1.

$$I_z = \rho\int_0^a x^2dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz + \rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y^2dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right)\ ;\ I_y = \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right)\ \text{ avec }\ m = \rho\frac{abc}{6}$$

$$P_{xy} = \rho\int_0^a xdx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} ydy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = \frac{mab}{20} \Rightarrow P_{xz} = \frac{mac}{20}\ ;\ P_{yz} = \frac{mbc}{20}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right) & -\frac{mab}{20} & -\frac{mac}{20} \\ -\frac{mab}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right) & -\frac{mbc}{20} \\ -\frac{mac}{20} & -\frac{mbc}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$$

---

2. cercle : $I_z = M_{Cercle}R^2 \underbrace{=}_{2D} I_x + I_y \underbrace{=}_{sym} 2I_y \Rightarrow I_y = \frac{M_{Cercle}R^2}{2}$

y'=diamètre du cercle : Par symétrie : $I_{y'}(\text{cercle O}) = I_{y'}(\cup) + I_{y'}(\cap) \Rightarrow I_{y'}(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_\cup R^2}{2}$

$$I_{y'} = \frac{mr^2}{2} \Rightarrow I_y = I_{y'} - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + m\left(r-\frac{2r}{\pi}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + m\left(r^2 - 4\frac{r^2}{\pi}\right) = \frac{3mr^2}{2} - 4m\frac{r^2}{\pi}$$

S1=Disque 1 ; S2=Tige ; S3=Disque 2

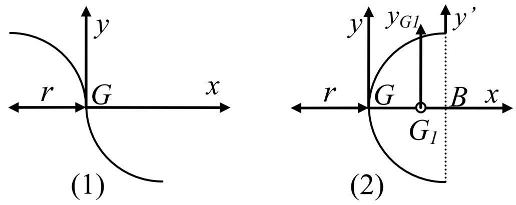
Disques : Par symétrie : $I_{x(S_1)} = I_{x(S_3)} = \frac{m_1r^2}{2}$

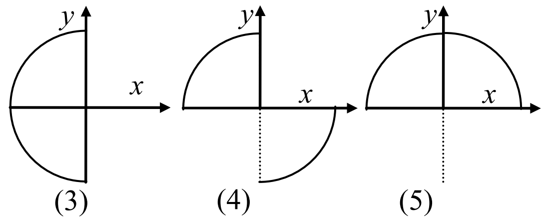
Par symétrie : $I_{y(S_1)} = I_{y(S_3)} = I_{z(S_1)} = I_{z(S_3)} = I_{x_{G1}} + m_1r^2 = \frac{m_1r^2}{4} + m_1r^2 = \frac{5m_1r^2}{4}$ car $I_{x(S_1)} = I_{y(S_1)} + I_{z(S_1)} = 2I_{y(S_1)}$

Tige : par symétrie, $I_x(1)=I_x(2)$ car on a bien la même répartition de masse par rapport à l'axe x. Nous pouvons tenir le même raisonnement pour l'axe y. La symétrie orthogonale ne modifie pas les moments d'inertie. => $I_y(1)=I_y(2)$

En utilisant la formule démontrée à la question précédente :

$$I_{y(S_2)} = \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi} \Rightarrow I_{y(S_2)} = \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}$$





Dans le cas du demi-cercle, si on fait deux symétries orthogonales, on passe de la configuration (3) à (5). Or ces symétries ne modifient en rien la disposition des masses par rapport aux axes. On voit donc que dans les trois cas, on a pour le moments d'inertie :

$$I_x = I_y \Rightarrow I_x(2) = I_{y'}(2) = \frac{m_2r^2}{2} \Rightarrow I_{x(S_2)} = \frac{m_2r^2}{2}$$

Pour le système complet :

$$I_x = 2.\left(\frac{m_1r^2}{2}\right) + \frac{m_2r^2}{2} \quad \text{et} \quad I_y = 2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right) + \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}$$

$$I_z = 2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right) + \left[\underbrace{\frac{m_2r^2}{2}}_{I_{x(S2)}} + \underbrace{\frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}}_{I_{y(S2)}}\right] = \frac{5m_1r^2}{2} + 2m_2r^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

Grâce à la symétrie des deux disques par rapport aux plans *yz*, *xy* et *xz*, nous pouvons dire que tous les produits d'inertie sont nuls pour le système constitué des deux disques.

