NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
1ière session 08/01/2009 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB} \times \overline{R} \quad ; \quad \overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

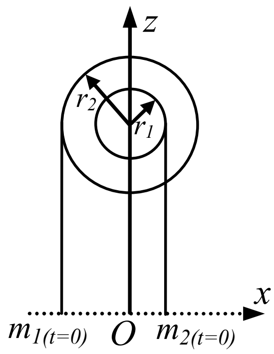
$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : questions rapides (4 points)

Sur un même axe sont calés deux tambours de rayon r_1 et r_2 (et de masse totale M) sur lesquels s'enroulent deux cordes de masse négligeable. Deux singes de masse m_1 et m_2 sont accrochés aux cordes. **Initialement**, ils se trouvent **en équilibre** à la même hauteur (O comme référence).
Ils se mettent ensuite à grimper le long de leurs cordes.
Déterminer les altitudes atteintes par les deux singes

1. en négligeant l'inertie des tambours
2. en supposant que le rayon de giration des tambours par rapport à leur axe de rotation vaut r_g et le singe de masse m_2 ne grimpe pas.

(2 points)



$t = 0$: équilibre en $z = 0 \Rightarrow m_1 g.r_1 = m_2 g.r_2 \Rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2$ (1)

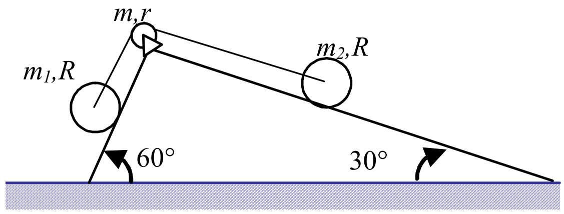
$$\left.\frac{d\overline{M_O}}{dt}\right|_y = \left.\overline{m}_{e,O}\right|_y = m_1 g.r_1 - m_2 g.r_2 = 0 \Rightarrow \left(\underbrace{\overline{M_{O(m_1)}}}_{\substack{\overline{OP_1}\times\overline{R_1} \\ = m_1\dot{z}_1 r_1}} + \underbrace{\overline{M_{O(m_2)}}}_{\substack{\overline{OP_2}\times\overline{R_2} \\ = -m_2\dot{z}_2 r_2}} + \underbrace{\overline{M_{O(M)}}}_{\overline{\overline{I}}_O\overline{\omega}}\right)_y = Const = 0$$

1. $\overline{\overline{I}}_O = 0 \Rightarrow m_1\dot{z}_1 r_1 - m_2\dot{z}_2 r_2 = 0 \underset{(1)}{=}> \dot{z}_1 - \dot{z}_2 = 0$: même altitude

2. $\left.\begin{aligned}\overline{M_{O(M)}} &= Mr_g^{\,2}\omega \\ \dot{z}_2 &= -r_2\omega\end{aligned}\right\} \Rightarrow m_1\dot{z}_1 r_1 - m_2\dot{z}_2 r_2 + \underbrace{Mr_g^{\,2}\omega}_{-Mr_g^{\,2}\dot{z}_2/r_2} = 0 \underset{(1)}{=}> m_1\dot{z}_1 r_1 = m_2\dot{z}_2 r_2 + Mr_g^{\,2}\dot{z}_2/r_2 = \left(m_2 r_2 + \frac{Mr_g^{\,2}}{r_2}\right)\dot{z}_2$

$$\Rightarrow \dot{z}_1 = \frac{m_2 r_2^{\,2} + Mr_g^{\,2}}{m_1 r_1 r_2}\dot{z}_2 = \frac{m_1 r_1 r_2 + Mr_g^{\,2}}{m_1 r_1 r_2}\dot{z}_2 = \left(1 + \frac{Mr_g^{\,2}}{m_1 r_1 r_2}\right)\dot{z}_2 \Rightarrow z_1 = \left(1 + \frac{Mr_g^{\,2}}{m_1 r_1 r_2}\right)z_2$$

Deux roues cylindriques et homogènes de rayon R, de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre.
Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique (de masse *m* et de rayon *r*) liée au sol par une rotule.

