NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
2[ière] session 18/08/2009 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_{e}$$

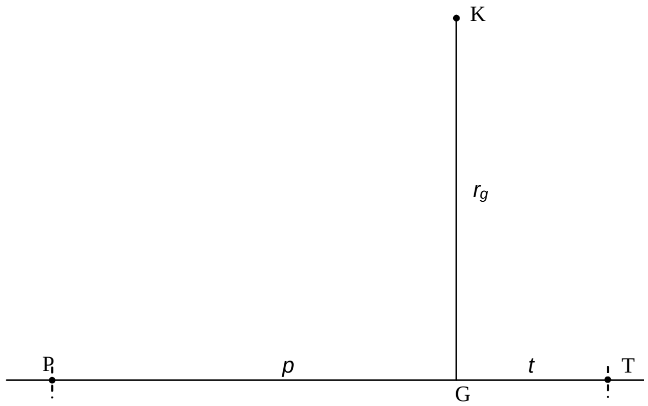
$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB}\times\overline{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

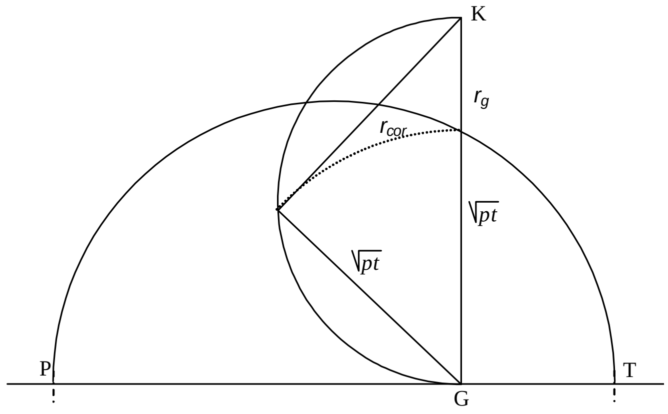
$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

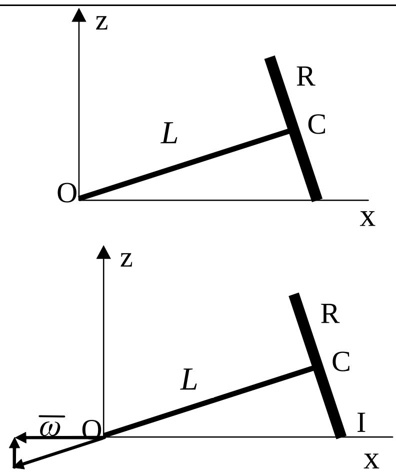
Question 1 : questions rapides (5 points)

Si l'on veut réduire un système à deux points P et T imposés, ceux-ci ne sont pas nécessairement conjugués. Pour déterminer le moment d'inertie correcteur, nous devons trouver le rayon de giration correcteur.
Déterminer graphiquement ce rayon correcteur sachant que $p\,.\,t\ \pm r_{cor}^2\ =\ r_g^2$ et que r_g (=GK) est déjà placé sur le graphique. (1 point)

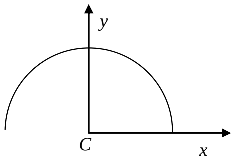




Si cette meule (tige *OC* de longueur *L* reliée par une rotule en *C* à un disque de rayon *R*) tourne autour de l'axe *z*, placer sur le dessin le vecteur vitesse angulaire du disque. (1 point)



