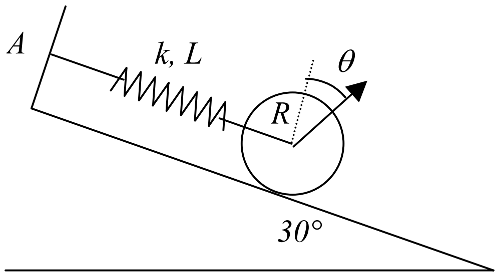
Simulation : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008_2009/seance8.htm

1.



Force en présence

Force du ressort : $\overline{F} = -k\left(x-L\right)\overline{1}_x$

Poids de la roue : $\overline{P} = mg\left(\sin\alpha\,\overline{1}_x - \cos\alpha\,\overline{1}_z\right)$

Réaction du sol : $\overline{R}_I = -T\,\overline{1}_x + N\,\overline{1}_z$

Théorème de la résultante cinétique {masse (m)} :

$\overline{R} = m\dot{x}\,\overline{1}_x$

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_{\overline{1}_x} = \left.\sum \overline{F}_e\right|_{\overline{1}_x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k\left(x-L\right) + mg\sin\alpha - T \quad (1)$$

Théorème de la résultante cinétique en G :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \cancel{m\overline{v}_G\times\overline{v}_G} + \sum\overline{m}_{e,G} = \sum\overline{m}_{e,G} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & I_y & \\ & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{pmatrix} = I_y\omega\,\overline{1}_y$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \boxed{I_y\dot{\omega}\,\overline{1}_y = \sum\overline{m}_{e,G}} \underset{I_y=\frac{MR^2}{2}}{\underbrace{\Rightarrow}} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = RT \quad (3)$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I nous donne :

$$\overline{v}_I = 0 = \overline{v}_G + \overline{\omega}\times\overline{GI} \Rightarrow \dot{x}\,\overline{1}_x + \dot{\theta}\,\overline{1}_y\times\left(-R\,\overline{1}_z\right) \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$(4)\to(3)\ :\ \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}}{R} = RT \Rightarrow T = \frac{m}{2}\ddot{x} \quad (5)$$

$$(5)\to(1)\ :\ m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{m}{2}\ddot{x} - k\left(x-L\right)$$

$$\boxed{\frac{3m}{2}\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\left(x-L\right)}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2g}{3}\sin\alpha + \frac{2k}{3m}L \quad (6)$$

$\Rightarrow$ Solution de l'équation différentielle non homogène

$$\text{SP}:\ x(t) = L + \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

$$\text{SGENH}:\ x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

A et B seront fixé par les conditions initiales et la pulsation est $\Omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$.

L'énergie cinétique est donnée par : $\boxed{T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 \underset{\dot{x}=R\dot{\theta}}{\underbrace{=}} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m}{4}\dot{x}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle : $V = \frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2 - mgx\sin\alpha$ avec le point A comme référence.

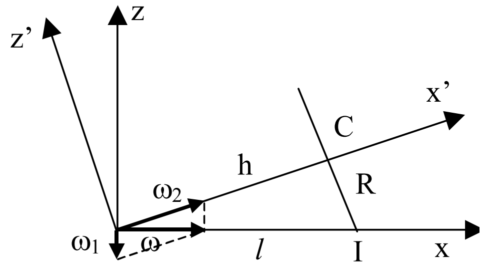
La force de frottement ne dérive pas d'un potentiel, mais sa puissance est nulle car il y a roulement sans glissement, la vitesse du point matériel sur lequel s'applique cette force est nulle.

L'énergie s'écrit donc : $E = T + V = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2 - mgx\sin\alpha$

$$\dot{E} = \frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + k\left(x-L\right)\dot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha = \left(\frac{3}{2}m\ddot{x} + k\left(x-L\right) - mg\sin\alpha\right)\dot{x} = 0 \quad (=6)$$

L'énergie mécanique totale est donc conservée. => $E = T + V$ est une intégrale première

2. Considérons les axes Ox'y'z' attaché au centre du disque tournant autour de l'axe z. ($l^2 = R^2 + h^2$)



<u>Les forces extérieures :</u> dans le repère *Oxyz*

Réaction en I du sol sur le disque : $\overline{R}_I\,(R_{Ix}, R_{Iy}, R_{Iz})$

Réaction en O du sol sur la tige : $\overline{R}_O\,(R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz})$

