

Animation en ligne : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/TP3_Ex1_Ex2.htm

1. 2 degré de liberté $\{x, \theta\}$

Coordonnées $\{x, \alpha, \beta, \theta\}$

$$\bar{\omega}_{\text{cercle } S_1} = \dot{\alpha} \bar{l}_z; \quad \bar{\omega}_{\text{disque } S_2} = \dot{\beta} \bar{l}_z; \quad \bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \bar{l}_z$$

Repère xyz fixe ; Repère $x_1y_1z_1$ lié à S_1 ; Repère $x_2y_2z_2$ lié à AB ; Repère $x_3y_3z_3$ lié à S_2

Condition de roulement sans glissement en D point

de contact entre S_1 et S_2 : $\bar{v}_{D \in S_1} = \bar{v}_{D \in S_2}$

$$\begin{cases} \bar{v}_{D \in S_1} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AD} = \dot{x} \bar{l}_x + R \dot{\alpha} \bar{l}_{y_2} \\ \bar{v}_{D \in S_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{BD} = \dot{x} \bar{l}_x + (R-a) \dot{\theta} \bar{l}_{y_2} + a \dot{\beta} \bar{l}_{y_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (R-a) \dot{\theta} + a \dot{\beta} = R \dot{\alpha}$$

Condition de roulement sans glissement en I point de contact entre S_1 et le sol : $\bar{v}_{I \in \text{Sol}} = \bar{v}_{I \in S_1}$

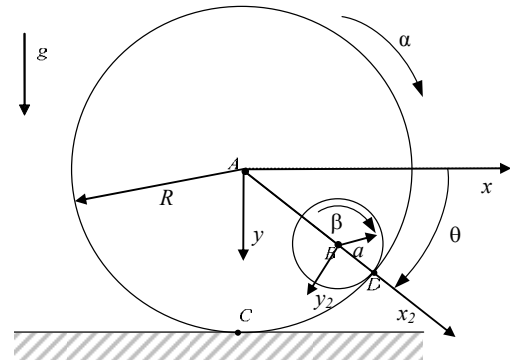
$$\Rightarrow 0 = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AI} = \dot{x} \bar{l}_x - R \dot{\alpha} \bar{l}_x \Rightarrow \dot{x} = R \dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\omega}_{\text{cercle } S_1} = \frac{\dot{x}}{R} \bar{l}_z; \quad \bar{\omega}_{\text{disque } S_2} = \frac{\dot{x} - (R-a) \dot{\theta}}{a} \bar{l}_z; \quad \bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \bar{l}_z}$$

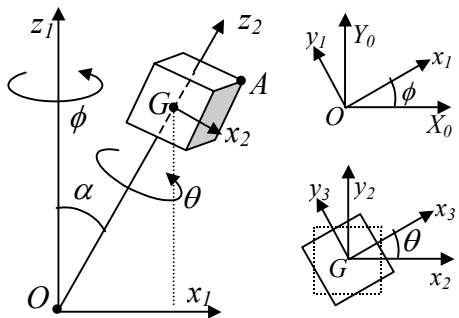
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AD} \times \overline{AB} \Rightarrow \bar{v}_B = \dot{x} \bar{l}_x + (R-a) \dot{\theta} \bar{l}_{y_2} = \dot{x} \bar{l}_x + (R-a) \dot{\theta} (-\sin \theta \bar{l}_x + \cos \theta \bar{l}_y)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega}_{AB} \times (\bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB}) + \bar{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} = \ddot{x} \bar{l}_x + (R-a) \ddot{\theta} \bar{l}_{y_2} - (R-a) \dot{\theta}^2 \bar{l}_{x_2}$$

$$\text{Ou } \bar{v}_B = \bar{v}_D + \bar{\omega}_2 \times \overline{DB} \Rightarrow \bar{v}_B = \dot{x} \bar{l}_x + R \dot{\alpha} \bar{l}_{y_2} - a \dot{\beta} \bar{l}_{y_2} = \dot{x} \bar{l}_x + (R-a) \dot{\theta} \bar{l}_{y_2}$$



2.



R_0 : Axe $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

R_1 : Axe $Ox_1y_1z_1$ tourne autour de l'axe $Z_0 = z_1(\phi)$

R_2 : Axe $Gx_2y_2z_2$ incliné d'un angle α par rapport aux axes

$Ox_1y_1z_1$, avec z_2 lié à la tige, tourne autour de l'axe $z_1(\phi)$

R_3 : Axe $Gx_3y_3z_3$ liés au cube et tourne autour de $z_1(\phi)$ et $z_2(\theta)$

\Rightarrow les vecteurs de Darboux :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\phi} \bar{l}_{z_1}; \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\phi} \bar{l}_{z_1}; \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\phi} \bar{l}_{z_1} + \dot{\theta} \bar{l}_{z_2}$$

a. Par la formule des distribution des vitesses exprimé dans le repère $Ox_2y_2z_2$

$$\bar{\omega}_{\text{Tige}} = \dot{\phi} \bar{l}_{z_1} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{\text{Carré}} = \dot{\phi} \bar{l}_{z_1} + \dot{\theta} \bar{l}_{z_2} = -\dot{\phi} \sin \alpha \bar{l}_{x_2} + (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \bar{l}_{z_2}$$

$$\bar{v}_G = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{\text{Tige}} \times \overline{OG} = 0 + L \dot{\phi} \sin \alpha \bar{l}_y = L \dot{\phi} \sin \alpha \bar{l}_y$$

$$\overline{GA} = \frac{d}{2} (\bar{l}_{x_3} + \bar{l}_{y_3} + \bar{l}_{z_3}) = \frac{d}{2} ((\cos \theta - \sin \theta) \bar{l}_{x_2} + (\sin \theta + \cos \theta) \bar{l}_{y_2} + \bar{l}_{z_2})$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_G + \bar{\omega}_{\text{Carré}} \times \overline{GA} = \begin{cases} -\frac{d}{2} ((\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) (\sin \theta + \cos \theta)) \bar{l}_{x_2} \\ + \left(\left(L + \frac{d}{2} \right) \dot{\phi} \sin \alpha + \frac{d}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) (\cos \theta - \sin \theta) \right) \bar{l}_{y_2} \\ -\frac{d}{2} \dot{\phi} \sin \alpha (\sin \theta + \cos \theta) \bar{l}_{z_2} \end{cases}$$

b. Par dérivation des coordonnées exprimées dans le repère $Ox_3y_3z_3$

$$\overline{OA} = \frac{d}{2} \bar{1}_{x_3} + \frac{d}{2} \bar{1}_{y_3} + \left(\frac{d}{2} + L \right) \bar{1}_{z_3} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = -\dot{\phi} \sin \alpha \cos \theta \bar{1}_{x_3} + \dot{\phi} \sin \alpha \sin \theta \bar{1}_{y_3} + (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \underbrace{\frac{d\overline{OA}}{dt}}_{=0} \bigg|_{x_3y_3z_3} + \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \overline{OA} = \begin{cases} \left(\left(\frac{d}{2} + L \right) \dot{\phi} \sin \alpha \sin \theta - \frac{d}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \right) \bar{1}_{x_3} \\ \left((\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \frac{d}{2} + \left(\frac{d}{2} + L \right) \dot{\phi} \sin \alpha \cos \theta \right) \bar{1}_{y_3} \\ - \frac{d}{2} \dot{\phi} \sin \alpha (\cos \theta + \sin \theta) \bar{1}_{z_3} \end{cases}$$

b'. Par dérivation des coordonnées exprimées dans le repère $Ox_2y_2z_2$

$$\overline{OA} = \frac{d}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \bar{1}_{x_2} + \frac{d}{2} (\sin \theta + \cos \theta) \bar{1}_{y_2} + \left(\frac{d}{2} + L \right) \bar{1}_{z_2} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\dot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x_2} + \dot{\phi} \cos \alpha \bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \frac{d\overline{OA}}{dt} \bigg|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{OA} = \begin{cases} -\frac{d}{2} (\sin \theta + \cos \theta) (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{x_2} \\ \left((\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \frac{d}{2} (\cos \theta - \sin \theta) + \dot{\phi} \sin \alpha \left(\frac{d}{2} + L \right) \right) \bar{1}_{y_2} \\ - \left(\dot{\phi} \sin \alpha \frac{d}{2} (\sin \theta + \cos \theta) \right) \bar{1}_{z_2} \end{cases}$$

c. $\bar{\omega}_{Cube} = -\dot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x_2} + (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_2}$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = \frac{d\bar{\omega}_{Cube}}{dt} \bigg|_{rel \text{ dans } R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{Cube} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\dot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x_2} + \dot{\phi} \cos \alpha \bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\ddot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x_2} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_2} - \cos \alpha \sin \alpha \dot{\phi}^2 \bar{1}_{y_2} + (\sin \alpha \dot{\phi} \dot{\theta} + \sin \alpha \cos \alpha \dot{\phi}^2) \bar{1}_{y_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\ddot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x_2} + \sin \alpha \dot{\phi} \dot{\theta} \bar{1}_{y_2} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_2}$$

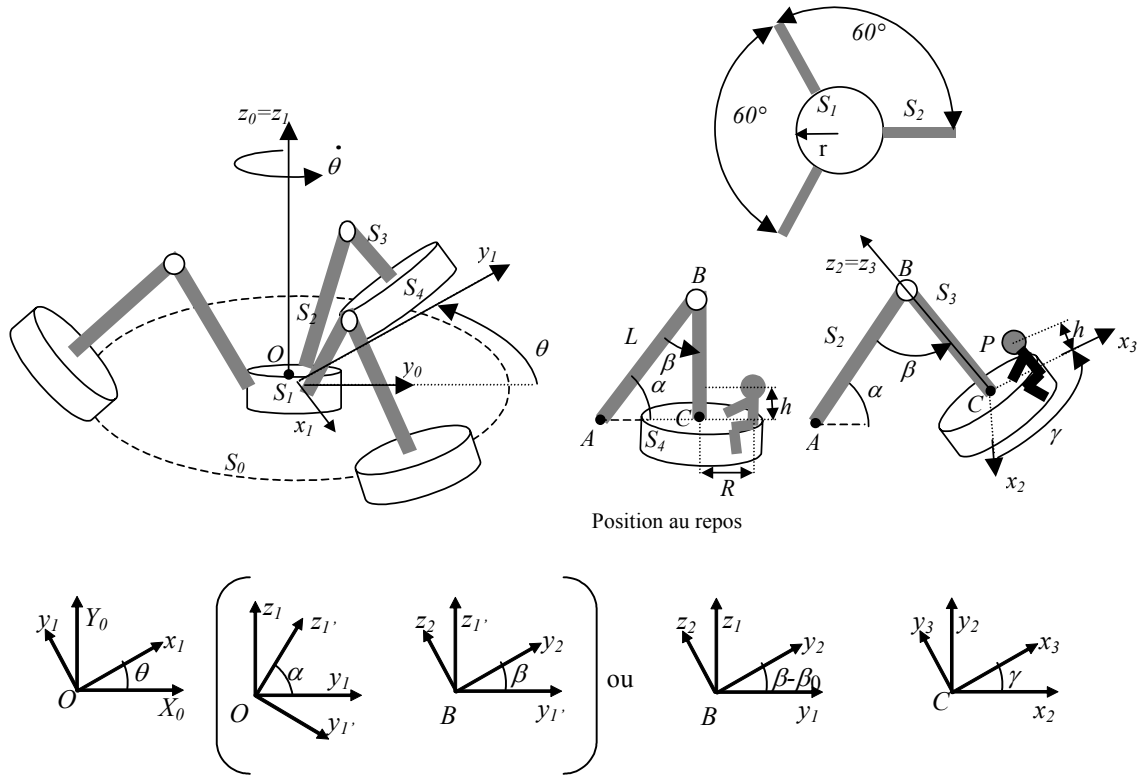
d. $\bar{\omega}_{Cube} = -\sin \alpha \cos \theta \dot{\phi} \bar{1}_{x_3} + \sin \alpha \sin \theta \dot{\phi} \bar{1}_{y_3} + (\dot{\theta} + \cos \alpha \dot{\phi}) \bar{1}_{z_3}$ avec $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \bar{\omega}_{Cube}$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = \frac{d\bar{\omega}_{Cube}}{dt} \bigg|_{rel \text{ dans } R_3} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{Cube}}_{=0}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\sin \alpha \cos \theta \ddot{\phi} \bar{1}_{x_3} + \dot{\phi} \sin \alpha \sin \theta \ddot{\phi} \bar{1}_{x_3} + \sin \alpha \sin \theta \ddot{\theta} \bar{1}_{y_3} + \sin \alpha \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} \bar{1}_{y_3} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = (\sin \alpha \sin \theta \ddot{\phi} \dot{\theta} - \sin \alpha \cos \theta \ddot{\phi}) \bar{1}_{x_3} + (\sin \alpha \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \sin \alpha \sin \theta \ddot{\phi}) \bar{1}_{y_3} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi} \cos \alpha) \bar{1}_{z_3}$$

3.



Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1}; \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1} + \dot{\beta} \bar{I}_{x_1}; \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1} + \dot{\beta} \bar{I}_{x_1} + \dot{\gamma} \bar{I}_{z_2}$$

Dans le repère $Ox_1y_1z_1$

1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$$\bar{\omega}_{S_4} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1} + \dot{\beta} \bar{I}_{x_1} + \dot{\gamma} \bar{I}_{z_2} = \dot{\beta} \bar{I}_{x_1} - \sin(\beta - \beta_0) \dot{\gamma} \bar{I}_{y_1} + [\dot{\theta} + \cos(\beta - \beta_0) \dot{\gamma}] \bar{I}_{z_1}$$

3) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_1 :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1}$$

4) Vitesse de P

$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega}_{S_4} \times \bar{CP}$$

$$\text{avec } \bar{CP} = R \cos \gamma \bar{I}_{x_1} + (R \sin \gamma \cos(\beta - \beta_0) - h \sin(\beta - \beta_0)) \bar{I}_{y_1} + (h \cos(\beta - \beta_0) + R \sin \gamma \sin(\beta - \beta_0)) \bar{I}_{z_1}$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{BC}$$

$$\text{avec } \bar{\omega}_{S_2} = \dot{\beta} \bar{I}_{x_1} + \dot{\theta} \bar{I}_{z_1} \text{ et } \bar{BC} = -L \sin \alpha (\cos(\beta - \beta_0) \bar{I}_{z_1} - \sin(\beta - \beta_0) \bar{I}_{y_1})$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_O + \bar{\omega}_1 \times \bar{OB} = -(r + L \cos \alpha) \dot{\theta} \bar{I}_{x_1}$$

$$\text{avec } \bar{\omega}_{S_1} = \dot{\theta} \bar{I}_{z_1} \text{ et } \bar{OB} = (r + L \cos \alpha) \bar{I}_{y_1} + L \cos \alpha \bar{I}_{z_1}$$

5) Accélération angulaire du solide S_4 :

$$\bar{\varepsilon}_{S_4} = \left. \frac{d\bar{\omega}_{S_4}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_{S_4} = (\ddot{\beta} + \sin(\beta - \beta_0) \dot{\gamma} \dot{\theta}) \bar{I}_{x_1} + (\dot{\beta} \dot{\theta} - \cos(\beta - \beta_0) \dot{\gamma} \dot{\beta}) \bar{I}_{y_1} - \sin(\beta - \beta_0) \dot{\gamma} \dot{\beta} \bar{I}_{z_1}$$

6) Accélération de P dans le repère $Ox_1y_1z_1$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_C + \bar{\omega}_{S_4} \times (\bar{\omega}_{S_4} \times \bar{CP}) + \bar{\varepsilon}_{S_4} \times \bar{CP}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{\omega}_{S_2} \times (\bar{\omega}_{S_2} \times \bar{BC}) + \bar{\varepsilon}_{S_2} \times \bar{BC} \text{ avec } \bar{\varepsilon}_{S_2} = \left. \frac{d\bar{\omega}_{S_2}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_{S_2} = \ddot{\beta} \bar{I}_{x_1} + \dot{\beta} \dot{\theta} \bar{I}_{y_1}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{\omega}_{S_1} \times (\bar{\omega}_{S_1} \times \bar{OB}) + \bar{\varepsilon}_{S_1} \times \bar{OB} \text{ avec } \bar{\varepsilon}_{S_1} = \left. \frac{d\bar{\omega}_{S_1}}{dt} \right|_{rel} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_{S_1}}_{=0} = 0 \text{ et O fixe : } \bar{a}_O = 0$$

Dans le repère $Cx_2y_2z_2$

1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$$\bar{\omega}_{S_4} = \dot{\beta} \bar{I}_{x_2} + \sin(\beta - \beta_0) \dot{\theta} \bar{I}_{y_2} + [\dot{\gamma} + \cos(\beta - \beta_0) \dot{\theta}] \bar{I}_{z_2}$$

2) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_2 :

$$\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta} \bar{l}_{z_1} + \dot{\beta} \bar{l}_{x_1}$$

4) Vitesse de P

$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega}_{S_4} \times \bar{CP} \quad \text{avec} \quad \bar{CP} = R(\cos \gamma \bar{l}_{x_2} + \sin \gamma \bar{l}_{y_2}) + h \bar{l}_{z_2}$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega}_{S_2} \times \bar{BC} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{S_2} = \dot{\beta} \bar{l}_{x_2} + \dot{\theta}(\cos(\beta - \beta_0) \bar{l}_{z_2} + \sin(\beta - \beta_0) \bar{l}_{y_2}) \quad \text{et} \quad \bar{BC} = -L \sin \alpha \bar{l}_{z_2}$$

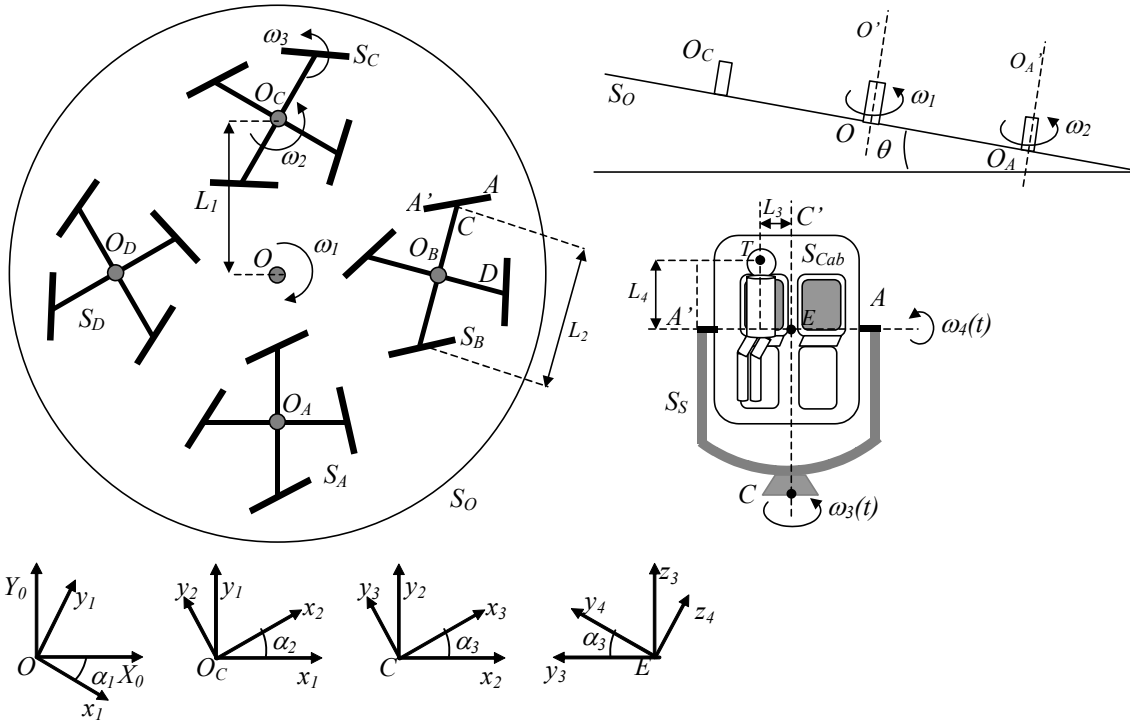
$$\bar{v}_B = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{S_1} \times \bar{OB} = -(r + L \cos \alpha) \dot{\theta} \bar{l}_{x_2} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_1 = \dot{\theta}(\cos(\beta - \beta_0) \bar{l}_{z_2} + \sin(\beta - \beta_0) \bar{l}_{y_2}) \quad \text{et}$$

$$\bar{OB} = (r + L \cos \alpha)(\cos(\beta - \beta_0) \bar{l}_{y_2} - \sin(\beta - \beta_0) \bar{l}_{z_2}) + L \sin \alpha(\cos(\beta - \beta_0) \bar{l}_{z_2} + \sin(\beta - \beta_0) \bar{l}_{y_2})$$

5) Accélération angulaire du solide S_4 .

$$\bar{\varepsilon}_{S_4} = \left. \frac{d\bar{\omega}_{S_4}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{S_4}$$

4.



Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1 \bar{l}_{z_1}; \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2) \bar{l}_{z_2}; \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \bar{l}_{z_3}; \quad \bar{\omega}_{R_4/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \bar{l}_{z_3} + \omega_4 \bar{l}_{x_3}$$

1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$$\bar{\omega}_{S_{Cab}} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4$$

$$\bar{\omega}_{S_{Cab}} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \bar{l}_{z_3} + \omega_4 \bar{l}_{x_3}$$

Vecteur accélération angulaire du solide S_4 :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{S_{Cab}} &= \left. \frac{d\bar{\omega}_{S_{Cab}}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{S_{Cab}} \\ &= \dot{\omega}_3 \bar{l}_{z_3} + \dot{\omega}_4 \bar{l}_{x_3} + \omega_4 (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \bar{l}_{y_3} \end{aligned}$$

$$2) \overline{v_{O_B}} = \overline{v_O} + \overline{\omega_{S_0}} \times \overline{OO_B} = -\omega_1 L_1 \overline{l_{y_1}} \text{ avec } \overline{\omega_{S_0}} = -\omega_1 \overline{l_{z_3}} \text{ et } \overline{OO_B} = L_1 \overline{l_{x_1}}$$

$$\overline{v_C} = \overline{v_{O_B}} + \overline{\omega_{S_B}} \times \overline{O_B C} = -L_1 \omega_1 \underbrace{(\cos(\omega_2 t) \overline{l_{y_2}} + \sin(\omega_2 t) \overline{l_{x_2}})}_{\overline{l_{y_1}}} - \frac{L_2}{2} (-\omega_1 + \omega_2) \overline{l_{x_2}}$$

$$\text{avec } \overline{\omega_{S_S}} = (-\omega_1 + \omega_2) \overline{l_{z_2}} \text{ et } \overline{O_B C} = \frac{L_2}{2} \overline{l_{y_2}}$$

$$\overline{v_E} = \overline{v_C} \text{ car } \overline{EC} \text{ est l'axe de rotation du solide } S_S$$

$$\overline{v_T} = \overline{v_E} + \overline{\omega_{Cab}} \times \overline{ET} \text{ avec } \overline{v_C} = \overline{v_E} \text{ et } \overline{ET} = -L_3 \overline{l_{x_4}} + L_4 \overline{l_{z_4}} = -L_3 \overline{l_{x_3}} + L_4 (\cos(\omega_4 t) \overline{l_{z_3}} - \sin(\omega_4 t) \overline{l_{y_3}})$$

$$\overline{\omega_{Cab}} \times \overline{ET} = -L_4 \sin(\omega_4 t) (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \overline{l_{x_3}} - (L_4 \cos(\omega_4 t) \omega_4 + L_3 (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) \overline{l_{y_3}} - L_4 \sin(\omega_4 t) \omega_4 \overline{l_{z_3}}$$

$$\overline{v_T} = A(t) \overline{l_{x_2}} + B(t) \overline{l_{y_2}} + C(t) \overline{l_{z_2}} =$$

$$\left(-L_1 \sin(\omega_2 t) \sin(\omega_3 t) \omega_1 - L_4 \cos(\omega_4 t) \sin(\omega_3 t) \omega_4 - \frac{L_2}{2} \sin(\omega_3 t) (-\omega_1 + \omega_2) \right) \overline{l_{x_2}}$$

$$\left(-L_4 \sin(\omega_4 t) \cos(\omega_3 t) \sin(\omega_3 t) + L_3 \sin(\omega_3 t) \right) (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \overline{l_{y_2}}$$

$$-L_4 \sin(\omega_4 t) \omega_4 \overline{l_{z_2}}$$

$$\overline{a_T} = \left. \frac{d\overline{v_T}}{dt} \right|_{R_2-rel} + \overline{\omega_{R_2/R_0}} \times \overline{v_T} = \dot{A}(t) \overline{l_{x_2}} + \dot{B}(t) \overline{l_{y_2}} + \dot{C}(t) \overline{l_{z_2}} + (-\omega_1 + \omega_2) \overline{l_{z_2}} \times \overline{v_T}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>