportement guide le choix des détecteurs des caméras de thermographie infrarouge.

20.4.3 La loi de Stefan-Botlzmann

La loi de Planck intégrée sur la totalité du spectre rayonné conduit à l'expression de l'émittance totale du corps noir :

$$\mathcal{M}^{\mathbf{o}} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathcal{M}^{\mathbf{o}}_{\lambda} \mathbf{d}\lambda = \sigma \mathbf{T}^{\mathbf{4}}$$
(20.9)

Matériau	ϵ totale normale		
	$9,3~\mu{ m m}$	$5{,}4\mu\mathrm{m}$	$3,\!6\mu\mathrm{m}$
	$38^{o}C$	$260^{o}C$	$538^{o}C$
Aluminium Poli	$0,\!04$	$0,\!05$	$0,\!08$
Cuivre Poli	$0,\!04$	$0,\!05$	0.18
Oxydé	$0,\!87$	$0,\!83$	$0,\!77$
Acier Poli	$0,\!15$	$0,\!18$	$0,\!22$
Argile	$0,\!9$		0,7
Brique rouge	$0,\!93$		
Papier	$0,\!95$		
Verre Pyrex	$0,\!94$	$0,\!95$	$0,\!85$
Noir de Fumée	0,96		
Peau humaine	0,98		

TAB. 20.1 – Valeurs de l'émissivité totale normale

Où σ est la constante de Stefan-Boltzmann, dont l'expression théorique est :

$$\sigma = \frac{2C_1 \pi^5}{15C_2^4} = 5,6696.10^{-8} \quad \text{W/m}^2 \text{K}^4$$

L'émittance totale que rayonne le corps noir dans une bande spectrale $\lambda_1 - \lambda_2$ se calcule en intégrant la relation 20.6 entre ces deux bornes. De cette façon, en considérant le soleil comme un corps noir, on peut évaluer le pourcentage de l'énergie solaire émise dans le visible (de 0,4 à 0,8 μ m). Les intégrales tabulées dans les ouvrages sur le rayonnement thermique (voir liste des références) indiquent que 46% de l'émittance totale du soleil se situe dans le spectre visible.

20.4.4 Emission des corps réels

Les propriétés émissives des corps réels sont caractérisées par rapport à celles du corps noir pour les mêmes température et longueur d'onde. L'émittance, totale ou monochromatique, d'une substance quelconque est obtenue à l'aide d'un coefficient ϵ nommé **émissivité** qui sera totale, monochromatique, hémisphérique ou directionnel selon le problème traité :

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{\mathcal{M}_{\lambda}}{\mathcal{M}_{\lambda}^{\mathbf{o}}} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{\mathbf{o}}}$$

$$(20.10)$$

Le coefficient d'émissivité des substances naturelles est toujours inférieur à l'unité. Seul le corps noir, par définition, possède une valeur de $\epsilon_{\lambda} = 1$. Les différentes études (qui se poursuivent à l'heure actuelle) sur l'émissivité des matériaux ont mis en évidence la dépendance de ϵ avec la nature physico-chimique du corps, son état de surface (lisse ou rugueux), sa température ainsi que la direction et la longueur d'onde de la radiation incidente. Des valeurs typiques d'émissivité totale dans la direction normale sont présentées au tableau 20.1. Pour les métaux non oxydés, l'émissivité croît légèrement avec la température et lorsque λ diminue. Très sensible à la direction de l'émission, elle devient plus importante pour les directions rasantes à la surface comme l'indique la figure 20.6. Les matériaux bons conducteurs d'électricité (le cuivre par exemple) rayonnent beaucoup plus d'énergie aux grandes valeurs de l'angle azimutal. Ainsi, une bille de cuivre incandescente apparaîtra plus brillante sur sa périphérie et sombre au centre alors que pour les matériaux diélectriques, le comportement sera opposé. En effet, ces derniers ont une émissivité directionnelle plus ou moins constante excepté pour les directions près de l'horizontale où elle chute sensiblement (voir figure 20.6). Les diélectriques ont un comportement proche de celui des **corps lambertiens** dont l'émission est purement diffuse (indépendante de la direction).



FIG. 20.6 – Emissivité directionnelle de matériaux

Les évaluations des échanges radiatifs entre corps réels conduisent très souvent à des calculs complexes quand on veut prendre en compte l'effet de la température, de la longueur d'onde et de la direction. Toutefois, il faut savoir que la rugosité tend à rendre toutes les surfaces diffusantes et que l'oxydation d'un matériau électrique peut lui conférer des propriétés radiatives de diélectriques. Aussi, dans la pratique l'ingénieur trouve souvent l'opportunité de travailler sur des substances caractérisées par une émissivité simple; c'est le cas des corps gris qui, on le verra plus après, se définissent par une émissivité totale ϵ et pour lesquels, l'émittance est donnée par :

$$\mathcal{M} = \epsilon \sigma \mathbf{T}^4 \tag{20.11}$$

20.4.5 Loi de Kirchhoff

Pour démontrer la loi de Kirchhoff, on s'intéresse au comportement thermique d'un petit objet situé dans une enceinte fermée noire parfaitement isolée de l'extérieure; le schéma de la figure 20.7 dessine la situation. Quand l'équilibre thermique est atteint, tout le système est à température uniforme et il y a égalité stricte entre le flux émis et le flux absorbé par la petite surface dS dans la direction Ox. Si, de plus, on admet que ces rayonnements sont uniformément répartis dans l'espace hémisphérique autour de dSc'est-à-dire que l'éclairement et l'émission sont tous deux diffus, alors la **loi de Kirchhoff** qui traduit le bilan thermique, énonce que l'absorptivité et l'émissivité monochromatiques de l'objet doivent être égales :

$$\epsilon_{\lambda} = \mathbf{a}_{\lambda} \tag{20.12}$$



FIG. 20.7 – Equilibre radiatif entre corps et enceinte

Bien que cette relation ait été déduite de considérations thermodynamiques, l'expérience confirme qu'elle reste encore valable en dehors de conditions d'équilibres mais uniquement pour le cas monochromatique (directionnel ou hémisphérique). La loi de Kirchhoff ne s'étend pas au rayonnement total émis et absorbé par un corps. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'expression de ces deux grandeurs totales pour un corps A :

Absorptivité totale

$$\mathbf{a} = \frac{\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{a}_{\lambda} \mathbf{E}_{\lambda}(\mathbf{T})}{\mathbf{E}}$$

– Emissivité totale

$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda \mathcal{M}_\lambda^{\mathbf{o}}(\mathbf{T})}{\sigma T^4}$$

L'absorptivité totale dépend du corps A jouant le rôle de récepteur mais aussi de la nature et la température du corps émetteur par l'intermédiaire de l'éclairement reçu (composition spectrale) alors que l'émissivité de A va dépendre uniquement de la nature du corps A et de sa propre température. Dès lors, une démarche satisfaisante consistera à prendre **a** en correspondance avec la température et la bande spectrale du rayonnement incident et ϵ sur la base de la propre température du corps.

D'une façon générale, on retiendra que **a**, contrairement à ϵ , n'est pas une propriété intrinsèque de la substance rayonnante et qu'en général $\mathbf{a} \neq \epsilon$. Cependant, il existe deux exceptions à cette règle. La première concerne le corps noir :

Corps noir
$$\mathbf{a} = \epsilon = \mathbf{1}$$
 (20.13)

La deuxième se rapporte aux corps gris : leur comportement radiatif est indépendant de la longueur d'onde :

Corps gris
$$\mathbf{a} = \epsilon$$
 (20.14)

20.5 Echange radiatif entre corps noirs

Le problème de l'échange radiatif entre corps noirs est à la base de la formulation du transfert de chaleur par rayonnement thermique. On considère la situation schématisée à la figure 20.8. Deux surfaces noires S_1 et S_2 maintenues à des températures uniformes mais différentes T_1 et T_2 rayonnent mutuellement l'une vers l'autre. La surface S_1 émet un flux total hémisphérique \dot{Q}_1 dont seule une fraction \mathcal{F}_{12} arrivera sur S_2 . Ce fait s'exprime comme suit :

$$\dot{Q}_{12} = \mathcal{F}_{12}\dot{\mathbf{Q}}_1 = \mathcal{F}_{12}\mathcal{M}_1^{\mathbf{o}}\mathbf{S}_1$$

Le même raisonnement peut s'appliquer à la surface S_2 dont seule une fraction \mathcal{F}_{21} de son rayonnement atteindra S_1 :

$$\dot{Q}_{21} = \mathcal{F}_{21}\dot{\mathbf{Q}}_2 = \mathcal{F}_{21}\mathcal{M}_2^{\mathbf{o}}\mathbf{S}_2$$

 \mathcal{F}_{12} et \mathcal{F}_{21} sont des nombres sans dimension appelés facteurs de forme ou facteurs d'angle respectivement de S_1 vers S_2 et vice et versa.

Déterminons l'expression \mathcal{F}_{12} à titre d'exemple. Pour ce faire écrivons le flux contenu dans l'angle solide élémentaire $d\Omega_1$ issu de dS_1 et sous lequel est vue la petite surface dS_2 : d'après les définitions des grandeurs d'une source rayonnante (voir paragraphe 20.3.1)on obtient :

$$d^2 \dot{Q}_{12} = \mathcal{L}_1^o dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_1$$

La théorie des angles solides nous donne :

$$d\Omega_1 = (dS_2 \cos \theta_2)/r^2$$

En faisant appel à la loi de Lambert ($\Longrightarrow \mathcal{L}_1^o = \mathcal{M}_1^o/\pi$) et en intégrant sur les deux surfaces on en tire l'expression du flux émis par S_1 vers S_2 :

$$\dot{Q}_{12} = \mathcal{M}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{o}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{1}}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{2}}} \frac{\cos \theta_{\mathbf{1}} \cos \theta_{\mathbf{2}} \mathbf{d} \mathbf{S}_{\mathbf{1}} \mathbf{d} \mathbf{S}_{\mathbf{2}}}{\pi \mathbf{r}^{\mathbf{2}}}$$
(20.15)

La relation 20.15 fait directement ressortir le facteur de forme \mathcal{F}_{12} :

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\mathbf{S}_1} \int_{\mathbf{S}_1} \int_{\mathbf{S}_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{dS}_1 \mathbf{dS}_2}{\pi \mathbf{r}^2}$$
(20.16)

C'est une grandeur **essentiellement géométrique** qui de dépend que de l'arrangement relatif des deux objets dans l'espace. Le calcul de \mathcal{F}_{21} se fait de la même manière. Il conduit au résultat suivant :

$$\mathcal{F}_{21} = \frac{1}{\mathbf{S}_2} \int_{\mathbf{S}_1} \int_{\mathbf{S}_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{dS}_1 \mathbf{dS}_2}{\pi \mathbf{r}^2}$$
(20.17)

De la comparaison de 20.16 et 20.17 ressort la **relation fondamentale de réciprocité** :

$$\mathcal{F}_{12}\mathbf{S}_1 = \mathcal{F}_{21}\mathbf{S}_2 \tag{20.18}$$

Le flux net $\dot{Q}_{12}^{\text{net}}$ échangé entre les deux surfaces, est le bilan entre l'énergie émise par S_1 vers S_2 , ce qui correspond à une perte énergétique pour S_1 mais un gain pour S_2 , et



FIG. 20.8 – Echange entre deux surfaces noires

l'énergie reçue par S_1 venant de S_2 , ce qui devient un gain pour S_1 mais est une perte pour S_2 :

$$\dot{Q}_{12}^{net} = \dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{21} = \mathcal{F}_{12}\mathbf{S_1}\mathcal{M}_1^o - \mathcal{F}_{21}\mathbf{S_2}\mathcal{M}_2^o$$

Toutes substitutions faites, il vient

$$\dot{Q}_{12}^{\text{net}} = \mathcal{F}_{12} \mathbf{S}_1 \sigma \left(\mathbf{T}_1^4 - \mathbf{T}_2^4 \right) = \mathcal{F}_{21} \mathbf{S}_2 \sigma \left(\mathbf{T}_1^4 - \mathbf{T}_2^4 \right)$$
(20.19)

Le flux net de S_1 vers S_2 est positif quand la température T_1 est supérieure à T_2 . La surface 1 émet plus d'énergie vers la surface 2 qu'elle n'en reçoit de cette dernière. Cela présuppose qu'il existe un autre mécanisme de transfert de chaleur et/ou une source interne qui l'alimente en énergie nécessaire pour tenir un échange radiatif en maintenant sa température à T_1 .

Si le problème porte sur une disposition à N parois noires de surface S_j (j = 1 à N) formant une enceinte fermée, le calcul du flux total rayonné par une surface S_i et absorbé par toutes les autres y compris elle-même si sa forme est concave, donne :

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{j=N} \dot{Q}_{ij} = \sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{F}_{\mathbf{ij}} \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} = \dot{Q}_i \sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{F}_{\mathbf{ij}}$$

d'où on conclut que la somme des facteurs de forme d'une enceinte fermée est unitaire :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{F}_{\mathbf{ij}} = 1 \tag{20.20}$$

Chaque surface de la cavité étant isotherme à la température T_j , on peut rechercher le flux net échangé entre la surface S_i et ses voisines. C'est le bilan entre le flux total émis \dot{Q}_i et la somme des flux venant des autres surfaces :

$$\dot{Q}_i^{\text{net}} = \dot{Q}_i - \sum_{j=1}^{j=N} \dot{Q}_{ji}$$

En décomposant les différents termes et en retenant l'identité 20.20, on aboutit à :

$$\dot{Q}_{i}^{\text{net}} = \sum_{j=1}^{j=N} S_{i} \mathcal{F}_{ij} \left(\mathcal{M}_{i}^{o} - \mathcal{M}_{j}^{o} \right) = \sum_{j=1}^{j=N} \dot{\mathbf{Q}}_{ji}^{\text{net}}$$

soit encore

$$\dot{Q}_{i}^{\text{net}} = \sum_{j=1}^{j=N} S_{i} \mathcal{F}_{ij} \sigma \left(\mathbf{T}_{i}^{4} - \mathbf{T}_{j}^{4} \right)$$
(20.21)

En appliquant la relation 20.21, on retiendra que le facteur de forme \mathcal{F}_{ii} n'existe que si la surface S_i est concave.

20.6 Echanges radiatifs entre surfaces grises opaques

20.6.1 La radiosité d'une surface rayonnante

Dans cette approche, les surfaces sont supposées grises opaques et lambertiennes. Une surface S reçoit un éclairement \mathbf{E} uniformément réparti dont une partie est absorbée et l'autre réfléchie. En vertu des relations 20.2 et 20.14, on a :

$$\mathbf{a} = \epsilon = \mathbf{1} - \varrho$$

La densité de flux qui est rayonnée par S est la somme de son émittance et de la partie de l'éclairement réfléchie; cette grandeur s'appelle la **radiosité** \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \epsilon \mathcal{M}^{\mathbf{o}} + \varrho \mathbf{E} = \epsilon \mathcal{M}^{\mathbf{o}} + (\mathbf{1} - \epsilon) \mathbf{E}$$
(20.22)

La densité de flux nette $\mathbf{q}^{\mathbf{p}}$ perdue par S est la différence entre l'émission et l'absorption :

$$\mathbf{q}^{\mathbf{p}} = \epsilon \mathcal{M}^{\mathbf{o}} - \mathbf{a}\mathbf{E} = \epsilon \left(\mathcal{M}^{\mathbf{o}} - \mathbf{E}\right)$$
(20.23)

En éliminant soit **E** soit $\epsilon \mathcal{M}^{\mathbf{o}}$ de la combinaison des relations 20.22 et 20.23, on arrive à :

$$\mathbf{q}^{\mathbf{p}} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} (\mathcal{M}^{\mathbf{o}} - \mathcal{J}) = \mathcal{J} - \mathbf{E}$$
(20.24)

La densité de flux nette que per d la surface S est la différence entre sa radio sité et son éclairement.

