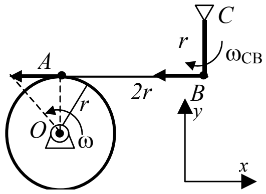
Animation en ligne : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/TP2_Ex3_Ex5.htm

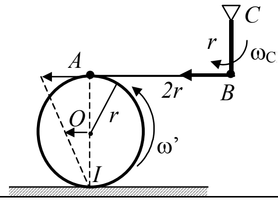
1.a $\left.\begin{array}{l}\bar{v}_A=\bar{v}_O+\bar{\omega}\times\overline{OA}=\bar{\omega}\times\overline{OA}=-\omega r\bar{1}_x\\ \bar{v}_B=\bar{v}_C+\bar{\omega}_{CB}\times\overline{CB}=-\omega_{CB}r\bar{1}_x\end{array}\right\}\Rightarrow \omega=\omega_{CB}$



Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de A et B doivent être égales.

1.b $\left.\begin{array}{l}\bar{v}_A=\bar{v}_I+\bar{\omega}'\times\overline{IA}=\bar{\omega}'\times\overline{IA}=-\omega' 2r\bar{1}_x\\ \bar{v}_B=\bar{v}_C+\bar{\omega}_{CB}\times\overline{CB}=-\omega_{BC}r\bar{1}_x\end{array}\right\}\Rightarrow 2\omega'=\omega_{CB}$

(avec I le point de contact du disque avec le sol)



2.1 Soit O_1 l'axe de la roue arrière et P_1 son point de contact avec le sol.

$\boxed{\bar{v}_{O_1}=\bar{v}_{P_1}+\bar{\omega}_1\times\overline{P_1O_1}}\Rightarrow v_{Caddie}1_{x'}=-\omega_1\bar{1}_z\times R\bar{1}_{y'}=R\omega_1 1_{x'}$ avec $\begin{cases}\bar{v}_{O_1}=\bar{v}_{Tapis}+\bar{v}_{Caddie}\\ \bar{v}_{P_1}=\bar{v}_{Tapis}\end{cases}$

$\Rightarrow\ \bar{\omega}_1=-\dfrac{v_{Caddie}}{R}\bar{1}_z$; $\bar{\varepsilon}_1=0$ car $\bar{\omega}_1=$ constante

2.2 Soit O_2 l'axe de la roue avant et β l'angle d'inclinaison du caddie par rapport à l'horizontale.

On a $\boxed{\bar{v}_{O_2}=\bar{v}_{O_1}+\bar{\omega}_{caddie}\times\overline{O_1O_2}}$; et si on projette la relation sur l'axe y, il vient :

$v_{O_2}\bar{1}_x=(v_t+v_c)(\cos\alpha\bar{1}_x+\sin\alpha\bar{1}_y)+(-\omega_c\bar{1}_z)\times L(\cos\beta\bar{1}_x+\sin\beta\bar{1}_y)$

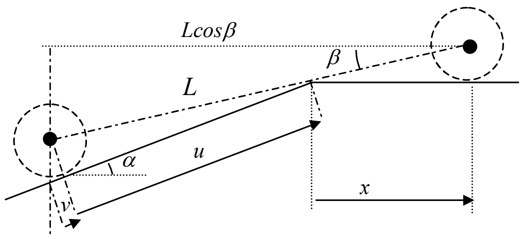
$\begin{cases}\left(v_{O_2}=(v_t+v_c)\cos\alpha+L\sin\beta\omega_c\ \ (1)\right)\\ 0=(v_t+v_c)\sin\alpha-L\cos\beta\omega_c\ \ (2)\end{cases}$ $(2)\Rightarrow \bar{\omega}_c=\dfrac{-1}{L\cos\beta}(v_t+v_c)\sin\alpha\bar{1}_z$

Pour trouver une relation donnant $\beta(x)$:

$L\cos\beta=x+(u+v)\cos\alpha$

avec $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}$; $\tan\gamma=\dfrac{u}{R}$; $\alpha+\gamma=\dfrac{\pi}{2}+\beta$

$\Rightarrow L\cos\beta=x+R\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right)\cos\alpha+R\tan\alpha\cos\alpha$

