NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
2ième session 30/08/2011 (9h-13h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\bar{R} = \sum \bar{F}_{\mathrm{e}}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \bar{m}_{\mathrm{e},A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \overline{M_A} = m\overline{AG} \times \bar{v}_A + \bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \bar{F}_h.\bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\bar{v}_A.\left(\bar{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h.\frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

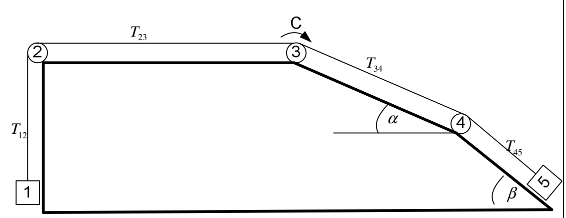
Changement d'axe du tenseur d'inertie : $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^{\lambda}\alpha_j^{\mu} I^{ij}$

Question 1 : Questions rapides

a) Blocs glissants (1.5pt)

Soit le système constitué de deux masses m_1 et m_5 et de trois poulies de masses m_2, m_3, m_4 et de rayons *r*. Les câbles passent par ces poulies sans glisser de manière à mouvoir les masses m_1 et m_5. Le système est animé par un moteur donnant un couple C sur la poulie 3. Les tensions dans le câble sont représentées par les lettres *T*. Sans faire aucun calcul :

1. Est-il possible de trouver des conditions telles que la tension dans le câble $T_{12} = T_{23}$. Si oui, donnez les, sinon justifiez. (0.5)
2. Est-il possible de trouver des conditions telles que la tension dans le câble $T_{23} = T_{34}$. Si oui, donnez les, sinon justifiez. (1)



1. Oui, il suffit que le moment cinétique de la poulie m_2 soit négligeable
2. Oui il faut que soit :
   a. Le couple C soit nul et que le moment cinétique soit négligeable;
   b. La dérivée du moment cinétique :

      $\frac{m_3 r^2 \dot{\omega}}{2} = rT_{23} - rT_{34} - C$

      $T_{23} = T_{34} \Leftrightarrow \frac{m_3 r^2 \dot{\omega}}{2} = -C$

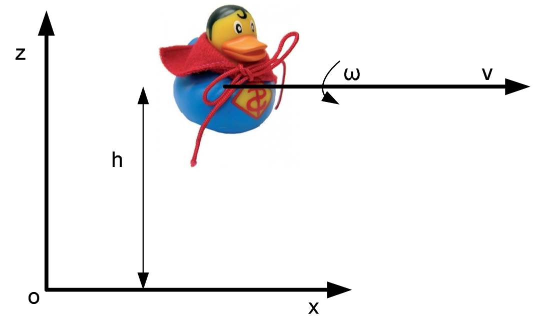
      Autrement dit, il faut que la dérivée du moment cinétique soit égale et opposée au couple C.

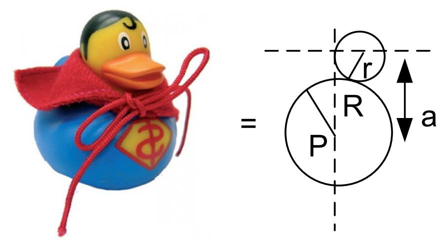
b) Super Canard (0.75pt)

Super Canard vole à une hauteur h et à une vitesse $v\bar{1}_x$. Il tourne sur lui-même à une vitesse angulaire $\omega\bar{1}_x$. Super canard est assimilable à deux **sphères** superposées, l'une de rayon R , de centre P et de masse M et l'autre de rayon r et de masse m et dont le centre se trouve à une hauteur a de P.
Sachant que le Moment cinétique est donné par la relation ci-dessous, calculer les éléments du tenseurs d'inertie.

$$\overline{M}_o = \overline{\overline{I}}_P\,\overline{\omega} + \overline{OP} \times (M+m)v\bar{1}_x$$

$$= \begin{pmatrix} I_x & / & / \\ 0 & / & / \\ -P_{xz} & / & / \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h(M+m)v\bar{1}_y$$





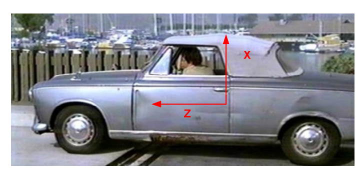
$$I_x = \frac{2MR^2}{5} + \frac{2mr^2}{5} + ma^2$$

$$P_{xz} = -mar$$

Question 2 : Batman (1.25pt)

Joker, l'ennemi juré de Batman a cassé les freins de la voiture de Columbo. La voiture avance avec une vitesse v_1 vers un ravin. La voiture est de longueur L et de masse M, elle possède 4 roues de masses m (ayant un rayon de giration i et situées chacune à une distance $\frac{L}{2}$ de centre de gravité de la voiture). Batman aimerait sauver Columbo en jetant ses projectiles de masse m_0 et de vitesse v_0 sur la voiture roulant à une vitesse v_1. Nous supposons que l'impact des projectiles sur la voiture s'assimile à un choc mou et que toutes les forces de frottements sont négligées.

Calculer le nombre de projectiles n que Batman doit envoyer pour arrêter la voiture.



Conservation de la résultante cinétique en z.
Avant le premier impact :
$$\bar{R}_1 = \sum m\bar{v}_{G_i} = (M+4m)v_1\bar{1}_z$$
Après le premier impact
$$R_{2_z} = (M+4m)v_1 - m_0 v_0$$
Après n impacts :
$$R_{2_z} = (M+4m)v_1 - n m_0 v_0$$
La voiture sera arrêtée si Batman a envoyé :
$$R_{2_z} = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{(M+4m)v_1}{m_0 v_0}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 3 : Laboratoire (2.5 points)

1. Soit un système tournant à une vitesse $\bar{\varpi}$ muni d'un gyrostat tournant à une vitesse $\bar{\Omega}$ et d'inertie Γ, calculer la relation ci-dessous à l'aide du théorème du moment cinétique. (2 points)

$$\boxed{0 = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g}$$

2. Commenter l'utilité de la manœuvre suivante : « Avant d'aborder un virage à droite, les motards roulant vite tournent leur guidon légèrement à gauche » (0.5 pt)

Théorème du moment cinétique en G : $\boxed{\frac{d\overline{M_G}}{dt} = \bar{m}_{e,G}}$

Système = $\{S$ + gyroscope (solide de révolution, rotation propre $\bar{\Omega}$)$\}$ (rotation $\bar{\varpi}$)

$\boxed{\overline{M_{G(gyr)}} = \Gamma\bar{\Omega}}$ avec Γ = moment d'inertie central du gyroscope autour de son axe de révolution

$$=> \overline{M_G} = \bar{\bar{I}}_{G(S)}.\bar{\varpi} + \bar{\bar{I}}_{G(gyr)}.\left(\bar{\varpi} + \bar{\Omega}\right) = \left(\bar{\bar{I}}_{G(S)} + \bar{\bar{I}}_{G(gyr)}\right).\bar{\varpi} + \bar{\bar{I}}_{G(gyr)}.\bar{\Omega} => \boxed{\overline{M_G} = \overline{M_{G,0}} + \Gamma\bar{\Omega}}$$

$$\frac{d\overline{M_G}}{dt} = \frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} + \frac{d\Gamma\bar{\Omega}}{dt} = \frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} + \bar{\varpi}\times\Gamma\bar{\Omega} = \bar{m}_{e,G}$$

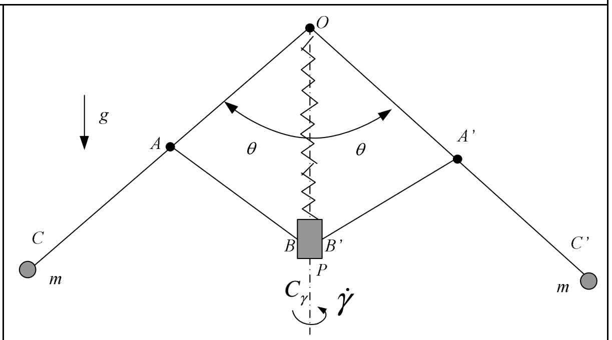
$$=> \boxed{\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g}$$ avec le couple gyroscopique : $\boxed{\bar{C}_g = \Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\varpi}}$

$\bar{\varpi} << \bar{\Omega} => \boxed{0 = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g}$

2. Le couple gyroscopique à tendance à stabiliser la moto, il est donc très difficile de se pencher vers la droite. Le coup de guidon vers la gauche induit un couple gyroscopique inclinant la moto vers la droite. Le motard bénéficie de l'inertie de ce mouvement pour pouvoir se pencher à droite (ce qui créé un couple gyroscopique qui fait tourner la moto).

Question 4 : Le régulateur de Watt (4pt)

Il s'agit d'un dispositif ancien et ingénieux permettant à un moteur de tourner à vitesse constante malgré les variations de charge. La tringlerie tourne à une vitesse proportionnelle à celle du moteur. Les masselottes *m* commandent le moteur : en montant elles diminuent l'admission de carburant, ce qui tend à diminuer la vitesse du moteur. Une accélération du moteur fait monter les masselottes ce qui tire le manchon vers le haut, avec, comme conséquence, une diminution de l'admission. Un ressort est installé entre *0* et *B*



Caractérisation du système :

– Vitesse de rotation autour de l'axe OP, notée $\dot{\gamma}$
– Le ressort est de longueur libre l et de raideur *k*.
– Les barres *OC* et *OC'* sont rigides, de masses M et de longueur *L*
– Les articulations *A* et *A'* sont à une distance *a* de *O*
– Les barres *AB* et *A'B'* sont rigides, sans masse, de longueur *b*
– Le moteur exerce un couple C_γ sur la barre *OP*
– Les deux masselottes sont modélisées comme des masses ponctuelles, de valeur *m*
– Le manchon est modélisé comme une masse ponctuelle de masse M_B pouvant coulisser le long de l'axe.

1. **Déterminer** les degrés de liberté ainsi que les coordonnées que vous utiliserez pour résoudre le problème (de manière à simplifier les calculs).
2. **Déterminer** la(les) équation(s) du mouvement à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

1. Il y a deux degrés de liberté, nous utiliserons γ, ϑ et *z* comme coordonnées généralisées.
2. Calculons l'équation différentielle du mouvement par Lagrange.

$$T = \left[\frac{1}{2} M_B \dot{z}^2\right] + 2\left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right) L^2 \left(\sin^2\theta \dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}^2\right)\right] \text{ et } V = M_B g z + 2(m + \frac{M}{2}) g L \cos\theta + k\frac{(z-l)^2}{2}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{v}_{m1} = \bar{\omega}_1 \times \overline{OM_1} \text{ et } \bar{\omega}_1 = \omega \bar{1}_z - \dot{\theta}\bar{1}_x \Rightarrow \bar{v}_{m1} = -L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y + L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z + L\sin\theta\omega\bar{1}_x \\ \bar{v}_{m2} = \bar{\omega}_2 \times \overline{OM_2} \text{ et } \bar{\omega}_2 = \omega \bar{1}_z + \dot{\theta}\bar{1}_x \Rightarrow \bar{v}_{m2} = +L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y + L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z - L\sin\theta\omega\bar{1}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M_B \dot{z}^2 + (m + \frac{\mathrm{M}}{3}) L^2 \left(\sin^2\theta\dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}^2\right) - M_B g z - (2m + \mathrm{M}) g L \cos\theta - k\frac{(z-l)^2}{2}$$

$$b^2 = z^2 + a^2 - 2az\cos\theta \Rightarrow \lambda_1\left(z\delta z - a\delta z\cos\theta + az\sin\theta\delta\theta = 0\right)$$

L'équation différentielle du mouvement est solution du système de trois équations à trois inconnues :
C_γ ne dérive pas d'un potentiel, pour un déplacement virtuel $\delta\gamma$, C travail de $C_\gamma\delta\gamma$

$$\mathrm{Q}_\gamma = C_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\gamma} = C_\gamma$$

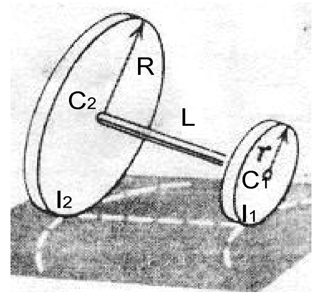
$$\begin{cases} z\dot{z} - a\cos\theta\dot{z} + az\sin\theta\dot{\theta} = 0 \\ \text{z: } M_B\ddot{z} + M_B g + k(z-l) = \lambda_1\left(z - a\cos\theta\right) \\ \theta: \ 2(m + \frac{\mathrm{M}}{3})L^2\ddot{\theta} - (m + \frac{\mathrm{M}}{3})L^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - (2m + \mathrm{M})gL\sin\theta = \lambda_1 az\sin\theta \\ \gamma: \ 2(m + \frac{\mathrm{M}}{3})\sin^2\theta L^2\ddot{\gamma} = C_\gamma \end{cases}$$

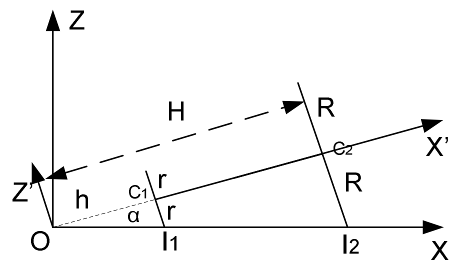
Question 5 : Les deux disques (4pt)

Deux disques minces homogènes pesants de masses m_1 et m_2 sont reliés rigidement par une tige de masse négligeable située suivant leur axe, et roulent sans glisser sur un plan horizontal. Le solide effectue à vitesse angulaire constante ω_r un cercle complet de centre 0 dans ce plan horizontal et tourne sur lui-même à une vitesse angulaire constante ω_d.

1. Calculer la liaison entre ω_r et ω_d.
2. En vous plaçant au point *O*, déterminer la condition telle que le point *I1* reste au sol.
3. Où auriez-vous calculé le moment cinétique si l'on avait voulu connaître les réactions de liaisons en *I2* uniquement ?

Remarque : Il est admis de laisser des termes Ix, Iy, Iz dans la réponse finale, pour autant qu'ils soient calculés. Il est également admis de tout laisser en fonction de l'angle alpha.





1. Contact en *I1*=> Calculons la réaction de liaison à l'aide des théorèmes généraux.

Les forces extérieures : dans le repère *Oxyz*

Réaction en I_1 du sol sur le disque : $\overline{N}_{I_1}(N_{I_1x}, N_{I_1y}, N_{I_1z})$

Réaction en I_2 du sol sur la tige : $\overline{N}_{I_2}(N_{I_2x}, N_{I_2y}, N_{I_2z})$

Poids : $m\overline{g} = \left(0, 0, -(m_1+m_2)g\right)$

$$\overline{R} = \sum m\overline{v}_{G_i} = -(m_1 h\cos\alpha\omega_1 + m_2(H+h)\cos\alpha\omega_1)\overline{1}_y$$

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}\right)_z = \left(\overline{R}_e\right)_z \quad => \quad 0 = N_{I_2z} + N_{I_1z} - m_1 g - m_2 g$$

Le théorème du moment cinétique en O :

Rem : le vecteur de Darboux du repère R' à utiliser pour dériver les axes du repère : $\overline{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_1\overline{1}_z$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overline{M_O}\right)_y \underset{O\text{ fixe}}{=} \left(\overline{m}_{e,O}\right)_y}$$

avec

$$\left|\begin{array}{l}
\overline{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_r\overline{1}_z \text{ avec } tg\alpha = \dfrac{\omega_r}{\omega} = \dfrac{r}{h} => \overline{\omega}_{R'/R_0} = -\ \omega.tg\alpha\overline{1}_z \\
\overline{\omega} = \omega_d\overline{1}_{x'} - \omega_r\overline{1}_z = \omega_d\left(\cos\alpha\overline{1}_x + \sin\alpha\overline{1}_z\right) - \ \omega.tg\alpha\overline{1}_z = \omega\overline{1}_x \text{ avec } \omega = \omega_d\cos\alpha \\
\overline{M_O} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ 0 \\ -\omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'}\omega\cos\alpha \\ 0 \\ -I_{z'}\omega\sin\alpha \end{pmatrix} = I_{x'}\omega\cos\alpha\overline{1}_{x'} - I_{z'}\omega\sin\alpha\overline{1}_{z'} \\
\left(\overline{m}_{e,O}\right)_y = m_1 gh\cos\alpha + m_2 gH\cos\alpha - \dfrac{R}{\sin\alpha}N_{I_2z} - \dfrac{r}{\sin\alpha}N_{I_1z}
\end{array}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = \overline{\omega}_{R'/R_0} \times \overline{M_O} = -\omega^2\sin\alpha\left(\ I_{x'}\cos\alpha + I_{z'}\sin\alpha.tg\alpha\right)\overline{1}_y$$

avec
$$\begin{cases} I_{x'} = I_{x'_1} + I_{x'_2} = \dfrac{m_2 R^2}{2} + \dfrac{m_1 r^2}{2}; \\ I_{y'} = I_{z'} = \underbrace{I_{tige}}_{=0(m=0)} + \underbrace{I_{disque1}}_{=I_{diamètre}+M\left\|\overline{OC_1}\right\|^2} + \underbrace{I_{disque2}}_{=I_{diamètre}+M\left\|\overline{OC_2}\right\|^2} = m_1(h^2 + \dfrac{r^2}{4}) + m_2(\dfrac{R^2}{4} + H^2) \end{cases}$$

Contact en *I1* ssi :

$N_{I_1 z} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{\omega_r^2}{tg^2\alpha}\sin\alpha\left(I_{x'}\cos\alpha + I_{z'}\sin\alpha.tg\alpha\right) + m_1 gh\cos\alpha + m_2 gH\cos\alpha - \dfrac{r}{\sin\alpha}(m_1+m_2)\mathrm{g}}{\left(\dfrac{R}{\sin\alpha} - \dfrac{r}{\sin\alpha}\right)} \geq 0$$

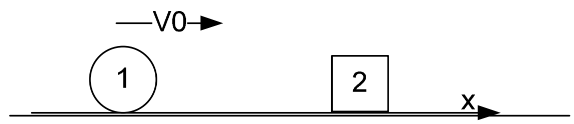
2. Il faut rester en *O* car *I1* et *I2* sont des points de roulement sans glissement.

Question 6 : Le choc élastique (2.5pt)

Soit un disque de rayon *r* et de masse *m* et un carré de masse *m* , déterminer, sur l'axe X uniquement, la vitesse du carré après le choc du disque sur le carré sachant que :

- Le disque 1 a une vitesse initiale V_0 ;
- Le carré 2 est à l'arrêt ;
- Le choc est considéré comme parfaitement élastique ;
- Il existe une force de frottement avec le sol de coefficient *f*.

En déduire la distance que mettra le carré *2* pour s'arrêter.



Soit : V la vitesse du disque après le choc et v la vitesse du carré après le choc

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{mr^2}{2} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\frac{mr^2}{2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad avec\ \mathrm{v} = r\omega \\ mV_0 = mV + mv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}mV_0^2 = \frac{3}{4}mV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ V_0 = V + v \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0^2 = V^2 + \frac{2}{3}v^2 \\ V = V_0 - v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{V_0^2} = \cancel{V_0^2} + v^{\cancel{2}} - 2V_0\cancel{v} + \frac{2}{3}v^{\cancel{2}} \\ V = V_0 - v \end{cases}$$

Si v est différent de 0 :

$$\begin{cases} v = \frac{6}{5}V_0 \\ V = -\frac{1}{5}V_0 \end{cases}$$

La distance d de freinage est déterminée en égalant le travail de la force de frottement à l'énergie du bloc.

$$\int_0^d fmg\,dx = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{36}{25}V_0^2 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}\frac{36}{25}\frac{V_0^2}{fg}$$

Question 7 : Inertie (3.5 pt)

Déterminer le tenseur d'inertie du système représenté sur le plan en annexe sachant que :

- Les demi-sphères ont chacune une masse *M ;*
- Les tiges ont chacune une masse *m ;*
- La distance *c* représente la distance entre *O* et le centre de masse de la demi-sphère.

Pour résoudre un système comme celui-ci, le plus facile est de d'abord calculer le tenseur d'une branche d'ensuite appliquer la rotation.
Comme le système est symétrique par rapport au plan YZ, les produits d'inerties P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} sont tous nuls, il n'est donc pas nécessaire de les calculer.
Le tenseur d'inertie d'une branche :

$$\bar{\bar{I}}_0 = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

$$avec \begin{cases} I_x = \frac{md^2}{4} + \frac{mb^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2MR^2}{5} - M(a-c)^2 + Mc^2 \\ I_y = \frac{md^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{2MR^2}{5} \\ I_z = \frac{md^2}{4} + \frac{mb^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2MR^2}{5} - M(a-c)^2 + Mc^2 \end{cases}$$

Appliquons la rotation

$$\begin{cases} I_{x'} = cos^2\alpha\, I_x + sin^2\alpha\, I_y = \frac{1}{4}\, I_x + \frac{3}{4}\, I_y \\ I_{y'} = sin^2\alpha\, I_x + cos^2\alpha\, I_y = \frac{1}{4}\, I_y + \frac{3}{4}\, I_x \\ I_{z'} = I_z \end{cases}$$

Pour les trois branches : $\bar{\bar{I}}_0 = \bar{\bar{I}}_{0,branche\ 1} + \bar{\bar{I}}_{0,branche\ 2} + \bar{\bar{I}}_{0,branche\ 3}$

$$\bar{\bar{I}}_0 = 3.\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, I_x + \frac{1}{2}\, I_y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\, I_y + \frac{1}{2}\, I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

BROUILLON

BROUILLON