NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
2ième session 26/08/2010 (9h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_{\mathrm{e}}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = m\overline{v}_G \times \overline{v}_A + \overline{m}_{\mathrm{e},A} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB}\times\overline{R} \quad ; \quad \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\ \overline{\omega}\times\overline{AG} \ + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

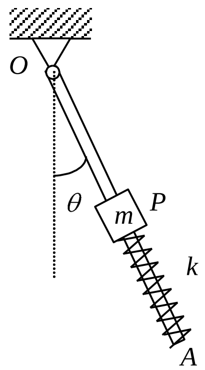
Question 1 : **Questions rapides (3 points)**

Une masse m glisse sans frottement sur une tige mince homogène OA de masse M et de longueur L qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité O. La masse est reliée à A par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel k et de longueur libre L-$r_{O.}$

Peut-on écrire la vitesse du point P de la manière suivante :

$\overline{v}_P = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OP}$?

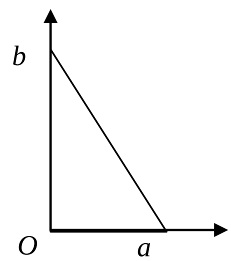
Justifiez et, dans le cas contraire, donnez une expression de $\overline{v}_P$. (0.5 points)



P n'appartient pas au même solide que O donc on ne peut pas appliquer la formule de distribution des vitesses.

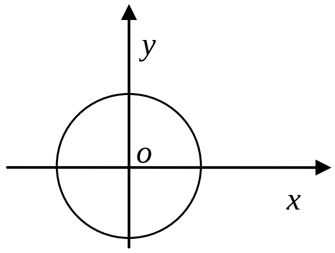
$$\overline{v}_P = \frac{d\overline{OP}}{dt} = \dot{r}\overline{1}_r + r\dot{\theta}\overline{1}_\theta$$

Déterminer le terme $\boldsymbol{I_{xy}}$ du triangle dans le système d'axe centré au sommet (0.5)



$$I_{xy} = \int z^2 dm = \int 0\ dm = 0 \neq P_{xy}$$

Déterminer I_O (O est le centre de la sphère) d'une sphère pleine de masse *m* et de rayon *R* sans calculer d'intégrale et sachant que $I_x = \frac{2MR^2}{5}$. (1)



$$I_O = \int \left(x^2+y^2+z^2\right) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm + \int z^2 dm$$

$$= 3\int z^2 dm = 3I_{xy} \text{ par symétrie}$$

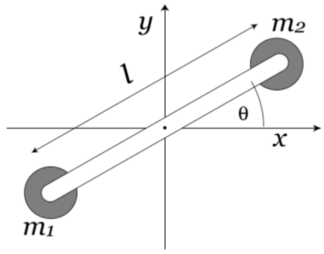
$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = 2I_{xy} \text{ par symétrie}$$

$$I_{xy} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta\right)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi \; d\theta \; dr = \rho\frac{R^5}{5}2\pi\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$= \rho\frac{R^5}{5}2\pi\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \rho\frac{R^5}{5}\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{5}M_{Sphère}R^2$$

$$M = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin\theta d\varphi \; d\theta \; dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Déterminer l'équation de mouvement du système composé d'une barre rigide de longueur *l* et de masse *M* tournant dans le plan vertical sans frottement autour de son centre et de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 attachées aux extrémités de la barre (1 point)



$$T = \left(\frac{M}{2}v_G{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{solide}} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{Ml^2}{12} + \frac{\left(m_1+m_2\right)l^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

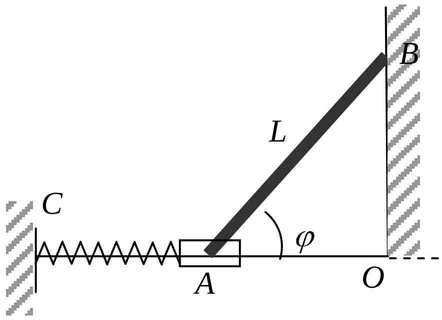
$$V = m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -m_1 g\frac{l}{2}\cos\theta + m_2 g\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Ml^2}{12} + \frac{\left(m_1+m_2\right)l^2}{4}\right)\ddot{\theta} = -m_1 g\frac{l}{2}\cos\theta + m_2 g\frac{l}{2}\cos\theta$$

