

NOM, PRENOM : .....

NUMERO° (de place): .....

Examen de mécanique rationnelle  
1<sup>ière</sup> session 18/01/2011 (16h-19h30)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer** que les brouillons

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

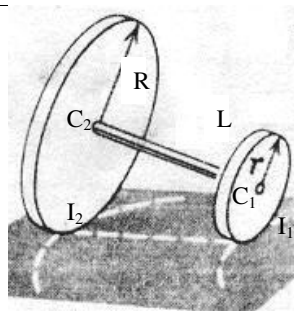
$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial q_i}$$

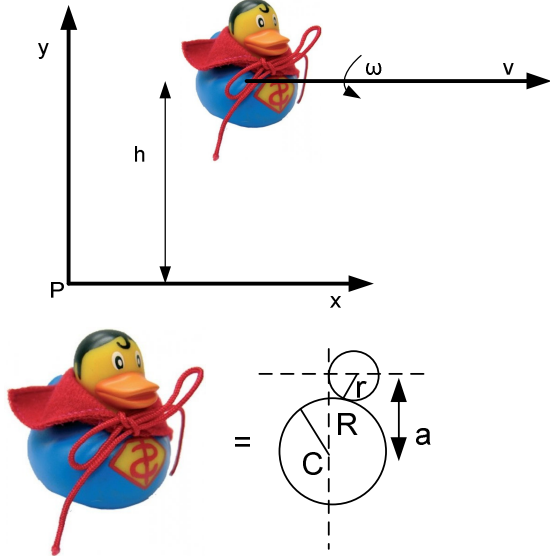
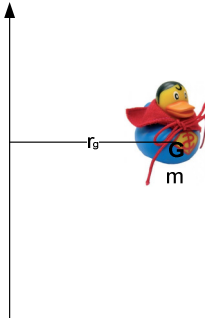
$$\text{Changement d'axe du tenseur d'inertie : } I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$$

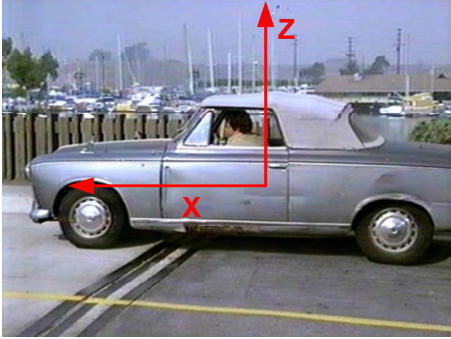
**Question 1 :** Questions rapides (3 points)

**a) Axe Instantané de rotation (0.5 point)**

Déterminer l'axe instantané de rotation



| b) Super Canard (1 point)   |   |
|---|---|
| <p>Super Canard vole à une hauteur <math>h</math> et à une vitesse <math>v\vec{1}_x</math>. Il tourne sur lui-même à une vitesse angulaire <math>\omega\vec{1}_x</math>. Super canard est assimilable à deux sphères superposées, l'une de rayon <math>R</math>, de centre <math>C</math> et de masse <math>M</math> et l'autre de rayon <math>r</math> et de masse <math>m</math>. Le centre de masse <math>C</math> du canard se trouve à une hauteur <math>h</math> de l'origine <math>P</math>. Sans calculer les termes du tenseur, donner l'expression du Moment Cinétique en <math>P</math> du canard.</p> |     |
| c) Affirmations (1.5 point)   |   |
| Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez si besoin à l'aide d'un contre-exemple ou de la théorie.  |   |
| 1. Le rayon de giration est toujours égal à la distance entre l'axe de référence et le centre de masse du solide étudié.  |  |
| 2. Une force dérivant d'un potentiel est constante.   |   |
| 3. $\overline{m_{e,g}} + \overline{C_g} = 0$ est vrai si $\omega \ll \Omega$ où $\omega$ est la vitesse de précession et $\Omega$ la vitesse de rotation du gyrostat.   |   |

| <b>Question 2 : Columbo et le gyroscope (1.5 point)</b>   |  |
|---|--|
| <p>a) Soit une voiture dans laquelle on a monté un gyroscope d'inertie <math>\Gamma</math> tournant à une vitesse <math>\overline{\Omega}</math>, donner l'orientation et le sens de rotation du gyrostat pour empêcher la voiture de basculer lorsqu'elle effectue à un virage avec une vitesse angulaire <math>\overline{\omega}</math> :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Vers la droite ;</li> <li>2. Vers la droite en marche arrière (il tourne le volant vers la droite) ;</li> <li>3. L'effet gyroscopique des roues a-t-il tendance à accentuer ou empêcher le basculement (en supposant qu'il est capable de rouler assez vite ☺) ?</li> </ol> |  |
| <p>b) Donner trois applications (ou manifestations) de l'effet gyroscopique (autre que pour ne pas faire dérailler un train Fisher-Price)</p>   |  |