Pour la tige constituée des deux quarts de cercle, nous pouvons dire que $P_{xz}=P_{yz}=0$ car tous les points de la tige possèdent une coordonnée *z* nulle. Quant à P_{xy} il n'y a aucune symétrie, donc rien ne nous permet d'annuler ce terme. Il sera différent de zéro.

$$P_{xy(barre)} = P_{xy(\frac{1}{2}barreA)} + P_{xy(\frac{1}{2}barreB)} \Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreA)} = P_{xy_A} + \frac{m_2}{2}\left(\underbrace{-a.(r-a)}_{GG_1(r-a,-a,0)} - \underbrace{a^2}_{AG_1(-a,-a,0)}\right) = \frac{\rho r^3}{2} - \frac{m_2}{2}ra$$

$$\Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreB)} = P_{xy_B} + \frac{m_2}{2}\left(\underbrace{a.(-r+a)}_{GG_2(-r+a,a,0)} - \underbrace{a^2}_{BG_2(a,a,0)}\right) = \frac{\rho r^3}{2} - \frac{m_2}{2}ra \Rightarrow P_{xy(barre)} = \frac{m_2 r^2}{\pi} - m_2 ra$$

$$P_{xy(barre)} = \frac{m_2 r^2}{\pi} - \frac{m_2 r 2r}{\pi} = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$

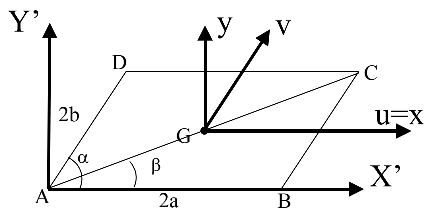
3.1 $I_z = \rho \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u^2 + v^2 - 2uv\cos(\pi - \alpha)\right)\sin\alpha = m\frac{(a^2+b^2)}{3} \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{3}}$

avec $dm = \rho du.\sin\alpha dv$ et $\begin{cases} x = u + v\cos\alpha \\ y = v\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

3.2
$I_x = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv(v\sin\alpha)^2\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha$;

$I_y = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv(u + v\cos\alpha)^2\sin\alpha = \frac{m}{3}(a^2 + b^2\cos^2\alpha)$

$P_{xy} = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv(u + v\cos\alpha)(v\sin\alpha)\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha$



L'ellipse centrale d'inertie est un cercle ssi

$I_x X^2 + I_y Y^2 = 1 \Rightarrow$ cercle de rayon $R = \frac{1}{\sqrt{I_x}}$ *ssi*

$I_x = I_y$ *et* $P_{xy} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ *et* $a = b$

3.3 Recherche des axes principaux d'inertie en A :
Calcul des éléments du tenseur d'inertie dans les axes AX'Y'Z' (// Gxyz)

$I_{x'} = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha + m(b\sin\alpha)^2$; $I_{y'} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2\cos^2\alpha) + m(a + b\cos\alpha)^2$

$P_{x'y'} = \rho\int_{0}^{+2a} du\int_{0}^{+2b} dv(u + v\cos\alpha)(v\sin\alpha)\sin\alpha = mab\sin\alpha + m\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha$

Les axes principaux en *A* sont les axes orthogonaux AX''Y''Z'' tel que $I_{x"x"}X"^2 + I_{y"y"}Y"^2 + I_{z"z"}Z"^2 = 1$

Pour se faire, on fait une rotation d'angle θ des axes Ax' et Ay' pour avoir $-P_{x"y"} = 0$.