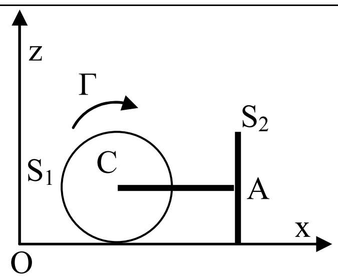


Peut-on considérer la tension dans la corde comme constante ? Justifiez votre réponse en utilisant le théorème du moment cinétique sur la poulie. (1 point)

Par le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie en son centre

$$\left(\frac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y = \left(\bar{m}_{e,G}\right)_y \quad \Rightarrow \quad \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = r\left(F_2 - F_1\right)$$

Si on considère une poulie avec une inertie comme dans ce cas-ci, le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie en son centre nous montre que les tensions doivent être différentes.



Mouvement d'un chasse-neige (1 point)
La figure schématise un chasse-neige se déplaçant sur une horizontale. Ce chasse-neige est constitué d'une roue S_1 (de centre *C*, de rayon *R*, de masse *m* répartie uniformément sur la circonférence par rapport à son axe) et d'une partie S_2 (en forme de T), indéformable de même masse *m*, modélisée par deux tiges de longueur *2R*, en mouvement de translation parallèlement à l'axe *Ox*. (*C* et *A* sont à la même hauteur)
Le moteur exerce sur la roue un couple de moment Γ autour de l'axe de la roue. La roue tourne sans frottement autour de son axe et roule sans glisser sur le sol.

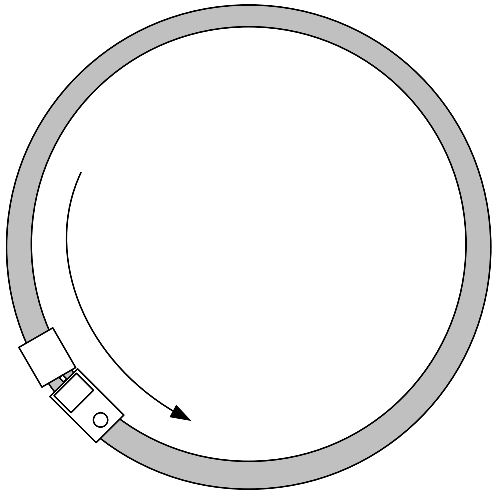
Déterminer l'équation de mouvement de ce système

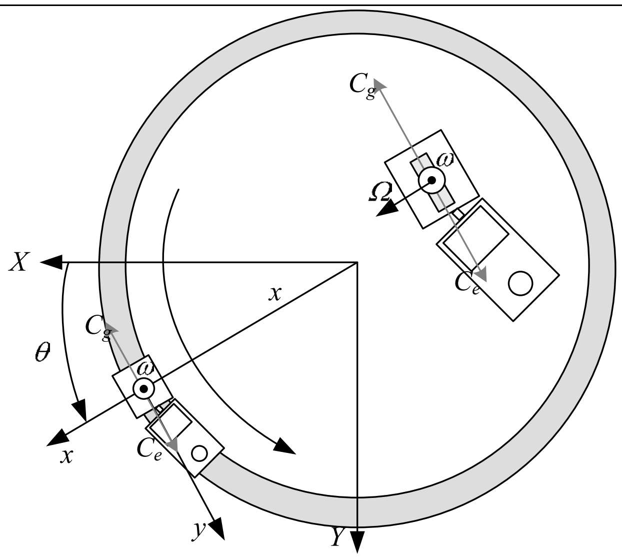
$$Lagrange: T = \frac{(2m)\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2 + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{3m\dot{x}^2}{2}$$

$$\Rightarrow 3m\ddot{x} = \frac{\Gamma}{R}$$

<u>Question 2</u> : Gyroscope (2 points)

On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.





Le train tourne à vitesse constante => conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

$\overline{\omega} = \omega \overline{1}_z$ avec ω constant

le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,G} = C_e \overline{1}_y$

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit être

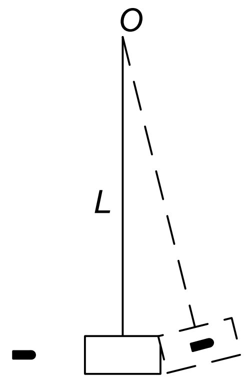
$\overline{C}_g = -C_g \overline{1}_y = \Gamma\overline{\Omega} \times \omega \overline{1}_z$

=> Le moment cinétique du gyroscope ($\Gamma\overline{\Omega}$) doit être suivant l'axe $\overline{1}_x$ => $\overline{M}_{G,gyr} = \Gamma\Omega\overline{1}_x$

Donc on va placer une roue sur le wagon de manière à avoir son axe de révolution suivant l'axe x. On la ferra tourner de manière à avoir le vecteur de rotation propre de la roue vers l'extérieur des rails.