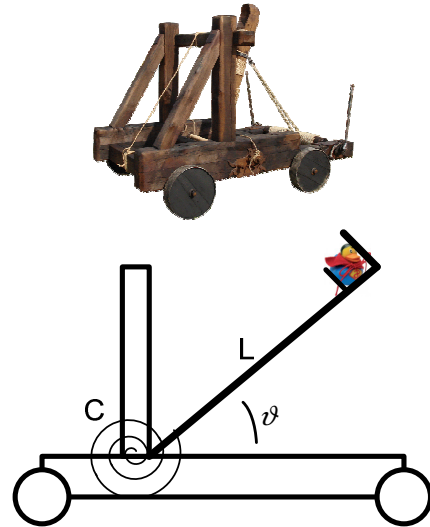
**Question 3 : Super Canard Returns (3 points)**

Super Canard (assimilé à une masse ponctuelle) est tombé dans de la kryptonite , il ne sait donc plus voler et souhaite utiliser une catapulte pour se propulser. La catapulte (tout frottement négligeable) est constituée de :

- Une poutre homogène d'origine  $O$ , de longueur  $L$  et de masse  $M$ .
- Super Canard de masse  $m$  est situé au bout de la poutre, dans une nacelle de taille et de masse négligeable.
- Un ressort spiral  $C$  d'angle libre  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  et de raideur angulaire  $k$  permet d'activer la catapulte.

Il est demandé de :

1. Déterminer l'énergie totale  $E$  du système ;
2. Ecrivez, si elle existe, une intégrale première de l'énergie (Avant qu'il ne quitte la nacelle). Dans ce cas existe-t-il une forme de cette intégrale première indépendante de l'angle  $\vartheta$  ? Si oui, écrivez-la ;
3. Déterminer la condition sur  $\ddot{\vartheta}$  pour que Super Canard quitte la nacelle; Expliquer en quelques mots physiquement le résultat obtenu ;
4. Déterminer la vitesse de Super Canard à l'instant où il quittera la nacelle si l'on décide de mettre une butée en  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ .



**Question 4 : a) La balançoire (4 points)**

Soit, la balançoire présentée *figure 1* composée :

- D'une bille de centre de masse  $(x,y)$ , de masse  $m_1$  et roulant sans glisser avec une vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  sur une plaque inclinée.
- D'une barre de longueur  $l$  et de masse  $m_2$ , balançant avec un angle  $\vartheta$  et accrochée au centre de la bille.
- D'une barre perpendiculaire, de longueur  $h$  et de masse  $m_3$  accrochée en son centre.

En travaillant dans le repère  $x,y$  ; il est demandé de déterminer le système d'équations du mouvement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange dans le cas

où la pente suit la relation :  $y = \frac{x}{2}$ .