<u>Question 2 :</u> **Tige inclinée (5 points)**

Une tige homogène *AB* de masse *m* et de longueur *L* se déplace dans le plan vertical fixe en s'appuyant en *B* contre un mur dépoli (coefficient de frottement *f*). Son extrémité *A* est reliée à un ressort de coefficient de rappel *k*, dont la longueur libre correspond à $\varphi = 0$.

Etablir l'équation différentielle du mouvement



$$\boxed{T = \left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}\right)} = \frac{1}{2}mv_{G_{AB}}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_{AB}}.\bar{\omega}$$

Un degré de liberté ϕ. On travaille avec une coordonnée généralisée donc la coordonnée μ doit être remplacée dans le Lagrangien avec la relation $L\sin\phi = \mu$.

$$\text{avec } \left\{ \overline{OG} = \left(\frac{L}{2}\cos\varphi\right)\bar{1}_x + \frac{L}{2}\sin\varphi\bar{1}_y \Rightarrow \bar{v}_G = \left(-\frac{L}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\bar{1}_x + \left(\frac{L}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\bar{1}_y \right.$$

$$T = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\phi}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2 \quad \text{et} \quad V = mg\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{k}{2}\left(\underbrace{C - L\cos\varphi - C - L}_{L - L\cos\varphi}\right)^2$$

$$\overline{OB} = \mu\bar{1}_y = L\sin\varphi\bar{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OB} = L\cos\varphi\delta\varphi\bar{1}_y \quad \text{et} \quad \bar{F}_B = N_B\bar{1}_x - T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\bar{1}_y \quad \text{avec} \quad \bar{T}_B = fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\bar{1}_y$$

$$\Rightarrow Q_\varphi{}^* = -L\cos\varphi T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}$$

$$\Rightarrow \frac{mL^2}{3}\ddot{\varphi} + mg\frac{L}{2}\cos\varphi + kL\sin\varphi(L - L\cos\varphi) - L\cos\varphi fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{R}\Big|_x = \bar{F}\Big|_x}$$

$$\frac{d}{dt}m\left(-\frac{L}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}\right) = k\ \ L - L\cos\varphi\ \ + N_B$$

$$N_B = \left(mL\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - \frac{L}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi}\right) - k\ \ L - L\cos\varphi\right)$$

$\Rightarrow N_B$ à remplacer dans l'équation de mouvement.

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\varphi} + mg\frac{L}{2}\cos\varphi + kL\sin\varphi\ \ L - L\cos\varphi\ \ = -L\cos\varphi\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}f\left(mL\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - \frac{L}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi}\right) - k(L - L\cos\varphi)\right)$$

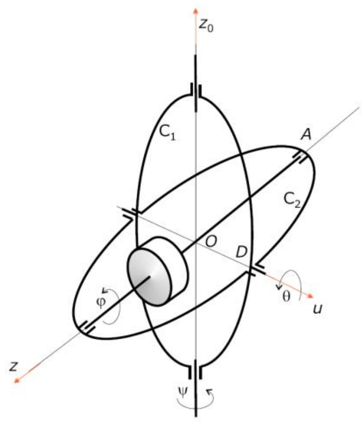
<u>Question 3 :</u> **Gyroscope (3 points)**

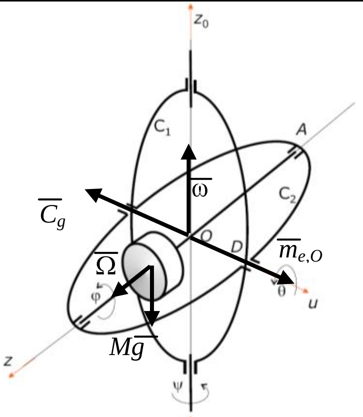
Un gyroscope cylindrique (de rayon r et de masse M) est représenté sur la figure ci-contre. Les deux arceaux circulaires C_1 et C_2 de rayon R, peuvent tourner respectivement autour de l'axe z_0 et u. Le cylindre tourne autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

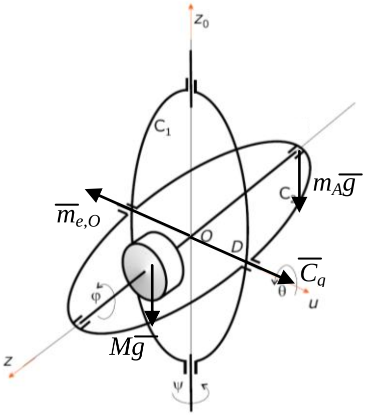
1. Initialement le gyroscope est placé en O, que se passe-t-il ?

2. Le gyroscope est ensuite décentré (situé à une distance a du centre O), déterminer la vitesse de précession du système ?

3. Si on veut supprimer ce mouvement, déterminer la valeur de la masse m_A à fixer en A.







$$\frac{d\overline{M}_{O,0}}{dt} = \overline{m}_{e,O} + \overline{C}_g$$

1. Pas de moment extérieur donc le gyroscope ne bouge pas.

2. Le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,G} = a\cos\theta Mg\overline{1}_u$.

Le gyroscope va précessionner autour de l'axe z_0 car l'axe du gyroscope va essayer de s'aligner sur le moment extérieur.

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit être

$$\overline{C}_g = -\overline{m}_{e,O} = \Gamma\overline{\Omega}\times\omega\overline{1}_z = \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_z \times \dot{\psi}\overline{1}_{z_0} =$$

$$-a\cos\theta Mg\overline{1}_u = -\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta\overline{1}_u \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = \frac{2ag}{\dot{\varphi}r^2}} \text{ constant}$$

3. Il faut supprimer le couple extérieur, donc on ajoute une masse m_A telle que $\overline{m}_{e,G} = a\cos\theta Mg\overline{1}_u + R\cos\theta m_A g = 0$

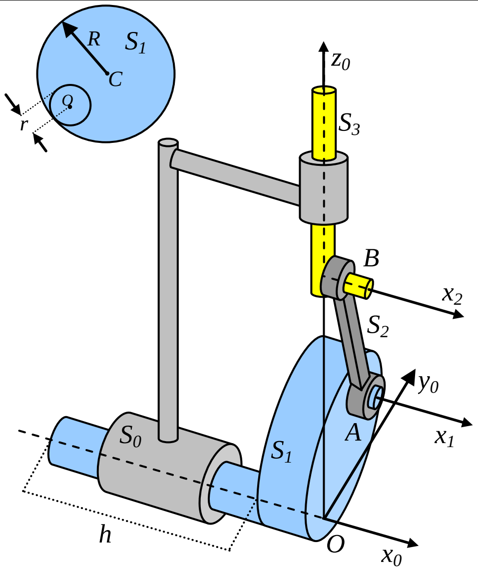
=> $m_A = \frac{aM}{R}$ => équilibre statique

Le gyroscope ne précessionne plus.

Question 4 : **Vilebrequin (5 points)**

On étudie le mouvement plan d'un système bielle/manivelle, constitué d'un vilebrequin (1 = solide de masse m_1 composé d'un cylindre de rayon r et de hauteur h soudé en O à un disque de rayon R), d'une bielle (2, tige de longueur L et de masse m_2), d'un piston (3, tige de longueur L_3 et de masse m_3) et d'un bâti fixe (0). Le mouvement de rotation du vilebrequin est transformé en mouvement rectiligne alternatif du piston par rapport au bâti.
Le vilebrequin est animé à l'aide d'un couple C.

$OA=d$; $OG=OA/2$; $AB=L$; $\bar{v}_B = \dot{z}\bar{1}_{z_0}$



Déterminer la vitesse angulaire de chacun des solides S_1, S_2 et S_3.
Déterminer l'équation de mouvement de ce système à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

$\overline{OA} = a\bar{1}_{y_1}$; $\overline{OB} = z\bar{1}_{z_0}$; $\overline{AB} = -a\cos\theta\,\bar{1}_{y_0} + \ z - a\sin\theta\ \ \bar{1}_{z_0} = -L\sin\alpha\,\bar{1}_y + L\cos\alpha\,\bar{1}_z$ avec α l'angle entre AB et z_0

$$\Rightarrow \begin{cases} L\sin\alpha = a\cos\theta \\ z - a\sin\theta = L\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\cos\alpha\,\delta\alpha + a\sin\theta\,\delta\theta = 0 & \lambda_1 \\ \delta z - a\cos\theta\,\delta\theta + L\sin\alpha\,\delta\alpha = 0 & \lambda_2 \end{cases}$$

$$\bar{v}_{G_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_{S_2} \times \overline{BG_2} = \left(\dot{z} + \frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha\right)\bar{1}_z + \frac{L}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha\,\bar{1}_y$$

$$T = \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{M_{1a}r^2}{2}\right)\dot{\theta}^2}_{\text{cylindre}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{M_{1b}R^2}{2} + M_{1b}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\dot{\theta}^2}_{\text{disque}}\right]_{S_1}$$

$$+\left[\frac{M_2\left(\dot{z}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\alpha}^2 + L\dot{\alpha}\dot{z}\sin\alpha\right)}{2} + \frac{1}{2}\frac{M_2L^2}{12}\dot{\alpha}^2\right]_{S_2} + \left[\frac{M_3\dot{z}^2}{2}\right]_{S_3}$$

$$V = M_{1b}g\frac{d}{2}\sin\theta + M_2 g\left(z - \frac{L}{2}\cos\alpha\right) + M_3 g z$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M_{1a}r^2}{2}\right) + \left(\frac{M_{1b}R^2}{2} + M_{1b}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\right]\dot{\theta}^2 + \left[\frac{(M_2+M_3)\dot{z}^2}{2} + \frac{M_2L^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{M_2}{2}L\dot{\alpha}\dot{z}\sin\alpha\right]$$

$$- M_{1b}g\frac{d}{2}\sin\theta - M_2 g\left(z - \frac{L}{2}\cos\alpha\right) - M_3 g z$$

$$\begin{cases} L\cos\alpha\,\delta\alpha + a\sin\theta\,\delta\theta = 0 \quad \lambda_1 \\ \delta z - a\cos\theta\,\delta\theta + L\sin\alpha\,\delta\alpha = 0 \quad \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M_{1a}r^2}{2}\right) + \left(\frac{M_{1b}R^2}{2} + M_{1b}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\right]\dot{\theta}^2 + \left[\frac{M_2+M_3}{2}\dot{z}^2 + \frac{M_2L^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{M_2}{2}L\dot{\alpha}\dot{z}\sin\alpha\right]$$

$$- M_{1b}g\frac{d}{2}\sin\theta - M_2 g\left(z - \frac{L}{2}\cos\alpha\right) - M_3 g z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta : \left[\left(\frac{M_{1a}r^2}{2}\right) + \left(\frac{M_{1b}R^2}{2} + M_{1b}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\right]\ddot{\theta} + M_{1b}g\frac{d}{2}\cos\theta = C + \lambda_1 a\sin\theta - \lambda_2 a\cos\theta \\ \alpha : \frac{M_2L^2}{3}\ddot{\alpha} + M_2L\ddot{z}\sin\alpha + M_2L\dot{z}\cos\alpha\dot{\alpha} + M_2 g\frac{L}{2}\sin\alpha = \lambda_1 L\cos\alpha + \lambda_2 L\sin\alpha \\ z : (M_2+M_3)\ddot{z} + M_2L\ddot{\alpha}\sin\alpha + M_2L\cos\alpha\dot{\alpha}^2 + (M_2+M_3)g = \lambda_2 \\ L\sin\alpha = a\cos\theta \\ z - a\sin\theta = L\cos\alpha \end{cases}$$

Question 5 :	**Question de théorie (4 point)**

Démontrer la formule de l'énergie cinétique d'un solide indéformable.

$$T=\frac{1}{2}\int dm\bar{v}_P{}^2=\frac{1}{2}\int dm\ \ \bar{v}_A+\varpi\times\overline{AP}\ \ .\ \ \bar{v}_A+\varpi\times\overline{AP}$$

$$T=\frac{1}{2}\int dm\ \ \bar{v}_A.\bar{v}_A+2\bar{v}_A.\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ +\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ .\ \ \varpi\times\overline{AP}$$

$$T=\frac{1}{2}\bar{v}_A{}^2\int dm+\bar{v}_A.\left(\varpi\times\int dm\overline{AP}\right)+\frac{1}{2}\int dm\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ .\ \ \varpi\times\overline{AP}$$

$$T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\ \ \varpi\times m\overline{AG}\ \ +\frac{1}{2}\int dm\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ .\ \ \varpi\times\overline{AP}$$

$$\bar{a}.\ \ \bar{b}\times\bar{c}\ \ =\bar{b}.\ \ \bar{a}\times\bar{c}\ \ =>\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ .\ \ \varpi\times\overline{AP}\ \ =\varpi.\ \ \overline{AP}\times\ \ \varpi\times\overline{AP}$$

$$=>T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\ \ \varpi\times m\overline{AG}\ \ +\frac{1}{2}\varpi.\underbrace{\int dm\ \ \overline{AP}\times\ \ \varpi\times\overline{AP}}_{\bar{\bar{I}}_A.\varpi}$$

On montre que :

$$\left[\overline{AP}\times\left(\varpi\times\overline{AP}\right)\right]_i=\delta_{ijk}AP_j\left(\varpi\times\overline{AP}\right)_k=\delta_{ijk}AP_j\left(\delta_{k\alpha\beta}\omega_\alpha AP_\beta\right)=\delta_{kij}\delta_{k\alpha\beta}AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right)$$

$$=\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\right)AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right)=\delta_{i\alpha}AP_j\omega_\alpha AP_j-AP_\alpha\omega_\alpha AP_i=\underbrace{\underbrace{\left(AP_jAP_j\delta_{i\alpha}-AP_\alpha AP_i\right)}_{\int\ =I_A{}^{i\alpha}\ \text{par définition du tenseur}}\omega_\alpha}_{\int\ =I_A{}^{i\alpha}\omega_\alpha=\left[\bar{\bar{I}}_A\varpi\right]_i}$$

ou, par définition :

$$\left[\bar{\bar{I}}_A.\varpi\right]_i=I_A^{ij}\omega_j=\left(\int\left(AP_k\ AP_k\ \delta_{ij}-AP_i\ AP_j\right)dm\right)\omega_j=\int\left(AP_k\ AP_k\ \delta_{ij}\ \omega_j-AP_i\ AP_j\ \omega_j\right)dm$$

$$=\int\left(\left(\overline{AP}.\overline{AP}\right)\omega_i-\left(\overline{AP}.\varpi\right)AP_i\right)dm=\left[\int dm\left(\overline{AP}\times\left(\varpi\times\overline{AP}\right)\right)\right]_i$$

$$=>\boxed{T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\left(\varpi\times m\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\varpi.\bar{\bar{I}}_A.\varpi}$$

Au centre de masse :

$$T=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\varpi.\bar{\bar{I}}_G.\varpi$$

Dans les axes principaux :

$$T=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\varpi.\begin{pmatrix}I_{G,x}&0&0\\0&I_{G,y}&0\\0&0&I_{G,z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\left(I_{G,x}p^2+I_{G,y}q^2+I_{G,z}r^2\right)$$

BROUILLON

BROUILLON