La formule suivante permet de déterminer cet angle.

$$tg2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \frac{2\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\right)}{\frac{4}{3}b^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha}$$

<u>La quadrique d'inertie</u> en A dans les axes AX'Y'Z' : $I'_{x'x'}X'^2 - 2P'_{x'y'}X'Y' + I'_{y'y'}Y'^2 = 1$

$$\frac{4}{3}mb^2\sin^2\alpha X'^2 - 2m\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\right)X'Y' + m\left(\frac{4}{3}b^2\cos^2\alpha + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha\right)Y'^2 = 1$$

<u>L'ellipse d'inertie</u> en A dans les axes AX''Y''Z'' (axes principaux) : $I''_{x''x''}X''^2 + I''_{y''y''}Y''^2 = 1$

avec
$$I''_{x''} = \cos^2\theta . I'_{x'} + \sin^2\theta . I'_{y'} + 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'}\right)$$
$$I''_{y''} = \sin^2\theta . I'_{x'} + \cos^2\theta . I'_{y'} - 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'}\right)$$

3.5 Par la formule du changement de base, on écrit le tenseur dans le nouveau système d'axe ayant l'axe AC comme premier vecteur unitaire. Le moment d'inertie suivant l'axe AC ne dépend que du vecteur unitaire suivant AC.

$$I_{AC} = \alpha_i^1\alpha_j^1 I^{ij} = I_x\mu_x^{1\,2} + I_y\mu_y^{1\,2} - 2P_{xy}\mu_x^1\mu_y^1$$

$$où\ \ \mu_x^1 = \frac{a+b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}\ ;\ \mu_y^1 = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}\ \text{ et }\ \mu_z^1 = 0$$

4.1 $$I_z(Cube) = \int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(x^2+y^2\right)dx\right)dy\right)dz = \frac{M\left(2R\right)^2}{6} = \frac{\rho 2^5 R^5}{6}$$

$$I_z(sphère) = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{8\rho\pi R^5}{15}\ \ => \ \ I_z(\frac{1}{2}sphère\cup) = \frac{2}{5}M_\cup R^2 = \frac{4\rho\pi R^5}{15}$$

$$=> I_z = I_z(Cube) - I_z(Demi-Sphère) = \frac{\rho 16R^5}{3} - \rho\frac{4\pi}{15}R^5$$

Axes $O''x''y''z''$: au centre de la face supérieure du cube

Sphère : $I_{x''y''}(\cup) = \int z''^2\,dm = \int_0^R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(r\cos\theta\right)^2\rho r^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr = \frac{1}{5}M_\cup R^2$

$$I_{x''}(\cup) = \frac{I_{z''}(\cup)}{2} + I_{x''y''}(\cup) = \frac{1}{5}M_\cup R^2 + \frac{1}{5}M_\cup R^2 = \frac{2}{5}M_\cup R^2$$

$$I_x(\cup) = \underbrace{I_{x''}(\cup) - M_\cup\left(\frac{3}{8}R\right)^2}_{I_{xG}(\cup)=\frac{83}{320}M_\cup R^2} + M_\cup\left(\frac{5}{8}R\right)^2 = \frac{13M_\cup R^2}{20} = \frac{13\rho\pi R^5}{30}$$

Solide complet :

$$I_x = I_x(\text{Cube}) - I_x(\cup) = \frac{16\rho R^5}{3} - \frac{13\rho\pi R^5}{30} = \frac{\rho R^5}{30}\left(160-13\pi\right)\ \text{ et }\ I_z = \frac{\rho R^5}{30}\left(160-8\pi\right)$$

4.2 Tous les systèmes d'axes ayant vertical et les axes x_p y_p parallèle à x y sont des axes principaux. En effet, le plans xz est un plan de symétrie orthogonale donc l'intégration de y sur un domaine symétrique sera nul. De même pour l'intégration suivant x grâce au plan de symétrie orthogonale yz. => Grâce à ces deux plans de symétrie, tous les produits d'inertie sont nuls car ils contiennent tous au moins du x ou du y.