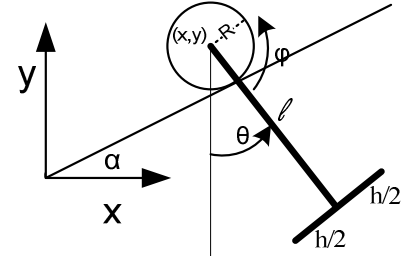
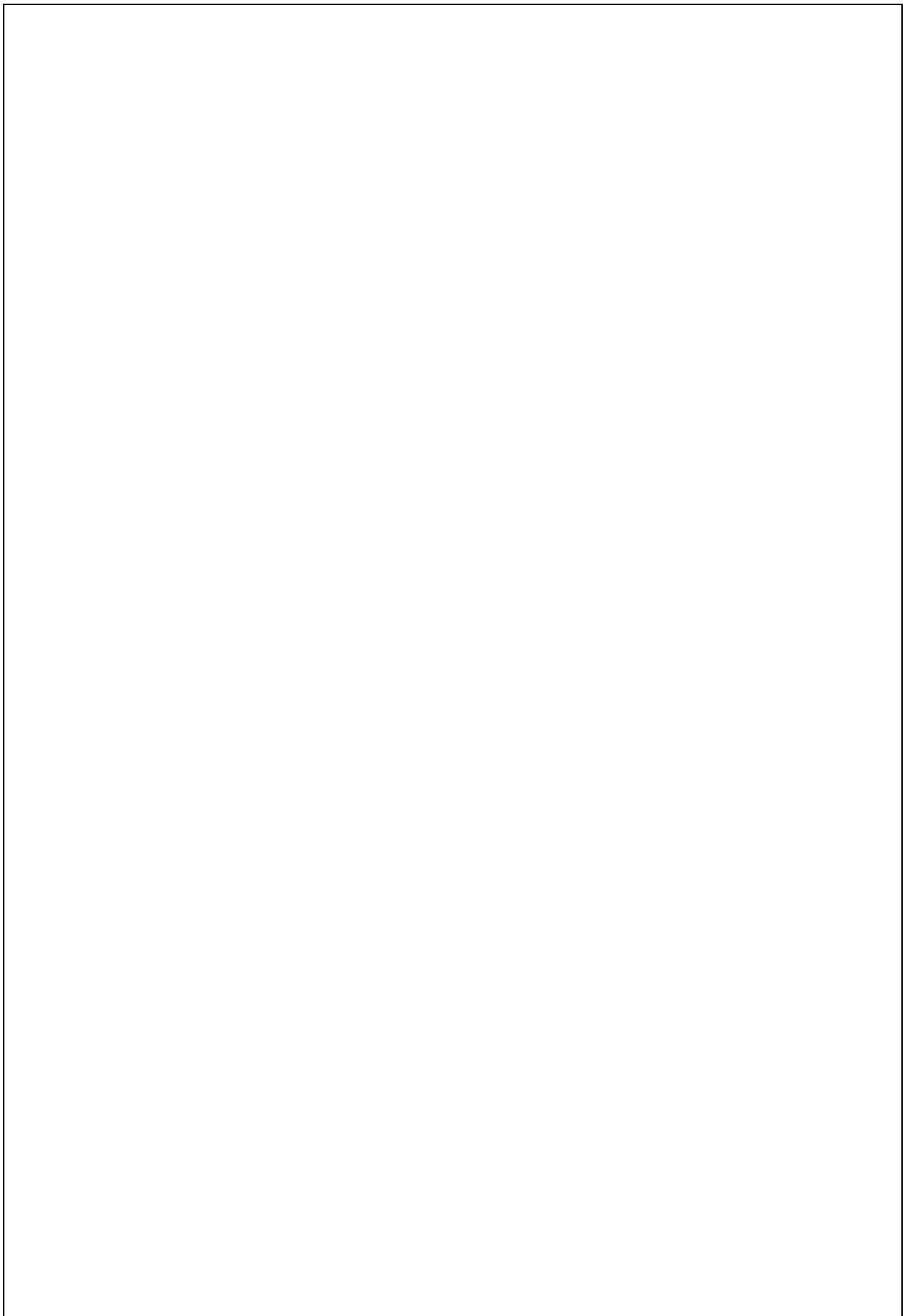


Figure 1

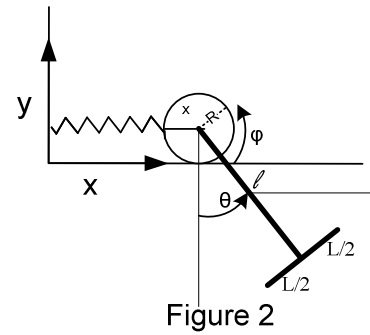
NOM, PRENOM : .....NUMERO°(de place): .....

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the majority of the page. It is intended for a drawing or a detailed response.