20.6.2 Enceinte à N surfaces grises

Reprenons le problème de l'enceinte fermée constituée de N surfaces que l'on considère grises et opaques. La densité de flux tombant sur une surface S_i est l'éclairement \mathbf{E}_i qui provient des émissions combinées de toutes les autres surfaces (y compris elle-même si sa forme est concave) :

$$\mathbf{E_i} = \sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{F}_{ij} \mathcal{J}_j$$

La surface S_i réfléchit une densité de flux $\mathbf{q}^{\mathbf{r}}$ donnée par :

$$\mathbf{q}^{\mathbf{r}} = (\mathbf{1} - \epsilon_{\mathbf{i}}) \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{j}=\mathbf{N}} \mathcal{F}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \mathcal{J}_{\mathbf{j}}$$

d'où une densité totale de flux rayonnée ou radiosité égale à :

$$\mathcal{J}_{i} = \epsilon_{i} \mathcal{M}_{i}^{o} + (1 - \epsilon_{i}) \sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{F}_{ij} \mathcal{J}_{j}$$

que l'on réécrit préférentiellement sous la forme suivante en introduisant l'indice de Kronecker :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \left[\delta_{ij} - (1 - \epsilon_i) \mathcal{F}_{ij} \right] \mathcal{J}_{j} = \epsilon_i \mathcal{M}_i^o = \epsilon_i \sigma \mathbf{T}_i^4$$
(20.25)

La formulation 20.25 constitue un système algébrique de N équations qui relient les différentes radiosités inconnues de l'enceinte entre elles via les facteurs de forme, les émissivités et les températures des parois isothermes. Si certaines parois sont caractérisées par un flux imposé, l'équation 20.25 ne peut s'appliquer; le bilan thermique doit alors être formulé en égalant la densité de flux nette perdue par la surface S_i , maintenant connue puisqu'imposée, à la radiosité diminuée de la densité de flux arrivant des autres surfaces. En utilisant à nouveau l'indice de Kronecker, l'écriture devient :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \left[\delta_{ij} - \mathcal{F}_{ij} \right] \mathcal{J}_{j} = \mathbf{q}_{i}^{\mathbf{p}}$$
(20.26)

Ce qui représente aussi un système algébrique linéaire en termes de radiosité. Lorsque les $\mathcal{J}_{\mathbf{i}}$ sont déterminés, il est suffit de remonter soit aux flux nets (si inconnus) soit aux températures (si inconnues) des différentes surfaces par le biais de la relation 20.24 que l'on rappelle ci après :

$$\mathbf{q}^{\mathbf{p}} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} (\sigma \mathbf{T}^{4} - \mathcal{J})$$

- Exercice

On illustre cette méthode en traitant le problème de l'enceinte parallélépipédique simulant un four électrique schématisé à la figure 20.9.



FIG. 20.9 – Chambre d'un four parallélépipédique

Les surfaces rayonnantes sont au nombre de trois : S_1 est la sole du four à la température T_1 et S_2 la voûte chaude à la température T_2 . Ces deux parois sont supposées isothermes. Les quatre autres murs, composés de matériaux réfractaires, sont considérés adiabatiques à la température uniforme T_3 (inconnue); ils forment la surface S_3 . Dans cette géométrie, on doit remarquer les égalités suivantes :

$$\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_{21}$$
 et $\mathcal{F}_{13} = \mathcal{F}_{23} = 1 - \mathcal{F}_{12}$
 $\mathcal{F}_{32} = \mathcal{F}_{31}$ et $\mathcal{F}_{33} = 1 - (\mathcal{F}_{31} + \mathcal{F}_{32})$

L'application de la relation 20.25 aux surfaces S_1 et S_2 dont les températures sont imposées (donc connues), fournit :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 - (1 - \epsilon_1)(\mathcal{F}_{12}\mathcal{J}_2 + \mathcal{F}_{13}\mathcal{J}_3) &= \epsilon_1 \sigma \mathbf{T}_1^4 \\ \mathcal{J}_2 - (1 - \epsilon_2)(\mathcal{F}_{21}\mathcal{J}_1 + \mathcal{F}_{23}\mathcal{J}_3) &= \epsilon_2 \sigma \mathbf{T}_2^4 \end{aligned}$$

Pour la surface S_3 dont le flux net imposé est nul, la relation 20.26 conduit à :

$$-F_{31}\mathcal{J}_1 - \mathcal{F}_{32}\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3(1 - \mathcal{F}_{33}) = \mathbf{0}$$

qui, avec l'égalité des facteurs de forme notée ci-dessus devient :

$$\mathcal{J}_{\mathbf{3}} = rac{\mathcal{J}_{\mathbf{1}} + \mathcal{J}_{\mathbf{2}}}{2}$$

Par conséquent, le problème consiste à résoudre un système de trois équations algébriques linéaires à trois inconnues. On terminera l'exercice en calculant les trois radiosités et la température T_3 pour les conditions suivantes : $T_1 = 1000^{\circ}C$, $\epsilon_1 = 0, 8, T_2 = 1500^{\circ}C$ et $\epsilon_2 = 0, 9$. Les dimensions du four sont de 1m par 1m par 5m.

20.6.3 Schémas Analogiques

Le flux net d'une surface grise lambertienne exprimé par la relation 20.24 s'interprète facilement en termes d'analogie électrique. Si l'on remet cette relation sous la forme suivante,

$$\dot{Q}^{net} = (\mathcal{M}^{\mathbf{o}} - \mathcal{J}) / \frac{\mathbf{1} - \epsilon}{\mathbf{S}\epsilon}$$

on remarque que le flux s'assimile très bien au courant électrique produit par une différence de potentiel $(\mathcal{M}^{\mathbf{o}} - \mathcal{J})$ placée aux bornes d'un circuit comprenant une résistance $(1 - \epsilon)/(S\epsilon)$. La figure 20.10-a schématise le circuit. De même, le flux net rayonné entre deux surfaces 1 et 2 peut être représenté à l'aide du schéma analogique de la figure 20.10b. En effet, le flux total quittant S_1 est $S_1\mathcal{J}_1$ et la partie atteignant S_2 est $\mathcal{F}_{12}\mathbf{S}_1\mathcal{J}_1$. Réciproquement celle venant de S_2 et arrivant sur S_1 est $\mathcal{F}_{21}\mathbf{S}_2\mathcal{J}_2$. Compte-tenu de la relation de réciprocité 20.18, le flux net échangé entre les deux surfaces est donc :

$$Q_{12}^{net} = \mathcal{S}_1 \mathcal{F}_{12} \left(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 \right)$$

ce qui se traduit bien par le circuit de la figure 20.10.

Le schéma complet est obtenu en combinant les deux circuits élémentaires et en conservant comme différence de potentiel $\mathcal{M}_1^{\mathbf{o}} - \mathcal{M}_2^{\mathbf{o}}$. Le résultat est fourni à la figure 20.11.



Flux Net Rayonné par S₁



• Flux Net Echangé $S_1 \iff S_2$

FIG. 20.10 - Schémas analogiques élémentaires



FIG. 20.11 – Schéma analogique complet

- Exercice : Quel est le schéma analogue pour une enceinte à trois surfaces grises ?. Qu'advient-il si les émissivités des surfaces tendent vers 1 ?

L'approche du schéma analogique est puissante pour établir rapidement les expressions du flux net pour des systèmes géométriques plus ou moins complexes. A titre d'illustration, on va exploiter l'analogie reproduite à la figure 20.11. La technique habituelle de résolution des problèmes ohmiques conduit au résultat suivant :

$$\dot{Q}_{12}^{net} = \frac{\mathcal{M}_1^o - \mathcal{M}_2^o}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 \mathcal{F}_{12}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 S_2}}$$

Si les deux surfaces sont des plans parallèles infinis respectivement à la température T_1 et T_2 , il s'en suit que $S_1 = S_2$ et $\mathcal{F}_{12} = \mathbf{1}$ et la relation ci-dessus devient :

$$\mathbf{q}12^{\text{net}} = \frac{\sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Si les deux surfaces sont des cylindres concentriques très longs, alors $\mathcal{F}_{12} = 1$ et on a :

$$\mathbf{q}12^{\text{net}} = \frac{\sigma \left(T_{1}^{4} - T_{2}^{4}\right)}{\frac{1}{\epsilon_{1}} + \frac{S_{1}}{S_{2}} \left(\frac{1}{\epsilon_{2}} - 1\right)}$$

Imaginons que la surface du cylindre extérieur devienne très grande. Le rapport S_1/S_2 tend vers 0 et la relation se simplifie en :

$$\mathbf{q}12^{\mathrm{net}} = \epsilon_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right)$$

La conclusion pratique est qu'une surface de très grande dimension devant une autre sera perçue par cette dernière comme un corps noir.
Chapitre 21

Conservation de l'énergie

21.1 Introduction

L'énergie totale d'un fluide en mouvement se compose de différentes contributions qu'il faut correctement identifier pour établir un bilan exact. L'énergie totale est la somme des énergies interne et cinétique. Ces dernières vont évoluer selon les interventions et les intensités des transferts thermiques et des puissances des forces internes ou externes agissant dans et sur le volume fluide considéré. Dans la première partie du chapitre, on établit les équations sous leur forme locale. La seconde partie présente l'approche macroscopique qui conduit aux écritures intégrales des équations et demande la définition du système global à modéliser.

Après avoir formulé la conservation de l'énergie totale, l'accent est placé sur l'établissement de l'équation de l'énergie mécanique : on discute la transformation réversible ou irréversible de l'énergie mécanique en chaleur et on souligne la concordance avec le second principe de la thermodynamique en dégageant directement les équations de l'énergie interne et de l'entropie.

21.2 Formulation locale

Dans un problème de fluide en mouvement, l'évaluation des transferts thermiques et des puissances des forces agissantes demande la détermination des grandeurs caractéristiques de l'écoulement, à savoir le champ de vitesse (u, v et w), la pression P, la température T et , dans certaines situations, la masse volumique du fluide ρ . Pour résoudre ce problème à six inconnues, il nous faut compléter les équations de Navier-Stokes (Chapitre 6, Partie I) du mouvement par l'équation de la conservation de l'énergie. Comme relation constitutive de fermeture entre P, ρ et T, nous retiendrons la relation thermodynamique décrivant l'état du fluide.

21.2.1 Premier principe de la thermodynamique

L'équation de la conservation de l'énergie découle directement de l'application du premier principe de la thermodynamique à des fluides en mouvement. On considère une succession de petites transformations ouvertes entre deux états d'équilibre. On identifie un domaine fluide de volume $\mathcal{V}ol$ et de surface S comme schématisé à la figure 21.1. En



FIG. 21.1 – Transport d'énergie dans le volume fluide

le suivant dans son mouvement, on énonce que le taux de variation élémentaire de son énergie totale \mathcal{E}_T , c'est-à-dire la somme de l'énergie interne \mathcal{E}_I et de l'énergie cinétique \mathcal{E}_C , est égale à la somme de la chaleur \dot{Q} reçue par unité de temps et de la puissance fournie au système par l'action des forces extérieures $\overline{\dot{W}_e}$, soit :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}[\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_C] = \dot{Q} + \overline{\dot{W}_e}$$
(21.1)

Cette relation se tient en admettant que l'énergie interne du fluide en mouvement est celle du fluide au repos et s'exprime en fonction de P et T. Exprimons les différents termes de l'équation 21.1 en considérant que le fluide est un milieu d'une seule espèce.

21.2.2 Energie totale

Posons $\mathbf{e_I}$ et $\mathbf{e_C}$ les énergies interne et cinétique par unité de masse. En intégrant sur le domaine fluide, nous avons :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}[\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_C] = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \int_{\mathcal{V}ol} \left[\mathbf{e}_{\mathbf{I}} + \mathbf{e}_{\mathbf{C}}\right] \rho d\mathcal{V}ol$$

Soit son équivalence en substituant $\mathbf{e}_{\mathbf{C}}$ par sa valeur $1/2\vec{V}^2$:

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_T = \mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} [\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_C] = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \int_{\mathcal{V}ol} \rho \left[\mathbf{e_I} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{V}}^2 \right] d\mathcal{V}ol$$

Puisque nous suivons le domaine fluide dans son mouvement, la relation précédente est une intégrale de masse (voir Partie I, Chapitre 6 5 en particulier Equation 6.29) qui peut tout aussi bien s'écrire :

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_T =}{\mathcal{D}t} \int_{\mathcal{V}ol} \rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left[\mathbf{e_I} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{V}}^2 \right] d\mathcal{V}ol$$
(21.2)

21.2.3 Quantité de chaleur

La quantité de chaleur apportée (au sens algébrique + ou -) par unité de temps au domaine fluide identifiable est égale à l'énergie calorifique traversant sa surface S par le mécanisme de conduction augmentée de tout apport calorifique en chaque point à l'intérieur du domaine dû à tout autre moyen tel qu'une réaction chimique, l'absorption ou l'émission d'un rayonnement électromagnétique, l'effet Joule *etc...* Ces contributions peuvent se rassembler sous le label de source ou puits thermique par unité de volume \dot{Q}_v .

$$\dot{Q} = -\int_{S} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{V}ol} \dot{Q}_{v} d\mathcal{V}ol$$

Où \vec{n} est la normale extérieure à la surface S. On applique le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\dot{Q} = -\int_{\mathcal{V}ol} \left[\nabla . \vec{q} - \dot{Q}_v\right] d\mathcal{V}ol$$
(21.3)

21.2.4 Puissance des forces extérieures

Nous avons vu dans la Partie I du cours que les forces extérieures se scindaient en deux familles ; les forces de surface et les forces de volume (ou de masse). Il va s'en dire que les travaux, évalués par unité de temps, de ces deux types de force vont affecter l'énergie totale du domaine fluide. Ce sont des termes de puissance qui s'expriment par le produit de la force par la vitesse de déplacement du fluide. Nous examinons dans un premier temps la contribution des forces de surface puis celle des forces de volume.

