

NOM, PRENOM :
NUMERO° :

Examen de mécanique rationnelle
2^{ième} session 30/08/2011 (9h-13h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer** que les brouillons

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

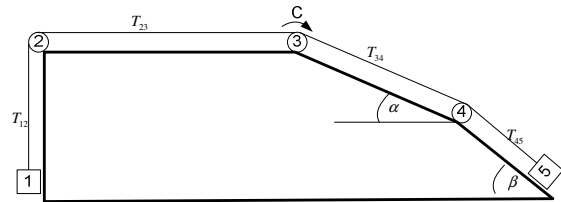
$$\text{Changement d'axe du tenseur d'inertie : } I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$$

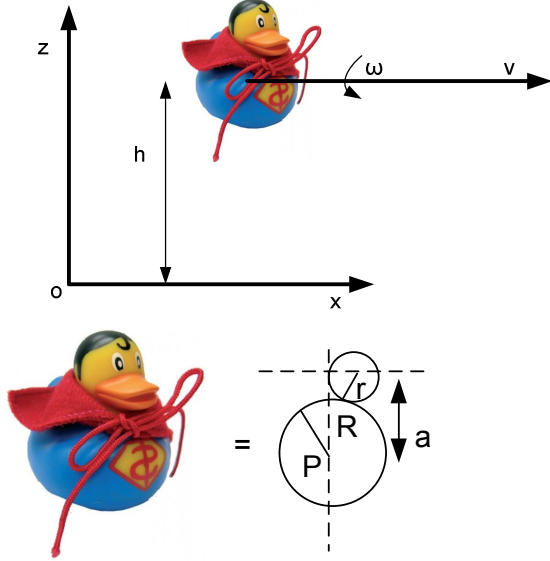
Question 1 : Questions rapides

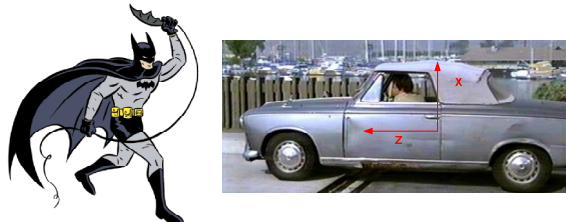
a) Blocs glissants (1.5pt)

Soit le système constitué de deux masses m_1 et m_5 et de trois poulies de masses m_2, m_3, m_4 et de rayons r . Les câbles passent par ces poulies sans glisser de manière à mouvoir les masses m_1 et m_5 . Le système est animé par un moteur donnant un couple C sur la poulie 3. Les tensions dans le câble sont représentées par les lettres T . Sans faire aucun calcul :

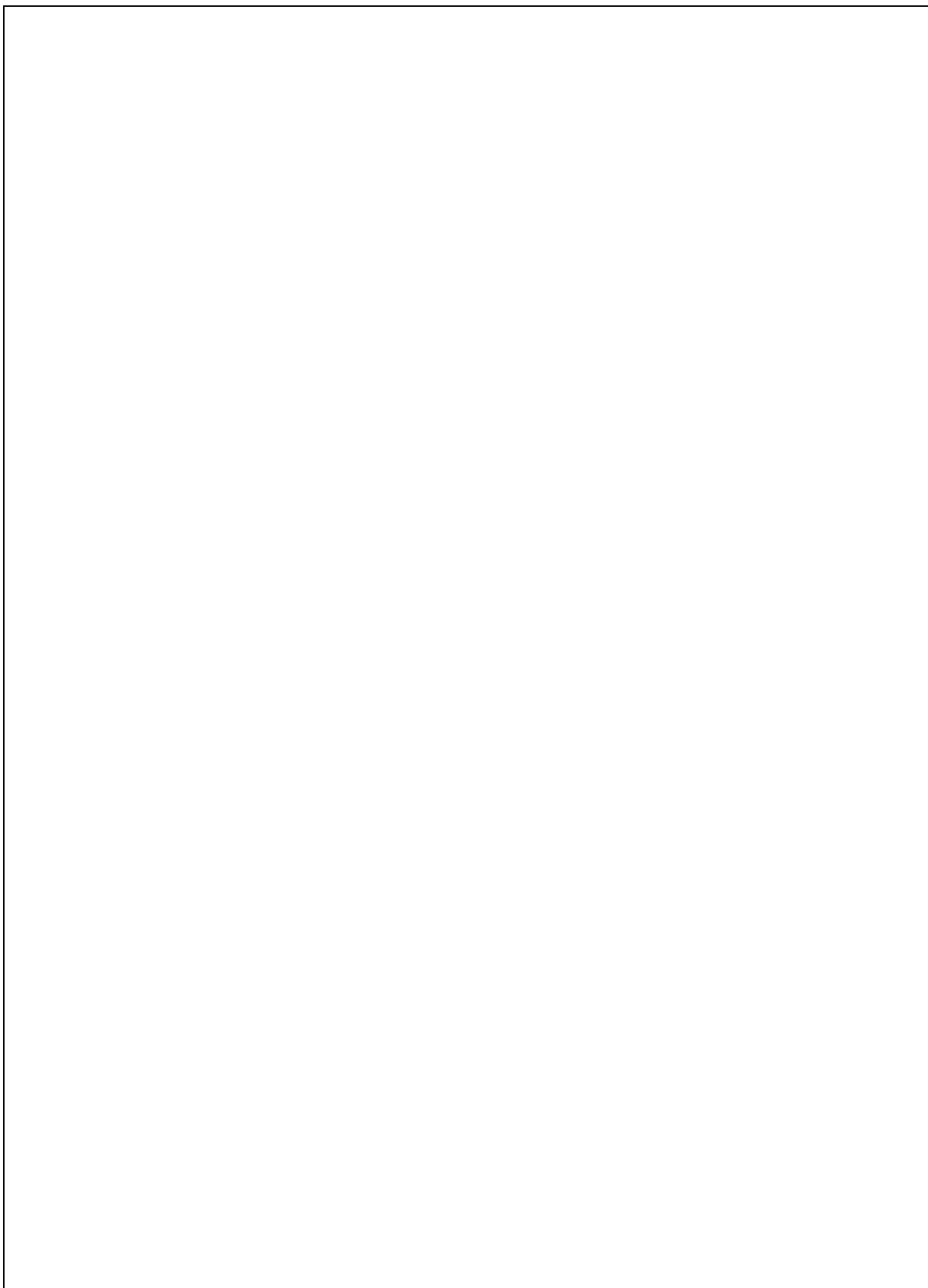
1. Est-il possible de trouver des conditions telles que la tension dans le câble $T_{12} = T_{23}$. Si oui, donnez les, sinon justifiez. (0.5)
2. Est-il possible de trouver des conditions telles que la tension dans le câble $T_{23} = T_{34}$. Si oui, donnez les, sinon justifiez. (1)



b) Super Canard (0.75pt)	
<p>Super Canard vole à une hauteur h et à une vitesse $v\vec{1}_x$. Il tourne sur lui-même à une vitesse angulaire $\omega\vec{1}_x$. Super canard est assimilable à deux sphères superposées, l'une de rayon R, de centre P et de masse M et l'autre de rayon r et de masse m et dont le centre se trouve à une hauteur a de P.</p> <p>Sachant que le moment cinétique est donné par la relation ci-dessous, calculer les éléments I_x et P_{xz} du tenseurs d'inertie \vec{I}_P.</p> $\vec{M}_o = \vec{I}_P \vec{\omega} + \vec{OP} \times (M + m)v\vec{1}_x$ $= \begin{pmatrix} I_x \\ 0 \\ -P_{xz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h(M + m)v\vec{1}_y$	

Question 2 : Batman (1.25pt)	
<p>Joker, l'ennemi juré de Batman a cassé les freins de la voiture de Columbo qui avance une vitesse v_1 vers un ravin. La voiture est de longueur L et de masse M, elle possède 4 roues de masses m (ayant un rayon de giration i et situées chacune à une distance $\frac{L}{2}$ de centre de gravité de la voiture). Batman aimerait sauver Columbo en jetant ses projectiles de masse m_0 et de vitesse v_0 sur la voiture.</p> <p>Nous supposons que l'impact des projectiles sur la voiture s'assimile à un choc mou et que toutes les forces de frottements sont négligées.</p> <p>Calculer le nombre de projectiles n que Batman doit envoyer pour arrêter la voiture.</p>	

NOM, PRENOM :NUMERO°:



Question 3 : Laboratoire (2.5 points)

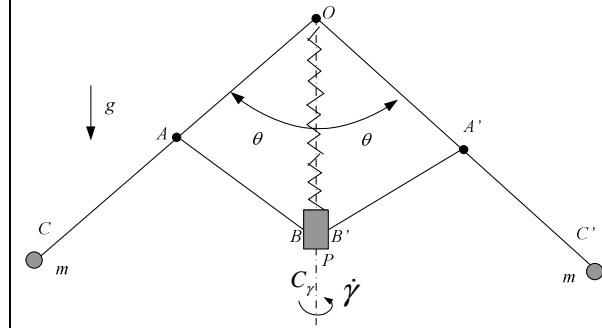
1. Soit un système tournant à une vitesse $\bar{\omega}$ muni d'un gyrostat tournant à une vitesse $\bar{\Omega}$ et d'inertie Γ , calculer la relation ci-dessous à l'aide du théorème du moment cinétique. (2 points)

$$0 = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g$$

2. Commenter l'utilité de la manœuvre suivante : « Avant d'aborder un virage à droite, les motards roulant vite tournent leur guidon légèrement à gauche » (0.5 pt)

Question 4 : Le régulateur de Watt (4pt)

Il s'agit d'un dispositif ancien et ingénieux permettant à un moteur de tourner à vitesse constante malgré les variations de charge. La tringlerie tourne à une vitesse proportionnelle à celle du moteur. Les masselottes m commandent le moteur : en montant elles diminuent l'admission de carburant, ce qui tend à diminuer la vitesse du moteur. Une accélération du moteur fait monter les masselottes ce qui tire le manchon vers le haut, avec, comme conséquence, une diminution de l'admission. Un ressort est installé entre O et B



Caractérisation du système :

- Vitesse de rotation autour de l'axe OP, notée $\dot{\gamma}$
 - Le ressort est de longueur libre l et de raideur k .
 - Les barres OC et OC' sont rigides, de masses M et de longueur L
 - Les articulations A et A' sont à une distance a de O
 - Les barres AB et $A'B'$ sont rigides, sans masse, de longueur b
 - Le moteur exerce un couple C_γ sur la barre OP
 - Les deux masselottes sont modélisées comme des masses ponctuelles, de valeur m
 - Le manchon est modélisé comme une masse ponctuelle de masse M_B pouvant coulisser le long de l'axe.
1. **Déterminer** les degrés de liberté ainsi que les coordonnées que vous utiliserez pour résoudre le problème (de manière à simplifier les calculs).
 2. **Déterminer** la(les) équation(s) du mouvement à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

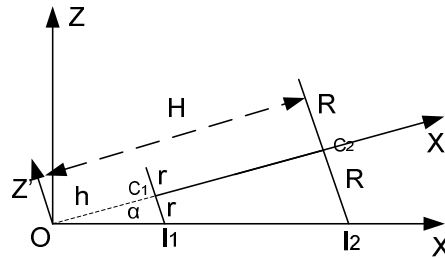
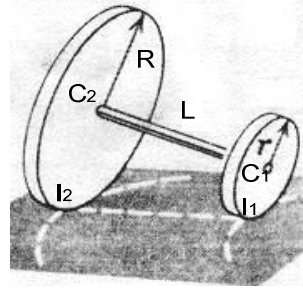
NOM, PRENOM :NUMERO°:

Question 5 : Les deux disques (4pt)

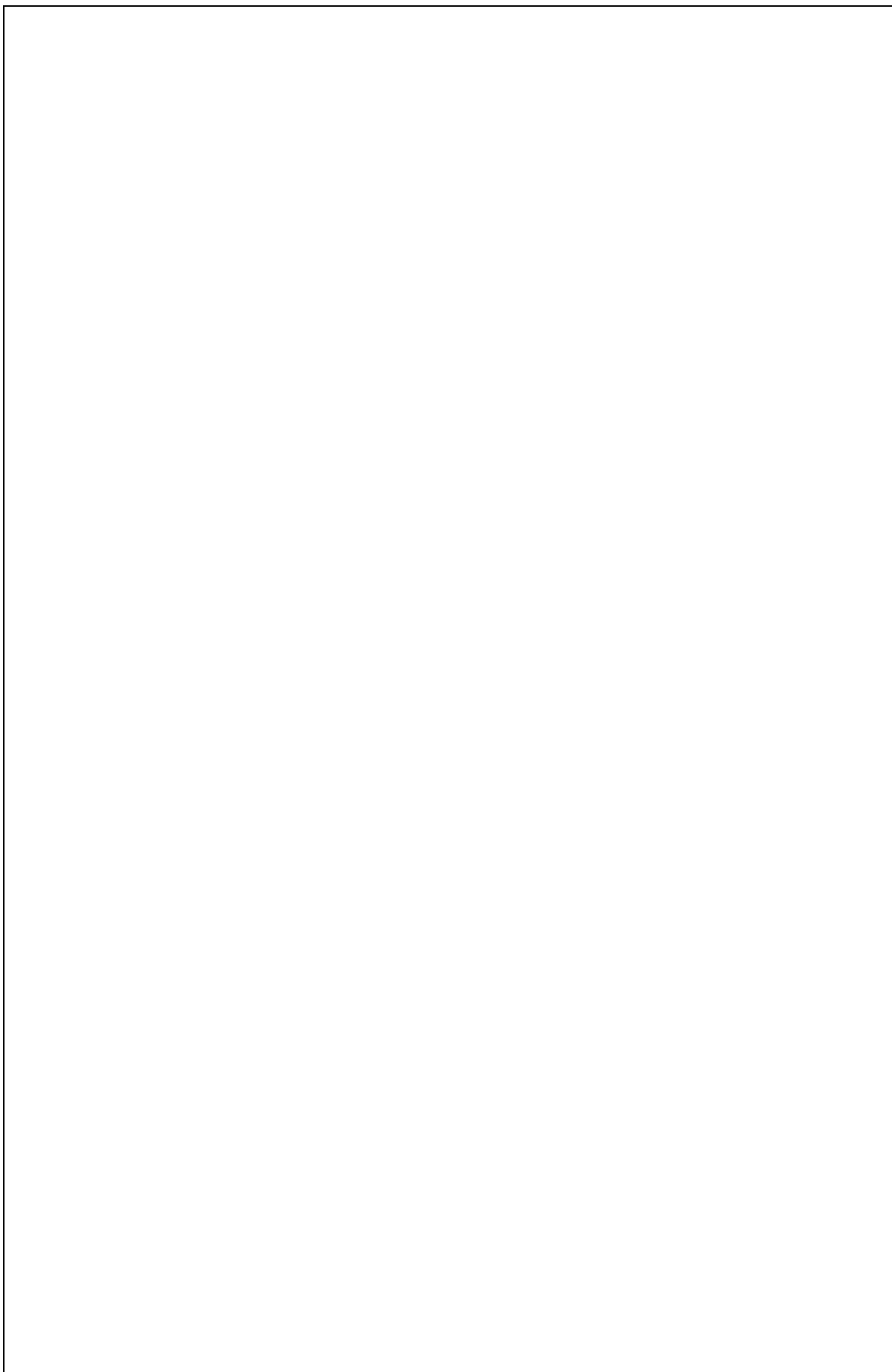
Deux disques minces homogènes pesants de masses m_1 et m_2 sont reliés rigidement par une tige de masse négligeable située suivant leur axe, et roulent sans glisser sur un plan horizontal. Le solide effectue à vitesse angulaire constante ω_r un cercle complet de centre O dans ce plan horizontal et tourne sur lui-même à une vitesse angulaire constante ω_d .

1. Calculer la liaison entre ω_r et ω_d .
2. En vous plaçant au point O , déterminer la condition sur telle que le point H reste au sol.
3. Où auriez-vous calculé le moment cinétique si l'on avait voulu connaître les réactions de liaisons en I_2 uniquement ?

Remarque : Il est admis de laisser des termes I_x , I_y , I_z dans la réponse finale, pour autant qu'ils soient calculés. Il est également admis de tout laisser en fonction de l'angle α .



NOM, PRENOM :NUMERO°:

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the majority of the page. It is intended for a drawing or a detailed written response.

Question 6 : Le choc élastique (2.5pt)

Soit un disque de rayon r et de masse m et un carré de masse m , déterminer, sur l'axe X uniquement, la vitesse du carré après le choc du disque sur le carré sachant que :

- Le disque 1 a une vitesse initiale V_0 ;
- Le carré 2 est à l'arrêt ;
- Le choc est considéré comme parfaitement élastique ;
- Il existe une force de frottement avec le sol de coefficient f .

En déduire la distance que mettra le carré 2 pour s'arrêter.



Question 7 : Tenseur d'inertie (3.5 pt)

Déterminer le tenseur d'inertie du système représenté sur le plan en annexe sachant que :

- Les demi-sphères ont chacune une masse M ;
- Les tiges ont chacune une masse m ;
- La distance c représente la distance entre O et le centre de masse de la demi-sphère.

NOM, PRENOM :NUMERO^o:

BROUILLON

NOM, PRENOM :NUMERO°:

BROUILLON