**Question 4 : b) Modification du système (1.5 point)**

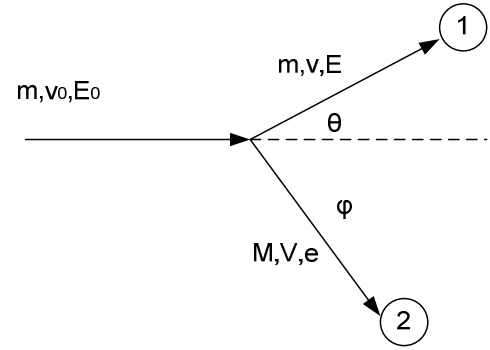
Dans le cas où :

1. L'on place le système sur une plaque horizontale ;
  2. L'on rajoute un ressort de raideur  $k$  et de longueur libre  $R$  entre le centre de la bille et le mur ;
- Déterminer les relations dont vous aurez besoin pour caractériser le système.
  - Donner le système d'équations différentielles du mouvement dans ce cas.



**Question 5 : Théorie : Le choc élastique (3 points)**

- Calculer l'énergie  $E = E(\varphi)$  de la bille 1 de masse  $m$  et de vitesse  $v_0$  après qu'elle ait percuté la bille 2 (au repos avant le choc) et de masse  $M$ . On suppose le choc parfaitement élastique et que le mouvement est purement de translation.
- La variation d'énergie de  $E$  correspond elle à une perte ou à un gain d'énergie ?

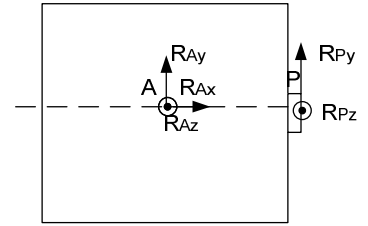




**Question 6 : Moment cinétique d'une plaque trouée (4 points)**

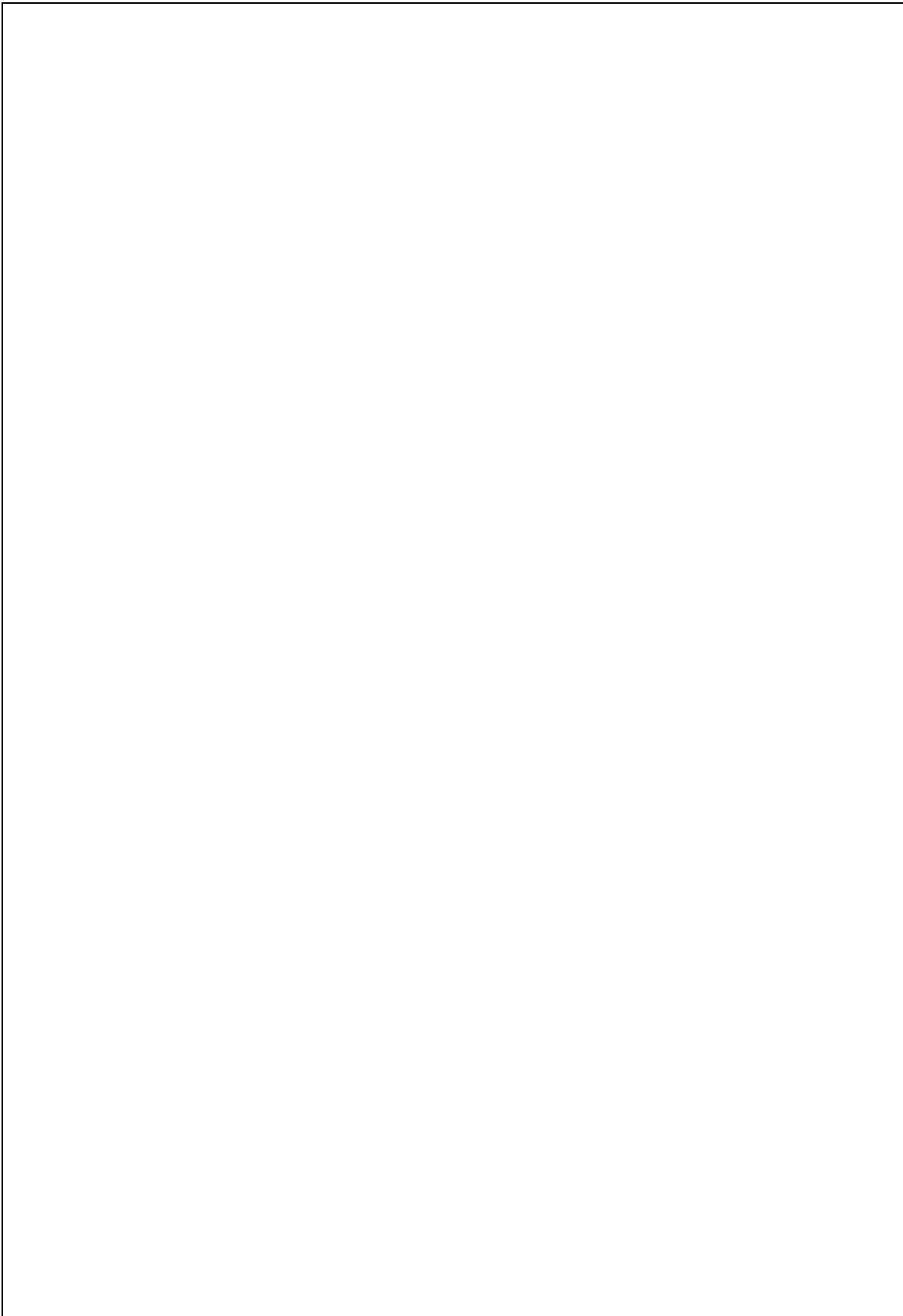
Soit, la plaque d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\sigma$  représentée sur le plan en annexe. Elle tourne à une vitesse  $\vec{\omega} = \omega \vec{I}_x$  autour de son axe X. Elle est maintenue en P par une liaison induisant une réaction Y et en Z ; et en A par une liaison induisant des réactions en X,Y et Z (voir ci-contre). Ces liaisons lui permettent de tourner sur elle-même et sont de tailles et de masse négligeables.