Puissance des forces de surface

Les forces de surface, représentées par le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$, produisent sur la surface S un travail par unité de temps égal à :

$$\overline{\dot{W}}_{fs} = -\int_{S} (\overline{\sigma}.\vec{n}).\vec{V}dS$$

La symétrie du tenseur des contraintes nous permet d'écrire :

$$(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}).\vec{V}=(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}).\vec{n}$$

de sorte qu'avec l'aide du théorème de la divergence $\overline{\dot{W}}_{fs}$ devient :

$$\overline{\dot{W}}_{fs} = -\int_{\mathcal{V}ol} \nabla .(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}) d\mathcal{V}ol$$
(21.4)

Nous retiendrons pour la suite que le tenseur se compose d'une contribution des forces de pression et d'une contribution des forces visqueuses :

$$\nabla(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}) = \nabla(P\overline{\overline{I}}.\vec{V}) + \nabla(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V})$$

soit encore :

$$\nabla(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}) = \vec{V}.\nabla P + P\nabla.\vec{V} + \nabla(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V})$$
(21.5)

Puissance des forces de volume

De la même manière, le travail par unité de temps des forces de volume sur le domaine s'écrit :

$$\overline{\dot{W}}_{fv} = \int_{\mathcal{V}ol} \rho \vec{\mathcal{F}} \vec{V} d\mathcal{V}ol \tag{21.6}$$

Par conséquent, le travail total par unité de temps prend la forme intégrale suivante :

$$\overline{\dot{W}_e} = -\int_{\mathcal{V}ol} [\nabla(\overline{\overline{\sigma}}) - \rho \vec{\mathcal{F}}] \vec{V} d\mathcal{V}ol$$
(21.7)

21.2.5 Equation générale de l'énergie totale

Nous sommes en mesure d'établir la forme générale de la conservation de l'énergie en substituant les expressions 21.2, 21.3 et 21.7 dans le bilan énergétique 21.1. Comme la relation finale doit être vérifiée quelque soit le domaine fluide, donc en tout point, nous pouvons omettre l'opérateur "intégrale" dans l'écriture finale où nous avons fait usage de la décomposition 21.5 :

$$\rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left[\mathbf{e}_{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{V}}^2 \right] = -\nabla . \vec{q} - \vec{V} . \nabla P - P \nabla . \vec{V} - \nabla (\overline{\tau} . \vec{V}) + \rho \vec{\mathcal{F}} \vec{V} + \dot{Q}_v$$
(21.8)

21.2.6 Equation de l'énergie mécanique

La loi de l'énergie cinétique spécifie que la variation de l'énergie cinétique par unité de temps est produite par le travail de toutes les forces, extérieures comme intérieures, appliquées au domaine fluide pendant le même intervalle de temps. En désignant respectivement par \dot{W}_e et \dot{W}_i la puissance par unité de volume des forces extérieures et intérieures, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left[\frac{1}{2} \vec{V}^2 \rho d\mathcal{V} ol \right] = \dot{W}_e d\mathcal{V} ol + \dot{W}_i d\mathcal{V} ol$$

En notant que $\frac{\mathcal{D}\rho d\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} = \frac{\mathcal{D}dm}{\mathcal{D}t} = 0$ de par l'équation de la continuité, il vient :

$$\rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left[\frac{1}{2} \vec{V}^2 \right] = \dot{W}_e + \dot{W}_i \tag{21.9}$$

Nous avons déjà établi l'expression de \dot{W}_e , relation 21.7 que nous développons sous la forme suivante :

$$\dot{W}_e = \rho \vec{\mathcal{F}} \vec{V} - \vec{V} \cdot \nabla P - P \nabla \cdot \vec{V} - \nabla (\overline{\tau} \cdot \vec{V})$$
(21.10)

Puissance des forces internes

La détermination du travail des forces intérieures s'effectue en multipliant l'équation générale du mouvement 6.17 par le vecteur de vitesse \vec{V} et en utilisant la décomposition du tenseur des contraintes :

$$\rho \vec{V} \frac{\mathcal{D} \vec{V}}{\mathcal{D} t} = \rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} t} \left[\frac{1}{2} \vec{V}^2 \right] = -\vec{V} \cdot \nabla P - \vec{V} \cdot \nabla \overline{\tau} + \rho \vec{\mathcal{F}} \vec{V}$$
(21.11)

De la comparaison des équations 21.9, 21.10 et 21.11, nous en déduisons :

$$\dot{W}_i = P\nabla \vec{V} + \overline{\tau} : \{\nabla \vec{V}\}$$
(21.12)

où

$$\overline{\overline{\tau}}: \{\nabla \vec{V}\} = \nabla(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V}) - \vec{V}.\nabla.\overline{\overline{\tau}}$$

C'est un scalaire qui résulte du produit de deux tenseurs et que l'on pose égal à $-\mu \Phi_{\mathbf{v}}$. La quantité $\Phi_{\mathbf{v}}$ est la **fonction de dissipation visqueuse** ; c'est un terme qui est <u>toujours</u> <u>positif</u>. On le démontre facilement en particulier pour les fluides newtoniens en introduisant l'expression 6.19 de $\overline{\overline{\tau}}$ (Partie I) et les composantes du tenseur des vitesses de déformation (Paragraphe 6.1.5, Partie 1).

$$\Phi_{\mathbf{v}} = \mathbf{2}(\overline{\dot{\gamma}}:\overline{\dot{\gamma}}) - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}[\nabla.\vec{\mathbf{V}}]^{\mathbf{2}}$$
(21.13)

Dans le cas d'un écoulement tridimensionnel en coordonnées cartésiennes, le calcul donne :

$$\Phi_{\mathbf{v}} = \frac{2}{3} \left[\left(\dot{\gamma}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} - \dot{\gamma}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \right)^2 + \left(\dot{\gamma}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} - \dot{\gamma}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \right)^2 + \left(\dot{\gamma}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} - \dot{\gamma}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \right)^2 \right] + 4 \left[\dot{\gamma}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}^2 + \dot{\gamma}_{\mathbf{y}\mathbf{z}}^2 + \dot{\gamma}_{\mathbf{z}\mathbf{x}}^2 \right] > 0$$

La positivité de la fonction $\Phi_{\mathbf{v}}$ signifie physiquement que la nature visqueuse du fluide va toujours conduire à une dégradation irréversible de l'énergie mécanique en chaleur, c'est-à-dire en énergie interne, et que tout écoulement de fluide réel s'accompagne d'une augmentation d'entropie. La fonction $\Phi_{\mathbf{v}}$ est le pendant de la perte de charge à vaincre pour maintenir le mouvement d'un fluide.

Le terme $P\nabla \vec{V}$ n'existe que dans un écoulement de fluide compressible. Il modélise l'aspect réversible d'une transformation de chaleur en énergie mécanique. Quand un gaz se détend, ce terme est positif : il y a augmentation du volume massique, $\nabla \vec{V} > 0$, refroidissement du gaz et augmentation de l'énergie cinétique.

– Exercice

Comme exercice on mènera le raisonnement dans le cas de la compression d'un gaz. Finalement, l'équation de l'énergie mécanique possède la forme suivante :

$$\rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left[\frac{1}{2} \vec{V}^2 \right] = \left[\rho \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{V} - \nabla \cdot (P\vec{V}) - \nabla \cdot (\overline{\tau} \cdot \vec{V}) \right]_e + \left[P \nabla \cdot \vec{V} - \mu \Phi_{\mathbf{v}} \right]_i$$
(21.14)

Dans l'équation 21.14, les indices $_{e}$ et $_{i}$ rappellent que les termes entre crochets se rapportent respectivement à la puissance des forces extérieures et intérieures.

21.2.7 Equation de l'énergie interne

L'équation qui traduit la variation de l'énergie interne d'un fluide en mouvement est une conséquence du premier principe de la thermodynamique et du théorème de l'énergie cinétique. Elle porte aussi le nom d'équation thermique et s'obtient en soustrayant 21.14 de 21.2. Elle exprime que l'énergie interne d'un système varie sous l'effet de la quantité de chaleur reçue diminuée de la puissance des forces intérieures :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{e}_{\mathbf{I}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} = -\nabla . \vec{q} - P\nabla . \vec{V} + \mu \Phi_{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{v}}$$
(21.15)

On constate que dans le cas d'un fluide au repos, l'équation 21.15 se ramène bien à l'équation générale de la conduction 13.19 avec la densité de flux de chaleur \vec{q} due à la conductibilité thermique donnée par la loi de Fourier.

On peut s'appuyer sur l'équation de l'énergie interne 21.15 et sur des considérations thermodynamiques pour donner une démonstration directe de la positivité de la fonction de dissipation. Considérons l'écoulement d'un fluide newtonien sans source de chaleur interne ($\dot{Q}_v = 0$). La variation d'entropie \hat{S} est donnée par la relation thermodynamique suivante :

$$T\frac{\mathcal{D}\hat{S}}{\mathcal{D}t} = \dot{Q}_{\hat{r}ev} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_I + \overline{\dot{W}_i}}{\mathcal{D}t} \overline{\dot{W}_i}_{\hat{r}ev}$$
(21.16)

Ecrivons l'équation 21.16 en termes d'entropie par unité de masse ŝ :

$$T\rho \frac{\mathcal{D}\hat{\mathbf{s}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} = -\left(\nabla . \vec{q}\right)_{\Gamma \acute{\mathbf{e}}V} = \rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{e}_{\mathbf{I}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} + P\nabla . \vec{V}$$
(21.17)

La combinaison de 21.17 avec 21.15 fournit l'équation de l'entropie :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\hat{\mathbf{s}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} = -\frac{(\nabla . \vec{q})_{\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}} \mathbf{V}}}{T} + \frac{\mu \mathbf{\Phi}_{\mathbf{v}}}{T}$$
(21.18)

Or, le deuxième principe de la thermodynamique précise que la variation d'entropie est reliée à la quantité de chaleur reçue par la relation :

$$\rho \frac{\mathcal{D}\hat{\mathbf{s}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \ge -\frac{(\nabla . \vec{q})_{\mathbf{r}\acute{\mathbf{e}}\mathbf{V}}}{T}$$
(21.19)

Cette inégalité, associée à l'équation de la variation d'entropie 21.18 prouve que la fonction de dissipation visqueuse ne peut être que positive et qu'elle quantifie le caractère irréversible de toutes transformations réelles.

21.3 Formulation macroscopique

L'étude énergétique globale d'un système, généralement de nature complexe comme l'exemplifie la figure 21.2, repose sur un ensemble d'équations intégrales qui traduisent directement les bilans macroscopiques des formes d'énergie considérées. La démarche est en tous points similaire à celle suivie au chapitre 6 de la Partie I pour la quantité de mouvement. La première étape consiste à définir avec précision le domaine physique à analyser. Il est primordial d'en identifier les surfaces entrée S_1 et sortie S_2 et les différentes conditions aux limites. Dans une deuxième étape, il s'agit d'expliciter, en s'aidant si nécessaire des formes locales, les différents termes de l'équation macroscopique de la conservation de la grandeur extensive $m\chi$ (Equation 6.33, Partie I) :

$$\frac{d[m\chi]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2(\langle \rho\chi V_n \rangle S) - \int_S \varphi . \vec{n}_e dS + \Upsilon_{tot}$$
(21.20)

Rappelons que φ est le flux dû aux mécanismes de diffusion et que Υ est un terme source pris au sens général.



FIG. 21.2 – Définition d'un système complexe

21.3.1 Energie Totale

Appliquons la formulation macroscopique 21.20 à la conservation de l'énergie totale :

$$\chi = \mathbf{e_{tot}} = \mathbf{e_I} + \mathbf{e_C}$$

$$\frac{d[\mathcal{E}_T]_{tot}}{dt} = \frac{d[\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_C]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[< \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \mathbf{e}_\mathbf{I} \right) V_n > \mathcal{S} \right] - \int_{\mathcal{S}} \varphi . \vec{n}_e d\mathcal{S} + \overline{\dot{W}_{e,tot}} \quad (21.21)$$

$$- - \int_{\mathcal{S}} \varphi . \vec{n}_e d\mathcal{S}$$

Le terme flux vient des phénomènes de conduction et de diffusion turbulente et son intégrale représente toute la quantité de chaleur \dot{Q} (reçue ou perdue) qui traverse par unité de temps l'aire totale de la surface S du domaine physique étudié.

$$-\overline{\dot{W}_{e,tot}}$$

Le terme $\overline{\dot{W}_{e,tot}}$ est la puissance des forces extérieures sur le volume $\mathcal{V}ol$. Explicitons le :

$$\overline{\dot{W}_{e,tot}} = \int_{\mathcal{V}ol} \left[-\nabla . (P\vec{V}) - \nabla . (\overline{\overline{\tau}}.\vec{V}) + \rho \vec{\mathcal{F}}.\vec{V} \right] d\mathcal{V}ol$$

En se ramenant aux intégrales de surface, il s'écrit :

$$\overline{\dot{W}_{e,tot}} = \int_{\mathcal{S}} \left[-(P\vec{V} + \overline{\tau}.\vec{V}) \right] .\vec{n}_e dS + \int_{\mathcal{V}ol} \rho \vec{\mathcal{F}}.\vec{V} d\mathcal{V}ol$$
(21.22)

Le premier membre de droite de l'expression 21.22 reprend le travail des forces extérieures sur la surface sur S. Si l'on admet que l'écoulement est quasi-unidirectionnel dans les sections d'entrée et de sortie, alors on peut y négliger la contribution des tensions visqueuses et ne garder que celle des forces de pression. Le travail de pression va donc se retrouver sous l'opérateur advection Δ_1^2 . Sur les surfaces fixes du domaine, la condition d'adhérence du fluide impose une vitesse nulle et donc pas de travail des forces en question. Il peut exister des parties mobiles dans le système (aubes de ventilateur, de pompe, de turbine, de compresseur, de piston ...); les forces exercées sur le fluide par ces surfaces mobiles S_{mob} correspondent à une puissance \overline{W} (> 0 ou < 0) fournie au système :

$$\overline{\dot{W}} = -\int_{\mathcal{S}_{mob}} \left[P\vec{V} + \overline{\tau}.\vec{V} \right].\vec{n}_e dS$$

Le deuxième membre de droite de la relation 21.22 traduit la puissance due aux forces de volume. Dans la majorité des cas, \mathcal{F} dérive d'un potentiel $\mathbf{e}_{\mathbf{p}}$ (pesanteur = gz, champ électrique ou magnétique ...) tel que $\mathcal{F} = -\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{p}}$. Dès lors, le travail locale de la force de volume prend la forme : $-\rho \vec{V} \nabla \tilde{e}$. En supposant que le potentiel par unité de masse \tilde{e} ne dépende pas du temps, soit $\partial \mathbf{e}_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{t} = \mathbf{0}$, il est facile de montrer que :

$$\int_{\mathcal{V}ol} -\rho \mathcal{F}.\vec{V}d\mathcal{V}ol = \int_{\mathcal{V}ol} -\rho \frac{\mathcal{D}\tilde{e}\delta\mathcal{V}ol}{\mathcal{D}t} - \frac{d[\mathcal{E}_p]_{tot}}{dt} - \int_{\mathcal{S}} \rho \tilde{e}\vec{V}.\vec{n}_e dS$$

En regroupant tous les termes et en introduisant l'enthalpie massique du fluide,

$$\mathcal{H} = \mathbf{e_I} + \frac{\mathbf{P}}{
ho}$$

la forme intégrale de la conservation de l'énergie totale devient :

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_I + \mathcal{E}_p]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[< \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \mathcal{H} + \mathbf{e_p} \right) V_n > \mathcal{S} \right] + \dot{Q} + \overline{\dot{W}}$$
(21.23)

 \mathcal{E}_p est l'énergie potentielle totale du système.

La variation de l'enthalpie par unité de masse d'un fluide obéissant à la loi des gaz parfaits, $P = \rho \Re T$, s'exprime par $\Delta \mathcal{H} = C_p \Delta T$ en supposant que la chaleur massique reste constante durant la transformation. Pour un fluide incompressible comme l'eau, on a $C_p \approx C_v$ et $\Delta \mathcal{H} = C_p \Delta T + \Delta P / \rho$.

On définit la valeur moyenne transversale << χ >> de transport d'une grandeur χ par l'intégrale :

$$<<\chi>>=\frac{1}{<\rho\vec{V}>\mathcal{S}}\int_{\mathcal{S}}\rho\chi\vec{V}.\vec{n}_{e}dS$$

Compte tenu de cette définition et en introduisant le débit massique,

$$\dot{m} = <\rho \vec{V}.\vec{n}_e > \mathcal{S}$$

l'écriture de 21.23 devient :

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_I + \mathcal{E}_p]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[<<\frac{\vec{V}^2}{2} + \mathcal{H} + \mathbf{e_p} >> \dot{\mathbf{m}} \right] + \dot{Q} + \overline{\dot{W}}$$
(21.24)

21.3.2 Energie Mécanique

La forme intégrale de l'équation de l'énergie mécanique obéit au modèle 21.20. En reprenant terme par terme la forme locale 21.14 et en adoptant les mêmes hypothèses, on note que le travail des forces extérieures se ramène aux mêmes formulations que pour l'énergie totale, à savoir une contribution des forces de pression sur les sections S_1 et S_2 , un travail des parties mobiles \overline{W} et une contribution des forces de volumes qui donne lieu à l'existence de l'énergie potentielle. Les nouvelles contributions viennent des forces internes. Par convention, on écrit la dissipation irréversible totale de l'énergie mécanique en chaleur due aux effets visqueux *via* le symbolisme :

$$\mathcal{E}_v = \int_{\mathcal{V}ol} \mu \mathbf{\Phi_v} \mathbf{d} \mathcal{V} \mathbf{ol}$$

Le terme du travail réversible reste sous une formulation intégrale de volume mais s'annule si l'écoulement est incompressible. La première forme de l'équation macroscopique de l'énergie mécanique est :

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_p]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[< \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathbf{e_p} \right) V_n > \mathcal{S} \right] + \overline{\dot{W}} - \mathcal{E}_v - \int_{\mathcal{V}ol} P \nabla . \vec{V} d\mathcal{V}ol \right]$$
(21.25)

La deuxième forme résulte de l'introduction de la moyenne de transport et du débit massique :

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_p]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[<< \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathbf{e_p}\right) >> \dot{m} \right] + \overline{\dot{W}} - \mathcal{E}_v - \int_{\mathcal{V}ol} P\nabla . \vec{V} d\mathcal{V}ol \quad (21.26)$$

Quelques cas particuliers intéressants permettent d'exploiter l'équation de l'énergie mécanique. La situation du régime stationnaire (d[..]/dt = 0) d'un écoulement incompressible dans un tube ne comprenant aucune partie mobile, $\overline{W} = 0$, nous conduit à l'expression de **l'équation de Bernoulli généralisée** :

$$\Delta_{1}^{2}\left[<\rho\left(\frac{\vec{V}^{2}}{2}+\frac{P}{\rho}+\mathbf{e}_{\mathbf{p}}\right)V_{n}>\mathcal{S}\right]=-\mathcal{E}_{v}$$
(21.27)

Elle montre que dans un écoulement de fluide réel, il y aura toujours une chute de pression totale créée par la travail des forces de viscosité et que, répétons-le, ce processus est irréversible : c'est une perte de pression.

