

Simulation : [http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008\\_2009/seance9.htm](http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008_2009/seance9.htm)

## 1. Identification des différents états du système :

 $t_1$  = avant le lancement de l'obus ( $\dot{x}_1 = 0$  ;  $x = 0$ ) ; $t_2$  = Au moment du lancement ( $\dot{x}_2$  = vitesse initiale du chariot ;  $x = 0$ ) ; $t_3$  = le chariot recule suite à la vitesse acquise lors du lancement de l'obus. ( $\dot{x}$  ;  $x$ ) ; $t_4$  = Le chariot est à l'arrêt après un recul  $X$  ( $\dot{x}_4 = 0$  ;  $x = X$ ) ;Après le départ de l'obus : Système {canon + wagon} = 1 solide entre le temps 2 et 4.Rem : l'axe des  $x$  est dirigé vers la gauche.

$$\frac{d}{dt} R_x = \sum F_{e,x} \Rightarrow M\ddot{x} = -F_{frot} \Rightarrow \int_{\dot{x}_2^2}^0 M \frac{d\dot{x}^2}{2} = \int_0^X -F_{frot} dx \Rightarrow \frac{M}{2} \dot{x}_2^2 = F_{frot} X$$

Avant le départ de l'obus Système {canon + wagon + obus} Il n'y a pas de forces extérieures suivant l'axe  $x$ .  
 $\Rightarrow$  il y a conservation de la résultante cinétique suivant l'axe  $x$ .

$$\frac{d}{dt} R_x = 0 \text{ jusqu'en } t_2 : R_{x_{t_1}} = R_{x_{t_2}} \Rightarrow R_{x_{t_1}} = 0 \text{ et } R_{x_{t_2}} = M\dot{x}_2 + mv \cos \theta \cos \phi \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{m}{M} v \cos \theta \cos \phi$$

$$\text{en } t=0 : X = \frac{M}{2F_{frot}} \dot{x}_2^2 = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{2MF_{frot}}$$

## 2. Par le théorème du moment cinétique : conservation du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_0 = 0 \Rightarrow \bar{M}_0^+ = \bar{M}_0^- \Rightarrow \frac{M_1 R^2}{2} \omega_1 - \frac{M_2 R^2}{2} \omega_2 = \frac{(M_1 + M_2) R^2}{2} \omega$$

$$\frac{M_2 R^2}{6} 4\omega_2 - \frac{M_2 R^2}{2} \omega_2 = \frac{(M_2 + 3M_2) R^2}{6} \omega \Rightarrow \omega = \frac{\omega_2}{4}$$

$$\text{Pourcentage de l'énergie cinétique : } \frac{T^+}{T^-} = \frac{\frac{(M_1 + M_2) R^2}{2} \omega^2}{\frac{M_1 R^2}{2} \omega_1^2 + \frac{M_2 R^2}{2} \omega_2^2} = \frac{1}{19.4} = 1,32\%$$

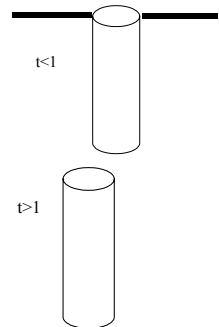
3. Pour le système {patineur} :  $\bar{m}_{e,O} = 0$  ;  $\bar{v}_G = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{M}_O = 0$  où  $\bar{M}_O = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$ 

$$t < 0 : \bar{\omega} = \omega_1 \bar{1}_z \text{ et } I_{z(t < 0)} = \frac{m_1 r_1^2}{2} + 2 \left( \underbrace{\frac{m_2 l_2^2}{12}}_{I_{zG}(\text{tige})} + m_2 \underbrace{\left( \frac{l_2}{2} + r_1 \right)^2}_{d_{zG}} \right)$$

$$t > 0 : \bar{\omega} = \omega_2 \bar{1}_z \text{ et } I_{z(t < 0)} = \frac{m_3 r_3^2}{2} \Rightarrow \bar{M}_O = \frac{m_3 r_3^2}{2} \omega_2 \bar{1}_z$$

$$\bar{M}_{O \ t < 0} = \bar{M}_{O \ t > 0} \Rightarrow \left[ \frac{m_1 r_1^2}{2} + 2 \left( \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 \left( \frac{l_2}{2} + r_1 \right)^2 \right) \right] \omega_1 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 4,89 \text{ t/s}$$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.



$$4. \quad \boxed{\sum \bar{F}_e = \frac{d\bar{R}}{dt}} \text{ et } \boxed{\sum \bar{m}_{e,O} = \frac{d\bar{M}_O}{dt} \text{ car } O \text{ est fixe}}$$

Changement d'axes :  $\begin{cases} \bar{l}_x = \cos \theta \bar{l}_x + \sin \theta \bar{l}_y \\ \bar{l}_y = -\sin \theta \bar{l}_x + \cos \theta \bar{l}_y \end{cases}$  où  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

En travaillant dans les axes Oxyz (R2) tournant avec la plaque :  $\bar{\omega} = \omega(\cos \theta \bar{l}_x + \sin \theta \bar{l}_y) = \bar{\omega}_{R2/R0} = \bar{\omega}_{R1/R0}$

$$\bar{R} = -Md\omega \bar{l}_z \Rightarrow \boxed{\bar{F}_e = \frac{d\bar{R}}{dt}} = \bar{\omega}_{R2/R0} \times \bar{R} = -Md\omega^2 (-\sin \theta \bar{l}_x + \cos \theta \bar{l}_y)$$

$$\bar{M}_O = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \cos \theta \\ -\omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = (I_x \omega \cos \theta - P_{xy} \omega \sin \theta) \bar{l}_x + (-P_{xy} \omega \cos \theta + I_y \omega \sin \theta) \bar{l}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{m}_{e,O} = \frac{d\bar{M}_O}{dt}} = \bar{\omega}_{R2/R0} \times \bar{M}_O = -(I_x \omega \cos \theta - P_{xy} \omega \sin \theta) \omega \sin \theta \bar{l}_z + (-P_{xy} \omega \cos \theta + I_y \omega \sin \theta) \omega \cos \theta \bar{l}_z$$

$$\Rightarrow \bar{m}_{e,O} = \left[ \cos \theta \sin \theta (I_y - I_x) + P_{xy} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right] \omega^2 \bar{l}_z \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{e,O} = \left[ \frac{2}{5} (I_y - I_x) - \frac{3}{5} P_{xy} \right] \omega^2 \bar{l}_z}$$

**OU** En travaillant directement dans les axes OXYZ (R1) tournant avec la plaque :  $\bar{\omega} = \omega \bar{l}_x$

$$\bar{R} = -Md\omega \bar{l}_z \Rightarrow \bar{F}_e = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\omega}_{R1/R0} \times \bar{R} = Md\omega^2 \bar{l}_y$$

$$\bar{M}_O = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_X & - & - \\ -P_{XY} & - & - \\ 0 & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_X \omega \bar{l}_x - P_{XY} \omega \bar{l}_y \Rightarrow \bar{m}_{e,O} = \frac{d\bar{M}_O}{dt} = \bar{\omega}_{R1/R0} \times \bar{M}_O \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{e,O} = -P_{XY} \omega^2 \bar{l}_z}$$

$$\text{où } P_{XY} = \sin \theta \cos \theta (-I_y + I_x) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) P_{xy} \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{e,O} = -\left( \frac{2}{5} (-I_y + I_x) + \frac{3}{5} P_{xy} \right) \omega^2 \bar{l}_z}$$

$$P_{XY} \text{ a été calculé à la séance 5. } \Rightarrow P_{XY} = \frac{2}{5} \left( -M \frac{H^2}{3} + M \frac{H^2}{12} \right) + \frac{3}{5} M \frac{H^2}{24} = \frac{-3MH^2}{40}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_e = Md\omega^2 \bar{l}_y = Md\omega^2 (-\sin \theta \bar{l}_x + \cos \theta \bar{l}_y)} \text{ et } \boxed{\bar{m}_{e,O} = -P_{XY} \omega^2 \bar{l}_z = \frac{3MH^2}{40} \omega^2 \bar{l}_z}$$

4. A l'équilibre dynamique :

2

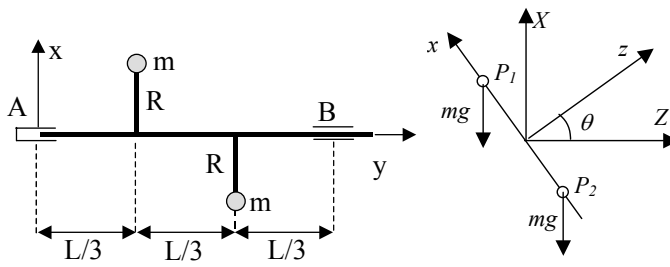
$$\boxed{\sum \bar{F}_e = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\omega}_{R1/R0} \times \bar{R} = R\omega \bar{l}_y = 0} \Rightarrow \bar{R} = (-Md + m_1 L - m_2 L) \omega \bar{l}_z = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = \frac{Md}{L}$$

$$\boxed{\sum \bar{m}_{e,O} = \frac{d\bar{M}_O}{dt} = \bar{\omega}_{R1/R0} \times \bar{M}_O = -P_{XY} \omega^2 \bar{l}_z = 0} \Rightarrow P_{XY,O} = 0$$

$$P_{XY,O} = \left[ \frac{-3MH^2}{40} \right]_S + \left[ -m_1 \frac{\sqrt{5}HL}{2} \right]_{m_1} + \left[ -m_2 \frac{\sqrt{5}HL}{2} \right]_{m_2} \text{ avec } \overline{OA}' = \left( -\frac{\sqrt{5}H}{2}, L, 0 \right); \overline{OD}' = \left( \frac{\sqrt{5}H}{2}, -L, 0 \right)$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) = \frac{2}{\sqrt{5}HL} \left[ \frac{-3MH^2}{40} \right] \\ m_2 = m_1 - \frac{Md}{L} \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}HL} \left[ \frac{-3MH^2}{40} \right] + \frac{Md}{2L} \text{ et } m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}HL} \left[ \frac{-3MH^2}{40} \right] - \frac{Md}{2L}$$

5.



Dans les axes  $Axyz$  liés au système,

réactions extérieures :

$$\begin{cases} \bar{R}_A(R_{A,x}(t), R_{A,y}(t), R_{A,z}(t)) \\ \bar{R}_B(R_{B,x}(t), 0, R_{B,z}(t)) \\ mg(-\cos\theta, 0, -\sin\theta) \text{ en } P_1(R, \frac{L}{3}, 0) \\ mg(-\cos\theta, 0, -\sin\theta) \text{ en } P_2(-R, \frac{2L}{3}, 0) \end{cases}$$

Recherche des réactions en B :

$$\frac{d\bar{M}_A}{dt} = m\bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \Rightarrow \frac{d\bar{M}_A}{dt} = \bar{m}_{e,A} \quad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\bar{M}_A}{dt} = -P_{xy}\omega \frac{d\bar{l}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2 \bar{l}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{M}_A = m\bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega} = \bar{I}_A \cdot \bar{\omega} \quad A \text{ fixe} \\ \bar{I}_A \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} -P_{xy} \\ I_y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega \bar{l}_x + I_y\omega \bar{l}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\frac{L}{3}\right) + \left(0 + m(-R)\frac{2L}{3}\right) = -m\frac{LR}{3} \\ \bar{m}_{e,A} = -LR_{B,x} \bar{l}_z + LR_{B,z} \bar{l}_x + mgR \sin\theta \bar{l}_y + mg\frac{L}{3} \cos\theta \bar{l}_z - mg\frac{L}{3} \sin\theta \bar{l}_x \\ \quad - mgR \sin\theta \bar{l}_y + mg\frac{2L}{3} \cos\theta \bar{l}_z - mg\frac{2L}{3} \sin\theta \bar{l}_x \\ \Rightarrow \bar{m}_{e,A} = (LR_{B,z} - mgL \sin\theta) \bar{l}_x + (mgL \cos\theta - LR_{B,x}) \bar{l}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x : LR_{B,z} - mgL \sin\theta = 0 \Rightarrow R_{B,z} = mg \sin\theta \\ z : mgL \cos\theta - LR_{B,x} = -m\frac{LR}{3}\omega^2 \quad \text{avec} \Rightarrow R_{B,x} = m\left(g \cos\theta + \frac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

Recherche des réactions en A :

$$\frac{d\bar{M}_B}{dt} = \bar{m}_{e,B} \quad B \text{ fixe}$$

$$\frac{d\bar{M}_B}{dt} = -P_{xy}\omega \frac{d\bar{l}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2 \bar{l}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{M}_B = \bar{I}_B \cdot \bar{\omega} = -P_{xy}\omega \bar{l}_x + I_y\omega \bar{l}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\left(-\frac{2L}{3}\right)\right) + \left(0 + m(-R)\left(-\frac{L}{3}\right)\right) = -m\frac{1}{3}LR \\ \bar{m}_{e,B} = -LR_{A,z} \bar{l}_x + LR_{A,x} \bar{l}_z + mgR \sin\theta \bar{l}_y - mg\frac{2L}{3} \cos\theta \bar{l}_z + mg\frac{2L}{3} \sin\theta \bar{l}_x \\ \quad - mgR \sin\theta \bar{l}_y - mg\frac{L}{3} \cos\theta \bar{l}_z + mg\frac{L}{3} \sin\theta \bar{l}_x \\ \Rightarrow \bar{m}_{e,B} = (-LR_{A,z} + mgL \sin\theta) \bar{l}_x + (-mgL \cos\theta + LR_{A,x}) \bar{l}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -LR_{A,z} + mgL \sin\theta = 0 \Rightarrow R_{A,z} = mg \sin\theta \\ -mgL \cos\theta + LR_{A,x} = -m\frac{LR}{3}\omega^2 \quad \text{avec} \Rightarrow R_{A,x} = m\left(g \cos\theta - \frac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

$$\text{Dans la position indiquée : } \theta = 0 \Rightarrow R_{A,z} = 0 \text{ et } R_{A,x} = m\left(g - \frac{R}{3}\omega^2\right)$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez [CFAO.Matlab@ulb.ac.be](mailto:CFAO.Matlab@ulb.ac.be)

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>