Poids : $m\overline{g} = (0, 0, -mg)$

<u>Théorème de la résultante cinétique :</u>

$$\overline{R} = m\overline{v}_G = -mh\cos\alpha\,\omega_1\,\overline{1}_{y'}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}\right)_z = \left(\overline{R}_e\right)_z \quad \Rightarrow \quad 0 = R_{Oz} + R_{Iz} - mg$$

<u>Le théorème du moment cinétique en O :</u>

Rem : le vecteur de Darboux du repère R' à utiliser pour dériver les axes du repère : $\overline{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_z$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overline{M_O}\right)_y \underset{O\text{ fixe}}{\underbrace{=}} \left(\overline{m}_{e,O}\right)_y}$$

avec

$$\overline{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_z \quad \text{avec} \quad tg\alpha = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R}{h} \Rightarrow \overline{\omega}_{R'/R_0} = -\,\omega.tg\alpha\,\overline{1}_z$$

$$\overline{M_O} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ 0 \\ -\omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'}\omega\cos\alpha \\ 0 \\ -I_{z'}\omega\sin\alpha \end{pmatrix} = I_{x'}\omega\cos\alpha\,\overline{1}_{x'} - I_{z'}\omega\sin\alpha\,\overline{1}_{z'} = M_{Ox'}\,\overline{1}_{x'} + M_{Oz'}\,\overline{1}_{z'}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = \overline{\omega}_{R'/R_0} \times \overline{M_O} = \left(\omega_1\sin\alpha M_{Oz'} - \omega_1\cos\alpha M_{Ox'}\right)\overline{1}_y$$

avec

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}};\ \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}};\ \omega_1 = \frac{R\omega}{h}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = -\omega^2\sin\alpha\left(I_{x'}\cos\alpha + I_{z'}\sin\alpha.tg\alpha\right)\overline{1}_y = -\omega^2\frac{R}{R^2+h^2}\left(I_{x'}.h + I_{z'}.\frac{R^2}{h}\right)\overline{1}_y$$

avec

$$I_{x'} = \frac{mR^2}{2};\ I_{y'} = I_{z'} = \underbrace{I_{tige}}_{=0(m=0)} + \underbrace{I_{disque}}_{=I_{diamètre}+M\left\|\overline{OC}\right\|^2} = m\frac{R^2}{4} + mh^2$$

$$\left(\overline{M_O} = \frac{mR^2}{2}\omega\cos\alpha\,\overline{1}_{x'} + \left(\frac{mR^2}{4} + mh^2\right)\left(-\omega\sin\alpha\right)\overline{1}_{z'}\right)$$

$$\left(\overline{m}_{e,O}\right)_y = mg\frac{h^2}{l} - lR_{Iz}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\overline{M_O}}{dt}\right)_y = \left(\overline{m}_{e,O}\right)_y} \Rightarrow -m\omega^2\frac{R^3}{h\left(R^2+h^2\right)}\left(\frac{3h^2}{2} + \frac{R^2}{4}\right) = mg\frac{h^2}{l} - lR_{Iz}$$

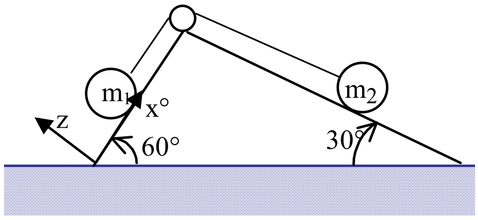
$$R_{Iz} = mg\frac{h^2}{l^2} + m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right) \quad \text{et} \quad R_{Oz} = mg - \left(mg\frac{h^2}{l^2} + m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right)\right)$$

$$R_{Iz} = mg\frac{h^2}{l^2} + m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right) > 0 \quad \text{pas de décollement en I}$$

$$R_{Oz} = mg\left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right) - m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right) \geq 0 \quad \text{pour garder le contact en O}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2_{\text{lim}} = g\frac{lh}{R\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right)}$$

3.



dans les axes liés à la pente inclinée à 60 °
(x vers la poulie et z perpendiculaire à la pente)

Le corps m_1, Variable (φ,x)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_1(F_1,0,0)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_1 g\sin 60,0,-m_1 g\cos 60)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I1}\left(-T_1,0,N_1\right)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1-T_1 \quad (1)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_1 g}{2}+N_1 \quad (2)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}_1=RT_1 \quad (3)\end{array}\right.$$

Le corps m_2, Variable (φ,z)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_2(0,0,F_2)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_2 g\cos 30,0,-m_2 g\sin 30)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I2}\left(N_2,0,T_2\right)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow -m_2\ddot{z}=-\dfrac{m_2 g}{2}+F_2+T_2 \quad (4)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}\sqrt{3}+N_2 \quad (5)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}_2=RT_2 \quad (6)\end{array}\right.$$

Le corps m , Variable (θ)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de les cordes : } \bar{F}(-F_1,0,-F_2)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-mg\cos 30,0,-mg\sin 30)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_C\left(X,0,Z\right)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{mg}{2}\sqrt{3}+X-F_1 \quad (7)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}+Z-F_2 \quad (8)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=r\left(F_2-F_1\right) \quad (9)\end{array}\right.$$

Condition de roulement sans glissement : $\dot{x}=R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z}=R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x}=r\dot{\theta}=\dot{z}$ (10)

$$(10)\text{−>}(3) : T_1=\frac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1=\frac{m_1}{2}\ddot{x} \; ; \; +(1) : m_1\ddot{x}=-\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1-\frac{m_1}{2}\ddot{x} \Rightarrow \frac{3}{2}m_1\ddot{x}=-\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1 \quad (11)$$

$$(10)\text{−>}(6) : T_2=\frac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2=\frac{m_2}{2}\ddot{z} \; ; \; +(4) : -m_2\ddot{z}=-\frac{m_2 g}{2}+F_2+\frac{m_2}{2}\ddot{z} \Rightarrow \frac{3}{2}m_2\ddot{z}=\frac{m_2 g}{2}-F_2 \quad (12)$$

$$(11)-(12) \text{ et } (\ddot{x}=\ddot{z}) : \frac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\frac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)+\left(F_1-F_2\right) \quad (13)$$

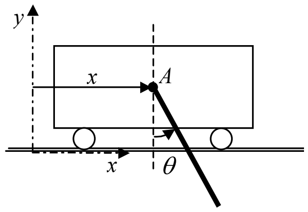
$$\left(F_2-F_1\right)\underset{(9)}{=}\frac{mr}{2}\ddot{\theta}\underset{(10)}{=}\frac{m}{2}\ddot{x} \text{ dans (13) => } \frac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\frac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)-\frac{m}{2}\ddot{x}$$

=> Equation du mouvment : $\ddot{x}=\dfrac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$

On trouve donc les tensions dans la corde :

$$F_1=\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+m_1\ddot{x}+T_1 \underbrace{=}_{T_1=\frac{m_1}{2}\ddot{x}} \frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}m_1\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

$$F_2=\frac{m_2 g}{2}-m_2\ddot{z}-T_2 \underbrace{=}_{T_2=\frac{m_2}{2}\ddot{z}} \frac{m_2 g}{2}-\frac{3}{2}m_2\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

4. 

Réactions : Réaction en A (X_A Y_A), le poids Mg, les réactions aux roues (2N).

Système = {Barre } :

Théorème de la résultante cinétique : $\dfrac{d\overline{R}}{dt} = \sum F_e$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AG} = \dot{x}\,\overline{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y\right)$$

$$m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y = X_A\,\overline{1}_x + \left(-mg + Y_A\right)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = m\left(\ddot{x} + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) & (1) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg & (2) \end{cases}$$

Pour supprimer la variable x de l'équation, il faut trouver une équation supplémentaire (liant X_A et x) Nous avons plusieurs possibilités :

- Le théorème de la résultante sur le chariot
- Le théorème du moment cinétique en A sur la barre
- Le théorème de la résultante sur l'ensemble
- Lagrange (qui sera vu dans les prochain TPs)

<u>Le théorème de la résultante</u> - **Système = {Chariot } :**

$$\left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_x = \left.\overline{F}_e\right|_x \Rightarrow \boxed{M\ddot{x} = -X_A} \quad (3)$$

dans (1) : $X_A = m\left(-\dfrac{X_A}{M} + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \Rightarrow X_A = \dfrac{mM}{M+m}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

<u>Le théorème du moment cinétique en A sur la barre</u> - **Système = {Barre} :**

$$\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \left(m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{x} + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\right)\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = m\overline{v}_G \times \overline{v}_A + \overline{m}_{e,A}$$

$$\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\dot{x} + m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{x} + \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\right)\overline{1}_z = -m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\dot{x}\,\overline{1}_z - \frac{L}{2}\sin\theta mg\,\overline{1}_z \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2L}{3\cos\theta}\ddot{\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}g \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{dans (1)} : X_A = m\left(\left(\frac{L}{2}\cos\theta - \frac{2L}{3\cos\theta}\right)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}g\right)$$

