Séance 9 (semaine du 17/11 au 21/11)

Lagrange (solide)

Formulaire

Lagrangien : $\boxed{L = T - V}$ avec $T = \sum \left(\frac{1}{2} m_i {v_{G_i}}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega}_i \overline{\overline{I}}_{G_i} \overline{\omega}_i \right)$

n coordonnée de Lagrange => n équation de Lagrange ($i = 1, ..., n$)

$\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$ avec $\delta \overline{r}_h = \sum_i \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$

Equation de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$ avec $Q_i = Q^*_{i(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel})} + Q_{i(\text{Force dérivant d'un potentiel})}$

Pour les forces dérivent d'un potentiel : $\delta\tau = -\delta V$

$$=> \underbrace{\sum_h \overline{F}_h . \delta \overline{r}_h = \sum_i \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i}_{\delta\tau} = -\underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i}_{\delta V} => \boxed{Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}}$$

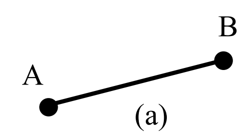
$$=> \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* => \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

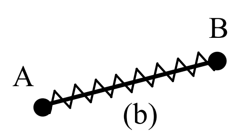
$$=> \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 => \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Rem : $\frac{\partial mx}{\partial x} = m$; $\frac{\partial mx}{\partial \dot{x}} = 0$; $\frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} = 0$; $\frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt} \frac{dt}{dx} = m \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

1. Deux points pesants A et B, de masse m chacun se déplacent sans frottement sur un plan horizontal Oxy.
Déterminer le nombre de degrés de liberté du système, choisir des coordonnées de lagrange, écrire la fonction Lagrangienne et déterminer le mouvement du système à partir des équation de Lagrange



(a)



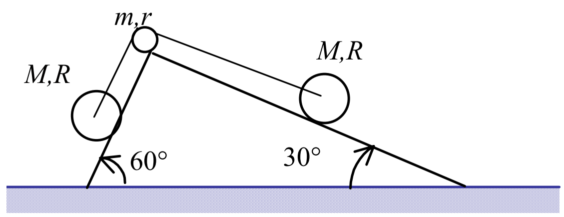
(b)

a) si A et B sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur l.
b) si A et B sont reliés par un ressort linéaire de masse négligeable, de coefficient de rappel k et de longueur libre l.

En quoi le mouvement trouvé dans le a) change-t-il

c) si les deux points sont remplacés par une tige de masse m et de longueur l ?
d) si le plan Oxy est vertical ?

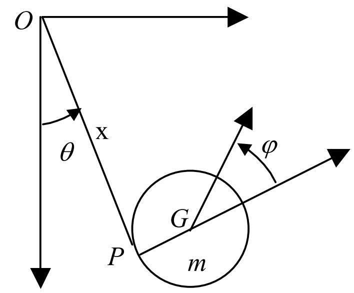
2. Deux roues cylindrique et homogène de rayon R, de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre faisant des angles de 30° et 60° avec l'horizontale.
Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique de masse *m* et de rayon *r*.
Déterminer la(les) équation(s) de mouvement ?



---

3. On considère un cylindre homogène de masse *m* et de rayon R autour duquel est enroulée une corde inextensible et sans masse. Le cylindre se déplace dans un plan vertical, en déroulant ou enroulant la corde, avec son axe de symétrie demeurant perpendiculaire à ce plan.
On demande d'écrire les équations du mouvement.
Pour la résolution, nous vous conseillons de considérer les paramètres suivant:

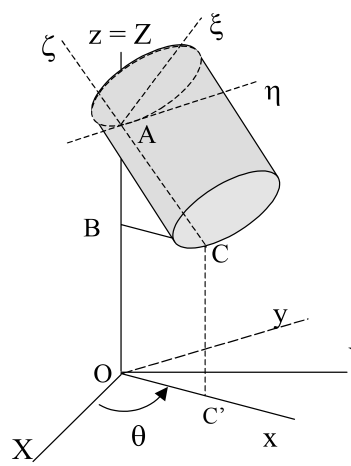
- θ : angle que fait la corde avec la verticale.
- φ : décrivant le mouvement de rotation du cylindre par rapport à la corde.
- *x* : distance *OP*.



---

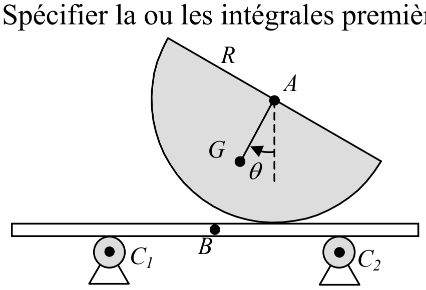
4. Un triangle isocèle, rectangle, ABC, tourne librement autour de son côté AB. (Glissière en B, articulation en A).
Le long de AC est soudé un cylindre de rayon R et de hauteur AC=*h*.
L'assemblage est tel que l'axe du cylindre se trouve dans le plan du triangle. La masse du cylindre est M, celle du triangle est négligeable. En utilisant comme variable θ et Z = OA, écrire les équations de Lagrange du cylindre, supposé pesant, et les intégrer aussi loin que possible.
Considérer les cas suivant :

1. A est fixe (rotation uniquement, Z=constante)
2. A est animé d'une vitesse $\dot{Z}\bar{1}_z$ (rotation et translation)



---

5. Le problème est plan (2-D). Le système est constitué de quatre corps : une bascule ayant la forme d'un demi-disque (de rayon *R*, de masse *M*) est posée sur une planche (de longueur *L*, de masse *m*) qui est supportée à son tour par deux roulettes (de rayon *r*, de masse *m*) donc les centres (C_1 et C_2) sont fixes. Les mouvements entre le demi-disque et la planche ainsi que le mouvement entre la planche et les roulettes se font sans glisser.
On demande d'écrire l'(es) équation(s) du mouvement du demi-disque.
Spécifier la ou les intégrales premières si elle(s) existent.



Demi-disque :

AG = a $\left(=\frac{4R}{3\pi}\right)$;

$I_{z_A} = \frac{MR^2}{2}$ axe sortant de la feuille par *A*

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html