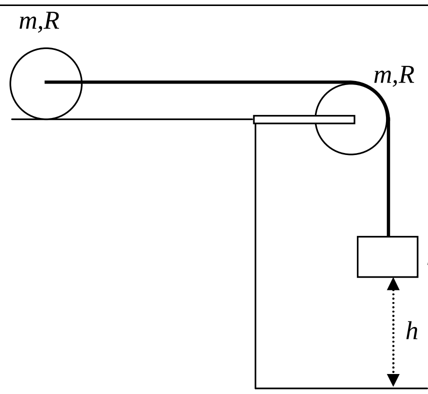
Déterminer le terme I_{xz} pour le demi-cercle de masse *m*, en un système d'axe placé en *C* sans calculer d'intégrale. (1 points)



$$I_z = mR^2 = 2I_x = I_{xz} + I_{yz} \quad ; \quad I_x = I_y = \frac{mR^2}{2} = \underbrace{I_{xy}}_{0 \text{ car } z=0} + I_{xz} \Rightarrow I_{xz} = \frac{mR^2}{2}$$

Un cylindre de masse m et de rayon R, roule sur un plan horizontal, entraîné par une masse m, à l'aide d'un fil sans masse et d'une roulette cylindrique de masse m et de rayon R.

Si à l'instant initial, la vitesse du système est nulle et la masse est suspendue à une hauteur h, déterminer la vitesse de cette masse quand elle touche le sol. (2 points)



Réactions : roue : $\overline{R_I} = T\overline{1_x} + N\overline{1_z}$; centre de la poulie : $\overline{R_C} = X\overline{1_x} + Y\overline{1_z}$

Vitesse de roulement sans glissement en *I* : $\overline{v_{I_1}} = 0 = \overline{v_C} + \overline{\omega} \times \overline{CI_1} = \dot{x}\overline{1_x} - R\dot{\theta}\overline{1_x} \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

Poulie : $\overline{\omega_p} = \dot{\theta}\overline{1_y}$ et roue : $\overline{\omega_r} = \dot{\theta}\overline{1_y}$

$$T = \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{m\dot{x}^2}{2}\right] = \left[\frac{2m\dot{x}^2}{2} + \frac{2mR^2}{4}\dot{\theta}^2\right] = \frac{3m\dot{x}^2}{2}$$

$$V = -mgx$$

$$L = \frac{3m\dot{x}^2}{2} + mgx \Rightarrow 3m\ddot{x} - mg = 0 \Rightarrow 3m\ddot{x} = mg \Rightarrow \frac{3}{2}\int_0^{v_f} d\dot{x}^2 = g\int_0^H dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}{v_f}^2 = gH \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

<u>Question 2</u> : question de théorie (2 points)

Déterminer l'équation générale des systèmes à masse ponctuelle variable.

Bilan des quantités de mouvement sachant que $\begin{cases} \text{la variation de masse en interne au système : } dm = -\mu dt \\ \text{la variation de masse avec l'extérieur : } \mu dt \text{ qui quitte le système} \\ \qquad \text{avec une vitesse relative } \overline{w} \end{cases}$

en $t : m\overline{v}$

en $t + dt : (\overline{v} + d\overline{v})(m + dm) + \mu(\overline{v} + \overline{w}).dt$

=> Bilan pendant dt : $(\overline{v} + d\overline{v})(m + dm) + \mu(\overline{v} + \overline{w}).dt - m\overline{v} = \overline{F}dt$

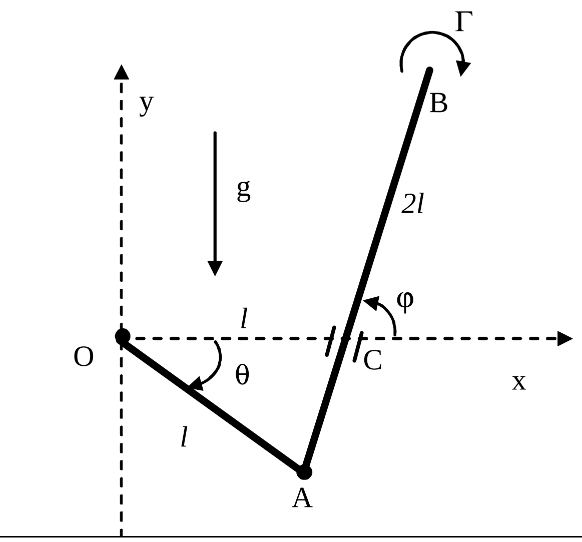
$$\left((\cancel{m} + dm)\overline{v} + \left(m + \cancel{\underbrace{dm}_{\text{terme du second ordre}}} \right) d\overline{v} \right) + \mu(\overline{v} + \overline{w}).dt - \cancel{m\overline{v}} = \overline{F}dt$$

$$\frac{(md\overline{v} + \overline{v}dm)}{dt} + \mu(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d(m\overline{v})}{dt} + \mu(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{F}}$$

