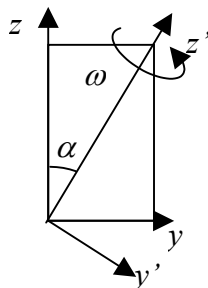


1. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\vec{R} = m\vec{v}_G$	$\vec{M}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$	$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$
1	$\vec{R} = -ma\omega \vec{1}_x$	$\vec{M}_O = -P_{xz} \omega \vec{1}_x - P_{yz} \omega \vec{1}_y + I_z \omega \vec{1}_z$ $= -mab\omega \vec{1}_y + \frac{4}{3} ma^2 \omega \vec{1}_z$	$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ $= \frac{2}{3} ma^2 \omega^2$
2	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O = -P_{xz} \omega \vec{1}_x - P_{yz} \omega \vec{1}_y + I_z \omega \vec{1}_z$ $= \frac{ma^2}{3} \omega \vec{1}_z$	$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ $= \frac{1}{6} ma^2 \omega^2$
3	$\vec{R} = -mb\omega \vec{1}_y$ $+ ma\omega \vec{1}_z$	$\vec{M}_O = +I_x \omega \vec{1}_x - P_{xy} \omega \vec{1}_y - P_{xz} \omega \vec{1}_z$ $= \frac{4}{3} m(a^2 + b^2) \omega \vec{1}_x$	$T = \frac{1}{2} I_x \omega^2$ $= \frac{2}{3} m(a^2 + b^2) \omega^2$
4	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O = \cancel{-P_{xy} \omega \vec{1}_x} + I_y \omega \vec{1}_y - P_{yz} \omega \vec{1}_z$ $\cancel{-P_{xz} \omega \vec{1}_x} - P_{yz} \omega \vec{1}_y + I_z \omega \vec{1}_z$ $\vec{M}_O = +\frac{4}{3} mb^2 \omega \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{1}_y - mab\omega \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{1}_y$ $+ \frac{4}{3} ma^2 \omega \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{1}_z - mab\omega \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{1}_z$ ou $\vec{M}_O = \cancel{-P_{x'z'} \omega \vec{1}_{x'}} - P_{y'z'} \omega \vec{1}_{y'} + I_z \omega \vec{1}_z$ $= \frac{1}{3} mab \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \omega \vec{1}_{y'} + \frac{2}{3} \frac{ma^2 b^2}{a^2 + b^2} \omega \vec{1}_z$ On aurait pu faire : $\vec{M}_O = \vec{M}_G$	$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ $= \frac{1}{3} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \omega^2$



(4)

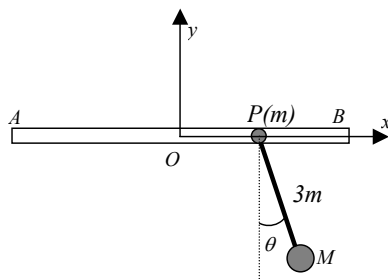
$$I_{z'} = \int y'^2 dm = \int (\cos \alpha y - \sin \alpha z)^2 dm = \cos^2 \alpha I_z + \sin^2 \alpha I_y - 2 \sin \alpha \cos \alpha P_{yz}$$

$$= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{4}{3} ma^2 + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{4}{3} mb^2 - 2 \frac{ab}{a^2 + b^2} mab = \frac{2}{3} \frac{ma^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$P_{y'z'} = \int y' z' dm = \int (\cos \alpha y - \sin \alpha z)(\sin \alpha y + \cos \alpha z) dm = \cos \alpha \sin \alpha (I_z - I_y) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) P_{yz}$$

$$= \frac{ab}{a^2 + b^2} \left(\frac{4}{3} ma^2 - \frac{4}{3} mb^2 \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) mab = \frac{1}{3} \frac{ma^3 b}{a^2 + b^2} - \frac{1}{3} \frac{mab^3}{a^2 + b^2}$$

2.

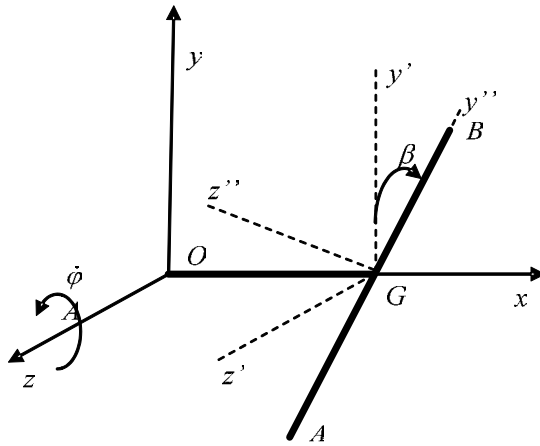


$$\vec{R} = \sum_i m \vec{v}_{G_i} = m \vec{v}_P \vec{1}_x + 3m \vec{v}_{G_{tige}} + M \vec{v}_{G_{balle}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = a \cos \omega t; \\ \vec{OG} = \left(a \cos \omega t + \frac{a}{2} \sin \theta \right) \vec{1}_x - \frac{a}{2} \cos \theta \vec{1}_y; \\ \vec{OG'} = \left(a \cos \omega t + (a + R) \sin \theta \right) \vec{1}_x - (a + R) \cos \theta \vec{1}_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \left[-ma \sin \omega t \cdot \omega \vec{1}_x \right] + \left[3m \left(\left(-a \sin \omega t \cdot \omega + \frac{a}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right) \vec{1}_x + \frac{a}{2} \sin \theta \dot{\theta} \vec{1}_y \right) \right] \\
&\quad + \left[M \left(\left(-a \sin \omega t \cdot \omega + (a+R) \cos \theta \dot{\theta} \right) \vec{1}_x + (a+R) \sin \theta \dot{\theta} \vec{1}_y \right) \right] \\
\Rightarrow \vec{R} &= (4m+M) \left[\left(-\omega a \sin \omega t + a \dot{\theta} \cos \theta \right) \vec{1}_x + A \dot{\theta} \sin \theta \vec{1}_y \right] \text{ avec } A = \frac{3m \frac{a}{2} + M(a+R)}{4m+M} \\
T &= \sum_i T_i = \left[\frac{1}{2} m v_{G_m}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{I}_{G_m} \cdot \vec{\omega}}_{=0 \text{ (masse ponct)}} \right] + \left[\frac{1}{2} (3m) v_{G_{tige}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{tige} \cdot \vec{I}_{G_{tige}} \cdot \vec{\omega}_{tige} \right] + \left[\frac{1}{2} M v_{G_{balle}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{balle} \cdot \vec{I}_{G_{balle}} \cdot \vec{\omega}_{balle} \right] \\
T &= \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} 3m v_{G_{tige}}^2 + \frac{1}{2} \frac{3ma}{12} \dot{\theta}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} M v_{G_{balle}}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M R^2 \dot{\theta}^2 \right] \\
\Rightarrow T &= \left(2m + \frac{M}{2} \right) a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \left[m a^2 + M(a+R)^2 + \frac{2}{5} M R^2 \right] \dot{\theta}^2 \\
&\quad - \left[\frac{3}{2} m a^2 + M a(a+R) \right] \omega \dot{\theta} \sin \omega t \cos \theta \\
\vec{M}_O &= \sum_i \vec{M}_{O,i} = \left[\underbrace{\vec{OP} \times m \vec{v}_P}_{=0 \text{ (pas de rot.)}} \right] + \left[\vec{OG}_{tige} \times m \vec{v}_{G_{tige}} + \vec{M}_G \right] + \left[\vec{OG}'_{balle} \times m \vec{v}_{G'_{balle}} + \vec{M}_{G'_{balle}} \right] \\
\vec{OG}_{tige} \times m \vec{v}_{G_{tige}} &= 3m \left(\frac{a^2}{4} \dot{\theta} + \frac{a^2}{2} (\cos \omega t \sin \theta \dot{\theta} - \cos \theta \sin \omega t \cdot \omega) \right) \vec{1}_z \Rightarrow \vec{M}_{G_{tige}} = \vec{I}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{3ma^2}{12} \dot{\theta} \vec{1}_z \\
\vec{OG}'_{balle} \times m \vec{v}_{G_{balle}} &= M(a+R) \left((a+R) \dot{\theta} + a (\cos \omega t \sin \theta \dot{\theta} - \cos \theta \sin \omega t \cdot \omega) \right) \vec{1}_z \Rightarrow \vec{M}_{G_{balle}} = \vec{I}_{G'} \cdot \vec{\omega} = \frac{2MR^2}{5} \dot{\theta} \vec{1}_z \\
\Rightarrow \vec{M}_O &= \left(\left(M(a+R)^2 + \frac{2MR^2}{5} + m a^2 \right) \dot{\theta} + \left[3m \frac{a^2}{2} + M a(a+R) \right] (\cos \omega t \sin \theta \dot{\theta} - \cos \theta \sin \omega t \cdot \omega) \right) \vec{1}_z
\end{aligned}$$

3.



dans les axes principaux $Gy''z''$ lié à la tige :

$$\vec{\omega} = -\dot{\beta} \vec{1}_x + \dot{\phi} \vec{1}_z = -\dot{\beta} \vec{1}_{x''} + \dot{\phi} \cos \beta \vec{1}_{z''} - \dot{\phi} \sin \beta \vec{1}_{y''}$$

1. Dans les axes Oxyz

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{I}_{O(S1+S2)} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L_1^2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} \cos \beta \sin \beta \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} \cos^2 \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_2 L_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{M}_O &= -\frac{m_2 L_2^2}{12} \dot{\beta} \vec{1}_x + \frac{m_2 L_2^2}{12} \frac{\sin 2\beta}{2} \dot{\phi} \vec{1}_y + \left(\left(\frac{m_1 L_1^2}{3} + m_2 L_1^2 \right) + \frac{m_2 L_2^2}{12} \cos^2 \beta \right) \dot{\phi} \vec{1}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{M_O}}{dt} &= \frac{d\overline{M_O}}{dt}_{xyz} + \overline{\omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{M_O} = \\ \frac{d\overline{M_O}}{dt} &= -\frac{m_2.L_2^2}{12}\ddot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\ddot{\phi}\overline{1}_y + \left(\left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2 \right) + \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2 \beta \right) \ddot{\phi}\overline{1}_z \\ &+ \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos 2\beta\dot{\beta}\dot{\phi}\overline{1}_y + \underbrace{\left(-\frac{m_2.L_2^2}{12}2\cos \beta \sin \beta \right) \dot{\phi}\dot{\beta}\overline{1}_z - \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\dot{\phi}\overline{1}_y - \frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\dot{\phi}^2\overline{1}_x}_{\overline{\omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{M_O}}\end{aligned}$$

2. Dans les axes Oxyz tournant avec les 2 tiges. (S=S1+S2)

$$\overline{M_O}_{(S1+S2)} = \overline{I_O}_{(S1+S2)} . \overline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1.L_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2.L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2.L_1^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ -\dot{\phi} \sin \beta \\ \dot{\phi} \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\ddot{\beta}\overline{1}_x - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2 \right) \ddot{\phi} \sin \beta \overline{1}_y + \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + \frac{m_2.L_2^2}{12} + m_2.L_1^2 \right) \ddot{\phi} \cos \beta \overline{1}_z}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{M_O}}{dt} &= \frac{d\overline{M_O}}{dt}_{x''y''z''} + \overline{\omega}_{x''y''z''/XYZ} \times \overline{M_O} = \\ &- \frac{m_2.L_2^2}{12}\ddot{\beta}\overline{1}_x - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2 \right) \ddot{\phi} \sin \beta \overline{1}_y - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2 \right) \ddot{\phi} \cos \beta \dot{\beta}\overline{1}_y \\ &+ \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + \frac{m_2.L_2^2}{12} + m_2.L_1^2 \right) \ddot{\phi} \cos \beta \overline{1}_z - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + \frac{m_2.L_2^2}{12} + m_2.L_1^2 \right) \dot{\phi} \sin \beta \dot{\beta}\overline{1}_z \\ &- \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}(\dot{\phi} \cos \beta \overline{1}_y + \dot{\phi} \sin \beta \overline{1}_z) - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2 \right) \dot{\phi} \sin \beta (-\dot{\beta}\overline{1}_z - \dot{\phi} \cos \beta \overline{1}_x) \\ &+ \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + \frac{m_2.L_2^2}{12} + m_2.L_1^2 \right) \dot{\phi} \cos \beta (\dot{\beta}\overline{1}_y - \dot{\phi} \sin \beta \overline{1}_x)\end{aligned}$$

3. en considérant séparément les deux solides.

$$\overline{M_O} = \overline{M_O}_{(S1)} + \overline{M_O}_{(S2)}$$

$$\overline{M_O}_{(S1)} = \overline{I_O} . \overline{\omega} = \begin{pmatrix} // & // & 0 \\ // & // & 0 \\ // & // & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{m_1.L_1^2}{3} \dot{\phi} \overline{1}_z$$

$$\overline{M_O}_{(S2)} = \overline{M_G} + \overline{OG} \times \overline{R} = \overline{I_G} . \overline{\omega_2} + m_2 (L_1 \overline{1}_x) \times L_1 \dot{\phi} \overline{1}_y$$

$$\overline{I_G} . \overline{\omega_2} = \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ -\dot{\phi} \sin \beta \\ \dot{\phi} \cos \beta \end{pmatrix} = -\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\beta} \overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\phi} \cos \beta \overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \overline{I_G} . \overline{\omega_2} = -\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\beta} \overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\phi} \cos \beta \sin \beta \overline{1}_y + \frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\phi} \cos \beta \cos \beta \overline{1}_z$$

$$\overline{M_O}_{(S2)} = -\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\beta} \overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24} \dot{\phi} \sin 2\beta \overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\phi} \cos^2 \beta + m_2.L_1^2 \dot{\phi} \right) \overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\beta} \overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24} \dot{\phi} \sin 2\beta \overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12} \dot{\phi} \cos^2 \beta + m_2.L_1^2 \dot{\phi} + \frac{m_1.L_1^2}{3} \dot{\phi} \right) \overline{1}_z$$

4.1

$$M = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H z dz \int_0^{\frac{R}{H}z} r dr = k \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2}{2} \frac{(H)^4}{4} \pi = k\pi \frac{R^2 H^2}{8}$$

$$I_z = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H z dz \int_0^{\frac{R}{H}z} r^3 dr = k \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^4}{4} \frac{(H)^6}{6} \pi = \frac{k\pi}{24} H^2 R^4 = \frac{MR^2}{3}$$

$$I_{xy} = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H z dz \int_0^{\frac{R}{H}z} (z^2) r dr = k\pi \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2}{2} \frac{H^6}{6} = \frac{2MH^2}{3}$$

$$I_{yz} = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H z dz \int_0^{\frac{R}{H}z} (r \cos \theta)^2 r dr = k \frac{\pi}{2} \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^4}{4} \frac{H^6}{6} = \frac{MR^2}{6} = I_{xz}$$

$$\Rightarrow I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3} = I_y;$$

$P_{xy} = P_{yz} = 0$ grace à l'intégration de y sur un domaine symétrique

$$P_{zx} = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H z dz \int_0^{\frac{R}{H}z} z (r \cos \theta) r dr = k 2 \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^3}{3} \frac{H^6}{6} = \frac{8M}{9\pi} RH$$

4.2 Trouvons les points P appartenant à l'axe z où les moments d'inertie (I_{xP} , I_{yP} , I_{zP}) sont égaux dans le repère $Px_P y_P z_P$

$$\underbrace{\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3}}_{I_x} - M \underbrace{\left(\frac{3H}{4}\right)^2}_{d(\text{axe } x, \text{axe } x_G)^2} + M \underbrace{d^2}_{d(\text{axe } x_G, \text{axe } x_P)^2} = \frac{MR^2}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ racines réelles } d = \pm \sqrt{\frac{R^2}{6} - \left(\frac{5}{48}\right) H^2} \text{ à condition que } \frac{H}{R} < \sqrt{\frac{8}{5}}$$

Il faut en plus que en ces points le produit d'inertie $P_{x_P z}$ soit nul aussi pour qu'on soit bien dans des axes principaux (ce qui ne semble pas être le cas)

\Rightarrow Il n'existe pas de point de l'axe z qui annule le produit d'inertie dans un système d'axe parallèle à xyz, car le décalage de l'axe en x est nul \Rightarrow

4.3 L'angle alpha est l'angle entre l'axe z et l'axe z'. Par la formule de changement d'axe ($\bar{I}_{z'} = (0; \sin \alpha; \cos \alpha)$)

$$I_{z'} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha \quad \text{où} \quad \cos^2 \alpha = \frac{H^2}{H^2 + R^2} \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha = \frac{R^2}{H^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow I_{z'} = \frac{MR^2}{3} \frac{H^2}{H^2 + R^2} + \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3} \right) \frac{R^2}{H^2 + R^2} = \frac{R^2}{H^2 + R^2} \left(MH^2 + \frac{MR^2}{6} \right)$$

4.4

$$\overline{M}_O = \overline{I}_O \cdot \overline{\omega} \text{ avec } \overline{\omega} = \omega \overline{l}_z, \Rightarrow \overline{M}_O = -P_{x'z'} \omega \overline{l}_x - P_{y'z'} \omega \overline{l}_y + I_z \omega \overline{l}_z$$

$$P_{y'z'} = \int (\cos \alpha y - \sin \alpha z)(\sin \alpha y + \cos \alpha z) dm = \cos \alpha \sin \alpha (I_z - I_y) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) P_{yz}$$

$$= \frac{HR}{H^2 + R^2} \left(\frac{MR^2}{3} - \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3} \right) \right) + \left(\frac{H^2 - R^2}{H^2 + R^2} \right) \underbrace{P_{yz}}_{\substack{\text{dom. sym} \\ \text{en } y \Rightarrow 0}} = \frac{HR}{H^2 + R^2} \left(\frac{MR^2}{6} - \frac{2MH^2}{3} \right)$$

$$P_{x'z'} = \int x(\sin \alpha y + \cos \alpha z) dm = \sin \alpha \cancel{P_{xy}} + \cos \alpha P_{xz} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \frac{8MRH}{9\pi}$$

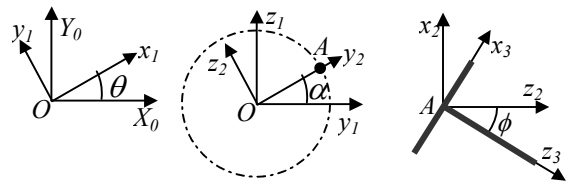
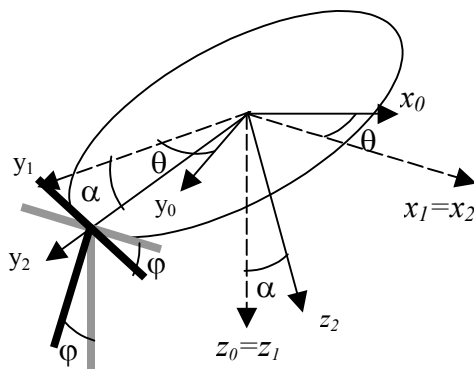
$$\Rightarrow \overline{M}_O = -\frac{H\omega}{\sqrt{H^2 + R^2}} \frac{8MRH}{9\pi} \overline{l}_x + \frac{HR}{H^2 + R^2} \left(\frac{MR^2}{6} - \frac{2MH^2}{3} \right) \omega \overline{l}_y + \frac{R^2}{H^2 + R^2} \left(MH^2 + \frac{MR^2}{6} \right) \omega \overline{l}_z$$

ou

$$\overline{M}_O = -P_{xz} \omega \cos \alpha \overline{l}_x + I_y \omega \sin \alpha \overline{l}_y + I_z \omega \cos \alpha \overline{l}_z$$

$$\overline{M}_O = -\frac{8MRH}{9\pi} \frac{H\omega}{\sqrt{H^2 + R^2}} \overline{l}_x + \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3} \right) \frac{R\omega}{\sqrt{H^2 + R^2}} \overline{l}_y + \frac{MR^2}{6} \frac{H\omega}{\sqrt{H^2 + R^2}} \overline{l}_z$$

5.

 \Rightarrow les vecteurs de Darboux :

$$\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1} ; \overline{\omega}_{R_2/R_0} = \overline{\omega}_{R_2/R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1}$$

$$\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1} - \dot{\phi} \overline{l}_{y_2}$$

 \Rightarrow les vecteurs vitesses angulaires des solides :

$$\overline{\omega}_{\text{Cercle}} = \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1} \text{ et } \overline{\omega}_T = \overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1} - \dot{\phi} \overline{l}_{y_2}$$

R_0 : Axe $Ox_0y_0z_0$ fixe. ; R_1 : Axe $Ox_1y_1z_1$ tourne autour de l'axe $Z_0 = z_1$ (θ)

R_2 : Axe $Ox_2y_2z_2$ incliné d'un angle α par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, avec z_2 lié à la tige, R_2 tourne autour de l'axe z_1 (ϕ)

R_3 : Axe $Gx_3y_3z_3$ liés au cube et tourne autour de z_1 (ϕ) et z_2 (ϕ)

$$T = T^{(C)} + T^{(BC)} + T^{(AD)} \text{ et } \overline{M}_O = \overline{M}_O^{(C)} + \overline{M}_O^{(BC)} + \overline{M}_O^{(AD)}$$

1. Dans les axes principaux du cercle (Repère R_2):

$$T^{(C)} = \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{I}_G \cdot \overline{\omega} = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \text{ avec } \begin{cases} A = B = \frac{MR^2}{2}; C = MR^2 \\ \overline{\omega}_T = \dot{\theta} \overline{l}_{z_1} = \sin \alpha \dot{\theta} \overline{l}_{y_2} + \cos \alpha \dot{\theta} \overline{l}_{z_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T^{(T)} = \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

$$\overline{M}_O = \overline{I}_O \cdot \overline{\omega} = Ap \overline{l}_{x_2} + Bq \overline{l}_{y_2} + Cr \overline{l}_{z_2} \overline{M}_O^{(T)} \Rightarrow \overline{M}_O =$$

2. Dans les axes principaux du T (des tiges soudées) (Repère R_3)

$$T^{(BC)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega} \underset{G=A}{=} \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} (A' p'^2 + B' q'^2 + C' r'^2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \overline{OA} = R \bar{l}_{y_2} \Rightarrow \bar{v}_A = R \frac{d\bar{l}_{y_2}}{dt} = R \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{l}_{y_2} = -R \dot{\theta} \cos \alpha \bar{l}_{x_2} \text{ avec } \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta} \bar{l}_{z_1} = \dot{\theta} (\sin \alpha \bar{l}_{y_2} + \cos \alpha \bar{l}_{z_2}) \\ \bar{\omega}_T = (\sin \alpha \dot{\theta} - \dot{\phi}) \bar{l}_{y_2} + \cos \alpha \dot{\theta} \bar{l}_{z_2} = (\sin \alpha \dot{\theta} - \dot{\phi}) \bar{l}_{y_3} + \cos \alpha \dot{\theta} (\sin \phi \bar{l}_{x_3} + \cos \phi \bar{l}_{z_3}) = p' \bar{l}_{x_3} + q' \bar{l}_{y_3} + r' \bar{l}_{z_3} \\ \Rightarrow p' = \sin \phi \cos \alpha \dot{\theta}; q' = \sin \alpha \dot{\theta} - \dot{\phi}; r' = \cos \phi \cos \alpha \dot{\theta} \text{ et } A' = 0; B' = C' = I_{x_3, A} = \frac{MR^2}{12} \end{cases}$$

$$T^{(BC)} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{12} (\sin \alpha \dot{\theta} - \dot{\phi})^2 + \frac{MR^2}{12} \cos^2 \phi \cos^2 \alpha \dot{\theta}^2 \right)$$

$$\bar{M}_O^{(BC)} = \bar{M}_A + \overline{OA} \times \bar{R} \text{ avec } \bar{M}_A = A' p' \bar{l}_{x_3} + B' q' \bar{l}_{y_3} + C' r' \bar{l}_{z_3} \text{ car } A = \text{Centre de masse } G$$

$$\bar{M}_O^{(BC)} = -\frac{MR^2}{12} (\sin \alpha \dot{\theta} - \dot{\phi}) \bar{l}_{y_3} + \frac{MR^2}{12} \cos \phi \cos \alpha \dot{\theta} \bar{l}_{z_3} - MR^2 \dot{\theta} \cos \alpha (\cos \theta \bar{l}_{x_3})$$

3. Dans les axes principaux du T (des tiges soudées) (Repère R_3)

$$T^{(AD)} = \frac{1}{2} m v_E^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_E \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} M v_E^2 + \frac{1}{2} (A'' p'^2 + B'' q'^2 + C'' r'^2) \text{ avec } E = \text{milieu de } AD$$

$$\bar{l}_{x_3} = \cos \psi \bar{l}_{z_2} - \sin \psi \bar{l}_{x_2}; \bar{l}_{x_2} = \cos \psi \bar{l}_{x_3} - \sin \psi \bar{l}_{z_3}; \bar{l}_{y_2} = \bar{l}_{y_3}; \bar{l}_{z_2} = \cos \psi \bar{l}_{z_3} + \sin \psi \bar{l}_{x_3};$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{v}_E = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AD} \times \overline{AE} = -R \cos \alpha \dot{\theta} \bar{l}_{x_2} + \left[(\dot{\psi} + \sin \alpha \dot{\theta}) \bar{l}_{y_2} + \cos \alpha \dot{\theta} \bar{l}_{z_2} \right] \times \frac{R}{2} \underbrace{(\cos \psi \bar{l}_{z_2} - \sin \psi \bar{l}_{x_2})}_{\bar{l}_{x_3}} \\ \bar{v}_E = -R \cos \alpha \cos \psi \dot{\theta} \bar{l}_{x_3} + R \cos \alpha \sin \psi \dot{\theta} \bar{l}_{z_3} + \left[(\dot{\psi} + \sin \alpha \dot{\theta}) \bar{l}_{y_3} + \cos \alpha \dot{\theta} \cos \psi \bar{l}_{z_3} + \cos \alpha \dot{\theta} \sin \psi \bar{l}_{x_3} \right] \times \frac{R}{2} \bar{l}_{z_3} \\ \bar{v}_E = + \left(\frac{R}{2} (\dot{\psi} + \sin \alpha \dot{\theta}) - R \cos \alpha \cos \psi \dot{\theta} \right) \bar{l}_{x_3} - \frac{R}{2} \cos \alpha \sin \psi \dot{\theta} \bar{l}_{y_3} + R \cos \alpha \sin \psi \dot{\theta} \bar{l}_{z_3} \\ A'' = B'' = \frac{MR^2}{12}; C'' = 0 \end{cases}$$

$$T^{(AD)} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + MR^2 \dot{\theta} \cos \alpha \cos \psi (\dot{\theta} \sin \alpha - \dot{\psi}) + \frac{MR^2}{6} (\dot{\theta} \sin \alpha - \dot{\psi})^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \psi$$

$$\bar{M}_O^{(AD)} = \bar{M}_E + \overline{OE} \times \bar{R} \text{ avec } \bar{M}_E = A'' p' \bar{l}_{x_3} + B'' q' \bar{l}_{y_3} + C'' r' \bar{l}_{z_3}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^{(AD)} &= \left[\frac{1}{3} MR^2 \dot{\theta} \cos \alpha \sin \psi + \frac{MR^2}{2} (\dot{\theta} \sin \alpha - \dot{\psi}) \sin \psi \right] \bar{l}_{x_2} \\ &+ \left[\frac{1}{3} MR^2 (\dot{\theta} \sin \alpha - \dot{\psi}) - \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \cos \alpha \cos \psi \right] \bar{l}_{y_2} \\ &+ \left[\frac{1}{3} MR^2 \dot{\theta} \cos \alpha \sin^2 \psi + MR^2 \dot{\theta} \cos \alpha - \frac{MR^2}{2} (\dot{\theta} \sin \alpha - \dot{\psi}) \cos \psi \right] \bar{l}_{z_2} \end{aligned}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>