Dans le cas de l'écoulement d'un gaz, l'énergie potentielle peut être négligée. Si la vitesse est assez élevée des effets de compressibilité apparaissent et le terme du travail réversible doit être modélisé. Deux situations classiques sont retenues ; la première concerne une évolution isotherme, la seconde une évolution isentropique.

- Ecoulement isotherme.

Tout d'abord remarquons que pour pouvoir évoluer en restant à température constante, le fluide doit échanger de la chaleur avec le monde extérieur. Ensuite, exprimons le travail réversible en fonction de la variation de l'énergie interne et de l'entropie massiques en employant la relation thermodynamique 21.17. L'intégrale de volume recherchée se décompose en deux intégrales de volume d'une dérivée particulaire :

$$\int_{\mathcal{V}ol} P.\nabla \vec{V} d\mathcal{V}ol = \int_{\mathcal{V}ol} \left[\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{e}_{\mathbf{I}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \right] d\mathcal{V}ol - \int_{\mathcal{V}ol} \left[\rho T \frac{\mathcal{D}\hat{\mathbf{s}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \right] d\mathcal{V}ol$$

Le théorème du transport sous sa forme macroscopique nous dit que :

$$\int_{\mathcal{V}ol} \left[\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{e}_{\mathbf{I}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \right] = \frac{d[\mathcal{E}_{I}]_{tot}}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{e}_{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{e}} \mathbf{dS}$$

et, en sortant la température constante de l'intégrale :

$$\int_{\mathcal{V}ol} \left[\rho \frac{\mathcal{D}\hat{\mathbf{s}}}{\mathcal{D}\mathbf{t}} \right] = \frac{d[\hat{\mathbf{S}}]_{\mathbf{tot}}}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \rho \hat{\mathbf{s}} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{e}} \mathbf{dS}$$

On sait que les intégrales de surface faisant intervenir le produit scalaire $\vec{V}.\vec{n}_e$ se réduisent à un terme sous l'opérateur flux d'advection Δ_1^2 . Dans ces conditions, l'équation de l'énergie mécanique devient :

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_p + \mathcal{A}]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[< \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \mathcal{G} \right) V_n > \mathcal{S} \right] + \overline{\dot{W}} - \mathcal{E}_v$$
(21.28)

où on a successivement introduit l'énergie libre ou potentiel thermodynamique de Helmholtz,

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_I - T\hat{S}$$

et l'enthalpie libre ou potentiel thermodynamique de Gibbs par unité de masse :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} - T\hat{\mathbf{s}}$$

- Ecoulement isentropique

Si l'évolution du fluide s'effectue à entropie constante, l'équation macroscopique de l'énergie mécanique 21.28 se simplifie puisque $\mathcal{A} = \mathcal{E}_I$ et $\mathcal{G} = \mathcal{H}$:

$$\frac{d[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_I]_{tot}}{dt} = -\Delta_1^2 \left[< \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \mathcal{H} \right) V_n > \mathcal{S} \right] + \overline{\dot{W}} - \mathcal{E}_v$$
(21.29)

21.3.3 Energie Interne

A partir des équations 21.21 et 21.25 on fait apparaître l'équation macroscopique de l'énergie interne :

$$\frac{d[\mathcal{E}_{I}]_{tot}}{dt} = -\Delta_{1}^{2} \left[\langle \rho\left(\mathbf{e}_{\mathbf{I}}\right) V_{n} \rangle \mathcal{S} \right] + \dot{Q} + \mathcal{E}_{v} - \int_{\mathcal{V}ol} P\nabla . \vec{V} d\mathcal{V}ol$$
(21.30)

- Exercice

Que devient l'équation de l'énergie interne pour une évolution d'un fluide compressible isotherme ? Même question pour une évolution isentropique ?

21.3.4 Entropie

L'intégration sur le volume $\mathcal{V}ol$ de l'équation ponctuelle 21.18 de l'entropie conduit directement à la forme macroscopique suivante uniquement valable pour un écoulement à température constante :

$$\frac{d[\hat{\mathbf{S}}]_{\text{tot}}}{dt} = -\boldsymbol{\Delta}_{1}^{2} \left[< \rho\left(\hat{\mathbf{s}}\right) V_{n} > \mathcal{S} \right] + \frac{\dot{Q} + \mathcal{E}_{v}}{T}$$
(21.31)

Troisième partie Transport de Matière

Chapitre 22

Introduction

22.1 Généralités

Dans les Parties I et II nous avons appris que les transferts de quantité de mouvement et de chaleur étaient respectivement liés au gradient de vitesse - loi de Newton - et au gradient de température - Loi de Fourier -. De façon analogue, un gradient de concentration d'une (plusieurs) espèce (s) ou constituant (s) chimique (s) dans un mélange va produire un transfert de matière. Cet échange de matière, communément mais maladroitement appelé transfert de masse, doit être nettement distingué du transport global que constitue un écoulement comme de l'air mis en mouvement par un ventilateur ou de l'eau circulant dans un tuyau. Le terme " **transfert de matière**" concerne plus particulièrement le mouvement relatif des constituants d'un mélange dû à des différences de concentration spatiales. Ce transport s'effectue à l'échelle microscopique. Pour illustrer le propos, on citera le transfert de la vapeur d'eau dans de l'air, la dispersion de la fumée de cigarette dans l'air ambiant,..... Le transfert de matière est présent dans la plupart des phénomènes naturels et abonde dans les procédés industriels. On le retrouve sans cesse dans le génie chimique, la physique, la biologie et même l'ingénierie aérospatiale.

La description du transfert de matière est calquée sur celle du transfert de chaleur. On considère deux modes ; de façon similaire au mode de conduction de la chaleur, on trouve le mode de diffusion massique ordinaire dans un fluide au repos ou dans un solide. De même, on a à faire au transfert de masse par convection quand un fluide qui s'écoule sur une surface, possède une concentration d'une certaine espèce chimique différente de celle qui existe à la surface.

Dans la plupart des processus impliquant le transfert de matière, le moteur est le gradient de concentration; c'est **la diffusion ordinaire**; elle est traitée dans ce cours. Toutefois, il existe d'autres types de diffusion massique à savoir la diffusion thermique plus connue sous le vocable d'effet Soret induit par des gradients de température, la diffusion due à des gradients de pression et la diffusion forcée provoquée par des forces extérieures agissant différemment sur les constituants du mélange. Ces effets particuliers sortent du cadre du cours. Ils sont discutés en détails dans l'ouvrage de Bird *et al* repris dans la liste des références.

22.2 Origines physiques

Comme nous l'avons mentionné, il existe une grande analogie entre les mécanismes de transfert de quantité de mouvement, de chaleur et de matière par diffusion. Ils trouvent tous trois leurs origines dans l'agitation moléculaire et l'activité atomique de la matière. Imaginons l'expérience schématisée à la figure 22.1-a. Une chambre est partitionnée en deux enceintes par une cloison. L'enceinte de gauche est remplie d'un gaz A, celle de droite d'un gaz B. Les gaz A et B sont de nature différente mais placés à la même température et à la même pression. On admet que la cloison soit retirée délicatement pour ne pas engendrer de mouvements parasites.



FIG. 22.1 – Mélange par diffusion ordinaire

On observe que les deux gaz diffusent l'un dans l'autre, c'est-à-dire que les molécules A sont transportées par diffusion dans l'enceinte de droite et vice et versa pour les molécules B. Les profils de concentration reproduits à la figure 22.1-b décrivent la répartition de matière instantanée qui existe à un certain temps après le retrait de la cloison. La concentration d'une espèce quantifie le nombre de molécules de l'espèce par unité de volume. Ainsi, l'enceinte de gauche est caractérisée par une forte concentration en gaz A et l'enceinte de droite par une forte concentration en gaz B. Par ailleurs, nous savons que l'agitation moléculaire se traduit par un mouvement aléatoire de directions équiprobables. Il faut donc s'attendre à ce qu'il y ait statistiquement plus de molécules A qui traversent le plan médian (cloison) de la gauche vers la droite que l'inverse; se crée ainsi un transfert de A vers l'enceinte de B. Comme le même raisonnement se tient pour la phase B, nous en concluons que la diffusion massique s'effectue toujours des fortes vers les faibles concentrations et qu'elle travaillera toujours à uniformiser le champ densitométrique. Après une période suffisamment longue le mélange parfait est atteint, la distribution de concentration est uniforme dans toute la chambre et le transport de matière cesse.

La diffusion massique prend place dans tous les types de milieux mais à différents degrés. Puisqu'elle repose sur l'interaction moléculaire, elle s'établira plus aisément dans les gaz que dans les liquides et encore plus que dans les solides. On retiendra aussi que le transfert de matière peut se faire entre phases de différentes natures; par exemple, la diffusion de gaz dans les liquides ou dans les solides est courante et a de nombreuses retombées technologiques intéressantes.

22.3 Définitions, notations et relations de base

Bien que présentant de grandes similitudes avec le transfert de chaleur, l'étude du transfert de matière nécessite une plus grande variété de notations. Ce besoin vient du fait qu'on peut s'intéresser à l'aspect molaire ou massique du transport et que le problème peut être décrit sous l'angle de l'observateur fixe ou en mouvement avec la vitesse d'ensemble du mélange.

22.3.1 Concentration, fraction et flux massique

Reprenons le cas du mélange binaire de constituants A et B. Nous désignons respectivement par $\rho_{\mathcal{A}}$ et ρ_{β} la masse par unité de volume de l'espèce A et de l'espèce B dans le mélange. De ce fait, $\rho_{\mathcal{A}}$ et ρ_{β} sont aussi les concentrations massiques de ces espèces dans le mélange dont la masse volumique globale ρ est donnée par :

$$\rho = \rho_{\mathcal{A}} + \rho_{\beta} \tag{22.1}$$

La fraction ou le titre massique de chaque constituant est une quantité sans dimension définie par :

$$\omega_{\mathcal{A}} = \frac{\rho_{\mathcal{A}}}{\rho} \quad \text{et} \quad \omega_{\beta} = \frac{\rho_{\beta}}{\rho}$$
(22.2)

Ce qui implique que la somme des fractions massiques est égale à l'unité :

$$\omega_{\mathcal{A}} + \omega_{\beta} = 1 \tag{22.3}$$

Pour un observateur attaché à un système d'axes de référence fixes dans l'espace prenons par exemple une paroi du domaine comme l'illustre l'axe Ox de la figure 22.1a - la diffusion de l'espèce A au travers d'une surface quelconque est vue comme un déplacement effectif de l'espèce A à la vitesse absolue $\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}}$. Dans ces conditions, le flux massique en $[\text{kg/s.m}^2]$ s'exprime comme suit :

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}}$$
(22.4)

La vitesse $\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}}$ qui peut être associée à n'importe lequel des points du système, est interprétée comme la vitesse moyenne des molécules A comprises dans un petit volume entourant le point en question. De la même manière on associe à ce point une vitesse moyenne de l'agrégat des molécules B, $\vec{\mathbf{U}}_{\beta}$ ce qui conduit au flux massique

$$\vec{\mathbf{n}}_{\beta} = \rho_{\beta} \vec{\mathbf{U}}_{\beta} \tag{22.5}$$

Une vitesse massique moyenne du mélange ou vitesse barycentrique \vec{U} peut dès lors être définie par

$$\rho \vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} + \vec{\mathbf{n}}_{\beta} = \rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} + \rho_{\beta} \vec{\mathbf{U}}_{\beta}$$
(22.6)

 soit

$$\vec{\mathbf{U}} = \omega_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} + \omega_{\beta} \vec{\mathbf{U}}_{\beta}$$
(22.7)

Si l'observateur se déplace avec la vitesse barycentrique $\vec{\mathbf{U}}$, il constate un flux massique de A et B différent de $\mathbf{n}_{\mathcal{A}}$ et \mathbf{n}_{β} . Dans ce cas, la vitesse de diffusion de A et B ressentie par l'observateur est

$$\vec{\mathbf{U}}_{\mathbf{r},\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} - \vec{\mathbf{U}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{U}}_{\mathbf{r},\beta} = \vec{\mathbf{U}}_{\beta} - \vec{\mathbf{U}}$$
 (22.8)

et les flux massiques correspondants sont respectivement :

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} - \vec{\mathbf{U}})$$
(22.9)

 et

$$\vec{\mathbf{j}}_{\beta} = \rho_{\beta}(\vec{\mathbf{U}}_{\beta} - \vec{\mathbf{U}})$$
(22.10)

En fait, le flux absolu $\mathbf{n}_{\mathcal{A}}$ (ou \mathbf{n}_{β}) vu par un observateur fixe dans l'espace et le flux relatif ou diffusif $\mathbf{j}_{\mathcal{A}}$ (ou \mathbf{j}_{β}) constaté par un autre observateur voyageant avec la vitesse moyenne du mélange sont liés. En effet, en s'aidant des relations 22.4, 22.5, 22.9 et 22.10 on démontre facilement que :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} + \rho_{\mathcal{A}} * \vec{\mathbf{U}} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{\beta} = \vec{\mathbf{j}}_{\beta} + \rho_{\beta} * \vec{\mathbf{U}}$$
(22.11)

- Nous tirons la conclusion importante qu'il y a deux contributions distinctes au flux massique absolu. Une première contribution provient de la diffusion de l'espèce par rapport au mouvement global du mélange; la seconde est uniquement due à l'advection de l'espèce à la vitesse moyenne de l'ensemble.
- Une autre remarque pertinente pour les mélanges binaires vient de la comparaison des flux diffusifs $\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathbf{j}}_{\beta}$. En explicitant la somme de ces flux à l'aide des relations 22.6, 22.9 et 22.10, nous montrons que les deux flux sont égaux et de direction opposée :

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} + \vec{\mathbf{j}}_{\beta} = \rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} + \rho_{\beta} \vec{\mathbf{U}}_{\beta} - \rho \vec{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$$
(22.12)

Une formulation générale entre les flux nets des deux espèces est obtenue en introduisant l'expression 22.7 de la vitesse barycentrique dans les relations 22.11. Il en résulte les écritures suivantes :

$$(1 - \omega_{\mathcal{A}})\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} - \omega_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{n}}_{\beta} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}}$$
(22.13)

 et

$$(1 - \omega_{\beta})\vec{\mathbf{n}}_{\beta} - \omega_{\beta}\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{j}}_{\beta}$$
(22.14)

22.3.2 Concentration, fraction et flux molaire

Une démarche semblable s'applique pour les quantités molaires. On définit la concentration molaire de A (B) comme le rapport de la concentration massique $\rho_{\mathcal{A}}$ (ρ_{β}) par la masse molaire $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (\mathcal{M}_{β}) en [kg/kmol] :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{A}} = \frac{\rho_{\mathcal{A}}}{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{\beta} = \frac{\rho_{\beta}}{\mathcal{M}_{\beta}}$$
(22.15)