Question 3 : Système de deux barres (4 points)

La tige *OA*, de longueur *L*, de masse *m*, peut osciller dans le plan vertical *Oxy* autour du point fixe *O*. La tige homogène *AB*, de masse *M* et de longueur 2*L*, est articulée à la première en *A* et coulisse (sans frottement) dans le guide *C*. Un couple de force constante, de moment Γ (voir figure) est appliqué à la tige *AB*.

Déterminer la réaction de liaison *C*, en fonction des données du problème ainsi que θ, $\dot\theta$ et $\ddot\theta$.



2 paramètre de position dépendant (θ, φ) : $\pi-\theta=2\varphi \Rightarrow 1\ ddl$

R_C (1 composante inconnue) : Th. mom. cinétique en O pour l'ensemble du système

$$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt}\left(\theta,\dot\theta,\ddot\theta\right) \underset{\bar{v}_O=0}{=} \bar{m}_{e,O}\left(\Gamma,\underline{\underline{R_C}},mg\right)}$$

$$\overline{AG_2}=L\left(\cos\varphi\bar{1}_x+\sin\varphi\bar{1}_y\right)\quad \text{et}\quad \bar{v}_A=-L\dot\theta\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_y\right);$$

$$\overline{OG_2}=L\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_y\right)+L\left(\cos\varphi\bar{1}_x+\sin\varphi\bar{1}_y\right) \underset{\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}{=} L\left(\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+L\left(\sin\theta+\cos\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y$$

$$\overline{v_{G_2}}=\overline{v_A}+\bar{\omega}\times\overline{AG}=-L\dot\theta\left(\sin\theta\bar{1}_x+\cos\theta\bar{1}_y\right)+L\dot\varphi\left(\cos\varphi\bar{1}_y-\sin\varphi\bar{1}_x\right) \underset{\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}{=} -L\dot\theta\left(\sin\theta\bar{1}_x+\cos\theta\bar{1}_y\right)-L\frac{\dot\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_y-\cos\frac{\theta}{2}\bar{1}_x\right)$$

$$\Rightarrow \overline{v_{G_2}}=L\dot\theta\left(-\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x-L\dot\theta\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y$$

$$\boxed{\bar{M}_O=\bar{M}_{O,OA}+\bar{M}_{O,AB}}$$

- $\bar{M}_{O,OA}=\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}=-\dfrac{mL^2}{3}\dot\theta\bar{1}_z$;
- $\bar{M}_{O,AB}=\bar{M}_{G_2,AB}+\overline{OG_2}\times\bar{R}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2m4L^2}{12}\dot\varphi-2m\left(\cos\theta+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\theta+\sin\dfrac{\theta}{2}\dfrac{1}{2}\right)L^2\dot\theta\\ -2m\left(-\sin\theta+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\theta+\cos\dfrac{\theta}{2}\dfrac{1}{2}\right)L^2\dot\theta\end{array}\right]\bar{1}_z$

$$=\left[\frac{2mL^2}{3}\dot\varphi+2m\left(\begin{array}{l}\underbrace{-\cos^2\theta-\sin^2\theta}_{-1}\underbrace{-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}_{-\frac{1}{2}}\\ \underbrace{-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}_{-\frac{3}{2}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}+\underbrace{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}_{\frac{3}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}\end{array}\right)L^2\dot\theta\right]\bar{1}_z$$

$$\bar{M}_{O,AB}=2m\left[-\frac{1}{6}+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]L^2\dot\theta\bar{1}_z=2m\left[-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]L^2\dot\theta\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow \bar{M}_O=\left[-2+\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]2mL^2\dot\theta\bar{1}_z$$