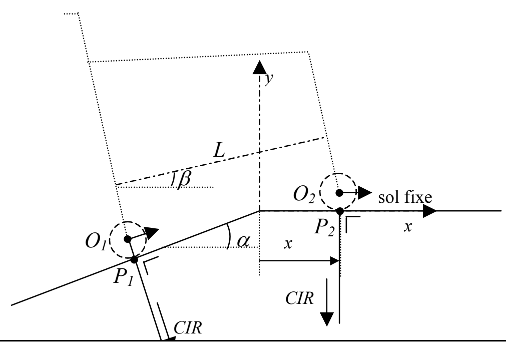


On résout cette équation pour trouver $\beta(x)$ (avec un calculateur) et on la remplace dans l'équation donnant la vitesse angulaire

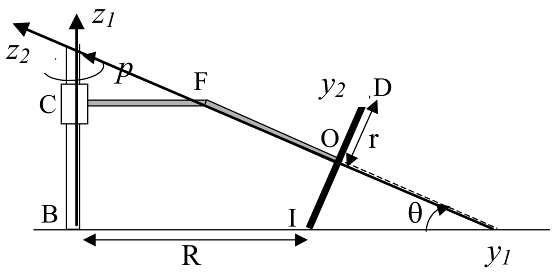
2.3 Le moins vite : Point de contact de la roue avec le tapis ($\bar{v}_{Tapis}$)

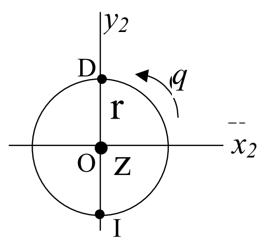
2.4 Le plus vite : Point diamétralement opposé au premier ($\bar{v}_{Tapis}+2\bar{v}_{Caddie}$)

2.5 (voir dessin) le CIR se trouve à l'intersection des perpendiculaires :
au tapis et passant par le point de contact de la roue arrière
au sol horizontal et passant par le point de contact de la roue avant.



3.





Pour la décomposition en système d'axes :
R_0 Repère fixe, R_1 Repère tournant avec p autour de BD (z_1), R_2 Repère incliné sur OF (z_2), OD (y_2), R_3 Repère tournant avec p autour de OF (z_2).

1.) Axe instantané de rotation : droite IQ avec I=Pt de contact entre le disque et le plan Q=intersection des droites OF et CB car OQ peut être considéré comme appartenant au solide étudié (tige+disque) et v_Q=0 car Q appartient à l'axe de rotation de Ω. Le point Q appartient virtuellement au solide. Remplacer la tige coudée par une tige OQ soudée au solide ne change rien au mouvement.

$$\overline{\omega} = \overline{p} + \overline{q} = p\cos\theta\,\overline{1}_y + (p\sin\theta + q)\,\overline{1}_z \quad \text{avec } \overline{\omega}_{rel} = \overline{p}$$

Condition de roulement sans glissement :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_I = 0 = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OI} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x + (rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x \\ \text{avec } \overline{OI} = -r\overline{1}_y ; \overline{v}_O = \overline{p}\times\overline{OC} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

Ou

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_{O\in tige} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_t \times \overline{CO} \quad \text{et} \quad \overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_I + \overline{\omega}_d \times \overline{IO} \\ \boxed{\overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_{O\in tige}} \Rightarrow \overline{\omega}_d \times \overline{IO} = \overline{\omega}_t \times \overline{CO} \Rightarrow -(rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

$$\overline{\omega}_d = p\cos\theta\,\overline{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r})\overline{1}_z$$ =vecteur libre constant dans les axes $Oxyz$.

Dériver un vecteur constant : produit vectoriel avec le vecteur de vitesse angulaire agissant sur le repère.

$$\boxed{\overline{\varepsilon}_d = \underbrace{\left.\frac{d\overline{\omega}_d}{dt}\right|_{xyz}}_{=0} + \overline{\Omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{\omega}_d} \quad \text{où } XYZ \text{ est le repère fixe}$$

$$\overline{\varepsilon}_d = \left(p(\sin\theta + \frac{R}{r})p\cos\theta - p\cos\theta . p\sin\theta \right)\overline{1}_x = \frac{R}{r}p^2\cos\theta\,\overline{1}_x$$

2.)

$$\overline{v}_D = \overline{\omega}_d \times \overline{ID} = \left(p\cos\theta\,\overline{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r})\overline{1}_z \right) \times 2r\,\overline{1}_y = -2rp(\sin\theta + \frac{R}{r})\ \overline{1}_x$$

Comme Q appartient à l'axe de CIR, on peut écrire :

$$\overline{a}_D = \overline{a}_Q + \overline{\varepsilon}_d \times \overline{QD} + \overline{\omega}_d \times \overline{v}_D \quad avec \quad \overline{a}_Q = 0 \quad (!\,\overline{a}_I \neq 0)$$

$$\overline{QD} = -\frac{1}{\cos\theta}\left(R + r\sin\theta\right)\overline{1}_z + r\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_D = -rp^2\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\sin^2\theta + 3\frac{R}{r}\sin\theta \right)\overline{1}_y + rp^2\left(3\frac{R}{r}\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta \right)\overline{1}_z$$

4. 1.). (rem : $\dot{\omega}_1 = 0$; $\dot{\omega}_3 = 0$)

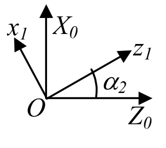
R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

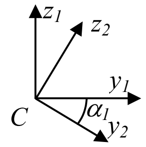
R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Y_0 = y_1$ ($\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \omega_2\,\overline{1}_{y_1}$)

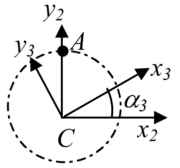
R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ tournant avec R_1 et autour de l'axe $x_1 = x_2$($\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \overline{\omega}_{R_2/R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\,\overline{1}_{y_1}$)

R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $z_2 = z_3$

($\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\,\overline{1}_{y_1} + \omega_3\,\overline{1}_{z_2} = \overline{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)







$$\overline{\omega}_{disque} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_3 \overline{1}_{z_2} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right) + \omega_3 \overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{\omega}_{disque}\Big|_{\text{instant t } t:\alpha_1=0} = -\omega_1 \overline{1}_{x_1} + \omega_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_3 \overline{1}_{z_1}$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{disque}} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \dot{\omega}_2 \underbrace{\left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{y_1}} + \omega_2\omega_1 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} +$$

$$+ \omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} - \omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} + \left(\omega_1\omega_3 \overline{1}_{y_2} + \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \overline{1}_{x_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 \cos\alpha_1\right) \overline{1}_{y_1} + \left(\omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_3 \sin\alpha_1\right) \overline{1}_{z_1}$$

$$=> \overline{\varepsilon}_{disque}\Big|_{\text{Instant } t:\alpha_1=0} = \omega_2\omega_3 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) \overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1 \overline{1}_{z_1}$$

autre méthode :

$$\overline{\varepsilon}_d = -\underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}}_{=0} \overline{1}_{x_2} - \omega_1 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{x_2}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{x_2}} + \underbrace{\frac{d\omega_2}{dt}}_{=\dot{\omega}_2} \overline{1}_{y_1} + \omega_2 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{y_1}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{1}_{y_1}} + \underbrace{\frac{d\omega_3}{dt}}_{=0} \overline{1}_{z_2} + \omega_3 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{z_2}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{z_2}}$$

$$\overline{\varepsilon}_d\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = -\omega_1\left(-\omega_2 \overline{1}_{z_1}\right) + \dot{\omega}_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_2(0) + \omega_3\left(\omega_1 \overline{1}_{y_2} + \omega_2 \underbrace{\cos\alpha_1}_{=1(\alpha_1=0)} \overline{1}_{x_2}\right) = \omega_2\omega_3 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) \overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1 \overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{v}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d \times \overline{CA} = -R\omega_3 \overline{1}_{x_1} - \left(b\omega_2 + R\omega_1\right) \overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{a}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{a}_C + \overline{\omega}_d \times \left(\overline{\omega}_d \times \overline{CA}\right) + \overline{\varepsilon}_d \times \overline{CA} = -\left(b\omega^2{}_2 + 2R\omega_1\omega_2\right) \overline{1}_{x_1} - R\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) \overline{1}_{y_1} + \left(2R\omega_2\omega_3 - b\dot{\omega}_2\right) \overline{1}_{z_1}$$

2.) Invariant scalaire $\boxed{\overline{v}_C.\overline{\omega} = -b\omega_2\omega_3}$

a) si $\omega_2 \neq 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: mouvement hélicoïdal instantané (HI) = mouvement de rotation et de translation de vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega} = -\omega_1 \overline{1}_x + \omega_2 \overline{1}_y + \omega_3 \overline{1}_z$. Axe HI est // à $\overline{\omega}$ passant par Q tel que

$$\boxed{\overline{CQ} = -\frac{\overline{\omega}\times\left(\overline{v}_Q - \overline{v}_C\right)}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\overline{v}_Q = \frac{\overline{\omega}.\overline{v}_C}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\overline{\omega}} = -b\omega_2\omega_3 \frac{\left(-\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3} \;=>\; \overline{CQ} = \frac{\left(-b\omega^2{}_2, -b\omega_1\omega_2, 0\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3}$$

b) si $\omega_2 = 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\omega}$ passant par *C* avec $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, 0, \omega_3\right)$.

<u>Cas part</u>. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation instantanée (en t) de $\overline{\omega} = \left(0, 0, \omega_3\right)$ autour de C_z
- si de plus $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\omega}$, même axe de rotation. ∀t)

c) si $\omega_3 = 0$ *et* $\omega_2 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\omega}$ avec $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, \omega_2, 0\right)$

<u>Cas part</u>. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation continue autour de *Oy*.
- Si en plus $\dot{\omega}_2 = 0$: Rotation. continue uniforme

d) si $\omega_2 = \omega_3 = 0$: Rotation instantanée de $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, 0, 0\right)$ autour de *Ox*.

<u>Cas part</u>. :

- si $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\omega}$, même axe)
- si $\omega_1 = 0$ Solide immobile à cet instant.

3) Si Q et Q' sont deux points distincts de l'axe hélicoïdal instantané ($\overline{v}_Q$ et $\overline{v}_{Q'}$ // $\overline{\omega}$)

$$\overline{a}_{Q'} = \overline{a}_Q + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) + \overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} \quad \text{avec } \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = \overline{\omega}\times\left(\overline{v}_{Q'} - \overline{v}_Q\right) = 0 \quad \text{car } \overline{\omega} // \overline{v}_{Q'} // \overline{v}_Q$$

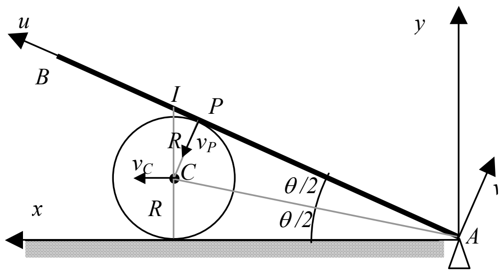
Pour que les points de l'axe hélicoïdal aient le même vecteur accélération, il faut $\overline{a}_{Q'} = \overline{a}_Q$ => $\overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} = 0$

comme nous avons : $\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = 0 => \overline{QQ'} = \dfrac{\overline{QQ'}.\overline{\omega}}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\overline{\omega}$ => $\overline{QQ'} // \overline{\omega}$

On peut donc vérifier la relation suivante $\overline{\varepsilon}\times\overline{\omega} = 0$

$$\begin{cases} \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\omega_3 - \omega_1\omega^2{}_2 = 0 \\ \omega_2\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) = 0 \\ \omega^2{}_2\omega_3 + \omega_1\left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) = 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_3 = 0 \\ \text{ou} \\ \omega_2 = 0 \;\; et \;\; \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 \end{cases}$$

5.



$$\bar{v}_C = \frac{d\overline{AC}}{dt} = \frac{d\left(R.\text{cotg}\frac{\theta}{2}\bar{1}_x + R\bar{1}_y\right)}{dt} = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\bar{1}_x$$

C.I.R. du disque : $\bar{v}_C \,//\, x$ et $\bar{v}_P \perp AP$ => I déterminé

$\bar{\omega}_{\text{disque}}$ dépend de $\dot{\theta}$ => pour déterminer $\bar{\omega}_{\text{disque}}(\dot{\theta})$,

il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P

(ds les axes liés à la tige $Auvw$ avec u // AB) : $\boxed{\bar{v}_{P\in\text{tige}} = \bar{v}_{P\in\text{disque}}}$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{v}_{P\in\text{tige}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_t \times \overline{AP} = R\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\bar{1}_v \\ \bar{v}_{P\in\text{disque}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d \times \overline{CP} = \left(-\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta - \omega_d R\right)\bar{1}_u + \frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta\,\bar{1}_v \quad \text{avec } \bar{\omega}_d = \omega_d\,\bar{1}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\bar{v}_{P\in\text{disque}} = \bar{v}_{P\in\text{tige}}\right)_{\bar{1}_u} \Rightarrow \omega_d = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\theta\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html