

NOM, PRENOM : .....  
NUMERO° : .....

Examen de mécanique rationnelle-Partie I  
2<sup>ème</sup> session 26/08/2010 (9h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que les brouillons**

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot \bar{\omega} \times \bar{AG} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial \dot{q}_i}$$

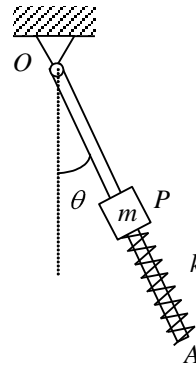
**Question 1 : Questions rapides (3 points)**

Une masse  $m$  glisse sans frottement sur une tige mince homogène  $OA$  de masse  $M$  et de longueur  $L$  qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité  $O$ . La masse est reliée à  $A$  par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel  $k$  et de longueur libre  $L-r_0$ .

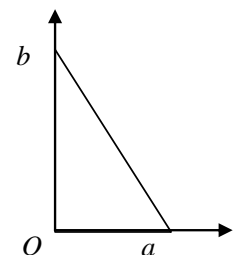
Peut-on écrire la vitesse du point  $P$  de la manière suivante :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{OP} \quad ?$$

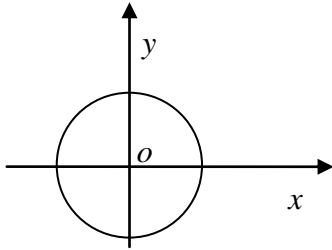
Justifiez et, dans le cas contraire, donnez une expression de  $\bar{v}_P$ . (0.5 points)



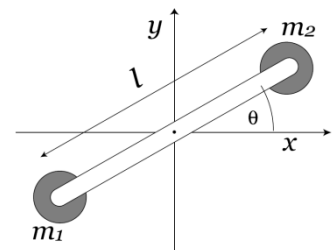
Déterminer le terme  $I_{xy}$  du triangle dans le système d'axe centré au sommet (0.5)



Déterminer  $I_O$  (O est le centre de la sphère) d'une sphère pleine de masse  $m$  et de rayon  $R$  sans calculer d'intégrale et sachant que  $I_x = \frac{5MR^2}{2}$ . (1)



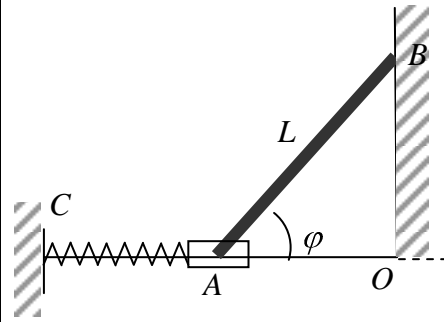
Déterminer l'équation de mouvement du système composé d'une barre rigide de longueur  $l$  et de masse  $M$  tournant dans le plan vertical sans frottement autour de son centre et de deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  attachées aux extrémités de la barre (1 point)



**Question 2 : Tige inclinée (5 points)**

Une tige homogène  $AB$  de masse  $m$  et de longueur  $L$  se déplace dans le plan vertical fixe en s'appuyant en  $B$  contre un mur dépoli (coefficient de frottement  $f$ ). Son extrémité  $A$  est reliée à un ressort de coefficient de rappel  $k$ , dont la longueur libre correspond à  $\varphi = 0$ .

Etablir l'équation différentielle du mouvement



NOM, PRENOM : .....

Examen de mécanique rationnelle-Partie II

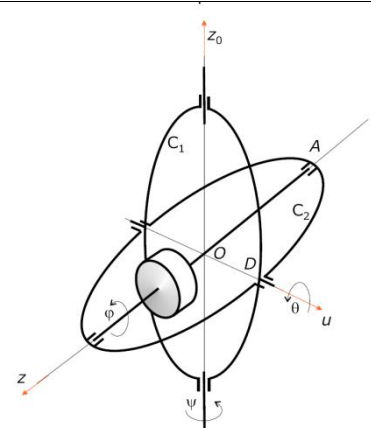
NUMERO°: .....

2<sup>ième</sup> session 26/08/2010 (9h-12h)

**Question 3 : Gyroscope (3 points)**

Un gyroscope cylindrique (de rayon  $r$  et de masse  $M$ ) est représenté sur la figure ci-contre. Les deux arceaux circulaires  $C_1$  et  $C_2$  de rayon  $R$ , peuvent tourner respectivement autour de l'axe  $z_0$  et  $u$ . Le cylindre tourne autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ .

1. Initialement le gyroscope est placé en O, que se passe-t-il ?
2. Le gyroscope est ensuite décentré (situé à une distance  $a$  du centre O), déterminer la vitesse de précession du système ?
3. Si on veut supprimer ce mouvement, déterminer la valeur de la masse  $m_A$  à fixer en A.



**Question 4 : Vilebrequin (5 points)**

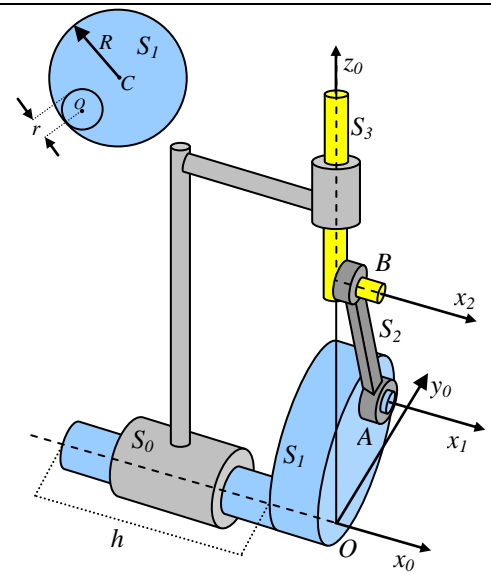
On étudie le mouvement plan d'un système bielle/manivelle, constitué d'un vilebrequin (1 = solide de masse  $m_1$  composé d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  soudé en  $O$  à un disque de rayon  $R$ ), d'une bielle (2, tige de longueur  $L$  et de masse  $m_2$ ), d'un piston (3, tige de longueur  $L_3$  et de masse  $m_3$ ) et d'un bâti fixe (0). Le mouvement de rotation du vilebrequin est transformé en mouvement rectiligne alternatif du piston par rapport au bâti.

Le vilebrequin est animé à l'aide d'un couple  $C$ .

$$OA=d ; OG=OA/2 ; AB=L ; \bar{v}_B = \dot{z}_0 \bar{I}_{z_0}$$

Déterminer la vitesse angulaire de chacun des solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

Déterminer l'équation de mouvement de ce système à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.





NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

**Question 5 :**      **Question de théorie (4 point)**

Démontrer la formule de l'énergie cinétique d'un solide indéformable.

NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

BROUILLON



NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

BROUILLON