Elle représente le nombre de moles de l'espèce par unité de volume. La concentration molaire totale ou globale du mélange est bien évidemment :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}} + \mathbf{C}_{eta}$$

Il s'en suit que les fractions ou titres molaires sont :

$$\mathbf{X}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathcal{A}}}{\mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_{\beta} = \frac{\mathbf{C}_{\beta}}{\mathbf{C}}$$
 (22.16)

avec l'identité

$$\mathbf{X}_{\mathcal{A}} + \mathbf{X}_{eta} = \mathbf{1}$$

En combinant les relations 22.1, 22.15 et 22.16 on exprime la masse molaire du mélange \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \frac{\rho}{\mathbf{C}} = \frac{\rho_{\mathcal{A}} + \rho_{\beta}}{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}} + \mathbf{C}_{\beta}\mathcal{M}_{\beta}}{\mathbf{C}} = \mathbf{X}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}} + \mathbf{X}_{\beta}\mathcal{M}_{\beta}$$
(22.17)

La vitesse molaire moyenne du mélange prend la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{U}}^* = \frac{\mathbf{C}_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} + \mathbf{C}_{\beta}\vec{\mathbf{U}}_{\beta}}{\mathbf{C}_{\mathcal{A}} + \mathbf{C}_{\beta}} = \mathbf{X}_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} + \mathbf{X}_{\beta}\vec{\mathbf{U}}_{\beta}$$
(22.18)

Pour un observateur fixe, les flux molaires des constituants A et B s'écrivent :

$$\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{N}}_{\beta} = \mathbf{C}_{\beta} \vec{\mathbf{U}}_{\beta}$$
 (22.19)

Pour l'observateur se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathbf{U}}^*$, les flux molaires sont donnés par :

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} - \vec{\mathbf{U}}^*) \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{J}}_{\beta} = \mathbf{C}_{\beta}(\vec{\mathbf{U}}_{\beta} - \vec{\mathbf{U}}^*)$$
(22.20)

Une expression similaire à la relation 22.11 est déduite :

$$\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} + \mathbf{C}_{\mathcal{A}} * \vec{\mathbf{U}}^* \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{N}}_{\beta} = \vec{\mathbf{J}}_{\beta} + \mathbf{C}_{\beta} * \vec{\mathbf{U}}^*$$
(22.21)

On montrera à titre d'exercice que la somme des flux molaires diffusifs est bien nulle

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} + \vec{\mathbf{J}}_{\beta} = 0$$
(22.22)

Des relations entre flux molaires nets équivalentes à celles des flux massiques 22.13 et 22.14 s'obtiennent en combinant les relations 22.18 et 22.21 : soit

$$(1 - \mathbf{X}_{\mathcal{A}})\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{N}}_{\beta} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}}$$
(22.23)

 et

$$(1 - \mathbf{X}_{\beta})\vec{\mathbf{N}}_{\beta} - \mathbf{X}_{\beta}\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{J}}_{\beta}$$
(22.24)

Comme nous le verrons au chapitre 23, l'utilisation de pressions partielles se prête bien à la modélisation de la diffusion massique gazeuse. La loi de Dalton précise que la pression totale $\tilde{\mathbf{P}}$ d'un mélange gazeux, supposé toujours binaire pour la simplicité d'écriture, se ramène à la somme des pressions partielles des constituants :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{\mathcal{A}} + \mathbf{P}_{\beta} \tag{22.25}$$

En supposant que les phases gazeuses se comportent comme des gaz parfaits, que le système évolue à température constante et d'après la définition 22.15 de la concentration molaire, on a :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{A}}}{\Re \mathbf{T}} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{\beta} = \frac{\mathbf{P}_{\beta}}{\Re \mathbf{T}}$$
(22.26)

Comme

$$\mathbf{C} = \frac{\rho}{\mathcal{M}} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\Re \mathbf{T}}$$
(22.27)

on tire la relation entre titres molaires et pressions :

Γ

$$\mathbf{X}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{A}}}{\tilde{\mathbf{P}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_{\beta} = \frac{\mathbf{P}_{\beta}}{\tilde{\mathbf{P}}}$$
 (22.28)

Rappellons que \Re est la constante universelle des gaz parfaits et que sa valeur est 8314 kg/kmol.

Chapitre 23

Diffusion Ordinaire

23.1 Milieu immobile

23.1.1 Loi de Fick en unités massiques

Cette section introduit la modélisation de la diffusion massique dans un milieu immobile. Cette situation se rencontre quand le transfert de matière s'effectue au sein d'un fluide au repos ou dans un solide. Pour conserver un caractère simple à la démarche nous continuons à considérer le problème d'un mélange binaire comme celui illustré à la figure 23.1. Il s'agit d'une conduite de longueur L connectant deux grands réservoirs et contenant un mélange isotherme d'un gaz A et d'un gaz B. Les substances gazeuses sont inertes et leurs concentrations sont maintenues constantes dans chaque réservoir avec $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{0}) > \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{L})$ et $\rho_{\beta}(\mathbf{0}) < \rho_{\beta}(\mathbf{L})$. Ce potentiel de concentration cause un transfert de la matière A dans la direction des y positifs alors que la matière B diffuse dans la direction opposée. Un état stationnaire existe si le transport de chaque espèce se produit à flux égal et de sens contraire. Le phénomène s'effectue donc à flux massique total nul par rapport à des axes fixes. Ce fait s'écrit comme suit :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) + \mathbf{n}_{\beta}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$
(23.1)

De cette identité et au regard des relations 22.6 et 22.11 on conclut que la vitesse barycentrique est nulle donc que le mélange est au repos et que les flux massiques absolus sont égaux aux flux diffusifs :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{\beta}(\mathbf{y}) = \mathbf{j}_{\beta}(\mathbf{y})$$
 (23.2)

Comme déjà souligné, les flux $\mathbf{j}_{\mathcal{A}}$ et \mathbf{j}_{β} résultent de l'agitation moléculaire. Pour les exprimer, nous adoptons une approche semblable à celles suivies pour la viscosité (Chapitre 2 de la Partie I) et la conductivité des gaz (Chapitre 2 de la Partie II). Analysons le flux massique net passant par la surface S située à l'ordonnée y. Pour que l'étude reste simple nous admettrons que toutes les molécules A et B ont la même masse m et le même diamètre d. La figure 23.1 précise que la concentration massique de A décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du réservoir A, c'est-à-dire quand l'ordonnée courante augmente suivant la convention choisie. Des molécules A provenant des couches voisines distantes d'un libre parcours moyen ℓ de par et d'autre de y traversent la surface S. Le flux net de l'espèce A au travers de S est égal au nombre de molécules par seconde provenant de la



FIG. 23.1 – Diffusion massique binaire stationnaire

couche à forte concentration en $y - \ell$ diminué du nombre de molécules par seconde venant de la couche à faible concentration en $y + \ell$, le tout multiplié par la masse d'une molécule :

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{m} * \left[\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y} - \ell) - \dot{\mathcal{N}}_{\beta}(\mathbf{y} + \ell) \right]$$
(23.3)

Nous avons déjà eu l'occasion d'exprimer le taux de molécules dans une direction donnée (chapitre 2 des Parties I et II); il est égal à la densité volumique de molécules $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ multipliée par la vitesse d'agitation moléculaire dans la direction considérée, soit $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{A}} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{v}}/\mathbf{6}$. Compte tenu de l'isothermicité et de l'égalité des masses des molécules, \tilde{v} a la même valeur pour les espèces A et B puisqu' elle ne dépend que de la température et de m. En se servant de l'identité $\rho_{\mathcal{A}} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} * \mathbf{m}$, l'équation 23.3 devient :

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{6} \left[\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{y} - \ell) - \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{y} + \ell) \right]$$
(23.4)

Le libre parcours moyen est suffisamment petit pour accepter une variation linéaire de ρ_A sur la distance 2ℓ et exprimer la différence de concentration de A par son gradient de sorte que :

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = -\frac{\ell \tilde{\mathbf{v}}}{\mathbf{3}} \frac{\mathbf{d}\rho_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}$$
(23.5)

En posant

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}\beta} = \frac{\ell \tilde{\mathbf{v}}}{3} \tag{23.6}$$

on aboutit à la **loi de Fick** qui énonce que le flux massique par diffusion ordinaire de l'espèce A est proportionnel et de signe contraire au gradient de concentration massique

de A.

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = -\mathcal{D}_{\mathcal{A}\beta} \frac{\mathbf{d}\rho_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}$$
(23.7)

Le coefficient de proportionnalité $\mathcal{D}_{A\beta}$ est **la diffusivité binaire massique**. C'est le paramètre phénoménologique qui caractérise la propriété qu'a l'espèce A à diffuser dans l'espèce B.

Pour un mélange à masse volumique constante, on a avantage à remplacer dans 23.7 la concentration massique $\rho_{\mathcal{A}}$ par la fraction massique $\omega_{\mathcal{A}}$; une seconde écriture de la loi de Fick en ressort :

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = -\rho \mathcal{D}_{\mathcal{A}\beta} \frac{\mathbf{d}\omega_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}$$
(23.8)

Le flux massique varie linéairement avec le gradient de la fraction massique de la substance considérée. La loi de Fick s'applique de la même façon à l'espèce B:

$$\mathbf{j}_{\beta}(\mathbf{y}) = -\rho \mathcal{D}_{\beta \mathcal{A}} \frac{\mathbf{d}\omega_{\beta}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}$$
(23.9)

o- $\mathcal{D}_{\beta\mathcal{A}}$ est le coefficient de diffusivité du gaz *B* dans le gaz *A*. En exploitant le fait que la somme des deux flux diffusifs est nulle (relation 22.12) et que la somme des fractions massiques est unitaire (relation 22.3), on démontre que les deux diffusivités massiques binaires sont égales : En effet,

$$-\rho \mathcal{D}_{\beta\beta} \frac{\mathbf{d}\omega_{\beta}}{\mathbf{d}\mathbf{y}} = \rho \mathcal{D}_{\beta\beta} \frac{\mathbf{d}\omega_{\beta}}{\mathbf{d}\mathbf{y}} = -\rho \mathcal{D}_{\beta\beta} \frac{\mathbf{d}\omega_{\beta}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}$$
(23.10)

Ce qui conduit à

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}\beta} = \mathcal{D}_{\beta\mathcal{A}} = \mathcal{D}$$
(23.11)

Dans un problème tridimensionnel, la loi de Fick se généralise par l'écriture vectorielle suivante :

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D}.\nabla\rho_{\mathcal{A}}$$
(23.12)

soit encore

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} = -\rho \mathcal{D}.\nabla \omega_{\mathcal{A}}$$
(23.13)

23.1.2 Loi de Fick en unités molaires ou pression partielle

En présence de réactions chimiques, il est souvent plus commode d'exprimer les échanges de matière en termes de flux molaires. Pour obtenir la loi de Fick dans ces unités, il suffit de diviser membre à membre l'équation 23.7 par la masse molaire de l'espèce. En notation vectorielle il vient :

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D}.\nabla \mathbf{C}_{\mathcal{A}}$$
(23.14)

Si le champ de concentration molaire du mélange est uniforme, on peut exprimer la loi de Fick en fonction du titre molaire :

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} = -C\mathcal{D}.\nabla\mathbf{X}_{\mathcal{A}}$$
(23.15)

Famille	Couple	$\mathcal{D} \; [\mathrm{m^2/s}]$	T [K]
	-	. / .	
Gaz-Gaz	Air-Acétone	$1,09.10^{-5}$	273
	$\operatorname{Air-CO}_2$	$1,42.10^{-5}$	276
	$Air-H_2O$	$2,88.10^{-5}$	313
	Air-He	$7,\!65.10^{-5}$	317
Gaz-Liquides	Propane-Eau	$0,97.10^{-9}$	293
	Chlore-Eau	$1,25.10^{-9}$	298
	Air-Eau	$2, 5.10^{-9}$	293
	H_2 -Eau	$4, 5.10^{-9}$	298
Gaz-Solides	He -Pyrex	$4,5.10^{-15}$	293
	H_2 -fer	$2,6.10^{-13}$	293
	CH ₄ -Polyéthylène	$5,7.10^{-12}$	298
	CO ₂ -Polystyrène	$5,8.10^{-12}$	298
	CO ₂ -Néoprène	$2,7.10^{-11}$	298
	H ₂ -Néoprène	$4,3.10^{-10}$	298
	N_2 -Silicone	$1,3.10^{-9}$	298
	He-Silicone	$6,7.10^{-9}$	298

TAB. 23.1 – Valeurs de la diffusivité massique

Pour modéliser le transfert de matière dans les gaz on trouve plus commode de travailler en pressions partielles. Ainsi, dans un problème où la pression totale $\tilde{\mathbf{P}}$ est uniforme, la substitution de la fraction molaire $\mathbf{X}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}_{\beta})$ par la pression partielle $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_{\beta})$ à l'aide de la relation 22.28 conduit à :

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D}\frac{\mathbf{C}}{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \nabla \mathbf{P}_{\mathcal{A}} = -\frac{\mathcal{D}}{\Re \mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{P}_{\mathcal{A}}$$
(23.16)

23.1.3 Coefficient de diffusion massique

A l'instar des deux autres coefficients de diffusion, à savoir celui de la quantité de mouvement- la viscosité cinématique ν - et de la chaleur - la diffusivité thermique α -, le coefficient de diffusion massique \mathcal{D} s'exprime aussi en $m^2 s^{-1}$.

Les valeurs de la diffusivité massique se trouvent dans des ouvrages spécialisés (tables de données, handbooks). Le tableau 23.1 liste quelques valeurs typiques de \mathcal{D} . On observe que les gaz offrent la plus grande diffusivité massique, de l'ordre de 10^{-5} [m²/s] (comme d'ailleurs la viscosité cinématique et la diffusivité thermique). Elle se situe aux alentours de 10^{-9} [m²/s] dans les liquides alors que celle des solides est très faible, de l'ordre de 10^{-12} à 10^{-34} [m²/s].

23.2 Fluide en mouvement laminaire

Nous traitons maintenant de la diffusion massique dans un écoulement en régime laminaire. Le fluide considéré est le mélange des deux espèces A et B. L'ensemble des concepts développés au paragraphe 22.3 nous permet d'établir facilement les lois de transfert de matière dans un repère fixe.

23.2.1 Flux absolu en unités massiques

Le flux absolu de masse de A est décrit par la relation 22.13. Nous remplaçons \mathbf{j}_{A} par son expression 23.7 pour obtenir :

$$(1 - \omega_{\mathcal{A}})\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} - \omega_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{n}}_{\beta} = -\rho \mathcal{D}\nabla\omega_{\mathcal{A}}$$
(23.17)

De même on aboutit à l'expression du flux absolu de l'espèce B

$$(1 - \omega_{\beta})\vec{\mathbf{n}}_{\beta} - \omega_{\beta}\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{A}} = -\rho\mathcal{D}\nabla\omega_{\beta}$$
(23.18)

23.2.2 Flux absolu en unités molaires

Les relations des flux absolus en unités molaires sont directement tirées des expressions 23.15 et 22.23 :

$$(1 - \mathbf{X}_{\mathcal{A}})\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{N}}_{\beta} = -\mathbf{C}\mathcal{D}.\nabla\mathbf{X}_{\mathcal{A}}$$
(23.19)

 et

$$(1 - \mathbf{X}_{\beta})\vec{\mathbf{N}}_{\beta} - \mathbf{X}_{\beta}\vec{\mathbf{N}}_{\mathcal{A}} = -\mathbf{C}\mathcal{D}.\nabla\mathbf{X}_{\beta}$$
(23.20)

23.3 Exploitation des équations

23.3.1 Evaporation d'un liquide

Aspects théoriques

On désire quantifier le taux d'évaporation d'un liquide. Le système est représenté à la figure 23.2. Un liquide volatile A contenu dans une éprouvette est surmonté par un gaz B inerte et insoluble dans lequel il s'évapore à température T et pression totale $\tilde{\mathbf{P}}$ constantes. Au sommet du contenant en z = L on force l'écoulement du mélange gazeux A+B pour maintenir les concentrations massiques $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{L})$ et $\rho_{\beta}(\mathbf{L})$ à une valeur fixée.