Question 3 : Pendule balistique (4 points)

Dans un pendule de masse *M*, on envoie une balle de fusil (de masse *m*) qui s'y logera. La distance entre la fixation *O* et la direction de la vitesse de la balle est *L*. La distance *L* peut être posée comme équivalente à la distance entre le point *O* et le centre de masse du système constitué du pendule et de la balle. Son moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par *O* vaut *I*.
Déterminer la formule générale de la vitesse de la balle avant le choc en fonction de longueur de la déviation du pendule *x*.



1 (avant le choc); 2 (au moment du choc); 3 (après le choc)

Phase 1 et 2

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{F}_e \Rightarrow \left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_x = 0 \Rightarrow m_{balle} v_{balle}^{(1)} = \left(m_{balle} + M_{pendule}\right) v_{balle+pendule}^{(2)} \quad \text{avec } v_{balle+pendule}^{(2)} \overline{1}_x = L\dot{\theta}_0 \overline{1}_x$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{m}{m+M}\frac{v_{balle}^{(1)}}{L} \quad (1)$$

Phase 2 et 3

- Conservation d'énergie $T^2 + V^2 = T^3 + V^3$ avec $T_{pendule} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\,\overline{\overline{I}}_O\overline{\omega} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ et $T_{balle} = \frac{mv_G^2}{2} = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(mL^2\dot{\theta}_0^{\,2} + I\dot{\theta}_0^{\,2}\right) - (m+M)gL = 0 - (m+M)gL\cos\theta \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2(m+M)gL(1-\cos\theta)}{\left(mL^2+I\right)}} \ (2)$$

- Théorème du moment : $\frac{d\overline{M_O}}{dt} = \overline{m_e}$ avec $\overline{M_O} = \overline{M_{O,balle}} + \overline{M_{O,pendule}} = mLv^{(3)}\overline{1}_z + I\dot{\theta}\overline{1}_z$ avec $v^{(3)} = L\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\left(mL^2+I\right)\dot{\theta}\overline{1}_z\right)}{dt} = -(m+M)gL\sin\theta\overline{1}_z \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}\sin\theta$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\dot{\theta}_0}^{0} d\dot{\theta}^2 = \int_0^{\theta} -\frac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}\sin\theta d\theta = \frac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(\cos\theta - 1) \\ \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)} \underset{I=ML^2}{=} \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

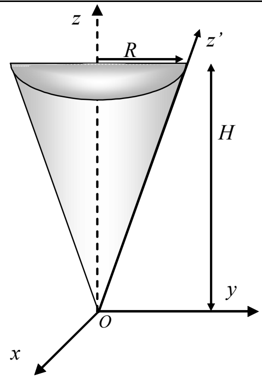
$$\Rightarrow \frac{m}{m+M}\frac{v_{balle}^{(1)}}{L} = \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)} \Rightarrow v_{balle}^{(1)} = L\frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)}$$

avec $\sin\theta = \frac{x}{L} \Rightarrow 1-\cos\theta = 1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}} \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}} \underset{I=ML^2}{=} \sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}}$

(1)+(2) : $\boxed{v_{balle}^{-} = \frac{m+M}{m}L\sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}}}$

Question4 : demi cône (3 points)

Déterminer le moment d'inertie $I_{z'}$ du demi-cône homogène par rapport à l'axe *z'* en utilisant le minimum de calculs d'intégrale et en sachant que la masse vaut : $M = \rho\pi\dfrac{R^2H}{6}$



$$I_z = \rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H dz \int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr = \rho\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^4}{4}\frac{(H)^5}{5}\pi = \frac{\rho\pi}{20}HR^4 = \frac{3MR^2}{10}$$

$$I_{xy} = \rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H \left(z^2\right) dz \int_0^{\frac{R}{H}z} r dr = \rho\pi\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2}{2}\frac{H^5}{5} = \frac{3MH^2}{5}$$