<u>Le théorème de la résultante sur l'ensemble</u> - **Système = {Chariot+Barre} :**

$\left.\overline{F}_e\right|_x = 0 \Rightarrow$ Conservation de la résultante cinétique suivant x

$$\left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_x = M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

dans (3) : $X_A = \dfrac{mM}{m+M}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

$$\Rightarrow \text{dans (1)} : X_A = m\left(\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = \frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

Par Lagrange, on verra que cela revient à ceci - **Système = {Chariot+Barre} :**

A exprimer en fonction de θ, θ et $\ddot{\theta}$. Cherchons la relation $\ddot{x} = f\left(\theta,\theta,\ddot{\theta}\right)$ = équation du mouvement

$$T = T_{chariot} + T_{Tige} = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot} + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige} \quad \text{et} \quad V = C - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ : \ \left(M+m\right)\ddot{x} + \dfrac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = 0 \quad = th\ \bar{R}\big|_x \text{ (barre+chariot)} \\ \qquad\qquad => \ \ddot{x} = -\dfrac{m}{M+m}\left(\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right) \quad \text{Equation du mouvement 1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \left(\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x}\right) + mg\dfrac{L}{2}\sin\theta = 0 \quad = th\ \bar{M}_A\big|_z \text{ (barre)} \quad \text{Equation du mouvement 2} \end{cases}$$

$$=> \boxed{\left(\frac{1}{3} + \frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta} - \frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\sin\theta = 0}$$

$$\boxed{=> X_A = \frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad \text{et} \quad Y_A = m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg}$$

5.1 2 degré de liberté :
3 coordonnées / solide = 9 coordonnées
- 3 rotule = 3*2 réactions de liaison
- 1 glissière = 1 réactions de liaison
=2 ddl

5.2 2 ddl : angle θ_1 et θ_2 définis respectivement entre les tiges OA et AB avec l'horizontale
Réaction de liaison en O : X_O et Y_O
Réaction de liaison en C : Y_C
Réaction interne en A : X_A et Y_A
Réaction interne en B : X_B et Y_B

5.3 Par les théorèmes généraux :
S1+S2+S3 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et Y_C
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , θ_2, Y_C et Y_O
S1 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1 : 1 équation liant θ_1 et X_A et Y_A
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , X_A et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , Y_A et Y_O
S1+S2 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1+S2 : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et Y_B
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 θ_2, X_B et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 θ_2, Y_B et Y_O

9 équations, 9 inconnues

5.4 Théorème de la résultante cinétique sur tout le système:

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \overline{F}_e \text{ avec } \begin{cases} \overline{R} = \sum_i \overline{R}_i \quad \text{avec} \quad \overline{R}_i = m\overline{v}_{G_i} \\ \text{et la contrainte : } L\sin\theta_1 + L\,\mathrm{sins}\,\theta_2 = L\sin\theta_3 \\ \overline{F}_e = \overline{R}_O + \overline{R}_C - 3m\overline{g} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{v}_{G1} = \overline{v}_O + \dot{\theta}_1 \overline{1}_z \times \overline{OG_1} = \frac{L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 \quad \text{avec} \quad \overline{OG_1} = \frac{L}{2}\left(\cos\theta_1 \overline{1}_x + \sin\theta_1 \overline{1}_y\right)$$

$$\overline{v}_{G2} = \overline{v}_A + \dot{\theta}_2 \overline{1}_z \times \overline{AG_2} = L\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2$$

$$\begin{aligned}\overline{v}_{G3} &= \overline{v}_B - \dot{\theta}_3 \overline{1}_z \times \overline{BG_3} \\ &= L\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + L\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y + \sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{R}\left(S_1 + S_2 + S_3\right) = m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y + \sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]$$

$$\begin{cases} m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(-\sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(+\sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right] = X_O \\ m\left[\frac{5L}{2}\left(+\cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_3\right] = Y_O + Y_C - 3mg \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 et θ_2 et Y_C

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = \overline{m}_{e,O} \text{ avec } \overline{M_O} = \sum_i \overline{M_{O_i}} \quad \text{où} \quad \overline{M_{O_i}} = \overline{M_{G_i}} + \overline{OG_i} \times \overline{R_i} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \overline{M_{G_i}} = \overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}_i \overline{1}_z \\ \overline{R_i} = m\overline{v}_{G_i} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{m}_{e,O} = \sum_i \overline{OG_i} \times m\overline{g} + \overline{OC} \times \overline{R}_C$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html