On admet que l'équilibre existe entre la nappe liquide et sa vapeur à l'interface en z = 0. La concentration massique $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{0})$ est donc celle de la vapeur saturée; elle se détermine selon les corrélations ou tables thermodynamiques (diagramme de Molier). Le transfert de matière est supposé stationnaire, unidirectionnel suivant z et sans réaction chimique puisque le gaz B est inerte. Dans ces conditions il est obligatoire que le flux massique absolu de l'espèce A soit constant à travers toute la colonne de z = 0 à z = L: soit

$$\frac{d\mathbf{n}_{\mathcal{A}}}{dz} = 0 \tag{23.21}$$



FIG. 23.2 – Evaporation d'un liquide

De par la constance de T et \mathbf{P} , ρ et \mathcal{D} sont aussi des invariables du problème. La diffusion de A vers le haut implique que $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{0}) > \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{L})$ et entraîne que l'espèce B diffuse vers le bas, soit $\rho_{\beta}(\mathbf{L}) > \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{0})$. Ainsi, en quittant l'interface, la vapeur A provoque un mouvement du gaz B vers la surface liquide. Comme le gaz inerte est insoluble, ce mouvement va engendrer une accumulation de B au voisinage de l'interface et donc une augmentation de pression totale. Cette situation viole les conditions admises d'isobaricité et de stationnarité. Il faut par conséquent convenir que le mouvement descendant de B est compensé par un second mouvement global ascendant de ce gaz avec de la vapeur A de sorte que le flux absolu de B dans la colonne soit identiquement nul à toutes les stations. Avec $\mathbf{n}_{\beta}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \ \forall z$, l'équation 23.17 du flux massique de la vapeur devient :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}) = -\rho \frac{\mathcal{D}}{1 - \omega_{\mathcal{A}}} \frac{\mathbf{d}\omega_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{z}} = \mathbf{C}^{\mathbf{te}}$$
(23.22)

Après intégration et en utilisant les conditions aux limites $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{0}) = \omega_{\mathcal{A},\mathbf{0}}$ et $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}) = \omega_{\mathcal{A},\mathbf{L}}$, on obtient l'expression du profil de la fraction massique de la vapeur A dans l'éprouvette :

$$\frac{1 - \omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{z})}{1 - \omega_{\mathcal{A},\mathbf{o}}} = \left[\frac{1 - \omega_{\mathcal{A},\mathbf{L}}}{1 - \omega_{\mathcal{A},\mathbf{o}}}\right]^{\tilde{\mathbf{L}}}$$
(23.23)

Le profil du titre massique du gaz B se déduit directement du résultat 23.23 en se rappelant que $\omega_{\beta} = \mathbf{1} - \omega_{\mathcal{A}}$:

$$\frac{\omega_{\beta}(\mathbf{z})}{\omega_{\beta,\mathbf{o}}} = \left[\frac{\omega_{\beta,\mathbf{L}}}{\omega_{\beta,\mathbf{o}}}\right]^{\frac{z}{L}}$$
(23.24)

La connaissance de $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{z})$ donne accès au taux d'évaporation du liquide A. La démarche consiste à rechercher l'expression du gradient de la fraction massique puis à l'injecter dans la relation 23.22. Tous calculs faits, il vient :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}} = \frac{\rho \mathcal{D}}{\mathbf{L}} \ln \left[\frac{\mathbf{1} - \omega_{\mathcal{A}, \mathbf{L}}}{\mathbf{1} - \omega_{\mathcal{A}, \mathbf{o}}} \right]$$
(23.25)

Une expression analogue est déduite pour exprimer le flux molaire :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathbf{C}\mathcal{D}}{\mathbf{L}} \ln \left[\frac{\mathbf{1} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}, \mathbf{L}}}{\mathbf{1} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}, \mathbf{o}}} \right]$$
(23.26)

En faisant appel aux relations 22.28, en symbolisant la pression de saturation de la vapeur A à la température T par $\mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T)$ puis en multipliant le flux molaire par la section S de l'éprouvette et la masse molaire $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ on aboutit à **l'équation de Stefan** qui prédit le débit massique d'évaporation :

$$\dot{m}_{\mathcal{A}} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}{\Re T} \cdot \frac{\mathcal{D}\mathbf{S}}{L} \ln\left[\frac{\tilde{\mathbf{P}} - P_{\mathcal{A},\mathbf{L}}}{\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T)}\right]$$
(23.27)

Lorsque les pressions partielles de vapeur sont négligeables devant la pression totale $\tilde{\mathbf{P}}$, l'équation 23.27 prend une forme plus simple. On approxime la fonction logarithmique par son développement au premier ordre :

$$\ln\left[\frac{\tilde{\mathbf{P}} - P_{\mathcal{A},\mathbf{L}}}{\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T)}\right] \simeq \frac{\tilde{\mathbf{P}} - P_{\mathcal{A},\mathbf{L}}}{\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T)} - 1 = \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T) - P_{\mathcal{A},\mathbf{L}}}{\tilde{\mathbf{P}}}$$
(23.28)

D'où l'expression approchée du débit massique :

$$\dot{m}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}{\Re T} \cdot \frac{S}{L} \left[\mathbf{P}_{\mathbf{sat}}(T) - P_{\mathcal{A},\mathbf{L}} \right]$$
(23.29)

Il est important de remarquer que cette équation de transfert massique possède une écriture analogue à celle décrivant le transfert de chaleur par conduction dans un corps au repos. On retrouve que le flot de la quantité transférée est le quotient d'une différence de potentiel ΔP , par une résistance $\mathcal{R}_{\uparrow} = (\Re TL)/(\mathcal{DM}_{\mathcal{A}}\mathbf{S})$.

Application

Le liquide est de l'eau placée dans un récipient circulaire de 0,15 m de diamètre maintenu à la température de 40 °C. La profondeur du contenant jusqu'à la surface de l'eau est de 0,05 m. La pression atmosphérique est égale à 1034 hPa et l'air ambiant est caractérisé par une humidité relative de 20%.

Déterminons tout d'abord le coefficient de diffusion massique \mathcal{D} en utilisant la corrélation proposée par **Schirmer** pour l'air et la vapeur d'eau ($\tilde{\mathbf{P}}$ en Pa et T en K) :

$$\mathcal{D} = \frac{2,26}{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \left(\frac{T}{273}\right)^{1,81} \simeq 2,8.10^{-5} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$
(23.30)

l'humidité relative φ est le rapport de la pression partielle de la vapeur d'eau à la pression de saturation calculée à la température T du système :

$$\varphi = \frac{P_v}{\mathbf{P_{sat}}(T)} \tag{23.31}$$

 $\mathbf{P_{sat}}(T)$ peut être calculée par la relation suivante, formule empirique de lissage des données thermodynamiques (ici T en ^oC) : :

$$\log_{10} \mathbf{P_{sat}}(T) = \frac{7,627T}{241+T} + 2,787 \simeq 7459 \quad \text{Pa}$$
(23.32)

La pression partielle de la vapeur d'eau P_v dans l'air humide environnant est donc égale à 0.2*7459 = 1492 Pa. En introduisant les différentes données numériques dans la relation de Stefan avec $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = 18$ on détermine la valeur du débit d'eau évaporée :

$$\dot{m}_v = \frac{103400 \text{x18}}{8310(273+40)} \cdot \frac{2, 8.10^5}{0, 05} \cdot \frac{\pi 0, 15^2}{4} \cdot \ln\left[\frac{103400 - 1492}{103400 - 7459}\right] = 4,272.10^{-7} \text{kg/s} = 1,54 \text{g/hr}$$
(23.33)

Le même calcul effectué sur la base de l'équation simplifiée 23.29 aboutit à 1,47 g/hr soit environ un écart de 4% avec la formule complète.

L'analyse des relations 23.27 et 23.29 permet de tirer deux conclusions d'intérêt pratique :

- L'évaporation croît vite avec la température car l'augmentation de T élève la valeur de la pression de saturation (confère formule 23.32).
- L'évaporation est plus efficace sous vide car la diminution de la pression totale entraîne une chute de la pression partielle de vapeur P_v dans le mélange mais aussi une augmentation de \mathcal{D} (confère relation 23.30).

Chapitre 24

Equations générales de la diffusion

24.1 Equations de conservation

Les équations générales de la diffusion massique dans un écoulement d'un fluide constitué de plusieurs espèces traduisent essentiellement la conservation de la masse totale. Nous avons déjà établi cette équation de continuité pour un fluide mono-composant ou homogène (équation 5.10 chapitre 5 de la Partie I). Appliquons la à l'espèce A d'un écoulement incompressible en considérant l'existence de réactions chimiques caractérisées par un taux volumique de production ou de disparition \dot{r}_A . En terme de concentration massique ρ_A elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla \cdot \left(\rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}} \right) = \dot{r}_{\mathcal{A}}$$
(24.1)

On remplace le terme $\rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}}_{\mathcal{A}}$ par $\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} + \rho \vec{\mathbf{U}}$ à l'aide de la relation 22.9, ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla . \left(\rho_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{U}} \right) + \nabla . \vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{A}} = \dot{r}_{\mathcal{A}}$$
(24.2)

Nous savons que pour un mélange à masse volumique constante la divergence de la vitesse d'ensemble du mélange est nulle. La prise en considération de cette remarque et la substitution du flux diffusif par la loi de Fick 23.7 nous conduisent à l'équation générale de la diffusion pour l'espèce A:

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{U}} \nabla \rho_{\mathcal{A}} = \nabla . \left(\mathcal{D} \nabla \rho_{\mathcal{A}} \right) + \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{A}}$$
(24.3)

Dans le cas d'un coefficient de diffusivité massique constant, l'équation se ramène à :

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{U}} \nabla \rho_{\mathcal{A}} = \mathcal{D} \nabla^2 \rho_{\mathcal{A}} + \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{A}}$$
(24.4)

On retrouve la forme classique de l'équation de transport d'un scalaire, analogue à l'équation de la chaleur (par exemple eq.7.6 du chapitre 7 de la Partie II), à savoir un terme d'advection, un terme de diffusion et un terme source (puits).

Quand la composition du mélange ne change pas de façon significative d'un point à un autre du domaine ou si les masses molaires des espèces constituantes ne sont pas trop différentes les unes des autres pour que la masse molaire globale \mathcal{M} varie peu ou tout simplement si $\tilde{\mathbf{P}}$ et T restent constants alors $\rho_{\mathcal{A}}$ est strictement proportionnel à $\mathbf{X}_{\mathcal{A}}$. Dans ces conditions une formulation identique à l'équation 24.4 régit la variation de la fraction molaire :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{U}} \nabla \mathbf{X}_{\mathcal{A}} = \mathcal{D} \nabla^2 \mathbf{X}_{\mathcal{A}} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{A}}}{\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \mathbf{C}_{\mathcal{A}}}$$
(24.5)

De même, il devient aisé de reformuler la diffusion de l'espèce A en termes de pression partielle en exploitant la relation 22.28:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{t}} + \vec{\mathbf{U}} \nabla \mathbf{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{D} \nabla^2 \mathbf{P}_{\mathcal{A}} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{A}} \mathbf{P}}{\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \mathbf{C}_{\mathcal{A}}}$$
(24.6)

24.2 Types de conditions aux limites

La définition complète du problème de diffusion demande d'énoncer les conditions d'univalence, c'est-à-dire de préciser l'état initial du système mais surtout les conditions aux limites. Ceci se fait par le biais de relations dites de "fermeture" qui traduisent simplement un mécanisme souvent complexe qui existe aux frontières du domaine étudié. Ainsi plusieurs cas de figure très différents les uns des autres peuvent se présenter. Une des frontières du champ est une surface liquide (cas a et b).

– cas a

L'espèce A est sous forme d'un liquide et se trouve sous phase vapeur dans le mélange gazeux. C'est typiquement le problème traité au paragraphe 23.3.1 et schématisé à nouveau à la figure 24.1 a. Nous savons qu'à l'interface du côté gazeux, la condition aux limites appropriée est l'égalité de la pression partielle à la pression de saturation correspondant à la température de l'interface.



FIG. 24.1 – Conditions aux limites en transfert massique

– cas b

Le domaine inclut encore une interface gaz-liquide mais l'espèce A, une composante du mélange gazeux, diffuse à travers le liquide B comme l'illustre la figure 24.1 b. Si la solution

T $[^{o}C]$	Air	O_2	H_2	$\rm CO_2$
15	6000	3700	6600	123
25	7150	4350	7100	162
45	9010	5600	7560	260
65	1027	6400	7600	360

TAB. 24.1 – Constante de Henri pour des couples gaz-eau [MPa]

TAB. 24.2 – Solubilités de gaz dans des solides [kmol/m³.Pa]

Solide	Gaz	$T [^{o}C]$	${f S}$ [kmol/m ³ .Pa
Caoutchouc	Hydrogène	20	$2,1X10^{-8}$
Nickel	Hydrogène	90	$8 X 10^{-8}$
Pyrex	hélium	20 -500	$3,4X10^{-9}$

est dite diluée, c'est-à-dire quand le solvant A n'est que légèrement soluble dans le liquide B, la fraction molaire de A dans le liquide B est reliée à la pression partielle $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ dans la phase gazeuse à l'interface gaz- liquide par la **loi de Henri** :

$$\mathbf{X}_{\mathcal{A}int} = \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{A}}}{H} \tag{24.7}$$

H est nommée la constante de Henri; son unité est le pascal. La loi de Henri s'applique essentiellement aux pressions modérées quand la pression partielle $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ n'excède pas 100 kPa; aux plus hautes valeurs de la pression, **H** devient une fonction de $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$. Quelques valeurs typiques de la constante de Henri sont présentées au tableau 24.1

– cas c

L'espèce A est une substance pure en contact avec un mélange liquide binaire où A est le soluté. La figure 24.1 c schématise la situation dont l'exemple typique est le bloc de sel pur plongé dans une eau saumâtre. La concentration de sel du côté liquide à l'interface est déduite en considérant l'équilibre thermodynamique et en connaissant la solubilité du sel. Cette dernière dépend de la température du système. Par exemple, la solubilité du NaCl dans l'eau à T=0 °C est telle que 35,7 grammes de sel coexistent en solution dans 100 grammes d'eau ce qui correspond à une fraction massique du côté interface liquide égale à 35,7/(37,5+100) = 0,263.

– cas d

Un mélange gazeux contenant l'espèce A lèche un solide. La substance A diffuse dans le corps solide et sa concentration à l'interface du côté solide est reliée à sa pression de vapeur du côté gazeux. La relation est empirique; elle repose sur la définition du coefficient de solubilité S:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{A}} = \mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathcal{A}} \tag{24.8}$$

Le tableau 24.2 reprend quelques solubilités de gaz dans certains solides.

24.3 Exploitation des équations

24.3.1 Film liquide tombant

Nous reprenons l'exemple classique du film de liquide s'écoulant par gravité le long d'une plaque plane inclinée comme cela est schématisé à la figure 24.2. Le liquide est constitué de l'espèce B. Dès x = 0, le film est mis en contact avec un gaz d'espèce A soluble dans B mais pas trop pour ne pas affecter la dynamique de l'écoulement. Nous pouvons donc nous baser sur les résultats de l'analyse hydrodynamique effectuée au chapitre 4 de la Partie I. L'objectif du présent exercice est la détermination du champ de la concentration massique $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.



