Faculté des Sciences Appliquées
Mécanique Rationnelle 2

Année académique 2010-2011
2e année de bachelier

NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
1ième session 18/01/2011 (16h-19h30)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

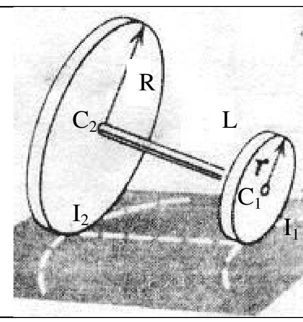
$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = m\overline{v}_G \times \overline{v}_A + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{R} \quad ; \quad \overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

<u>Question 1 :</u> Questions rapides (3 points)
a) Axe Instantané de rotation (0.5 point)

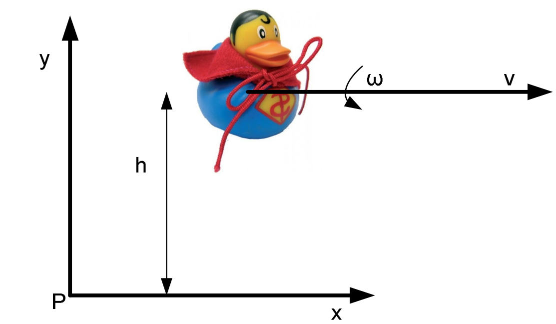
Déterminer l'axe instantané de rotation

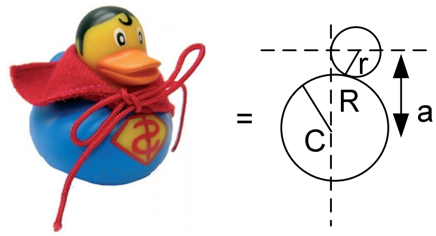


L'axe instantané de rotation passe par les points I1 et I2.

b) Super Canard (1 point)

Super Canard vole à une hauteur h et à une vitesse $v\bar{1}_x$. Il tourne sur lui-même à une vitesse angulaire $\omega\bar{1}_x$. Super canard est assimilable à deux sphères superposées, l'une de rayon *R* , de centre C et de masse *M* et l'autre de rayon *r* et de masse *m.* Le centre de masse *C* du canard se trouve à une hauteur *h* de l'origine *P*.
Sans calculer les termes du tenseur, donner l'expression du Moment Cinétique en P du canard.





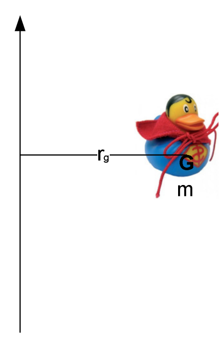
a) $$\overline{M}_o = \overline{\overline{I}}_P\,\overline{\omega} + \overline{OP}\times(M+m)v\bar{1}_x = \begin{pmatrix} I_x & / & / \\ 0 & / & / \\ -P_{xz} & / & / \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - h(M+m)v\bar{1}_z$$

c) Affirmations (1.5 point)

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez si besoin à l'aide d'un contre-exemple ou de la théorie.

1. Le rayon de giration est toujours égal à la distance entre l'axe de référence et le centre de masse du solide étudié.

Non, par exemple si l'axe de référence passe par le centre de masse.



2. Une force dérivant d'un potentiel est constante.

Non, F=-kx n'est pas constant

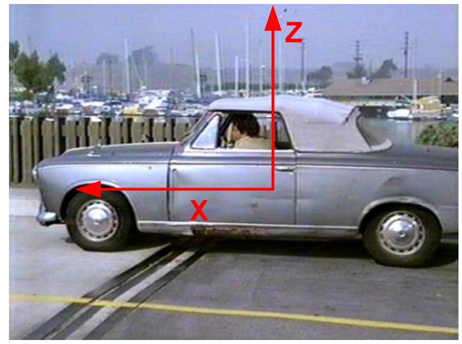
3. $\overline{m_{e,g}} + \overline{C_g} = 0$ est vrai si $\omega << \Omega$ où ω est la vitesse de précession et Ω la vitesse de rotation du gyrostat.

