

NOM, PRENOM :

NUMERO°:

Examen de mécanique rationnelle

1^{ière} session 08/01/2009 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que les brouillons**

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad ; \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : questions rapides (4 points)

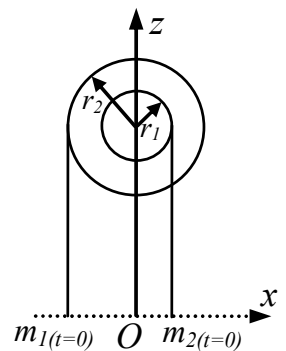
Sur un même axe sont calés deux tambours de rayon r_1 et r_2 (et de masse totale M) sur lesquels s'enroulent deux cordes de masse négligeable. Deux singes de masse m_1 et m_2 sont accrochés aux cordes. **Initialement**, ils se trouvent **en équilibre** à la même hauteur (O comme référence).

Ils se mettent ensuite à grimper le long de leurs cordes.

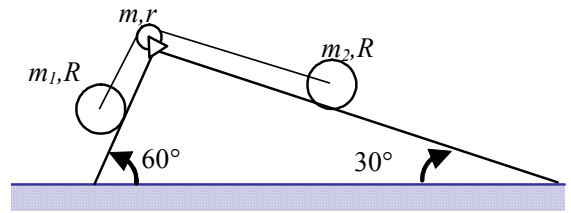
Déterminer les altitudes atteintes par les deux singes

1. en négligeant l'inertie des tambours
2. en supposant que le rayon de giration des tambours par rapport à leur axe de rotation vaut r_g et le singe de masse m_2 ne grimpe pas.

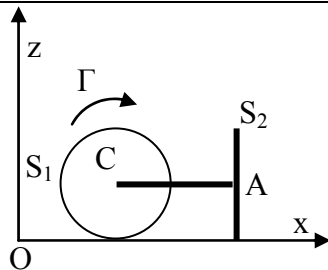
(2 points)



Deux roues cylindriques et homogènes de rayon R , de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre.
Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique (de masse m et de rayon r) liée au sol par une rotule.



Peut-on considérer la tension dans la corde comme constante ? Justifiez votre réponse en utilisant le théorème du moment cinétique sur la poulie. (1 point)



Mouvement d'un chasse-neige (1 point)

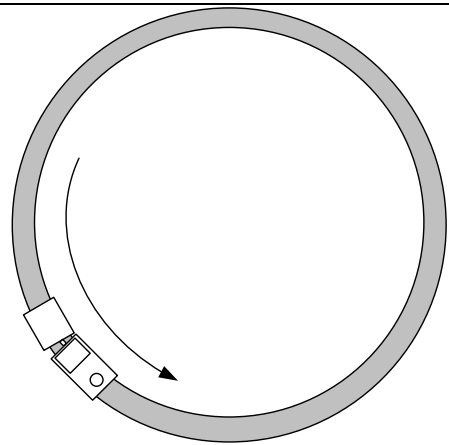
La figure schématise un chasse-neige se déplaçant sur une horizontale. Ce chasse-neige est constitué d'une roue S_1 (de centre C , de rayon R , de masse m répartie uniformément sur la circonférence par rapport à son axe) et d'une partie S_2 (en forme de T), indéformable de même masse m , modélisée par deux tiges de longueur $2R$, en mouvement de translation parallèlement à l'axe Ox . (C et A sont à la même hauteur)
Le moteur exerce sur la roue un couple de moment Γ autour de l'axe de la roue. La roue tourne sans frottement autour de son axe et roule sans glisser sur le sol.

Déterminer l'équation de mouvement de ce système

Question 2 : Gyroscope (2 points)

On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.

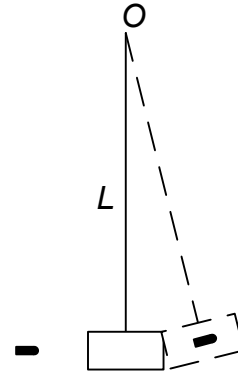
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.



Question 3 : Pendule balistique (4 points)

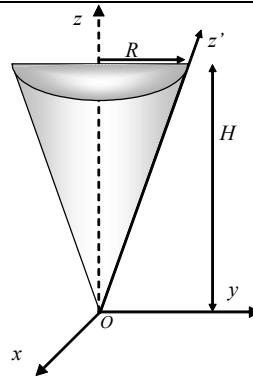
Dans un pendule de masse M , on envoie une balle de fusil (de masse m) qui s'y logera. La distance entre la fixation O et la direction de la vitesse de la balle est L . La distance L peut être posée comme équivalente à la distance entre le point O et le centre de masse du système constitué du pendule et de la balle. Son moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par O vaut I .

Déterminer la formule générale de la vitesse de la balle avant le choc en fonction de longueur de la déviation du pendule x .



Question 4 : Demi cône (3 points)

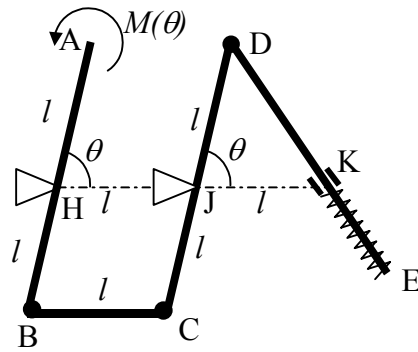
Déterminer le moment d'inertie $I_{z'}$ du demi-cône homogène par rapport à l'axe z' en utilisant le minimum de calculs d'intégrale et en sachant que la masse vaut : $M = \rho\pi \frac{R^2 H}{6}$



Question 5 : Système articulé (3 points)

Le mécanisme représenté ci-contre est situé dans un plan vertical ; les tiges homogènes AB , CD et DE ont une longueur $2l$ et une masse $2m$; la tige BC est homogène de longueur l et de masse m ; la tige DE peut coulisser dans le guide non fixe K ; le coefficient de rappel du ressort est k et sa longueur libre correspond à la position ($\theta=0$).

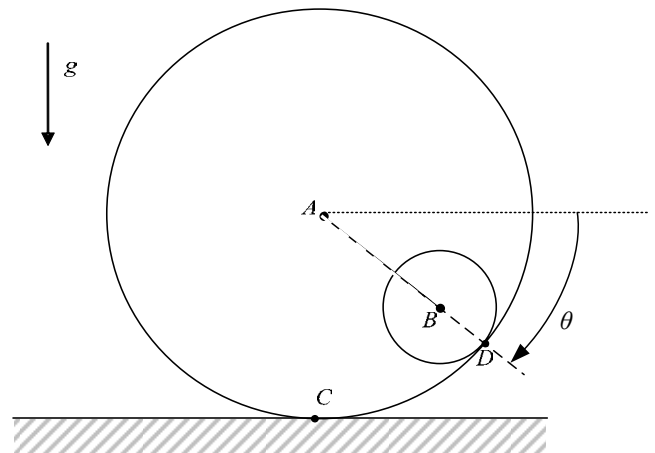
En négligeant tout frottement, déterminer la réaction de liaison en K en fonction de θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, m , l et g .



Question 6 : Le disque dans un anneau (4 points)

Le problème est plan (2-D). Le système, soumis à l'effet de la gravité, est composé de :

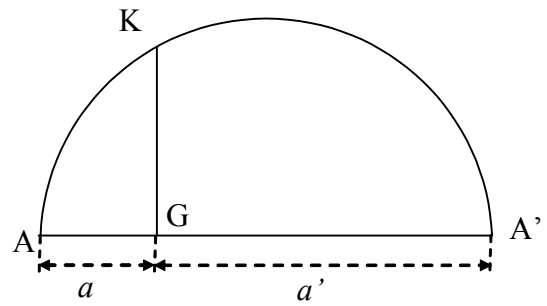
- Un anneau de rayon R et de centre A , qui roule sans glisser sur un sol plat (de masse M).
- Un disque de rayon a , de centre B , et de masse homogène m . En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser sur la piste de forme circulaire formée par l'intérieur de l'anneau.



1. Déterminer la ou les équations de mouvement finales en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Question 7 : Question bonus (1 point)

Dans le cas de la réduction d'un système à deux points conjugués, démontrer que GK vaut le rayon de giration r_g



NOM, PRENOM :NUMERO°:

BROUILLONS

NOM, PRENOM :NUMERO°:

BROUILLONS