FIG. 24.2 – Transfert de matière dans un film liquide tombant

Nous définissons un petit volume de contrôle IJKL fixe. Le côté Il est de longueur dx et le c"té IJ de longueur dy. Le transport de matière est le résultat d'une action combinée venant du mouvement du fluide et de la diffusion ordinaire. Dans ce problème la masse volumique du mélange est quasiment égale à celle du liquide donc constante comme l'est aussi le coefficient de diffusivité. Le bilan massique de l'espèce A sur le volume de référence doit respecter l'équation 24.4. Toutefois, on note que l'écoulement est permanent et qu'il n'y a pas de production de l'espèce A dans le liquide. D'après les hypothèses faites, nous pouvons concevoir un faible gradient de concentration suivant Ox: le transport de matière dans cette direction est essentiellement advectif. Par contre, le peu de solubilité de A dans B autorise à négliger le mouvement des composants suivant Oy; seule la diffusion ordinaire est à prendre en compte. Dans ces conditions, l'équation de la concentration est une forme simplifiée de l'équation de conservation 24.4. Elle devient du type "couche limite massique" (voir plus loin Eq. 25.3) :

$$u\frac{\partial\rho_{\mathcal{A}}}{\partial\mathbf{x}} = \mathcal{D}\frac{\partial^{2}\rho_{\mathcal{A}}}{\partial\mathbf{y}^{2}}$$
(24.9)

Nous allons admettre que la diffusion du gaz A dans le liquide B est suffisamment lente pour que la profondeur de "pénétration" de A soit petite devant l'épaisseur δ du film. Cette condition qui se formule en posant $\rho_A = \mathbf{0}$ à y = 0, permet aussi de supposer que dans la petite zone où A existe, la vitesse u est constante et pratiquement égale à U_{max} (se rapporter au profil de vitesse trouvé au chapitre 4 de la Partie I). A l'interface en $y = \delta$ on a la concentration massique $\rho_{A,\delta}$; elle est déduite de la loi de Henri (voir Eq. 24.7) si on connait la pression partielle de A et la constante \mathbf{H} propre au couple gaz-liquide étudié. La solution de l'équation aux dérivées partielles 24.9 qui satisfait aux conditions aux limites ci-dessus est la fonction erreur. La distribution de la concentration massique de A dans le film liquide est donnée par :

$$\frac{\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\rho_{\mathcal{A}, \delta}} = 1 - erf\left(\frac{\delta - y}{\sqrt{\frac{4\mathcal{D}\mathbf{x}}{U_{max}}}}\right)$$
(24.10)

Le flux massique du produit A à l'interface gaz-liquide est tiré de la loi de Fick en y introduisant la dérivée de $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par rapport à y prise en $y = \delta$:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{A},\mathbf{y}}(\mathbf{y}=\delta) = -\mathcal{D} \left. \frac{\partial \rho_{\mathcal{A}}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\delta} = \rho_{\mathcal{A},\delta} \sqrt{\frac{\mathbf{U}_{\max}\mathcal{D}}{\pi \mathbf{x}}}$$
(24.11)

L'expression 24.11 peut être judicieusement manipulée pour faire ressortir des nombres sans dimension de similitude. Il vient

$$\frac{\mathbf{n}_{\mathcal{A},\mathbf{y}}(\mathbf{y}=\delta)}{\rho_{\mathcal{A},\delta}\mathbf{U}_{\max}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{\rho \mathcal{D}}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\rho U_{max} x}$$
(24.12)

- Nous reconnaissons le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U_{max} x}{\mu}$$

 Le rapport des diffusivités est appelé le nombre de Schmidt. Il est discuté au chapitre suivant :

$$\mathbf{Sc} = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}}$$

 Le membre de gauche de la relation 24.12 est l'équivalent du nombre de Stanton pour le transfert de matière

$$\mathbf{St}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathbf{n}_{\mathcal{A}, \mathbf{y}}(\mathbf{y} = \delta)}{\rho_{\mathcal{A}} \mathbf{U}_{\max}}$$

Finalement la combinaison adimensionnelle est :

$$\mathbf{St}_{\mathcal{A}}^{2}\mathbf{ReSc} = \frac{1}{\pi}$$
(24.13)

24.3.2 Diffusion avec réaction chimique

De nombreux procédés de génie chimique font intervenir la diffusion massique en présence d'une réaction chimique. Pour illustrer cette situation nous revenons au problème de la diffusion d'un gaz A dans une couche de liquide B. La situation est esquissée à la figure 24.3. Dans le cas présent, le milieu liquide est maintenu immobile dans un récipient. En diffusant à travers le liquide, le produit A réagit chimiquement avec B pour former un constituant AB:

$$A + B \Longrightarrow AB \tag{24.14}$$

Nous nous plaçons dans le cas simple d'une réaction homogène irréversible et d'ordre un. Le taux volumique de disparition de l'espèce A dépend linéairement de la concentration molaire :

$$\dot{r}_{\mathcal{A}} = -k' \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \mathbf{C}_{\mathcal{A}}$$
(24.15)

Où k' est la constante cinétique de la réaction chimique.



FIG. 24.3 – Diffusion avec réaction chimique

La diffusion est indépendante du temps et s'établit uniquement dans la direction z. Les concentrations des constituants A et AB sont supposées assez faibles. Il s'en suit que la concentration globale \mathbb{C} ne varie pas et que les traces de AB n'affectent pas le coefficient de diffusivité \mathcal{D} . On peut aussi considérer que le liquide B reste au repos et qu'il n'y a pas de transport de l'espèce A dû au mouvement. Le transfert massique dans une petite couche dz schématisée à la figure 24.3 est donc régi par le mécanisme de pure diffusion et l'équation de la concentration molaire du problème se déduit de la forme 24.5 :

$$\mathcal{D}\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{X}_{\mathcal{A}}}{\mathrm{d}\mathbf{z}^{2}} - \mathbf{k}'\mathbf{X}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$$
(24.16)

Les conditions aux limites appropriées sont :

- La fraction molaire de A est fixée par la loi de Henri à l'interface gaz-liquide :

$$z = 0 \implies \mathbf{X}_{\mathcal{A}} = \mathbf{X}_{\mathcal{A},\mathbf{o}}$$
 (24.17)

- L'espèce A ne peut pas diffuser à travers la paroi du fond que nous situons à une distance L de la surface libre :

$$z = L \implies \mathbf{J}_{\mathcal{A},\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{X}_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$
 (24.18)

Moyennant ces conditions aux limites et en posant Z = z/L, la solution de l'équation différentielle ordinaire 24.16 est :

$$\frac{\mathbf{X}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z})}{\mathbf{X}_{\mathcal{A},\mathbf{o}}} = \frac{\cosh\left(N_{DH}(1-Z)\right)}{\cosh\left(N_{DH}\right)}$$
(24.19)

Le paramètre N_{DH} est un groupement sans dimension nommé dans la littérature nombre de Damköhler (quelquefois de Hatta). Il caractérise l'influence de la réaction chimique sur la diffusion massique :

$$N_{DH} = \sqrt{\frac{k'L^2}{\mathcal{D}}} \tag{24.20}$$

Le flux molaire du constituant A traversant l'interface gaz-liquide se calcule directement à partir du profil 24.19 :

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A},\mathbf{z}}(\mathbf{z}=\mathbf{0}) = -\mathcal{D} \left. \frac{\mathbf{d}\mathbf{X}_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \frac{\mathcal{D}\mathbf{X}_{\mathcal{A},\mathbf{o}}}{\mathbf{L}} \mathbf{N}_{\mathbf{DH}} \tanh\left(\mathbf{N}_{\mathbf{DH}}\right)$$
(24.21)

Comme nous le verrons plus en détails au chapitre 25, nous pouvons nous inspirer du concept du coefficient d'échange convectif largement utilisé pour le transfert de chaleur (chapitres 7 et 8 de la Partie II) pour relier le flux à un écart représentatif de concentration ; par exemple :

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A},\mathbf{z}}(\mathbf{z}=\mathbf{0}) = \mathbf{h}_{\mathbf{m}} \left(\mathbf{X}_{\mathcal{A},\mathbf{o}} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}=\mathbf{L}) \right)$$
(24.22)

 $\mathbf{h}_{\mathbf{m}}$ est le **coefficient convectif de transfert massique**. En remplaçant le flux et la concentration en L par leur expression respective, nous obtenons :

$$\mathbf{h}_{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{C}\mathcal{D}}{\mathbf{L}}\mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}}\tanh(\mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}})\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\cosh(\mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}})}\right]^{-1}$$
(24.23)

Une mise adimensionnelle de la relation 24.23 conduit à :

$$\mathbf{Sh} = \frac{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}\mathbf{L}}{\mathbf{C}\mathcal{D}} = \mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}}\tanh(\mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}})\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\cosh(\mathbf{N}_{\mathbf{H}\mathbf{D}})}\right]^{-1}$$
(24.24)

Le groupement **Sh** est le **nombre de Sherwood**. Il est le pendant du nombre de Nusselt en transfert de matière. Il intervient dans les corrélations des échanges massiques par convection. Ce point fait l'objet du chapitre suivant.
Chapitre 25

Transfert de matière convectif

25.1 Convection forcée laminaire

L'étude de l'écoulement laminaire sur une plaque plane effectuée au chapitre 8 de la Partie I, nous a montré qu'une couche limite dynamique se développe le long de la paroi sous l'effet des contraintes visqueuses. Si la surface solide est à température différente de celle du fluide alors s'ajoute la formation d'une couche limite thermique induite par les effets de conduction de la chaleur (chapitre 7 de la Partie II). De la même manière et compte tenu des analogies fortes qui existent entre tous les mécanismes de transport, nous observons la création d'une couche limite de concentration quand la paroi devient le siège d'un échange massique avec le fluide en mouvement. La figure 25.1 décrit le problème en question. Un mélange fluide constitué des espèces A et B arrive parallèlement à une plaque horizontale avec un champ de vitesse, \mathbf{U}_{ext} et de concentration, $\rho_{\mathcal{A}, ext}$ uniformes en amont. La surface solide est revêtue en permanence de la substance A de sorte que la concentration pariétale reste constante ; soit $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}, \mathbf{p}} > \rho_{\mathcal{A}, ext}$ en y = 0.



FIG. 25.1 – Couche limite de transfert de matière

La différence de concentration $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}$ provoque une migration de l'espèce A dans le mélange au travers d'une couche limite massique caractérisée par un profil de concentration tel que représenté à la figure 25.1. A une certaine distance $\delta_{\mathbf{m}}$ de la paroi, la concentration a atteint la valeur $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}$; $\delta_{\mathbf{m}}$ est l'épaisseur de la couche limite qui contrôle le transfert de matière. Le gradient du profil de concentration est maximum à la paroi

où la condition d'adhérence impose une vitesse nulle et où, par conséquent, le transfert massique ne peut être que purement diffusionnel. La densité de flux de matière pariétale est donc donnée par la loi de Fick :

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D} \left[\frac{\mathbf{d}\rho_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{y}} \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}$$
(25.1)

Comme en transfert de chaleur, on relie ce flux massique au potentiel qui induit le transport, ici la différence de concentration $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}$, par l'intermédiaire d'un coefficient local de transfert de matière $\mathbf{h}_{\mathbf{m}}$:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{j}_{\mathcal{A}}}{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}} = \frac{-\mathcal{D}\left[\frac{\mathbf{d}\rho_{\mathcal{A}}}{\mathbf{d}\mathbf{y}}\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}}{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}}$$
(25.2)

- Notons que le coefficient d'échange massique de convection a la dimension d'une vitesse. Il s'exprime donc en [m/s].

Une approche pour déterminer $\mathbf{h}_{\mathbf{m}}$ consiste à rechercher la distribution de concentration $\rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{y})$ dans le voisinage de la paroi et d'en évaluer le gradient. Cette démarche demande de résoudre l'équation générale de la diffusion 24.4 que l'on peut simplifier dans le cas de la couche limite. Pour un écoulement bidimensionnel stationnaire sans réaction chimique, elle s'écrit :

$$u\frac{\partial\rho_{\mathcal{A}}}{\partial\mathbf{x}} + v\frac{\partial\rho_{\mathcal{A}}}{\partial\mathbf{y}} = \mathcal{D}\frac{\partial^{2}\rho_{\mathcal{A}}}{\partial\mathbf{y}^{2}}$$
(25.3)

Elle doit être complétée des conditions aux limites sur les concentrations en y = 0 et $y = \delta_{\mathbf{m}}$ pour garantir l'univalence de la solution.

A ce stade du raisonnement, il est fondamental de souligner la ressemblance entre l'équation de couche limite massique 25.3 et les équations des couches limites dynamique et thermique que l'on rappelle ci-dessous pour argumenter la comparaison :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$$
(25.4)

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
(25.5)

A la vue des ces trois équations, nous pouvons proposer le tableau d'équivalence 25.1; il précise que les trois mécanismes de transport dans la couche limite se formulent mathématiquement de la même façon. Seule une différence de notation suivie de sa signification physique est à prendre en compte.

Le rapport entre ν et \mathcal{D} s'appelle le **nombre de Schmidt** :

$$\mathbf{Sc} = \frac{\nu}{\mathcal{D}} \tag{25.6}$$

Il caractérise l'importance de la couche limite de quantité de mouvement par rapport à celle de transfert de matière. De même, le rapport de \mathcal{D} à α compare l'épaisseur de la couche limite de concentration à la couche limite thermique. C'est le nombre de **Lewis** :

$$\mathbf{Le} = \frac{\mathcal{D}}{\alpha} = \frac{\rho \mathbf{C}_{\mathbf{p}} \mathcal{D}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{Pr}}{\mathbf{Sc}}$$
(25.7)

Quantité de Mouvement	Chaleur	Diffusion massique
$u \\ u_p = 0 \\ \mathbf{U}_{ext} \\ au_p \\ u \\ u$	$T \\ T_p \\ T_{ext} \\ q_p \\ \alpha$	$egin{array}{lll} & ho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} & \ & ho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} & \ & ho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} & \ & \mathbf{j}_{\mathcal{A}} & \ & \mathcal{D} \end{array}$

TAB. 25.1 – Analogie entre les couches limites

Tab.	25.2 -	Nombres	de	Schmidt et	Lewis	: T	$^{2} = 2$	25°	C
------	--------	---------	----	------------	-------	-----	------------	--------------	---

Fluide porteur	Substance	Sc	Le
Air	$\rm CO_2$	$0,\!94$	$1,\!34$
(Pr = 0,7)	H_2	0,22	$0,\!314$
	O_2	0,75	$1,\!07$
	Vapeur H ₂ O	$0,\!60$	0,86
	Benzène	1,76	2,51
Eau	Cl_2	617	88
$(\mathbf{Pr}=7)$	$\rm CO_2$	453	65
	H_2	152	22
	O_2	356	51
	CaCl	750	117
	NaCl	582	83

Pr est le nombre de Prandtl (voir chapitre 2 de la Partie II). Les éléments de la théorie cinétique des gaz repris par les relations 2.4 de la Partie I, 2.11 de la Partie II et plus avant la relation 23.6 montrent que les trois coefficients de diffusion ν , α et \mathcal{D} sont égaux pour les gaz monoatomiques à des pressions modérées. Par conséquent $\mathbf{Sc} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{Le} = \mathbf{1}$. La signification directe est que les profils de vitesse, de température et de concentration, judicieusement adimensionnalisés, présentent la même forme. Ce résultat appuie l'analogie entre les trois types de transport. Le tableau 25.2 liste quelques valeurs typiques des nombres \mathbf{Sc} et \mathbf{Le} pour certaines substances à faible concentration et à pression atmosphérique :

25.2 Corrélations de transfert massique

La conclusion pratique de l'analogie soulignée au paragraphe précédent est qu'il devient légitime de faire appel aux corrélations adimensionnelles de transfert de chaleur préalablement établies pour la convection forcée et d'en déduire celles du transfert de matière par un simple changement de notation compatible avec le tableau 25.1. Ainsi la relation 7.22 du chapitre 7 de la Partie II propre au transfert thermique des gaz et des liquides en régime laminaire sur une plaque plane se transforme directement comme suit :

$$\mathbf{Sh}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}\mathbf{x}}{\mathcal{D}} = \mathbf{0.332Sc}^{\frac{1}{3}}\mathbf{Re}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}}$$
(25.8)

Le nouveau nombre sans dimension **Sh** qui caractérise l'échange massique convectif est le **nombre de Sherwood**. C'est l'équivalent du nombre de Nusselt pour le transfert de matière. Pour des métaux liquides il nous suffit d'adapter la corrélation 7.23 du chapitre 7 de la Partie II pour aboutir à :

$$\mathbf{Sh_x 0.53}\sqrt{\mathbf{Pe_{m,x}}}$$
(25.9)

 $\mathbf{Pe_{m,x}}$ est le nombre de Peclet local de transfert massique défini comme le produit $\mathbf{ScRe_x}$. Dans un calcul global d'échange, il est plus commode de considérer la valeur moyenne de $\mathbf{h_m}$ sur la longueur L de la plaque :

$$\overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \mathbf{h}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x}$$
(25.10)

Par application de la définition 25.10 aux relations 25.8 et 25.9 on en déduit facilement :

– Pour $\mathbf{Sc} \geq \mathbf{1}$

- Pour $Sc \ll 1$

$$\overline{\mathbf{Sh}} = 0,664 \mathbf{Sc}^{\frac{1}{3}} \mathbf{Re}_{\mathbf{L}}^{\frac{1}{2}}$$
(25.11)

$$\overline{\mathbf{Sh}} = 1,128\sqrt{\mathbf{Pe_L}}$$
(25.12)

En écoulement turbulent sur une plaque, les corrélations de transfert de matière peuvent être directement déduites de l'expression locale 7.30 et globale 7.32 en substituant \mathbf{Nu} par \mathbf{Sh} et \mathbf{Pr} par \mathbf{Sc} :

$$Sh_x = 0,029Sc^{0,43}Re_x^{0,8}$$
 (25.13)

et

$$\overline{\mathbf{Sh}} = 0,369 \mathbf{Sc}^{0,43} \left(\mathbf{Re}_{\mathbf{L}}^{0,8} - \mathbf{Re}_{\mathbf{c}}^{0,8} \right) + \mathbf{0},664 \mathbf{Sc}^{\frac{1}{3}} \mathbf{Re}_{\mathbf{L}}^{\frac{1}{2}}$$
(25.14)

 $\mathbf{Re_c}$ étant le nombre de Reynolds local critique auquel s'effectue le passage du régime laminaire au régime turbulent. On retiendra que l'ensemble des remarques portées sur la figure 7.7 de la Partie II concernant les corrélations de transfert de chaleur pour une plaque plane reste valable pour les corrélations de transfert massique concernant la même configuration géométrique.

Les résultats d'expériences menées sur l'évaporation d'un film d'eau étalé sur la paroi interne d'une conduite parcourue par un écoulement turbulent d'air ont été bien corrélés par la relation suivante :

$$\overline{\mathbf{Sh}} = 0,023 \mathbf{Re}^{0,83} \mathbf{Sc}^{0,44}$$
 (25.15)

qui est voisine de l'expression 7.54 de la Partie II décrivant le transfert de chaleur développé dans les canalisations en régime hydrauliquement lisse.

Transfert de chaleur	Transfert de matière
\Pr	\mathbf{Sc}
\mathbf{Nu}	\mathbf{Sh}

TAB. 25.3 – Analogie entre nombres adimensionnels

25.3 Relations d'analogie

Dans une situation courante comme l'évaporation d'un liquide dans un courant gazeux, qui implique à la fois le transfert de chaleur et de matière, il est judicieux de s'intéresser à la relation qui lie le coefficient d'échange thermique au coefficient d'échange massique. Si l'on divise membre à membre les corrélations de transfert de chaleur et de matière on montre que les deux coefficients d'échange sont proportionnels et que le nombre de Lewis quantifie l'écart entre leurs valeurs :

$$\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}} = \rho C_p \left(\frac{\mathbf{S}\mathbf{c}}{\mathbf{P}\mathbf{r}}\right)^{\frac{2}{3}} = \rho C_p \mathbf{L} \mathbf{e}^{\frac{2}{3}}$$
(25.16)

qui se met sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\mathbf{Sh}}{\mathbf{Nu}} = \left(\frac{1}{\mathbf{Le}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{25.17}$$

On retiendra que les valeurs des nombres de Sherwood et Nusselt sont très proches pour la plupart des gaz puisque dans ce cas le nombre de Lewis avoisine souvent l'unité (voir tableau 25.2). Dans une même idée, on peut étendre l'analogie de Reynolds-Colburn (relation 18.35 du chapitre 18 de la Partie II) au transfert de matière et aboutir à l'égalité suivante :

$$\frac{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{U}_{ext}}\mathbf{S}\mathbf{c}^{\frac{2}{3}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{f}}}{2}$$
(25.18)

L'ensemble de ces résultats nous amène à donner une seconde synthèse sur l'analogie entre les mécanismes de transfert de chaleur et de matière. Elle est se présente sous la forme du tableau 25.3 qui souligne l'équivalence des nombres adimensionnels :

25.4 Modèle de la paroi imperméable

L'analogie entre les transferts de chaleur et de matière que nous venons de souligner repose sur une hypothèse importante. En effet, nous avons implicitement admis que la vitesse transversale v de l'écoulement était nulle en y = 0. Dans un phénomène d'échange massique, cette hypothèse constitue une approximation dont il faut estimer l'impact. Des corrélations 25.11 et 25.12 on s'aperçoit que l'ordre de grandeur du flux massique pariétal peut être calculé par l'expression,

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A},\mathbf{p}} \sim (\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}) \frac{\mathcal{D}}{\mathbf{x}} \mathbf{Sc^n} \sqrt{\mathbf{Re_x}}$$
 (25.19)

l'exposant n valant 1/2 pour les métaux liquides et 1/3 pour les autres fluides. Ce flux massique constitue un écoulement transversal qu'il faut comparer à celui qui résulte naturellement de la déviation des lignes de courant provoquée par l'effet visqueux au voisinage de la paroi. Ce dernier a été étudié au chapitre 16.2 (Partie I). Nous en déduisons que la vitesse transversale v due à la formation de la couche visqueuse est de l'ordre de

$$v \sim \frac{\mathbf{U}_{ext}}{\sqrt{\mathbf{Re_x}}} \tag{25.20}$$

Dès lors, l'effet du transfert massique pariétal sur l'écoulement sera négligeable quand

$$\mathbf{j}_{\mathcal{A},\mathbf{p}} < \rho \mathbf{v} \tag{25.21}$$

La condition à vérifier s'obtient en introduisant les proportionnalités 25.19 et 25.20 dans l'inégalité 25.21 :

$$\frac{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{p}} - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{ext}}}{\rho} < \mathbf{Sc^{1-n}}$$
(25.22)

En définitive, la notion de paroi imperméable reste acceptable tant que la variation relative de concentration au travers de la couche limite massique est faible devant la valeur du nombre de Schmidt sachant que 1 - n est toujours positif.

25.5 Exploitation des résultats

25.5.1 Evaporation d'un film liquide étalé

Le problème envisagé concerne un mince film liquide d'épaisseur initiale uniforme e_o , étalé sur une surface solide plane. Il est balayé par un courant d'air à la vitesse U_{∞} sur une longueur L. L'air en mouvement possède une humidité relative φ et est à la pression atmosphérique $\tilde{\mathbf{P}}_a$. L'ensemble est à la température constante T. On désire estimer le temps d'évaporation totale du film. Pour déterminer ce laps de temps t_{evap} , nous exprimons que la variation instantanée de l'épaisseur e(t) du film diminue au prorata du débit de vapeur d'eau constant durant le phénomène.

$$\frac{de(t)}{dt} = -\frac{\dot{m}_v}{\rho_\ell L} \tag{25.23}$$

 ρ_{ℓ} est la masse volumique du liquide. L'intégration de l'équation différentielle ordinaire 25.23 de $t = 0, e = e_o$ et $t = t_{evap}, e = 0$ fournit l'expression suivante :

$$\tilde{t}_{evap} = \frac{e_o L \rho_\ell}{\dot{m}_v} \tag{25.24}$$

Le débit d'eau évaporée par unité de largeur est donné en exploitant la définition du coefficient de transfert de matière (voir eq. 25.2) :

$$\dot{m}_{v} = \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}} L \left(\rho_{v,p} - \rho_{v,ext} \right) \tag{25.25}$$

 $\rho_{v,p}$ et $\rho_{v,ext}$ sont respectivement les concentrations massiques de la vapeur d'eau à la paroi et dans le flux air au loin du film liquide. En considérant que la vapeur d'eau se

comporte comme un gaz parfait, en notant qu'elle est aux conditions de saturation juste à l'interface liquide-air humide et en se servant de la définition de l'humidité relative on peut facilement reformuler l'évaporation du film comme suit :

$$\dot{m}_{v} = \overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}} L \rho_{v,p} \left(1 - \varphi \right) \tag{25.26}$$

avec

$$\rho_{v,p} = \frac{\mathbf{P_{sat}}(T)}{\frac{\Re}{\mathcal{M}_{\mathbf{v}}} \cdot T} \tag{25.27}$$

Où $\mathcal{M}_{\mathbf{v}}$ est la masse molaire de la vapeur d'eau égale à 18 kg/kmole. Il nous reste à évaluer le coefficient d'échange $\overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}}$. Pour ce faire, nous disposons des corrélations du nombre de Sherwood pour une plaque plane, relations 25.11 et 25.14 suivant que la couche limite est en régime laminaire ou turbulente :

$$\overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}} = \frac{\overline{\mathbf{Sh}}\mathcal{D}}{L} \tag{25.28}$$

Le coeffifficient de diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air peut être calculé au moyen de la relation de Schirmer (voir eq. 23.30).

Une application numérique typique est résuméee au tableau 25.4. Le calcul du nombre de Reynolds moyen est basé sur les caractéristiques de l'air sec. On constate en effet que les conditions considérées entraînent peu de différences entre les propriétés de l'air humide et celles de l'air sec. On doit maintenent s'assurer que de la validité de l'hypothèse de surface imperméable. Elle est vérifiée puisque :

$$\frac{\rho_p(1-\varphi)}{\rho_a} = 0,0117 < \mathbf{Sc}^{1-1/3} = 0,71$$
(25.29)

25.5.2 Thermomètre humide

La tête d'un thermomètre est emmaillotée dans un fin tissu imbibé d'eau. Le tout est placé dans un écoulement d'air sec de vitesse **Uo** comme le schématise la figure 25.2. La lecture du thermomètre indique une température T_{th} différente de la température réelle de l'air T_a . On cherche à modéliser cette différence.

Pour résoudre le problème il faut noter que le flux de chaleur échangé par convection entre l'air sec et le thermomètre humide va équilibrer l'enthalpie d'évaporation de l'eau imbibant le tissu. Ce bilan énergétique s'écrit comme suit :

$$\mathbf{h}S\left(T_a - T_{th}\right) = \dot{m}_v \mathcal{L}_{v\ell} \tag{25.30}$$

h est le coefficient convectif de transfert thermique, S la surface d'échange et $\mathcal{L}_{v\ell}$ la chaleur latente de vaporisation. Le débit d'évaporation \dot{m}_v est relié au potentiel de concentration massique par le coefficient convectif de transfert de matière. La relation est la même que l'équation 25.25 si ce n'est que dans le cas présent $\rho_{v,ext} = 0$ car l'air est sec.

$$\dot{m}_v = \mathbf{h_m} \mathbf{S} \rho_{\mathbf{v}, \mathbf{p}} \tag{25.31}$$

Comme dans le problème précédent $\rho_{v,p}$ représente la concentration massique de vapeur d'eau dans l'air en contact avec le thermomètre. La condition de vapeur saturée est de

	37.3
Données	Valeur
ρ	100 [<i>u</i> m]
	$100 \ [\mu m]$
L	0,1 [m]
U_{∞}	3 [m/s]
arphi	40%
P_a	1013,3 [hPa]
$ ho_\ell$	$1000 \; [{ m kg/m^3}]$
Résultats	Valeur
ρ_a	$1,185 \; [m kg/m^3]$
μ_a	$18,4 \; [\mu Pa.s]$
\mathbf{Re}	19355 Laminaire
${\cal D}$	$28.8 \ [mm^2/s]$
\mathbf{Sc}	0,6
$\overline{\mathbf{Sh}}$	78
$\overline{\mathbf{h}_{\mathbf{m}}}$	$22,4 \mathrm{[mm/s]}$
\tilde{P}_{sat}	3189 [Pa]
$ ho_p$	$0,0232 \ [kg/m^3]$
\dot{m}_v	$31 \left[\mu g/s \right]$
t_{evap}	323 [s]

TAB. 25.4 – Evaporation d'un film d'eau : Application numérique



FIG. 25.2 – Schéma du thermomètre humide

nouveau réalisée et la relation 25.27 est d'application avec $T = T_{th}$. Les équations 25.30 et 25.31 combinées conduisent à :

$$\Delta T = T_a - T_{th} = \frac{\mathbf{h_m}}{\mathbf{h}} \rho_p \mathcal{L}_{\nu\ell}$$
(25.32)

A ce stade du développement on tire parti de l'analogie transfert de matière - transfert de chaleur formulée par la relation 25.16 pour supprimer le rapport des coefficients d'échange dans l'expression 25.32 :

$$\Delta T = \frac{\rho_p \mathcal{L}_{v\ell}}{\rho C_p \mathbf{Le}^{\frac{2}{3}}} \tag{25.33}$$

Si le courant d'air principal est chargé en vapeur d'eau, la mesure de T_a et T_{th} est une information qui permet de remonter à la valeur de l'humidité relative φ . En effet, en suivant la démarche présentée ci-dessus et en conservant $\rho_{v,ext}$ dans la relation 25.31 du débit de vapeur, on montre que la concentration massique en vapeur d'eau dans le flux d'air humide est donnée par,

$$\rho_{v,ext} = \rho_{v,p} - \frac{\rho C_p \mathbf{Le}^{\frac{2}{3}}}{\mathcal{L}_{v\ell}} \Delta T$$
(25.34)

Une fois $\rho_{v,ext}$ connue, on calcule facilement φ comme suit :

$$\varphi = \frac{\hat{\mathbf{P}}_a(T_a)}{P_{sat}(Ta)} = \frac{\rho_{v,ext}T_a}{P_{sat}(Ta)} \cdot \frac{\Re}{\mathcal{M}_{\mathbf{v}}}$$
(25.35)

Quatrième partie Références

Liste bibliographique

Arpaci, V.S. and Larsen, P.S. : Convection Heat Transfer, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.

Barnes, H. A.; Hutton, J. F. and Walters, K.: An Introduction to Rheology, Elsevier, Amsterdam, 1989.

Batchelor, G.K : An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Bejan, A: Heat Transfer, John Wiley & sons, New York, 1993.

Bear, J. and Buchlin, J-M. : Modelling and Applications of Transport Phenomena in Porous Media, Kluwer Academic Book, Dordrecht, 1991.

Bear, J. and Corapcioglu, Y. : Advances in Transport Phenomena in Porous Media, NATO ASI Series, Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987.

Bird, R. B.; Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N. : Transport Phenomena, Wiley, New York, 1960.

De Vriendt, A.B : La Transmission de la Chaleur, Gäetan Morin, Chicoutimi, Québec, 1982.

Guyon, E.; Hulin, J-P. et Petit, L. : Hydrodynamique Physique, Editions du CNRS, Paris, 1991.

Harris J.: Rheology and Non-Newtonian Flow, Longman, New York, 1977.

Hirsch, C. : Numerical Computation of Internal and External Flows, John Wiley & soons, New York, 1991.

Holman, J.P.: Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1976.

Incropera, F.P and Dewitt, D.P : Fundamentals of Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1981.

Kakaç, S.; Shah, R.K. and Aung, W. : Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, John Wiley & sons, New York, 1987.

Kay, J. M. and Nedderman, R. M. : Fluid Mechanics and Transfer Process, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Landau, L. et Lifchitz, E. : Mécanique des Fluides, Mir, Moscou, 1971.

Sacadura, J-F : Initiation aux Transferts Thermiques, Technique et Documentation, Paris, 1993.

Welty, J. R.; Wilson, R. E. and Wicks, C. E. : Fundamental of Momentum, Heat and Mass Transfer, Wiley, New York, 1969.

Cinquième partie

Annexes