$I_x = I_y$ la répartition de masse par rapport à l'axe *x* est la même que pour l'axe *y*

$$I_z = \left(I_{xz} + I_{yz} = 2I_{xz}\right) = I_x + I_y - 2I_{xy} = 2I_x - 2I_{xy} \Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} + I_{xy} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3MH^2}{5}$$

$P_{xy} = P_{yz} = 0$ grace à l'intégration de y sur un domaine symétrique

L'angle alpha est l'angle entre l'axe *z* et l'axe *z'*. Par la formule de changement d'axe ($\overline{1}_{z'} = \left(0; \sin\alpha; \cos\alpha\right)$)

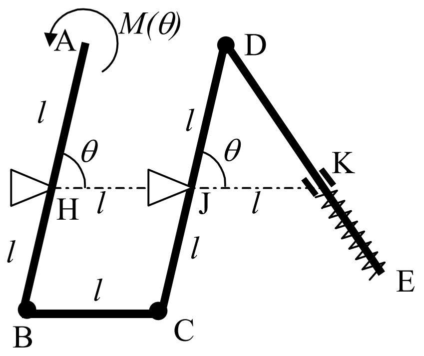
$$I_{z'} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha P_{xy} \quad \text{où} \quad \cos^2\alpha = \frac{H^2}{H^2+R^2} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha = \frac{R^2}{H^2+R^2}$$

$$\Rightarrow I_{z'} = \frac{3MR^2}{10}\frac{H^2}{H^2+R^2} + \left(\frac{3MR^2}{20} + \frac{3MH^2}{5}\right)\frac{R^2}{H^2+R^2} = \frac{R^2}{H^2+R^2}\left(MH^2 + \frac{MR^2}{6}\right)$$

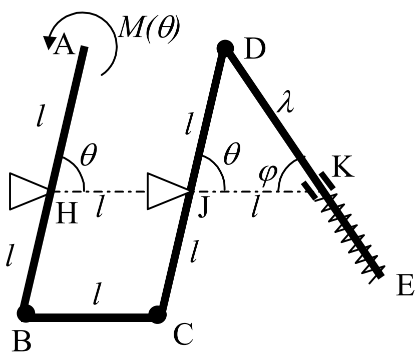
Question 5 : Système articulé (3 points)

Le mécanisme représenté ci-contre est situé dans un plan vertical ; les tiges homogènes AB, CD et DE ont une longueur $2l$ et une masse $2m$; la tige BC est homogène de longueur l et de masse m ;la tige DE peut coulisser dans le guide non fixe K ; le coefficient de rappel du ressort est k et sa longueur libre correspond à la position (θ=0).

En négligeant tout frottement, déterminer la réaction de liaison en K en fonction de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, m, l$ et g.



avec $\begin{cases} \overline{DG_4} = L\cos\varphi\,\overline{1}_x - L\sin\varphi\,\overline{1}_y \\ \overline{JG_4} = (L\cos\theta + L\cos\varphi)\,\overline{1}_x + (L\sin\theta - L\sin\varphi)\,\overline{1}_y \\ \overline{v}_D = L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right) \\ \overline{v}_{G_4} = \overline{v}_D + \left(-\dot{\varphi}\,\overline{1}_z\right)\times\overline{DG}_4 = \left(-\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)L\dot{\theta}\,\overline{1}_x + \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)L\dot{\theta}\,\overline{1}_y = \frac{d\left(\overline{JG}_4\right)}{dt} \end{cases}$



$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\overline{M}_D\right|_{(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})} = \left.\sum\overline{m}_{e,D} + 2m\overline{v}_G\times\overline{v}_D\right|_{(\underline{\underline{R_K}},mg)}}$$ pour la tige DE seule

avec $\left|\begin{array}{l} \boxed{\overline{M}_D = \overline{\overline{I}}_D.\overline{\omega} + 2m\overline{DG}\times\overline{v}_D} = \left(\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta} - 2ml^2\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\right)\overline{1}_z \\ \overline{m}_{e,D} = -2mgl\sin\frac{\theta}{2}\overline{1}_z + 2l\sin\frac{\theta}{2}R_K\,\overline{1}_z \end{array}\right.$

$$ml^2\ddot{\theta}\left(\frac{4}{3} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right) - ml^2\dot{\theta}^2\cos\frac{\theta}{2} = -2mgl\sin\frac{\theta}{2} + 2l\sin\frac{\theta}{2}R_K + ml^2\dot{\theta}^2\cos\frac{\theta}{2}$$

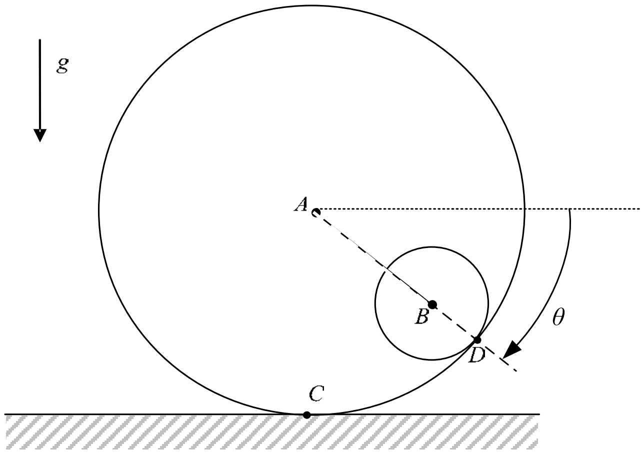
$$\Rightarrow R_K = \frac{ml}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{4}{3} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)\ddot{\theta} - 2\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\right) + mg$$

Question 6 : Le disque dans un anneau (4 points)

Le problème est plan (2-D). Le système, soumis à l'effet de la gravité, est composé de :

- Un anneau de rayon *R* et de centre *A*, qui roule sans glisser sur un sol plat (de masse *M*).

- Un disque de rayon *a,* de centre *B*, et de masse homogène *m*. En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser sur la piste de forme circulaire formée par l'intérieur de l'anneau.



1. Déterminer **la ou les équations de mouvement** finales en utilisant les multiplicateurs de Lagrange**.**

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 3 coordonnées $\{\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1}=\dot{\alpha}\,\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2}=\dot{\beta}\,\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB}=\dot{\theta}\,\overline{1}_z$

$$\begin{cases} \bullet\ \text{Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol} \\ \overline{v}_{I\in Sol}=\overline{v}_{I\in S_1} \Rightarrow 0=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AI}=\dot{x}\,\overline{1}_x-R\dot{\alpha}\,\overline{1}_x \Rightarrow \dot{x}=R\dot{\alpha} \end{cases}$$

OU

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 4 coordonnées $\{x,\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1}=\dot{\alpha}\,\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2}=\dot{\beta}\,\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB}=\dot{\theta}\,\overline{1}_z$

$$\begin{cases} \text{Condition de roulement sans glissement en } D \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et } S_2 \\ \overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_{D\in S_2} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AD}=\dot{x}\,\overline{1}_x+R\dot{\alpha}\,\overline{1}_{y_2} \\ \overline{v}_{D\in S_2}=\overline{v}_B+\overline{\omega}_2\times\overline{BD}=\dot{x}\,\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_2}+a\dot{\beta}\,\overline{1}_{y_2} \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_1\left((R-a)\delta\theta+a\delta\beta-R\delta\alpha=0\right) \\ \text{Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol} \\ \quad \overline{v}_{I\in Sol}=\overline{v}_{I\in S_1} \Rightarrow 0=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AI}=\dot{x}\,\overline{1}_x-R\dot{\alpha}\,\overline{1}_x \Rightarrow\Rightarrow \dot{x}=R\dot{\alpha} \Rightarrow \lambda_2\left(\delta x-R\delta\alpha=0\right) \end{cases}$$

$$T=\left[MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\alpha}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2R\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

avec $\overline{v}_{G_2}=\overline{v}_B=\overline{v}_A+\overline{\omega}_{AD}\times\overline{AD} \Rightarrow \overline{v}_B=\dot{x}\,\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_2}=\dot{x}\,\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x+\cos\theta\,\overline{1}_y\right)$

OU $$T=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

$V = mg\left(R-(R-a)\sin\theta\right) = -mg(R-a)\sin\theta + C$

2 ddl, 3 coordonnées généralisées => 1 contrainte

$$L = \left[MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\alpha}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right] + mg(R-a)\sin\theta$$

$$=> \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial\alpha} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\alpha} \ : \ (2M+m)R^2\ddot{\alpha} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\theta} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = -\lambda_1 R \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\beta} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\beta} \ : \ \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\beta} = \lambda_1 a => \lambda_1 = \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta} \ : \\ m(R-a)^2\ddot{\theta} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha} + mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta - mg(R-a)\cos\theta = \lambda_1(R-a) \\ + \text{ contrainte : } (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} - R\dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

en fonction des coordonnées α et θ $\left(\dot{\beta} = \dfrac{R\dot{\alpha}-(R-a)\dot{\theta}}{a};\ \ddot{\beta} = \dfrac{R\ddot{\alpha}-(R-a)\ddot{\theta}}{a}\right)$

$$=> \quad => \boxed{\begin{cases} \left(2M+\dfrac{3m}{2}\right)R\ddot{\alpha} - m(R-a)\left(\dfrac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\theta} - m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = 0 \\ \dfrac{3m}{2}(R-a)^2\ddot{\theta} - m(R-a)R\left(\dfrac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\alpha} - mg(R-a)\cos\theta = 0 \end{cases}}$$

OU

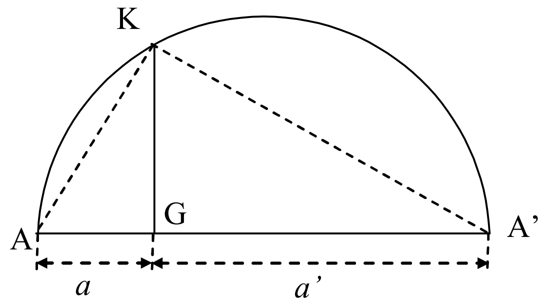
2 ddl, 4 coordonnées généralisées => 2 contraintes

$$L = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right] + mg(R-a)\sin\theta$$

$$=> \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} + \lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} \ : \ (M+m)\ddot{x} - m(R-a)\sin\theta\ddot{\theta} - m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = \lambda_2 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial\alpha} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\alpha} + \lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\alpha} \ : MR^2\ddot{\alpha} = -\lambda_1 R - \lambda_2 R => \lambda_2 = -MR\ddot{\alpha} - \lambda_1 = -MR\ddot{\alpha} - \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\beta} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\beta} + \lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\beta} \ : \ \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\beta} = \lambda_1 a => \lambda_1 = \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta} + \lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\theta} \ : \\ m(R-a)^2\ddot{\theta} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha} + mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta - mg(R-a)\cos\theta = \lambda_1(R-a) \\ + \text{ contraintes :} \\ (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} - R\dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} - R\dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

<u>Question 7</u> : Question bonus (1 point)

Dans le cas de la réduction d'un système à deux points conjugués, démontrer que *GK* vaut le rayon de giration r_g



Conservation de la masse : $M_A + M_{A'} = M$

Conservation du centre de gravité G : $aM_A = a'M_{A'}$

Conservation du moment d'inertie IG : $M_A a^2 + M_{A'} a'^2 = I_G = Mr_g^2$

avec : G = centre de masse
a = distance AG ; a' = distance $A'G$
M_A = masse au point A ; $M_{A'}$ = masse au point A'

Démontrons que $\boxed{|a.a'| = r_g^2}$:

$$M_A a^2 + M_{A'} a'^2 = Mr_g^2 \Rightarrow M_A aa + M_{A'} a'a' = Mr_g^2$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{aM_A = a'M_{A'}} M_{A'} a'a + M_A aa' = \left(M_{A'} + M_A\right) aa' \underbrace{=}_{M_A + M_{A'} = M} Maa' = Mr_g^2 \Rightarrow \boxed{aa' = r_g^2}$$

Démontrons que $\boxed{GK = \sqrt{a.a'}}$

$$AA'^2 = \left(a + a'\right)^2 = AK^2 + A'K^2 \quad \text{où} \quad AK^2 = GK^2 + a^2 \quad \text{et} \quad A'K^2 = GK^2 + a'^2$$

$$\Rightarrow \left(a + a'\right)^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' = GK^2 + a^2 + GK^2 + a'^2 \Rightarrow aa' = GK^2 \Rightarrow \boxed{GK' = \sqrt{aa'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{GK' = r_g}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLONS

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLONS