

NOM, PRENOM : .....

NUMERO : .....

Examen de mécanique rationnelle

1<sup>ère</sup> session 04/01/2010 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

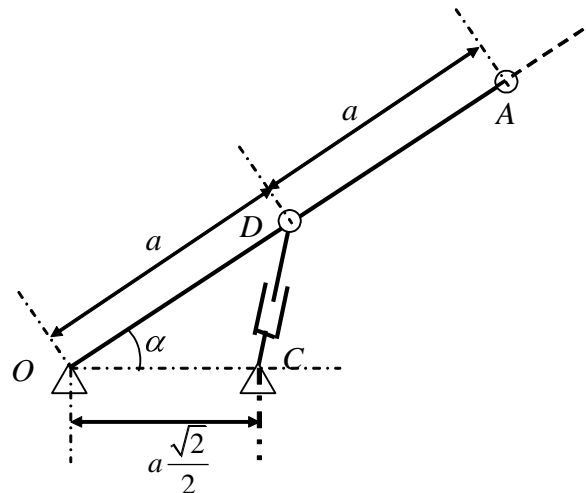
$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot \bar{\omega} \times \bar{AG} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial \dot{q}_i}$$

### Question 1 : Questions rapides (3 points)

Un bras manipulateur d'atelier est composé d'un bras  $OA$ , de longueur  $2a$ , lié au bâti par une liaison pivot en  $O$  ainsi que d'un vérin d'épaule  $CD$  lié au bâti par une liaison pivot en  $C$  ainsi qu'au bras  $OA$  par la liaison pivot en  $D$  (situé à la moitié de  $OA$ ). On considère les vitesses de sortie des vérins constantes ( $V$ ).

Déterminer la vitesse de  $A$  en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $V$ . (1,5 points)

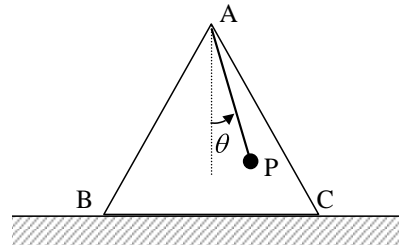


Un triangle est composé de 3 barres homogènes  $ABC$ , de côté  $L$ . Le triangle de masse  $M$  se déplace dans le plan vertical. Son côté  $BC$  glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet  $A$  est suspendu un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $\ell$  qui oscille dans le plan  $ABC$ . (1 point)

Sachant que les équations de mouvement de ce système sont

$$\begin{cases} x : M\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ell \cos \theta \ddot{\theta}) = \text{Const} \\ \theta : \ell \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0 \end{cases}$$

1. Existe-t-il une intégrale première pour ce système ?
2. Calculer les équations de mouvement si on remplace le contact entre le triangle et le sol par deux roues de rayon  $r$  et de masse  $m$ .

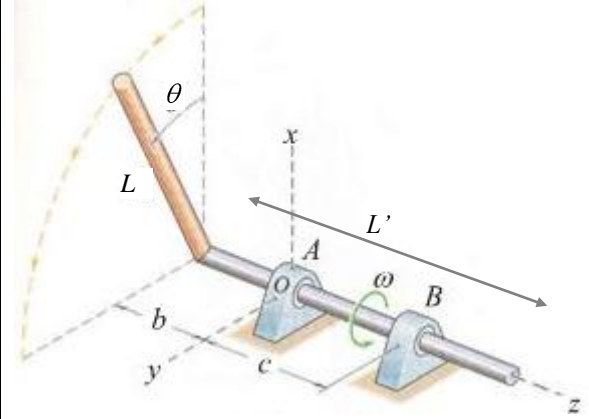


Une barre uniforme de longueur  $L$  et de masse  $m$ , est soudée à un axe de longueur  $L'$  et de masse  $m'$ . Cet axe est en rotation dans les supports  $A$  et  $B$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

Rem : on suppose que  $B$  ne supporte pas de force suivant l'axe.

Pour déterminer l'équation de mouvement, est-il indispensable de connaître les données de l'axe (masse, longueur, ...) ? Justifiez.

(0.5 point)



**Question 2 :** Question de théorie (3 points)

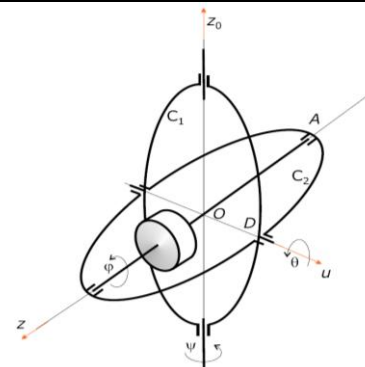
Démontrer la formule de Steiner.

**Question 3 : Gyroscope (2 points)**

Un gyroscope cylindrique (de rayon  $r$  et de masse  $M$ ) est représenté sur la figure ci-contre. Les deux arceaux circulaires  $C_1$  et  $C_2$  de rayon  $R$ , peuvent tourner respectivement autour de l'axe  $z_0$  et  $u$ . Le cylindre tourne autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ .

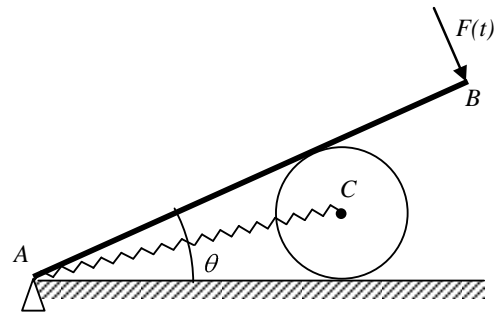
Le gyroscope est décentré (situé à une distance  $a$  du centre  $O$ ) et l'arceau  $C_2$  est incliné d'un angle  $\theta$  par rapport l'arceau  $C_1$ .

Si on vient appliquer une force  $F$  en  $D$  perpendiculaire à l'arceau  $C_1$ , déterminer la réaction du système et la vitesse de précession en fonction de la force appliquée.



**Question 4 :** Tige en appui sur un disque (4 points)

Une tige homogène pesante  $AB$ , de masse  $m$  et de longueur  $L$ , est fixée en  $A$  et subit à son extrémité libre  $B$  une force  $F$  qui lui est perpendiculaire et dont la norme varie en fonction du temps ( $F = A \sin \omega t$ ). Elle s'appuie sur un disque circulaire de masse  $M$ , de rayon  $R$  et de centre  $C$  de manière telle qu'il y a roulement sans glissement entre les deux solides, alors que le disque peut se déplacer sans frottement sur l'horizontale passant par  $A$  (le système est dans un plan vertical fixe). Le centre  $C$  du disque est relié à la rotule  $A$  par un ressort de constante  $k$  et de longueur libre  $L$ .



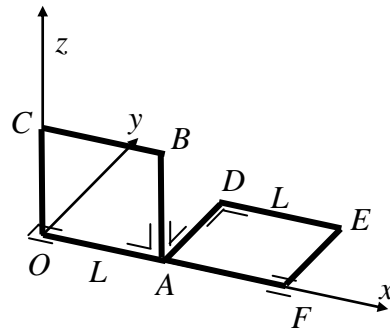
Déterminer l'équation du mouvement de ce système en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.



**Question 5 : Plaques en rotation (4 points)**

Un système composé de deux plaques carrées homogènes pesantes de longueur  $L$  et de masse  $M$  sont soudées sur une tige non pesante. La plaque  $OABC$  est dans le plan  $xz$  tandis que la plaque  $ADEF$  dans le plan  $xy$ . Le système peut tourner autour de l'axe horizontal  $OF$ . La tige  $OAF$  est bloquée en  $O$  par une butée et une glissière en  $F$ . Elle est abandonnée sans vitesse initiale dans la position indiquée sur la figure ( $AB$  vertical). L'angle  $\theta$  est défini entre la verticale ascendante et  $AB$ .

Déterminer les composantes de la réaction de liaison en  $E$  dans des axes attachés à la tige (en fonction des données du système et de l'angle  $\theta$ ). Rem : Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer préalablement la vitesse angulaire de la tige.

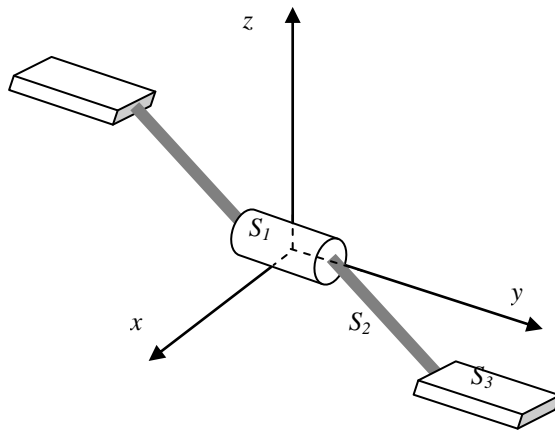




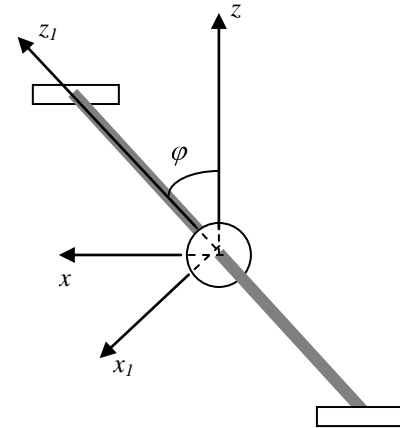


**Question 6 : Pédalier (4 points)**

Un pédalier est présenté ci-dessous. Il est composé d'un cylindre  $S_1$  (de masse  $m_1$ , de rayon  $r$  et de largeur  $h$ ), des axes  $S_2$  (tiges de masse  $m_2$  et de longueur  $L$ ) et des pédales  $S_3$  (de masse  $m_3$ , de côté  $a$  (en  $x$ ),  $b$  (en  $y$ ) et  $c$  (en  $z$ )).



Projection dans le plan  $xz$



Déterminer le tenseur en  $O$  de ce système dans le repère  $Oxyz$ .



BROUILLON

BROUILLON