1. Calculer le moment cinétique en A (origine des axes X et Y) de la plaque.
2. Dans le cas où le poids de la plaque est négligeable, calculer les réactions de liaisons en y et z de la plaque sur la butée.

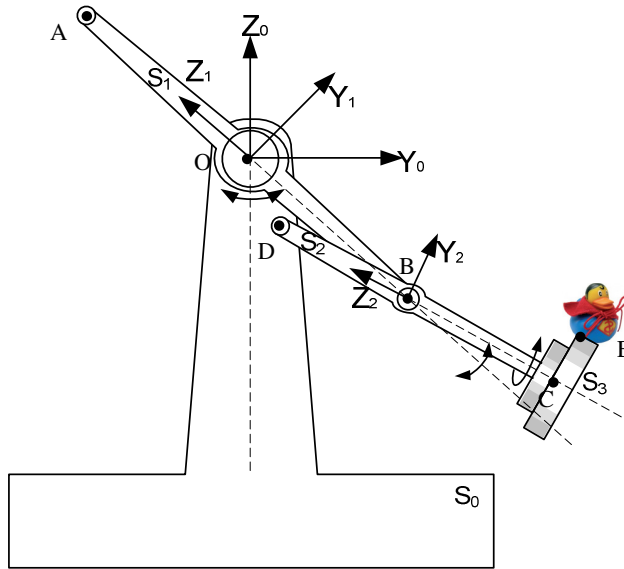


Voir schéma complet en annexe

NOM, PRENOM : .....NUMERO°(de place): .....

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for a drawing or a detailed written response.

**Question 7 : La foire aux canards (2 points)**



Un manège est composé de deux bras  $S_1$  et  $S_2$  liés l'un à l'autre par une liaison pivot.  
La nacelle  $S_3$  est liée au bras  $S_2$  et peut tourner autour de son axe.

$S_1$  tourne avec une vitesse angulaire  $\dot{\alpha} \bar{I}_{x_0}$ ,

$S_2$  tourne avec une vitesse angulaire  $\dot{\beta} \bar{I}_{x_2}$  et

$S_3$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\gamma} \bar{I}_{x_2}$ .

1. Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la nacelle  $S_3$  ;
2. Déterminer la vitesse à l'instant représenté sur le dessin, du point E sur lequel est assis Super Canard.

Données :

- $OA=OB=2a$  ;
- $BD=BC=2b$  ;
- $CE=R$ .

NOM, PRENOM : .....NUMERO°(de place): .....

BROUILLON

NOM, PRENOM : .....NUMERO°(de place): .....

BROUILLON

NOM, PRENOM : .....NUMERO°(de place): .....

BROUILLON