$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt} \underbrace{=}_{\bar{v}_O=0} \bar{m}_{e,O}}$ en projetant sur l'axe z : une seule inconnue (R_C)

$$\left[-2+\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]2mL^2\ddot{\theta}+m\left[\frac{3}{4}\cos\frac{\theta}{2}\right]L^2\dot{\theta}^2$$

$$=-\Gamma+LR_c\cos\varphi-\frac{L}{2}\cos\theta mg-\left(L\cos\theta+L\cos\varphi\right)2mg=-\Gamma+LR_c\sin\frac{\theta}{2}-\left(\frac{5}{2}\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}2\right)Lmg$$

=> R_C

Autre possibilité : Th. mom. cinétique en A pour la tige AB seule.

$$\boxed{\frac{d\overline{M_A}}{dt}\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) \underbrace{=}_{\bar{v}_O=0} \bar{m}_{e,A}\left(\Gamma,\underline{\underline{R_C}},mg\right)+2m\overline{v_G}\times\overline{v_A}}$$

$\overline{AG}=L\left(\cos\varphi\bar{1}_x+\sin\varphi\bar{1}_y\right)$ et $\overline{v_A}=-L\dot{\theta}\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_y\right)$;

$$\overline{v_{G_2}}=L\dot{\theta}\left(-\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x-L\dot{\theta}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y$$

$$\overline{M_A}=\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}+2m\overline{AG}\times\overline{v_A}=2m\frac{(2L)^2}{3}\dot{\varphi}\bar{1}_z-\dot{\theta}2mL^2\left(\underbrace{\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta}_{\sin(\theta-\varphi)}\right)\bar{1}_z \underbrace{=}_{\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}} \frac{8mL^2}{3}\dot{\varphi}\bar{1}_z+2mL^2\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_z$$

$$\left(\overline{v_G}\times\overline{v_A}\right)_{1_z}=-\left(-\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)L^2\dot{\theta}^2\sin\theta-\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)L^2\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$=-\frac{1}{2}L^2\dot{\theta}^2\left(\cos2\theta+\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta+\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta}_{\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}L^2\dot{\theta}^2\left(-\cos2\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{8mL^2}{3}\left(-\frac{\dot{\theta}}{2}\right)+2mL^2\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right)=-\Gamma-L\sin\frac{\theta}{2}2mg+\underbrace{\left(2L-\lambda\right)}_{2L\sin\frac{\theta}{2}}R_C+mL^2\dot{\theta}^2\left(-\cos2\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$R_C=\left(2L\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left(\begin{array}{l}-\frac{8mL^2}{3}\frac{\ddot{\theta}}{2}+2mL^2\sin\frac{\theta}{2}\ddot{\theta}+mL^2\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2+\Gamma+L\sin\frac{\theta}{2}2mg\\ \quad+2m\left(-\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)L^2\dot{\theta}^2\sin\theta+2m\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)L^2\dot{\theta}^2\cos\theta\end{array}\right)$$

Question 4 : Benne (5 points)

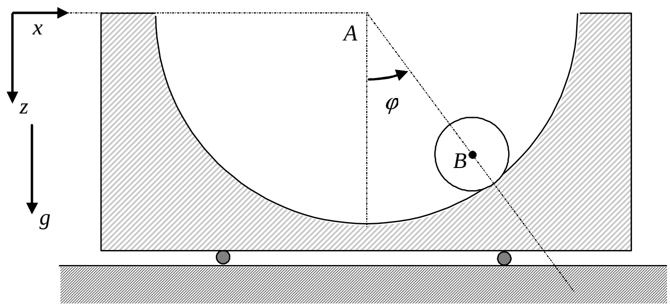
Le problème est plan (2-D). Le système, constitué de deux corps, est soumis à l'effet de la gravité suivant 3 :
(a) corps *n1* : benne supportée par deux rouleaux. Les rouleaux, de masse et d'inertie négligeables, permettent à la benne de "glisser" horizontalement sans frotter sur un sol plat. Le profil de la partie interne de la benne est circulaire de centre A

- masse M., inertie I
- distance $AB = L$

(b) corps *n2* : disque de rayon a et de centre B. En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser à l'intérieur de la benne

disque de masse homogène m

- disque de rayon a.



Déterminer la (ou les) équation(s) décrivant le mouvement par la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**.

2 degrés de liberté : x (position de A) et θ (rotation du disque)
Théorème de Lagrange en utilisant les multiplicateurs de Lagrange : Utiliser un nombre de coordonnées de Lagrange supérieur (x, θ et φ : position de B par rapport à A) au nombre de degrés de liberté du système.
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Théorème de Lagrange avec le Lagrangien et Q_i*=0

Benne : $S_1(M, I)$ R_1=repère lié à la benne

Disque : $S_2(m, R, \dot{\theta})$ R_3=repère lié au disque (tournant avec $\overline{\omega}_{R_3/R_0} = -\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}$)

R_2 = repère où z_2 est lié à AB (tournant avec $\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\varphi}\overline{1}_{y_2}$)

$\overline{OB} = x\overline{1}_{x_1} + L\overline{1}_{z_2}$ => $\overline{v}_B = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} = (\dot{x} + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\overline{1}_{x_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\overline{1}_{z_1}$

$$\begin{cases} T = T_{S_1} + T_{S_2} = \left[\dfrac{Mv_A^2}{2}\right]_{S_1} + \left[\dfrac{mv_B^2}{2} + \dfrac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2\right]_{S_2} = \left[\dfrac{M\dot{x}^2}{2}\right]_{S_1} + \left[\dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2\right]_{S_2} \\ V = C - Lmg\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + Lmg\cos\varphi = L(x, \varphi, \theta)$$

Contrainte de roulement sans glissement : I = point de contact entre S_1 et S_2

$\overline{v}_{I\in S_1} = \dot{x}\overline{1}_{x_1}$ et $\overline{v}_{I\in S_2} = \overline{v}_{B\in S_2} + \overline{\omega}_d \times \overline{BI}$ avec $\overline{\omega}_d = -\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}$

=> $\dot{x}\overline{1}_{x_1} = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} - \dot{\theta}a\overline{1}_{x_2}$ => $\boxed{L\dot{\varphi} - \dot{\theta}a = 0}$

==> $L\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0$ ce qui nous donne comme contrainte (ϕ_1) avec λ_1: $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}\delta\varphi + \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta = L\delta\varphi - a\delta\theta = 0$

Système de 4 équations à 4 inconnues :

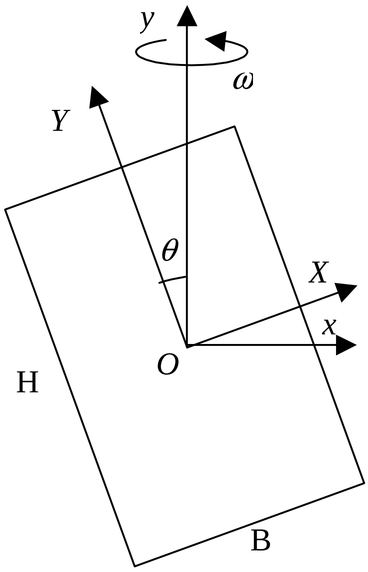
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right) = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - 0 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}\right) = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta} \Rightarrow \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = -\lambda_1 a \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}\right) = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\varphi} \Rightarrow mL^2\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi \cancel{- mL\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}} + \cancel{mL\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi} + mgL\sin\varphi = \lambda_1 L \\ +\text{contrainte : } L\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

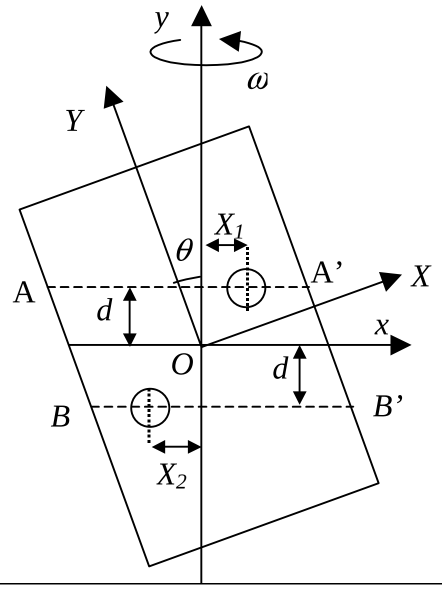
=> $\boxed{\lambda_1 = -\dfrac{ma}{2}\ddot{\theta} = -\dfrac{mL}{2}\ddot{\varphi}}$ => 2 équations de mouvement $\begin{cases} \dfrac{3mL^2}{2}\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 5 : Equilibrage de plaque (4 points)

Une plaque rectangulaire de base *B*, de hauteur *H* et de masse *M* tourne à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical *Oy*. Le repère *XYZ* lié à la plaque est centré en *O*, milieu de la plaque. Ses axes *OX* et *OY* sont paralléles aux côtés de la plaque, l'axe *OZ* étant perpendiculaire à la plaque (cf. figure de gauche). L'axe de rotation *Oy* fait un angle θ par rapport à l'axe *OY* , le repére *Oxyz* étant également lié à la plaque (*Oz* est identique *OZ* et *Ox* est perpendiculaire *Oy* et se trouve dans le plan de la plaque).





On veut équilibrer la plaque statiquement et dynamiquement simplement en perçant deux trous circulaire de rayon *r* (cf. figure de droite). Les deux trous seront percés en deux point P_1 et *P2* :

- Le point P_1 sera placé quelque part sur la ligne *AA'*, qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et située à une distance *d* de l'axe *Ox*.
- Le point P_2 sera placé quelque part sur la ligne *BB'*, située symétriquement à la ligne *AA'* par rapport à l'axe *Ox*.

Si les coordonnées des deux points P_1 et P_2 dans le repére *Oxy* sont (X_1; *d*) pour P_1 et (-X_2; -*d*) pour P_2, **déterminer** X_1 et X_2 pour que la plaque soit parfaitement **équilibrée** (en annulant la somme des moments extérieurs en statique et en dynamique).

A l'équilibre statique : $\boxed{\sum \overline{m}_{e,Oz}} = -\left(-\rho\pi r^2 g X_1\right) - \left(-\rho\pi r^2 g X_2\right) = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2$

A l'équilibre dynamique $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = 0}$

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} - & -P_{xy} & - \\ - & I_y & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = d\,\frac{-P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = P_{xy}\omega^2\overline{1}_z \Rightarrow \boxed{P_{xy} = 0}$$

$$\Rightarrow P_{xy} = P_{xy,plaque} - P_{xy,r1} - P_{xy,r2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \begin{cases} \overline{1}_x = \cos\theta\overline{1}_X - \sin\theta\overline{1}_Y \\ \overline{1}_y = \sin\theta\overline{1}_X + \cos\theta\overline{1}_Y \end{cases} \quad \text{avec} \quad I_X = \frac{mH^2}{12} \quad \text{et} \quad I_Y = \frac{mB^2}{12} \\ P_{xy,plaque} = \sin\theta\cos\theta\left(I_Y - I_X\right) = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$P_{xy} = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2} - \left(0 + \rho\pi r^2 X_1 d\right) - \left(0 - \rho\pi r^2 X_2 d\right) = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{m}{48}\,\frac{\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta}{\rho\pi r^2 d}$$

BROUILLONS

BROUILLONS