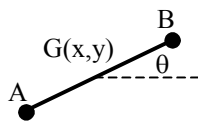


Simulation : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008_2009/seance9.htm3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ)Dans un plan horizontal ($V=0$) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide**.

1.a

$$L = T = \left(\frac{M}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_G \bar{\omega} \right)_{\text{solide}} = \frac{2m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z(A) + I_z(B) \end{pmatrix} \bar{\omega}$$

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4} \dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A) = I_z(B) + md^2 = m \frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

Or le moment d'inertie d'un point (masse ponctuelle) est nul, donc il ne reste que le terme de Steiner md^2 :

$$\begin{cases} x: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 \Rightarrow x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 \Rightarrow y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

$$\text{Rem : } \frac{\partial mx}{\partial x} = m; \quad \frac{\partial mx}{\partial \dot{x}} = 0; \quad \frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} = 0; \quad \frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt} \frac{dt}{dx} = m \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

1.b 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ, η)Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points**.

$$L = T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right) + \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx_B}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt} \right)^2 \right)$$

$$\text{avec } A(x_G - \frac{\eta}{2} \cos \theta; y_G - \frac{\eta}{2} \sin \theta) \text{ et } B(x_G + \frac{\eta}{2} \cos \theta; y_G + \frac{\eta}{2} \sin \theta)$$

$$\bar{v}_A \left(\dot{x} - \frac{\eta}{2} \cos \theta + \frac{\eta}{2} \sin \theta \dot{\theta}; \dot{y} - \frac{\eta}{2} \sin \theta - \frac{\eta}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right) \text{ et } \bar{v}_B \left(\dot{x} + \frac{\eta}{2} \cos \theta - \frac{\eta}{2} \sin \theta \dot{\theta}; \dot{y} + \frac{\eta}{2} \sin \theta + \frac{\eta}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right)$$

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4} (\dot{\eta}^2 + \eta^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{2} (\eta - l)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\eta^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \eta^2 \ddot{\theta} + 2\eta \dot{\eta} \dot{\theta} = 0 \text{ et } \frac{m}{2} \eta^2 \dot{\theta} = C \\ \eta: \frac{m}{2} \ddot{\eta} - \frac{m}{2} \eta \dot{\theta}^2 + k(\eta - l) = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \ddot{\eta} - \frac{2C^2}{m\eta^3} + k(\eta - l) = 0 \end{cases}$$

La 4^{ème} équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T + V = E_0$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) + \frac{m}{4} (2\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2 + 2\eta^2\ddot{\theta}) + k(\eta - l)\dot{\eta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \ddot{\eta} - m\eta \dot{\theta}^2 + k(\eta - l) = 0$$

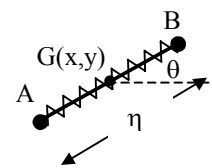
1.c

Si on a une tige de longueur l : $L = T = \frac{m}{2} (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\theta}^2 \Rightarrow$ Mouvement inchangé.

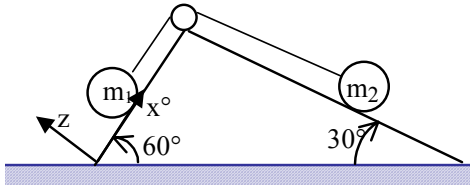
1.d

Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4} \dot{\theta}^2 - 2mgy \quad \text{avec } y: \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt + \dot{y}_0 \Rightarrow y = -g \frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0$$



2.



Condition de roulement sans glissement :

$$\dot{x} = R\dot{\phi}_1 ; \dot{z} = R\dot{\phi}_2 ; \dot{x} = r\dot{\theta} = \dot{z} \quad (1)$$

5 paramètres de positions :

4 équations liant ces paramètres dépendants

=> 1 ddl = 1 coordonnée généralisée

Toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

avec

$$T = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right) = \left(\frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1 R^2}{4} \dot{\phi}_1^2 \right) + \left(\frac{m_2}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_2 R^2}{4} \dot{\phi}_2^2 \right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4} \dot{\theta}^2 \right)$$

$$T = \left(\frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1 R^2}{4} \frac{\dot{x}^2}{R^2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_2 R^2}{4} \frac{\dot{z}^2}{R^2} \right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4} \frac{\dot{z}^2}{r^2} \right) = \frac{3}{4} \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{3} \right) \dot{x}^2$$

$$V = m_1 g x \sin 60 + m_2 g (L \sin 60 - z \sin 30) \quad \begin{matrix} \bar{\omega} \\ z = C - (L - x) \\ C = \text{longueur du cable} \end{matrix} \quad m_1 g x \frac{\sqrt{3}}{2} - m_2 g \frac{1}{2} x + \text{Const} \quad (\text{réf=Sol})$$

$$\Rightarrow [L = T - V] = \frac{3}{4} \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{3} \right) \dot{x}^2 - g x \left(\frac{\sqrt{3} m_1}{2} - \frac{m_2}{2} \right) + \text{Const}$$

$$\frac{1}{2} (3m_1 + 3m_2 + m) \ddot{x} + g \left(\frac{\sqrt{3} m_1}{2} - \frac{m_2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{(m_2 - \sqrt{3} m_1)}{(3m_1 + 3m_2 + m)} g$$