Vrai

Question 2 : **Columbo et le gyroscope (1.5 point)**

a) Soit une voiture dans laquelle on a monté un gyroscope d'inertie Γ tournant à une vitesse $\overline{\Omega}$, donner l'orientation et le sens de rotation du gyrostat pour empêcher la voiture de basculer lorsqu'elle effectue à un virage avec une vitesse angulaire $\overline{\omega}$:

1. Vers la droite ;
2. Vers la droite en marche arrière (il tourne le volant vers la droite) ;
3. L'effet gyroscopique des roues a-t-il tendance à accentuer ou empêcher le basculement (en supposant qu'il est capable de rouler assez vite ☺) ?



Dans tous les cas, la rotation du gyroscope doit être dans l'axe Y et dans le sens opposé à celui des roues.
Les roues ont tendance à faire basculer la voiture.

b) Donner trois applications (ou manifestations) de l'effet gyroscopique (autre que pour ne pas faire dérailler un train Fisher-Price)

Satellite,
Horizon artificiel dans un avion,
la terre tournant autour de son axe,
Boomerang,
Moteur d'avion,
Hélicoptère
…

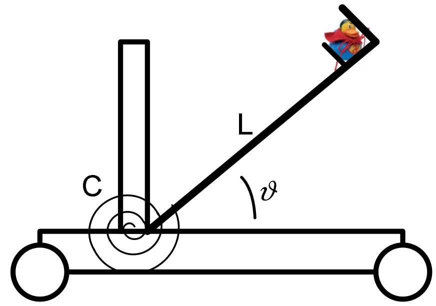
Question 3 : Super Canard Returns (3 points)

Super Canard (assimilé à une masse ponctuelle) est tombé dans de la kryptonite , il ne sait donc plus voler et souhaite utiliser une catapulte pour se propulser. La catapulte (tout frottement négligeable) est constituée de :

- Une poutre homogène de longueur L et de masse M.
- Super Canard de masse m est situé au bout de la poutre, dans une nacelle de taille et de masse négligeable.
- Un ressort spiral C d'angle libre $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ et de raideur angulaire k permet d'activer la catapulte

Il est demandé de :

1. Déterminer l'énergie totale E du système ;
2. Ecrivez, si elle existe, une intégrale première de l'énergie (Avant qu'il ne quitte la nacelle). Dans ce cas existe-t-il une forme de cette intégrale première indépendante de l'angle ϑ ? Si oui, écrivez-la ;
3. Déterminer la condition sur $\ddot{\vartheta}$ pour que Super Canard quitte la nacelle; Expliquer en quelques mots physiquement le résultat obtenu ;
4. Déterminer la vitesse de Super Canard à l'instant où il quittera la nacelle si l'on décide de mettre une butée en $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.



$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}}_{=0}\right)_{\text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2$$

$$V = Mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgL\sin\theta + k\frac{(\theta - \pi/2)^2}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}(m + \frac{M}{3})L^2\dot{\theta}^2 + (\frac{M}{2} + m)Lg\sin\theta + k\frac{(\theta - \pi/2)^2}{2}$$

$E = E_0 = \mathrm{k}\frac{\pi^2}{8}$ est une intégrale première de l'énergie

Théorème de la résultante cinétique appliqué sur le projectile uniquement.

$$\frac{dR_\theta}{dt} = \sum F_{e,\theta}$$

$$mL\ddot{\theta} = N_\theta - mg\cos\theta$$

La condition pour que le projectile quitte la nacelle est donc :

$$\ddot{\theta} \le -\frac{g}{L}\cos\theta$$

Il faut donc que la décélaration de la nacelle soit inférieure au poids de Super Canard.

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, la vitesse à la sortie de la nacelle (et donc celle du projectile) vaut :

$$v_0 = L\dot{\theta}_0 = L\sqrt{\frac{\mathrm{k}\frac{\pi^2}{8} - (\frac{M}{2} + m)Lg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{k}{32}\pi^2}{\frac{1}{2}(m + \frac{M}{3})L^2}}$$

Question 4 : **a) La balançoire (4 points)**

Soit, la balançoire présentée *figure 1* composée d'une bille de centre de masse (x,y), de masse m_1 et roulant sans glisser avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ sur une plaque inclinée. En son centre est accrochée une barre de longueur l et de masse m_2 ; elle peut balancer avec un angle ϑ. Une barre perpendiculaire, de longueur h et de masse m_3 y est accrochée en son centre. En travaillant dans le repère x,y ; il est demandé de :

Déterminer le système d'équations du mouvement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange dans le cas où la pente suit la relation : $y = \dfrac{x}{2}$.

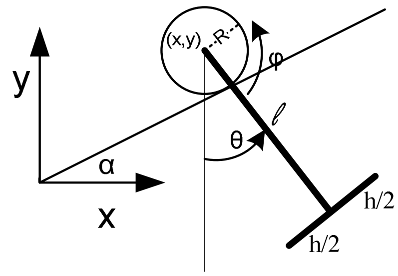


Figure 1

$$\overline{OG_1} = x\overline{1}_x + y\overline{1}_y \,;\, \overline{v_{G_1}} = \dot{x}\overline{1}_x + \dot{y}\overline{1}_y$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\overline{v_{G_2}} = \overline{v_{G_1}} + \dot{\theta}\overline{1}_z \times (\frac{l}{2}\sin\theta\overline{1}_x - \frac{l}{2}\cos\theta\overline{1}_y) = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\overline{1}_x + (\dot{y} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta)\overline{1}_y$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta) + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{12}\right]$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta) + \frac{h^2\dot{\theta}^2}{12}\right]$$

$$V = (m_1 + m_2 + m_3)gy - gl\cos\theta(\frac{m_2}{2} + m_3)$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2(\frac{m_2}{3} + m_3) + \frac{1}{2}l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta)(m_2 + 2m_3)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_3\frac{h^2\dot{\theta}^2}{12} - (m_1 + m_2 + m_3)gy + gl\cos\theta(\frac{m_2}{2} + m_3)$$

Contraintes:

$$y = \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{R}{\cos\alpha}}_{\text{constant avec } tg\alpha = \frac{1}{2}} \quad => (\delta y - \frac{\delta x}{2} = 0)\lambda_1$$

Roulement sans glissement :

$$(\delta\varphi + \frac{\sqrt{5}\delta x}{2R} = 0)\lambda_2$$

$$\begin{cases} x : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\sin\theta = -\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\sqrt{5}\lambda_2}{2R} \\ y : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\cos\theta + (m_1 + m_2 + m_3)g = \lambda_1 \\ \theta : (\frac{m_2}{2} + m_3)l^2\ddot{\theta} + m_3\frac{h^2\ddot{\theta}}{12} + \frac{1}{2}l\begin{bmatrix}(m_2 + 2m_3)(\ddot{y}\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta) \\ +\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta) + gl\sin\theta\end{bmatrix} = 0 \\ \varphi : \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi} = \lambda_2 \\ \dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{5}\dot{x}}{2R} \\ \dot{y} = \frac{\dot{x}}{2} \end{cases}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 4 : b) Modification du système (1.5 point)

Dans le cas où :

1. L'on place le système sur une plaque horizontal ;
2. L'on rajoute un ressort de raideur k et de longueur libre R entre le centre de la bille et le mur ;
   - Déterminer les relations dont vous aurez besoin pour caractériser le système.
   - Donner le système d'équations différentielles du mouvement dans ce cas.

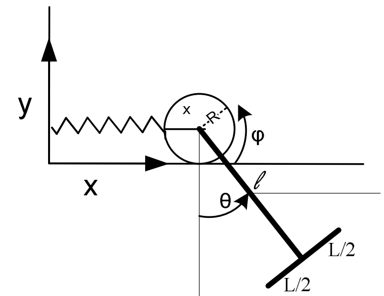


Figure 2

Contraintes:

$y = R$

Roulement sans glissement :

$(\delta\varphi + \frac{\delta x}{R} = 0)\lambda$

Potentiel Ressort :

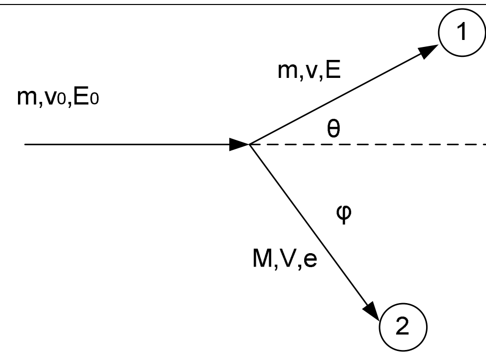
$$V = \frac{k(x-R)^2}{2} \Rightarrow -\frac{\partial(-V)}{\partial q_i} = k(x-R)$$

$$\begin{cases} x : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + \frac{1}{2} l\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2} l\dot{\theta}^2 \sin\theta + k(x-R) = \frac{\lambda}{R} \\ \theta : (\frac{m_2}{2} + m_3) l^2\ddot{\theta} + m_3 \frac{L^2\ddot{\theta}}{12} + \frac{1}{2} l \begin{bmatrix} (m_2 + 2m_3)(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) \\ +\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - gl\sin\theta \end{bmatrix} = 0 \\ \varphi : \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \ddot{\varphi} = \lambda \\ \dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}}{R} \end{cases}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 5 : Théorie : Le choc élastique (3 points)

Calculer l'énergie $E = E(\varphi)$ de la bille 1 de masse m et de vitesse v_0 après qu'elle ait percuté la bille 2 au repos avant le choc et de masse M. On suppose le choc parfaitement élastique et que ces sphères sont en mouvement de translation.
La variation d'énergie de E correspond elle à une perte ou à un gain d'énergie ?



$$\begin{cases} E : mv_0^2 = mv^2 + MV^2 \\ R_x : mv_0 = mv\cos\vartheta + MV\cos\varphi \\ R_y : 0 = mv\sin\vartheta - MV\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2v_0^2 - 2mMv_0V\cos\varphi + M^2V^2 = m^2v^2$$

En éliminant *v :*

$$\Rightarrow \cancel{m^2v_0^2} - 2m\cancel{M}v_0\cancel{V}\cos\varphi + M^{\cancel{2}}V^{\cancel{2}} = \cancel{m^2v_0^2} - \cancel{M}mV^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2mv_0\cos\varphi}{(m+M)}$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{MV^2}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_0}\frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow E = E_0 - e$$

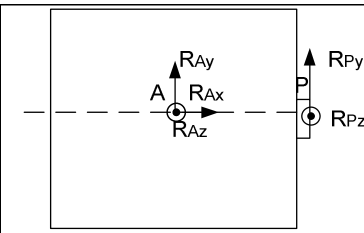
$$\Leftrightarrow E = E_0\left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi\right)$$

La variation correspond à une perte d'énergie (puisqu'elle donne une partie de son energie à l'autre bille).

Question 6 : Moment cinétique d'une plaque trouée (4 points)

Soit, la plaque d'épaisseur négligeable et de masse surfacique σ représentée sur **le plan en annexe**. Elle tourne à une vitesse $\overline{\omega} = \omega \overline{1}_x$ autour de son axe X. Elle est maintenue en *P* par une liaison induisant une réaction Y et en Z ; et en *A* par une liaison induisant des réactions en X,Y et Z (voir ci-contre). Ces liaisons lui permettent de tourner sur elle-même et sont de tailles et de masse négligeables.

1. Calculer le moment cinétique en *A* (origine des axes X et Y) de la plaque.
2. Dans le cas ou le poids de la plaque est négligeable, calculer les réactions de liaisons en *y* et *z* de la plaque sur la butée.



Voir schéma complet en annexe

1.

$$\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A \overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & / & / \\ -P_{xy} & / & / \\ -P_{xz} & / & / \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_x \omega_x \overline{1}_x - P_{xy} \omega_x \overline{1}_y - P_{xz} \omega_x \overline{1}_z$$

$$Avec \left| \begin{array}{l} I_{x,total} = I_{x_G,0} - (I_{x,1} + I_{x,2} + I_{x,3} + I_{x,4} + I_{x,5} + I_{x,6}) \\ P_{xy} = P_{xy_0} - (P_{xy_1} + P_{xy_2} + P_{xy_3} + P_{xy_4} + P_{xy_5} + P_{xy_6}) \\ P_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} I_{x_G,0} = \sigma L l \dfrac{l^2}{12} \\ I_{x_G,1} = \sigma \pi R^2 \dfrac{R^2}{4} \Rightarrow I_{x,1} = \sigma \pi R^2 (\dfrac{R^2}{4} + a^2) \\ I_{x_G,2} = I_{x_G,3} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \Rightarrow I_{x,2} = I_{x,3} = \sigma d^2 (\dfrac{d^2}{12} + a^2) \\ I_{x_G,4} = I_{x,4} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} (\cos^2 45° + \sin^2 45) = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \\ I_{x,5} + I_{x,6} = 2 \dfrac{\sigma \pi r^2}{2} \dfrac{r^2}{4} \end{array} \right.$$

et

$$\left| \begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy_0} - (\underbrace{P_{xy_1}}_{0+\frac{\sigma\pi R^2}{2}ab} + \underbrace{P_{xy_2}}_{0-\sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_3}}_{0+\sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_4}}_{0} + \underbrace{P_{xy_5}}_{0-\frac{\sigma\pi r^2}{4}ac} + \underbrace{P_{xy_6}}_{0-\frac{\sigma\pi r^2}{4}ac}) \\ P_{xy} = -(\frac{\sigma\pi R^2}{2} ab - \frac{\sigma\pi r^2}{2} ac) = -\frac{\sigma\pi a}{2}(bR^2 - cr^2) \end{array} \right.$$

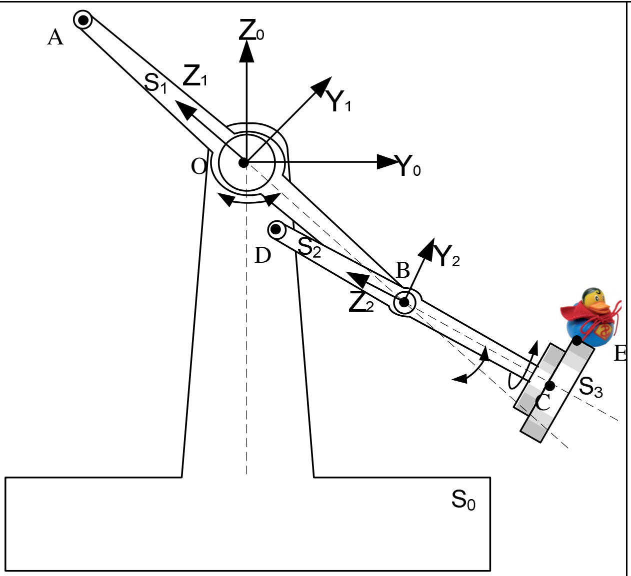
2.

$$\left. \frac{d\overline{M}_A}{dt} \right|_{y,z} = \left(\overline{m}_{e,A} \right)_{y,z}$$

$$\Rightarrow P_{xy} (\dot{\omega}_x \overline{1}_y + \omega_x^2 \overline{1}_z) = \frac{L}{2} N_{P_y} \overline{1}_z - \frac{L}{2} N_{P_z} \overline{1}_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_{P_y} = \dfrac{\dot{\omega}_x \sigma \pi a (bR^2 - cr^2)}{L} \\ N_{P_z} = -\dfrac{\omega_x^2 \sigma \pi a (bR^2 - cr^2)}{L} \end{cases}$$

Question 7 : **La foire aux canards (2 points)**



Un manège est composé de deux bras S_1 et S_2 liés l'un à l'autre par une liaison pivot. La nacelle S_3 est liée au bras S_2 et peut tourner autour de son axe. S_1 tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\alpha}\overline{1}_{x_0}$, S_2 tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\beta}\overline{1}_{x_2}$ et S_3 avec une vitesse angulaire $\dot{\gamma}\overline{1}_{z_2}$.

1. Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la nacelle.
2. Déterminer la vitesse à l'instant représenté sur le dessin du point E sur lequel est assis Super Canard.

Données : OA=OB=2a ; BD=BC=2b et CE=R,

$$\overline{\omega}_{S_1} = \dot{\alpha}\overline{1}_{x_0} \,;\, \overline{\omega}_{S_2} = \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{x_0} \,;$$

$$\overline{\omega}_{S_3} = \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{x_2} + \dot{\gamma}\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{\varepsilon}_{S_3} = \left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)\overline{1}_{x_0} + \ddot{\gamma}\overline{1}_{z_2} - \dot{\gamma}\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2}$$

$$\overline{v}_E = \overline{v}_C + \overline{\omega}_{S_3} \times \overline{CE} \text{ avec } \begin{cases} \overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{S_2} \times \overline{BC} = a\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + b\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2} \\ \overline{v}_B = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{S_1} \times \overline{OB} = a\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{v}_E = a\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + b\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2} + R\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{z_2} - R\dot{\gamma}\overline{1}_{x_2}$$

$$\overline{v}_E = a\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + b\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2} + R\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_{z_2} - R\dot{\gamma}\overline{1}_{x_2}$$

BROUILLON

BROUILLON

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLON