NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
1[ière] session 04/01/2010 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB}\times\overline{R} \quad ; \quad \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

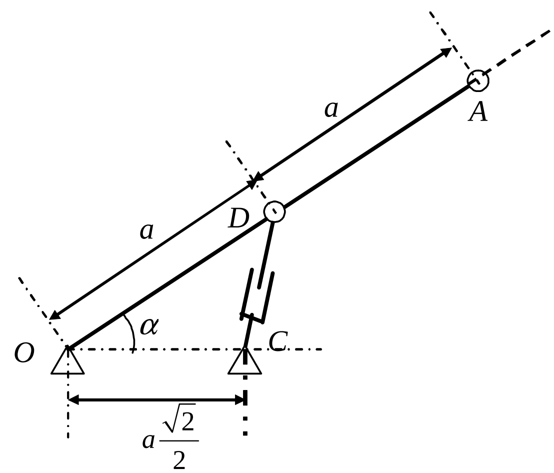
$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : **Questions rapides (3 points)**

Un bras manipulateur d'atelier est composé d'un bras OA, de longueur $2a$, lié au bâti par une liaison pivot en O ainsi que d'un vérin d'épaule CD lié au bâti par une liaison pivot en C ainsi qu'au bras OA par la liaison pivot en D (situé à la moitié de OA). On considère les vitesses de sortie des vérins constantes (V).

Déterminer la vitesse de A en fonction des paramètres α et V. (1,5 points)

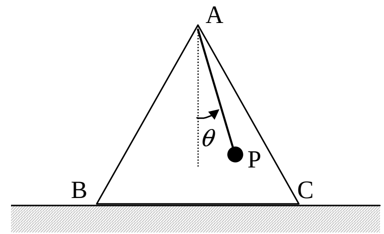


$$\overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{OA}\times\overline{OA} = 2a\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_{OA} = \dot{\alpha}\overline{1}_z$$

$$\left\|\overline{CD}\right\|^2 = a^2 + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2aa\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = a^2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left\|\overline{CD}\right\|}{\mathrm{dt}} = V \Rightarrow 2\left\|\overline{CD}\right\|V = \sqrt{2}a^2\sin\alpha\dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = \frac{V\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{a\sin\alpha}} \Rightarrow \overline{v}_A = 2a\frac{V\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{a\sin\alpha}\overline{1}_{y_1}$$

Un triangle est composé de 3 barres homogènes *ABC*, de côté *L*. Le triangle de masse *M* se déplace dans le plan vertical. Son côté *BC* glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet *A* est suspendu un pendule simple de masse *m* et de longueur ℓ qui oscille dans le plan *ABC*. (1 point)



Sachant que les équations de mouvement de ce système sont

$$\begin{cases} x\ : M\dot{x}+m\left(\dot{x}+\ell\cos\theta\dot{\theta}\right)=Const \\ \theta\ :\ \ell\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta=0 \end{cases}$$

1. Existe-t-il une intégrale première pour ce système ?

2. Calculer les équations de mouvement si on remplace le contact entre le triangle et le sol par deux roues de rayon *r* et de masse *m*.

La première équation de mouvement est une intégrale première car c'est une équation du premier degré.

$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=Const$ est une intégrale première

$T=T_M+T_m$ avec $T_M=\frac{1}{2}Mv_A^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$ car le triangle ne tourne pas.

Pour le point matériel de masse $m : T_m=\frac{1}{2}mv_G^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$

avec $\overline{v}_P=\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AP}=\left(\dot{x}+\ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x-\ell\dot{\theta}\sin\theta\overline{1}_z$

$V=-mg\ell\cos\theta \Rightarrow L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)+mg\ell\cos\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0\ :\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=Const$ est une intégrale première $: M\dot{x}+m\left(\dot{x}+\ell\cos\theta\dot{\theta}\right)=A$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\ :\ \ell\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta=0$ (ou directement avec $T+V=E_0$)

Si on remplace le contact entre le triangle et le sol par deux roues de rayon *r* et de masse *m*.

$$L=L_0+2\left(\underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2}_{\frac{3m\dot{x}^2}{2}}\right)=L_0+\frac{6m\dot{x}^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=M\dot{x}+m\dot{x}+6m\dot{x}$$

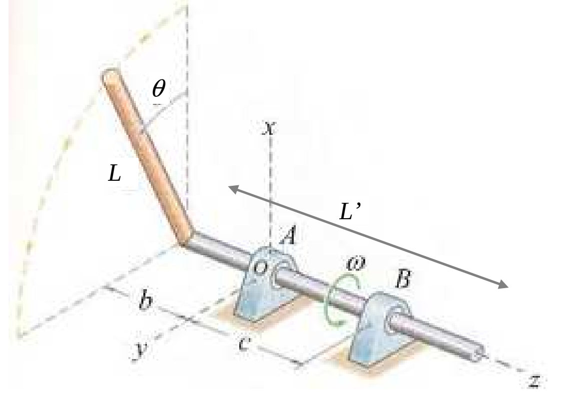
$$\begin{cases} x : M\dot{x}+m\left(7\dot{x}+\ell\cos\theta\dot{\theta}\right)=B \\ \theta : \text{identique} \end{cases}$$

Une barre uniforme de longueur L et de masse m, est soudée à un axe de longueur L' et de masse m'. Cet axe est en rotation dans les supports A et B avec une vitesse angulaire ω.

Rem : on suppose que B ne supporte pas de force suivant l'axe.

Pour déterminer l'équation de mouvement, est-il indispensable de connaitre les données de l'axe (masse et longueur) ? Justifiez.

(0.5 points)



L'axe tourne autour de son axe z, donc le calcul du moment cinétique ou de l'énergie cinétique fait apparaitre le terme $\bar{\bar{I}}.\bar{\omega} = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & I_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_z.\omega \bar{1}_z$. Le moment d'inertie d'une barre suivant l'axe de cette barre est nul.

<u>Question 2 :</u> **Questions de théorie (3 points)**

Démontrer la formule de Steiner.

$\overline{OG}(a_x;a_y;a_z) \Rightarrow x_i = X_i + a_i$ avec X_i les coordonnées du point P dans le système d'axe centré en G

$$I_O^{\alpha\beta} = \int (x_i\, x_i\, \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha\, x_\beta)\, dm = \int \left((X_i + a_i)(X_i + a_i)\,\delta_{\alpha\beta} - (X_\alpha + a_\alpha)(X_\beta + a_\beta)\right) dm =$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} + a_i a_i \delta_{\alpha\beta} + 2X_i a_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta - X_\alpha a_\beta - X_\beta a_\alpha - a_\alpha a_\beta\right) dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta\right) dm + \int \left(a_i a_i \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) dm + 2\int X_i a_i \delta_{\alpha\beta} dm - \int X_\alpha a_\beta dm - \int X_\beta a_\alpha dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + 2a_i\delta_{\alpha\beta}\underbrace{\int X_i dm}_{m\overline{GG}_i} - a_\beta \underbrace{\int X_\alpha dm}_{m\overline{GG}_\alpha} - a_\alpha \underbrace{\int X_\beta dm}_{m\overline{GG}_\beta} \Rightarrow \boxed{I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right)}$$

Par définition du centre de masse $\overline{OG} = \dfrac{\int \overline{OP} dm}{m} \Rightarrow mOG_i = \int OP_i dm \Rightarrow mX_i = \int x_i dm \Rightarrow 0 = \int X_i dm$

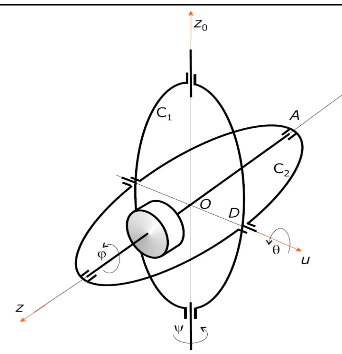
Donc dans les axes aux centre de masse, les coordonnées de ce centre de masse valent $(0,0,0)$

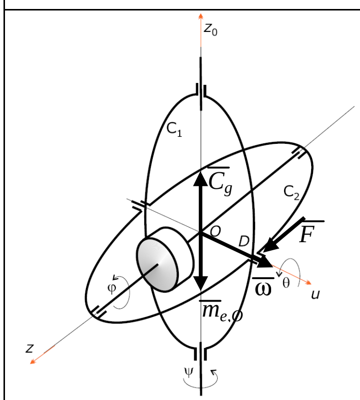
Question 3 : **Gyroscope (2 points)**

Un gyroscope cylindrique (de rayon *r* et de masse *M*) est représenté sur la figure ci-contre. Les deux arceaux circulaires C_1 et C_2 de rayon *R*, peuvent tourner respectivement autour de l'axe z_0 et *u*. Le cylindre tourne autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

Le gyroscope est décentré (situé à une distance *a* du centre O) et l'arceau C_2 est incliné d'un angle θ par rapport l'arceau C_1.

Si on vient appliquer une force *F* en *D* perpendiculaire à l'arceau C_1, déterminer la réaction du système et la vitesse de précession en fonction de la force appliquée.





$$\frac{d\overline{M}_{O,0}}{dt} = \overline{m}_{e,O} + \overline{C}_g$$

La force extérieure vaut $\overline{F}_e = -F\overline{1}_{y_0}$

Le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,O} = -FR\overline{1}_{z_0} + Mga\sin\theta\overline{1}_x$.

L'axe du gyroscope va essayer de s'aligner sur le moment extérieur.

$$\begin{cases} mga\sin\theta\overline{1}_x \text{ : le gyroscope précessionne autour de l'axe z pour} \\ \text{annuler le moment extérieur dû au poids. } (\psi) \\ -FR\overline{1}_{z_0} \text{ : Le gyroscope va précessionner autour de l'axe } u \ (\theta) \end{cases}$$

Pour contrer ces couple extérieurs, le couple gyroscopique doit être

$$\overline{C}_g = -\overline{m}_{e,O} = \Gamma\overline{\Omega}\times\omega\overline{1}_z = \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_z \times \left(\dot{\psi}\overline{1}_{z_0} + \dot{\theta}\overline{1}_u\right)$$

$$-Mga\sin\theta\overline{1}_x + FR\overline{1}_{z_0} = \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\overline{1}_v - \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\overline{1}_x =$$

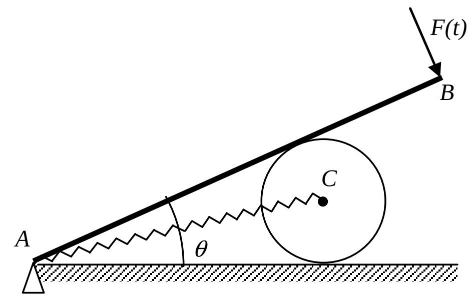
$$-Mga\sin\theta\overline{1}_x + FR\overline{1}_{z_0} = -\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\overline{1}_x + \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\overline{1}_{z_0} - \underbrace{\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\overline{1}_{y_0}}_{\text{terme repris par les câles car la rotation autour de } y_0 \text{ n'est pas possible.}}$$

$$\Rightarrow Mga = \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}\dot{\psi} \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = \frac{2ga}{r^2\dot{\varphi}}}$$

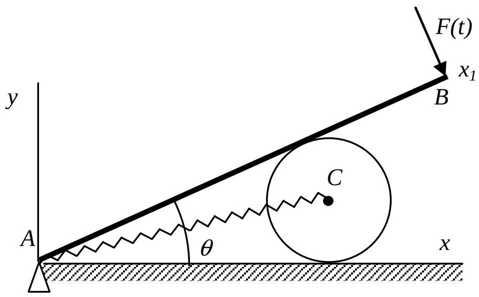
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{2FR}{Mr^2\dot{\varphi}\cos\theta}}$$

<u>Question 4 :</u> **Tige en appui sur un disque (4 points)**

Une tige homogène pesante *AB*, de masse *m* et de longueur *L*, est fixée en *A* et subit à son extrémité libre *B* une force *F* qui lui est perpendiculaire et dont la norme varie en fonction du temps ($F = A\sin\omega t$). Elle s'appuie sur un disque circulaire de masse *M*, de rayon *R* et de centre *C* de manière telle qu'il y a roulement sans glissement entre les deux solides, alors que le disque peut se déplacer sans frottement sur l'horizontale passant par *A* (le système est dans un plan vertical fixe). Le centre *C* du disque est relié à la rotule *A* par un ressort de constante *k* et de longueur libre *L*.



Déterminer la (les) équation(s) de mouvement finale(s) de ce système <u>en utilisant les multiplicateurs de Lagrange</u>.



$T = T_{Tige} + T_{Disque}$

$$\begin{cases} T_{Tige} = \left(\dfrac{1}{2}\bar{\omega}_t . \bar{\bar{I}}_O . \bar{\omega}_t\right)_{Tige} = \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_t = \dot{\theta}\bar{1}_z \quad (\text{avec } \dot{\theta} < 0) \\ T_{Disque} = \left(\dfrac{1}{2}mv_C^2 + \dfrac{1}{2}\bar{\omega}_d . \bar{\bar{I}}_C . \bar{\omega}_d\right)_{Disque} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_d = \dot{\varphi}\bar{1}_z \quad \text{et} \quad x = R\,\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}; \quad \dot{x} = -\dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 \quad \text{et} \quad V = mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{k}{2}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+R^2}}_{R/\sin(\theta/2)} - L\right)^2$$

$\delta\tau = -FL\delta\theta \Rightarrow Q_\theta{}^* = -FL$

Contraintes : $\bar{v}_{P\in \text{tige}} = \bar{v}_{P\in \text{disque}}$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \bar{v}_{P\in \text{tige}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_t \times \overline{AP} = x\dot{\theta}\bar{1}_{y_1} \\ \bar{v}_{P\in \text{disque}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d \times \overline{CP} = \dot{x}\bar{1}_x - R\dot{\varphi}\bar{1}_{x_1} = \left(\dot{x}\cos\theta - R\dot{\varphi}\right)\bar{1}_{x_1} - \dot{x}\sin\theta\bar{1}_{y_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\cos\theta - R\dot{\varphi} = 0 \\ x\dot{\theta} = -\dot{x}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\delta x\cos\theta - R\delta\varphi = 0\right)\lambda_1 \\ \left(x\delta\theta + \delta x\sin\theta = 0\right)\lambda_2 \end{cases}$$

$$\text{Equation de Lagrange : } L = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta - \frac{k}{2}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+R^2}}_{R/\sin(\theta/2)} - L\right)^2$$

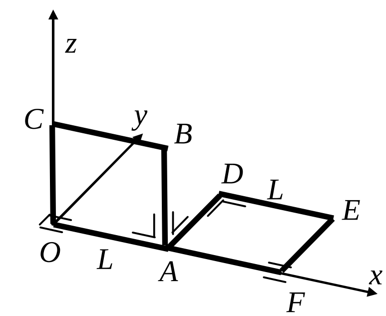
$$\begin{cases} \theta : \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mg\dfrac{L}{2}\cos\theta = -FL + \lambda_2 x \\ x : M\ddot{x} + k\left(\sqrt{x^2+R^2} - L\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta \\ \varphi : \dfrac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \\ \dot{x}\cos\theta - R\dot{\varphi} = 0 \\ x\dot{\theta} = -\dot{x}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M\ddot{x} + k\left(\sqrt{x^2+R^2} - L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \left(-\frac{MR}{2}\ddot{\varphi}\right)\cos\theta + \frac{1}{x}\left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\cos\theta + FL\right)\sin\theta}$$

Question 5 : **Plaques en rotation (4 points)**

Un système composé de deux plaques carrées homogènes pesantes de longueur L et de mase M sont soudées sur une tige non pesante. La plaque $OABC$ est dans le plan xz tandis que la plaque $ADEF$ dans le plan xy. Le système peut tourner autour de l'axe horizontal OF. La tige OAF est bloquée en O par une butée et une glissière en F. Elle est abandonnée sans vitesse initiale dans la position indiquée sur la figure (AB vertical).

Déterminer les composantes de la réaction de liaison en E dans des axes attachés à la tige (en fonction des données du système et de l'angle θ). Rem : Il est nécessaire de déterminer préalablement, en fonction de l'angle θ entre la verticale ascendante et AB, la vitesse angulaire de la tige.



Système {système complet (4m)} : Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = M\overline{v_G}\times\overline{v_O} + \sum \overline{m}_{e,O} \text{ où } \overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{1}_x \text{ et } \overline{M_O} = I_x\dot{\theta}\overline{1}_x - P_{xy}\dot{\theta}\overline{1}_y - P_{xz}\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow I_x\ddot{\theta}\overline{1}_x - P_{xy}\ddot{\theta}\overline{1}_y - P_{xz}\ddot{\theta}\overline{1}_z - P_{xy}\dot{\theta}^2\overline{1}_z + P_{xz}\dot{\theta}^2\overline{1}_y = \overline{\mathrm{OE}}\times(\overline{Y}_E + \overline{Z}_E) + \overline{\mathrm{OG}_1}\times M\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_2}\times M\overline{g}$$

$$\overline{\mathrm{OG}_1}\left(\frac{L}{2},0,\frac{L}{2}\right);\ \overline{\mathrm{OG}_2}\left(\frac{3L}{2},\frac{L}{2},0\right);\ M\overline{g} = -Mg\,\overline{1}_Z = -Mg\left(\sin\theta\,\overline{1}_y + \cos\theta\,\overline{1}_z\right)$$

$$I_x = \underbrace{\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{OABC} + \underbrace{\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{ADEF} = \frac{2ML^2}{3}$$

$$P_{xy} = \underbrace{0}_{OABC} + \underbrace{M.\frac{L}{2}.\frac{3L}{2}}_{ADEF} = \frac{3ML^2}{4} \quad \text{et} \quad P_{xz} = \underbrace{M.\frac{L}{2}.\frac{L}{2}}_{OABC} + \underbrace{0}_{AB} = \frac{ML^2}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{2ML^2}{3}\ddot{\theta} = Mg\frac{L}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}MgL\cos\theta \quad (1) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{4L}(\sin\theta - \cos\theta) \\ -\frac{3ML^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{ML^2}{4}\dot{\theta}^2 = -2LZ_E + \frac{1}{2}MgL\cos\theta + \frac{3}{2}MgL\cos\theta = -2LZ_E + 2MgL\cos\theta \quad (2) \\ -\frac{ML^2}{4}\ddot{\theta} - \frac{3ML^2}{4}\dot{\theta}^2 = 2LY_E - Mg\frac{L}{2}\sin\theta - Mg\frac{3L}{2}\sin\theta = 2LY_E - 2MgL\sin\theta \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}^2}\frac{ML^2}{3}d\dot{\theta}^2 = \int_0^{\theta}Mg\frac{L}{2}(\sin\theta - \cos\theta)d\theta \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{g\frac{3}{L}\frac{1}{2}(-\cos\theta - \sin\theta + 1)}}$$

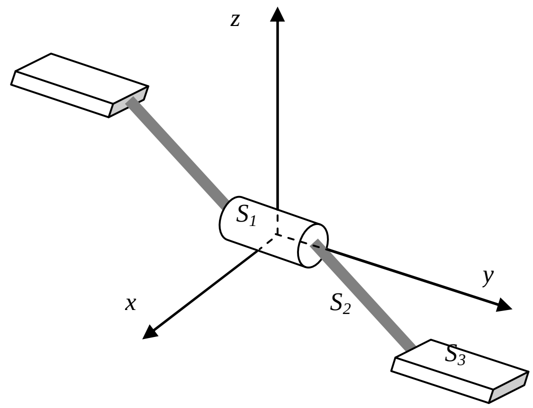
$$\text{ou } L = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\sin\theta - Mg\frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \frac{2ML^2}{3}\ddot{\theta} - Mg\frac{L}{2}\cos\theta + Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

$$Z_E = \frac{ML}{8}\left(3\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\right) + Mg\cos\theta = \frac{ML}{8}\left(\frac{9g}{4L}(\sin\theta - \cos\theta) - g\frac{3}{L}\frac{1}{2}(-\cos\theta - \sin\theta + 1)\right) + Mg\cos\theta$$

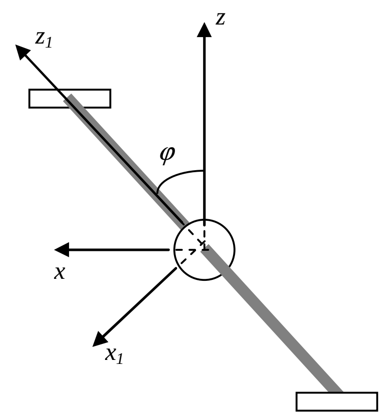
$$Y_E = Mg\sin\theta - \frac{ML}{8}\left(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\right) = Mg\sin\theta - \frac{ML}{8}\left(\frac{3g}{4L}(\sin\theta - \cos\theta) - g\frac{3}{L}\frac{1}{2}(-\cos\theta - \sin\theta + 1)\right)$$

Question 6 : **Pédalier (4 points)**

Un pédalier est présenté ci-dessous. Il est composé d'un cylindre S_1 (de masse m_1, de rayon r et de largeur h), des axes S_2 (tiges de masse m_2 et de longueur L) et des pédales S_3 (de masse m_3, de côté a (en x), b (en y) et c (en z)).



Projection dans le plan xz



Déterminer le tenseur en O de ce système dans le repère $Oxyz$.

S_1 - Cylindre (r,h) :

$$\bar{\bar{I}}_{O_{xyz}\ S_1} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 r^2}{4}+\frac{m_1 h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 r^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 r^2}{4}+\frac{m_1 h^2}{12} \end{pmatrix}$$

S_2 - Axes (L) :

$$\bar{\bar{I}}_{O_{x_1y_1z_1}\ S_2} = 2\begin{pmatrix} \frac{m_2 L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{2m_2\begin{pmatrix} \left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{4} & \frac{h}{2}\frac{L}{2} \\ 0 & \frac{h}{2}\frac{L}{2} & \frac{h^2}{4} \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_{2a}}=\left(0,-\frac{h}{2},\frac{L}{2}\right)=\overline{G_{2a}O}}$$

$$\bar{\bar{I}}_{O_{x_1y_1z_1}\ S_2} = \begin{pmatrix} \frac{2m_2 L^2}{3}+m_2\frac{h^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m_2 L^2}{3} & -\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) \\ 0 & -\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) & m_2\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_1\cos\varphi + z_1\sin\varphi \\ z = -x_1\sin\varphi + z_1\cos\varphi \end{cases}$$

$$\overline{\overline{I}}_{O_{xyz}\,S_2} = \begin{pmatrix} \frac{2m_2L^2}{3}\cos^2\varphi + m_2\frac{h^2}{2} & m_2\frac{hL}{2}\sin\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi\frac{2m_2L^2}{3} \\ m_2\frac{hL}{2}\sin\varphi & \frac{2m_2L^2}{3} & m_2\frac{hL}{2}\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi\frac{2m_2L^2}{3} & \cos\varphi m_2\frac{hL}{2} & m_2\frac{h^2}{2} + \frac{2m_2L^2}{3}\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

Avec

$$\overline{\overline{I}}_{O_{xyz}\,S_2} = \begin{pmatrix} I_{x_1}\cos^2\varphi + I_{z_1}\sin^2\varphi - \cancel{P_{x_1z_1}}\sin 2\varphi & -\left(\cos\varphi\,\cancel{P_{x_1y_1}} + \sin\varphi P_{y_1z_1}\right) & -\left(\sin\varphi\cos\varphi\left(I_{x_1} - I_{z_1}\right) + \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\cancel{P_{x_1z_1}}\right) \\ -\left(\cos\varphi\,\cancel{P_{x_1y_1}} + \sin\varphi\left(P_{y_1z_1}\right)\right) & I_{y_1} & -\left(-\sin\varphi\,\cancel{P_{x_1y_1}} + \cos\varphi P_{y_1z_1}\right) \\ -\left(\sin\varphi\cos\varphi\left(I_{x_1} - I_{z_1}\right) + \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\cancel{P_{x_1z_1}}\right) & -\left(-\sin\varphi\,\cancel{P_{x_1y_1}} + \cos\varphi P_{y_1z_1}\right) & I_{z_1}\cos^2\varphi + I_{x_1}\sin^2\varphi + \cancel{P_{x_1z_1}}\sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{2m_2L^2}{3} + \cancel{m_2\frac{h^2}{2}}\right)\cos^2\varphi + m_2\frac{h^2}{2}\cancel{\sin^2\varphi} & -\sin\varphi\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) & -\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{2m_2L^2}{3} + \cancel{m_2\frac{h^2}{2}} - \cancel{m_2\frac{h^2}{2}}\right) \\ -\sin\varphi\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) & \frac{2m_2L^2}{3} & -\cos\varphi\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) \\ -\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{2m_2L^2}{3} + \cancel{m_2\frac{h^2}{2}} - \cancel{m_2\frac{h^2}{2}}\right) & -\cos\varphi\left(-m_2\frac{hL}{2}\right) & m_2\frac{h^2}{2}\cancel{\cos^2\varphi} + \left(\frac{2m_2L^2}{3} + \cancel{m_2\frac{h^2}{2}}\right)\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

S_3 - Pédales (a,b,c) :

$$\overline{\overline{I}}_{O_{xyz}\,S_3} = 2\begin{pmatrix} \frac{m_3\left(b^2+c^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3\left(a^2+c^2\right)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3\left(a^2+b^2\right)}{12} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{+m_3\begin{pmatrix} \left(L\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 & L\sin\varphi\left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right) & -L^2\sin\varphi\cos\varphi \\ L\sin\varphi\left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right) & L^2 & L\cos\varphi\left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right) \\ -L^2\sin\varphi\cos\varphi & L\cos\varphi\left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right) & \left(L\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_{3a}} = \left(L\sin\varphi, -\frac{h}{2}-\frac{b}{2}, L\cos\varphi\right) = \overline{G_{3b}O}}$$

BROUILLON

BROUILLON