OU par la méthode des multiplieurs de Lagrange. 5 coordonnées généralisées et 1 ddl.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}$$

avec

$$T = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right) = \left(\frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1 R^2}{4} \dot{\phi}_1^2 \right) + \left(\frac{m_2}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_2 R^2}{4} \dot{\phi}_2^2 \right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4} \dot{\theta}^2 \right)$$

$$V = m_1 g x \sin 60 + m_2 g (L \sin 60 - z \sin 30) + \text{Const} \quad \begin{matrix} \bar{\omega} \\ z = C - (L - x) \end{matrix} \quad m_1 g x \frac{\sqrt{3}}{2} - m_2 g \frac{1}{2} x + \text{Const} \quad (\text{Réf=Sol})$$

$$\Rightarrow [L = T - V] = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1 R^2}{4} \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_2 R^2}{4} \dot{\phi}_2^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\theta}^2 - m_1 g x \frac{\sqrt{3}}{2} + m_2 g \frac{1}{2} z + \text{Const}$$

4 Contraintes : $\dot{x} = R\dot{\phi}_1 \Rightarrow \lambda_1 (\delta x - R\delta\phi_1 = 0)$; $\dot{z} = R\dot{\phi}_2 \Rightarrow \lambda_2 (\delta z - R\delta\phi_2 = 0)$; $\dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_3 (\delta x - r\delta\theta = 0)$;

$$\dot{z} = r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_4 (\delta z - r\delta\theta = 0)$$

=> 5 coordonnées généralisées => 5 Equations de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_1} : \frac{m_1 R^2}{2} \ddot{\phi}_1 = -R\lambda_1 \quad (1) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_2} : \frac{m_2 R^2}{2} \ddot{\phi}_2 = -R\lambda_2 \quad (2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} : m_1 \ddot{x} + g \frac{\sqrt{3} m_1}{2} = \lambda_1 + \lambda_3 \quad (3) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} : m_2 \ddot{z} - g \frac{m_2}{2} = \lambda_2 + \lambda_4 \quad (4) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} : \frac{mr^2}{2} \ddot{\theta} = -r\lambda_3 - r\lambda_4 \quad (5) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) : \lambda_1 = -\frac{m_1 R}{2} \ddot{\phi}_1 \\ (2) : \lambda_2 = -\frac{m_2 R}{2} \ddot{\phi}_2 \\ (3)+(1) : m_1 \ddot{x} + g \frac{\sqrt{3} m_1}{2} = -\frac{m_1 R}{2} \ddot{\phi}_1 + \lambda_3 \\ (4)+(2) : m_2 \ddot{z} - g \frac{m_2}{2} = -\frac{m_2 R}{2} \ddot{\phi}_2 + \lambda_4 \end{array} \right.$$

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow (5) : \frac{mr}{2} \ddot{\theta} = -m_1 \ddot{x} - g \frac{\sqrt{3} m_1}{2} - \frac{m_1 R}{2} \ddot{\phi}_1 - m_2 \ddot{z} + g \frac{m_2}{2} - \frac{m_2 R}{2} \ddot{\phi}_2$$

$$\Rightarrow mr\ddot{\theta} + 2m_1 \ddot{x} + m_1 R \ddot{\phi}_1 + 2m_2 \ddot{z} + m_2 R \ddot{\phi}_2 = gm_2 - g\sqrt{3}m_1$$

Si on fait les remplacements en fonction de x, grâce aux 4 equations de contraintes, on obtient :

$$m\ddot{x} + 2m_1 \ddot{x} + m_1 \ddot{x} + 2m_2 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} = gm_2 - g\sqrt{3}m_1 \Rightarrow (3m_1 + 3m_2 + m) \ddot{x} = (m_2 - \sqrt{3}m_1)g$$

3.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\bar{\omega} = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \bar{\mathbf{l}}_z; \quad \overline{OG} = x \bar{\mathbf{l}}_{x_1} + R \bar{\mathbf{l}}_{y_1} \Rightarrow \bar{v}_G = (\dot{x} - R\dot{\theta}) \bar{\mathbf{l}}_{x_1} + x\dot{\theta} \bar{\mathbf{l}}_{y_1}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_G \bar{\omega} = \frac{1}{2} m \left((\dot{x} - R\dot{\theta})^2 + x^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2$$

$$V = -mg(x \cos \theta - R \sin \theta)$$

$$\text{Condition de roulement sans glissement : } \bar{v}_{P \in \text{corde}} = \bar{v}_{P \in \text{disque}} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = -R\dot{\phi}}$$

avec

$$\text{où } \begin{cases} \bar{v}_{P \in \text{corde}} = x\dot{\theta} \bar{\mathbf{l}}_{y_1} \\ \bar{v}_{Q \in \text{disque}} = \frac{d(x \bar{\mathbf{l}}_{x_1} + R \bar{\mathbf{l}}_{y_1} + R \bar{\mathbf{l}}_{y_2})}{dt} = (\dot{x} - R\dot{\theta}) \bar{\mathbf{l}}_{x_1} + x\dot{\theta} \bar{\mathbf{l}}_{y_1} - R(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \bar{\mathbf{l}}_{x_2} \underset{\substack{\text{quand} \\ Q=P}}{=} (\dot{x} + R\dot{\phi}) \bar{\mathbf{l}}_{x_1} + x\dot{\theta} \bar{\mathbf{l}}_{y_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V} \underset{\dot{x} = -R\dot{\phi}}{=} \frac{1}{2} m \left((\dot{x} - R\dot{\theta})^2 + x^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + mg(x \cos \theta - R \sin \theta)$$

$$\begin{cases} x: m(\ddot{x} - R\ddot{\theta}) - \frac{mR}{2} \left(\ddot{\theta} - \frac{\ddot{x}}{R} \right) - mx\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta \Rightarrow \frac{3}{2} \ddot{x} - \frac{3}{2} R\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2 = g \cos \theta \quad \left(= \text{th } \bar{R} \Big|_x + \text{th } \bar{M}_G \Big|_x \right) \\ \theta: m \left(x^2 \ddot{\theta} + 2x\dot{x}\dot{\theta} - R(\ddot{x} - R\ddot{\theta}) \right) + \frac{mR^2}{2} \left(\ddot{\theta} - \frac{\ddot{x}}{R} \right) = -mgx \sin \theta - mgR \cos \theta \Rightarrow x\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} - R\dot{\theta}^2 = -g \sin \theta \\ \left(= \text{th } \bar{R} \Big|_y \right) \end{cases}$$

Condition initiale pour que la corde reste verticale :

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g$$

4. Les axes centraux principaux : // à $A\xi\eta\zeta$ en G. Les produits d'inertie sont tous nuls.

$$I_{\zeta G} = \frac{mR^2}{2}; \quad I_{\xi G} = I_{\eta G} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \text{ et } \bar{\omega} = \dot{\theta} \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{\mathbf{l}}_{\xi G} + \bar{\mathbf{l}}_{\zeta G}); \quad v_G^2 = \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 + \frac{1}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right)^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{2} \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \right) \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) \quad \text{et} \quad V = mgz + C$$

a) A fixe : $T = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2$ avec l constante \Rightarrow on a une rotation uniforme $\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$

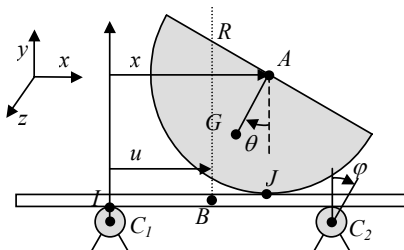
b) A mobile $\boxed{L = T - V} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + m \frac{l^2}{2} \dot{\theta}^2 - mgz$ (2 degrés de liberté)

$$z: \ddot{z} + g = 0 \Rightarrow z = -g \frac{t^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0 \text{ et } \theta: \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante} \Rightarrow \text{intégrale première} \right)$$

 $T + V = E_o$ est une deuxième intégrale première.

5.



Coordonnées généralisées :

 u : détermine la position du centre de masse de la planche (S_3) (suivant x) ϕ : détermine la rotation des deux rouleaux (S_1 et S_2)il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et la planche donc on peut écrire ϕ en fonction de u .

$$\bar{v}_{I \in C_1} = r\dot{\phi} \bar{\mathbf{l}}_x = \bar{v}_{I \in P} = \dot{u} \bar{\mathbf{l}}_x \Rightarrow \dot{\phi} = \dot{u} / r$$

 θ : détermine la rotation du demi-disque autour de A. (S_4) x : détermine la position de A (suivant x) \Rightarrow il n'y a pas de glissement entre le demi-disque et la planche donc on peut écrire x en fonction de u .

$$\bar{v}_{J \in S_3} = \dot{u} \bar{\mathbf{l}}_x = \bar{v}_{J \in S_4} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{S_4} \times \overline{AJ} = \dot{x} \bar{\mathbf{l}}_x - R\dot{\theta} \bar{\mathbf{l}}_x \Rightarrow \boxed{\dot{u} = \dot{x} - R\dot{\theta}}$$

Degré de liberté = 2. Les paramètres u et θ déterminent entièrement la position du demi-disque.
Calculons les équations du mouvement par Lagrange.

Considérons le système complet = {2 rouleaux (m) + planche (m) + demi-disque (M)}

$$T = T_{S_1} + T_{S_2} + T_{S_3} + T_{S_4}$$

$$T_{S_1} = \frac{1}{2} \bar{\omega}_{S_1} \cdot \bar{I}_{C_1} \cdot \bar{\omega}_{S_1} = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{m\dot{u}^2}{2} \quad (\text{avec } \bar{v}_{C_1} = 0);$$

$$T_{S_2} = T_{S_1} = \frac{1}{2} \bar{\omega}_{S_2} \cdot \bar{I}_{C_2} \cdot \bar{\omega}_{S_2} = \frac{1}{2} \frac{m\dot{u}^2}{2}; \quad (\text{avec } \bar{v}_{C_2} = 0);$$

$$T_{S_3} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{S_3} \cdot \bar{I}_B \cdot \bar{\omega}_{S_3} = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \quad (\text{avec } \bar{\omega}_{S_3} = 0)$$

$$T_{S_4} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{S_4} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega}_{S_4} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{\omega}_{S_4} = -\dot{\theta} \bar{I}_z \\ I_{z_G} = \frac{MR^2}{2} - Ma^2 \\ \overline{JG} = (-a \sin \theta) \bar{I}_x + (R - a \cos \theta) \bar{I}_y \\ \bar{v}_G = \bar{v}_J + \bar{\omega}_{S_4} \times \overline{JG} = (\dot{u} + R\dot{\theta} - a \cos \theta \dot{\theta}) \bar{I}_x + (a \sin \theta \dot{\theta}) \bar{I}_y \\ \text{ou } \bar{v}_G = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{S_4} \times \overline{AG} = \dot{x} \bar{I}_x + \dot{\theta} a \sin \theta \bar{I}_y - a \cos \theta \dot{\theta} \bar{I}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{S_4} = \frac{M}{2} (\dot{u}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{u} - 2a \cos \theta \dot{\theta}\dot{u} - 2a \cos \theta R \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$V = V_{S_1} + V_{S_2} + V_{S_3} + V_{S_4}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{S_1} = V_{S_2} = 0; \quad V_{S_3} = m g \\ V_{S_4} = (R - a \cos \theta) M g \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = C - a M g \cos \theta$$

$$\Rightarrow \overline{L = T - V} = \frac{1}{2} (2m + M) \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{3M}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma \cos \theta \dot{\theta}\dot{u} - Ma \cos \theta R \dot{\theta}^2 + a M g \cos \theta$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 :$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3M}{2} R^2 \dot{\theta} + MR\dot{u} - Ma \cos \theta \dot{\theta} - 2Ma \cos \theta R \dot{\theta} \right) - Ma \sin \theta \dot{\theta}\dot{u} - Ma \sin \theta R \dot{\theta}^2 + a M g \sin \theta = 0$$

$$\left(\frac{3M}{2} R^2 - 2Ma \cos \theta R \right) \ddot{\theta} + 2Ma \sin \theta R \dot{\theta}^2 + M(R - a \cos \theta) \ddot{u} + \cancel{Ma \sin \theta \dot{\theta}\dot{u}} - \cancel{Ma \sin \theta \dot{\theta}\dot{u}} - Ma \sin \theta R \dot{\theta}^2 + a M g \sin \theta = 0$$

$$MR \left(\frac{3R}{2} - 2a \cos \theta \right) \ddot{\theta} + M(R - a \cos \theta) \ddot{u} + MRa \sin \theta \dot{\theta}^2 + a M g \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 : \quad \frac{d}{dt} \left((2m + M) \dot{u} + MR\dot{\theta} - Ma \cos \theta \dot{\theta} \right) = 0$$

$$(2m + M) \ddot{u} + M(R - a \cos \theta) \ddot{\theta} + Ma \sin \theta \dot{\theta}^2 = 0$$

Intégrales premières :

$$\overline{T + V = E_0} : \quad \frac{1}{2} (2m + M) \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{3M}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma \cos \theta \dot{\theta}\dot{u} - Ma \cos \theta R \dot{\theta}^2 + C - a M g \cos \theta = E_0$$

$$\overline{\frac{\partial L}{\partial u} = 0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \text{Const} : (2m + M) \dot{u} + M(R - a \cos \theta) \dot{\theta} = \text{Const}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>