Faculté des Sciences Appliquées
Mécanique Rationnelle 2

Année académique 2008-2009
2e année de bachelier
Séance 10 (semaine du 24/11 au 28/11)

Effet gyroscopique - Dynamique des systèmes (1)

Formulaire

Couple gyroscopique : $\overline{C}_g = \Gamma \overline{\Omega} \times \overline{\omega}$

=> Théorème du moment cinétique en G : $\dfrac{d\overline{M_G}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$

Lagrangien $\boxed{L = T - V}$ avec $T = \sum\left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \overline{\overline{I}}_{G_i} \overline{\omega}_i\right)$

Equation de Lagrange : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q^*_{i\left(\text{Force }\cancel{\text{dérivant}}\text{ potentiel}\right)} - \dfrac{\partial V}{\partial q_i}}$

avec $\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \dfrac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$ avec $\delta \overline{r}_h = \sum_i \dfrac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$

Si les variables ne sont pas indépendantes : p relations holonomes : $\phi_j\left(q_i, t\right) = 0$

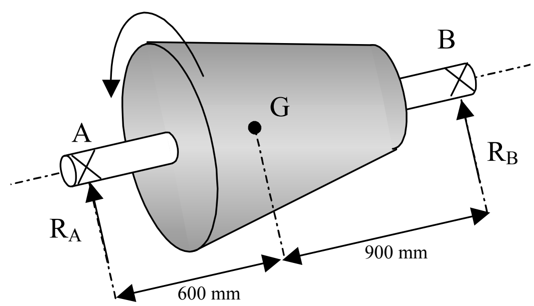
$$=> \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{\phi_j}}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Equation de Lagrange modifée : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial q_i}}$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial q_i}}$

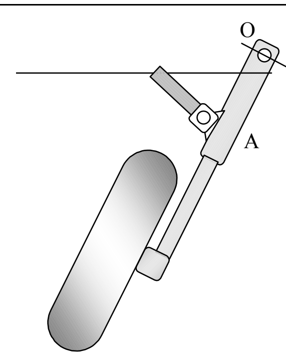
Rem : $\dfrac{\partial mx}{\partial x} = m$; $\dfrac{\partial mx}{\partial \dot{x}} = 0$; $\dfrac{\partial m\dot{x}}{\partial x} = 0$; $\dfrac{dm\dot{x}}{dx} = \dfrac{dm\dot{x}}{dt}\dfrac{dt}{dx} = m\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

1. Le rotor d'une turbine de bateau, représenté ci-contre, a une masse de 1000 kg et un rayon de giration de 20 cm par rapport à son axe. Celui-ci est monté sur les appuis A et B, suivant l'axe longitudinal du bateau. Vu de l'arrière, le rotor tourne à la vitesse angulaire de 5000 tours/min dans le sens trigonométrique. Le bateau effectue un tournant à babord d'un rayon de 400 m à la vitesse de 25 nœuds (1 nœud = 0,514 m/s). Déterminer le couple gyrostatique. L'avant du bateau tend-il à monter ou à descendre sous l'effet de celui-ci ? Calculer les composantes verticales des réactions d'appui en A et B.



2. Un avion, qui vient de décoller à la vitesse de 240 km/h, rentre son train d'atterrissage par un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe parallèle à l'axe longitudinal de l'avion, avec une vitesse angulaire de 0,5 rad/s. Chaque roue a une masse de 33 kg, un rayon de 45 cm et un rayon de giration par rapport à son axe de 30 cm. Déterminer entièrement l'effet du couple gyrostatique dû à la rotation propre des roues lorsque le train d'atterrissage se replie.

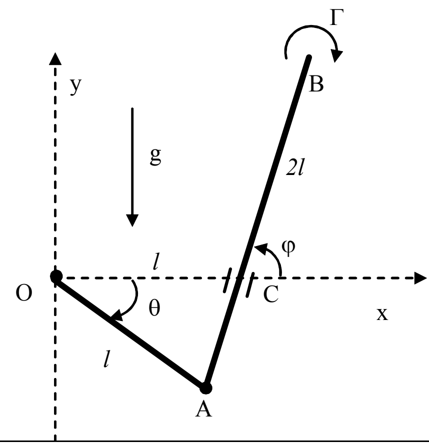
NB : On supposera que les roues ont la même vitesse angulaire qu'en quittant la piste.



3. La tige OA, de longueur l, de masse m, peut osciller dans le plan vertical Oxy autour du point fixe O. La tige homogène AB, de masse $2m$ et de longueur $2l$, est articulée à la première en A et coulisse (sans frottement) dans le guide (tournant) C. Un couple de force constante, de moment Γ (voir figure) est appliqué à la tige AB.

On demande

1) d'écrire l'équation du mouvement
2) de calculer les réactions de liaison en O, A et C, en fonction de θ.

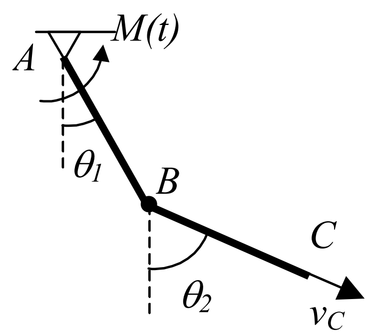


---

4. Un pendule double constitué de deux tiges homogènes identiques de masse m et de longueur L se déplace dans un plan vertical. Un couple de moment donné $M(t)$ est appliqué à la barre AB dans le plan du mouvement, et un mécanisme agissant sur la barre BC impose que la vitesse de C reste toujours parallèle à BC.

Etablir les équations du mouvement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

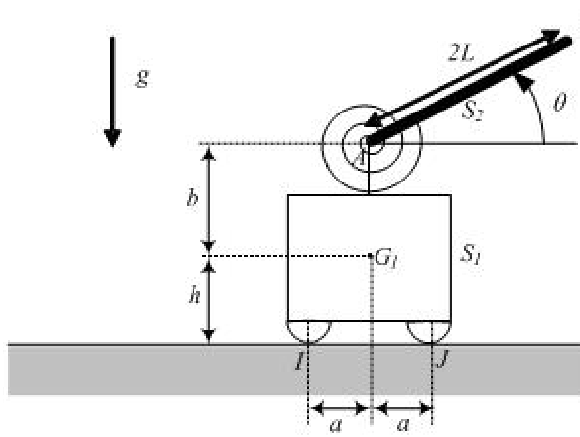
Montrer comment on peut retrouver ces équations en faisant agir en C une force inconnue $F(t)$ perpendiculaire à BC.



---

5. Considérons le mouvement d'un système matériel constitué de deux solides reliés par un ressort de torsion. Le mouvement est plan.

Le solide S_1 de masse m_1 peut se déplacer horizontalement (G_1 est situé à une hauteur h constante). Le solide S_1 est en contact avec le sol à l'aide de deux appuis I et J. Le coefficient de frottement entre le solide S_1 et le sol vaut f.



Au point A appartenant au solide S_1 se trouve une rotule sur laquelle est fixé une tige AB (S_2) de longueur $2L$ et de masse m_2. Un ressort de torsion (R), de masse et d'inertie négligeable, est placé entre les solides S_1 et S_2 de telle sorte que l'action du ressort sur S2 est caractérisée un couple en A proportionnel à la raideur de torsion du ressort, C, et à l'angle d'ouverture.

1. Déterminer le(s) degré(s) de liberté du système ainsi que les coordonnées généralisées que vous utiliseriez pour représenter la dynamique du système..
2. Déterminer la résultante cinétique du système.
3. Déterminer le moment cinétique en A du système.
4. Déterminer l'ensemble des forces et couples agissant sur la tige.
5. Déterminer l'ensemble des équations qui permettront de déterminer les réactions en I, J et A en fonction des coordonnées définies à la question 1.
6. Dans le cas où le frottement est nul, déterminer la/les équation(s) de mouvement.
7. Appliquer le théorème de Lagrange pour trouver la/les équations de mouvement

---

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html