Pour que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, il faut trouver un point P tel que :

$$I_{x_P}x^2 + I_{y_P}y^2 + I_{z_P}z^2 = 1\ \text{ où }\ I_{x_P} = I_{y_P} = I_{z_P}$$

Il est possible de trouver cette ellipsoïde puisque $I_y = I_x < I_z$

On recherche un point P de l'axe z, donc l'axe $\boldsymbol{z=z_P}$

$$=> \underbrace{I_x - \left(m_{Cube} - m_\cup\right)z_G^2}_{I_{xG_{total}}} + \left(m_{Cube} - m_\cup\right)d^2 = I_z$$ où d est la distance du point P recherché à G_{total}

4.3 $P_{x'y'} = P_{x'y'}\left(Cube\right) - P_{x'y'}\left(1/2\ Sphère\right)$

$\overline{O'G_{cube}} = \left(R, R, R\right)$ et $\overline{O'G_{1/2\ Sphere}} = \left(R, R, \left(1+\dfrac{5}{8}\right)R\right)$

$$\begin{cases} P_{x'y'}\left(Cube\right) = P_{xy}\left(Cube\right) + m_{Cube}.R.R \\ P_{x'y'}\left(1/2\ Sphère\right) = P_{x_{G\,Sph}y_{G\,Sph}}\left(1/2\ Sphère\right) + m_{1/2\ Sphère}.R.R \end{cases}$$

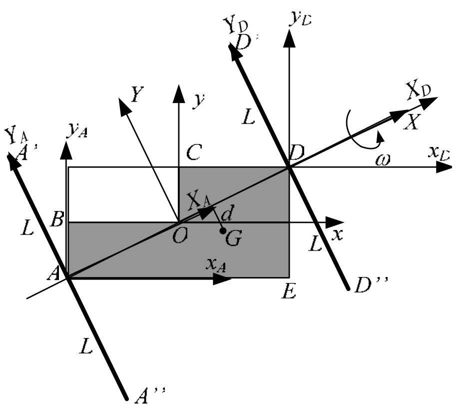
Pour le produit d'inertie suivant les axes x' et y', le décallage en z ne nous intéresse pas.

$P_{xy}\left(Cube\right) = 0$ car les axes xyz sont des axes principaux

$P_{x_{G\,Sph}y_{G\,Sph}}\left(1/2\ Sphère\right) = 0$ car les axes x et y sont intégrés sur un domaine symétrique

=> $P_{x'y'} = m_{Carré}R^2 - m_{\cup}R^2 = \rho\left(8 - \dfrac{2}{3}\pi\right)R^5$

5.1



$\overline{OA} = \left(-\sqrt{H^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2}, 0, 0\right)$ et $\overline{OD} = \left(\sqrt{H^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2}, 0, 0\right)$

En considérant

M=Rectangle complet (□$\rho 2H^2$) - petit rectangle (□$\dfrac{\rho H^2}{2}$)

$M = \rho 2H^2 - \dfrac{\rho H^2}{2} = \dfrac{\rho 3H^2}{2}$

$$\begin{cases} \overline{1}_X = \cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y \\ \overline{1}_Y = -\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overline{1}_x = \cos\theta\,\overline{1}_X - \sin\theta\,\overline{1}_Y \\ \overline{1}_y = \sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Y \end{cases}$$

où $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_X & -P_{XY} & 0 \\ -P_{XY} & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases}
I_X = I_{X(S1)} + I_{X(S2)} + I_{X(S3)} = I_{X(S1)} + \left[\underbrace{I_{X_A(S2)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + m.0^2 \right] + \left[\underbrace{I_{X_D(S3)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + m.0^2 \right] \\
I_Y = I_{Y(S1)} + I_{Y(S2)} + I_{Y(S3)} = I_{Y(S1)} + \left[\underbrace{I_{Y_A(S2)}}_{0} + mH^2\frac{5}{4} \right] + \left[\underbrace{I_{Y_D(S3)}}_{0} + mH^2\frac{5}{4} \right] \\
I_Z = I_{Z(S1)} + I_{Z(S2)} + I_{Z(S3)} = I_{Z(S1)} + \left[\underbrace{I_{X(S2)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + \underbrace{I_{Y(S2)}}_{\frac{5mH^2}{4}} \right] + \left[\underbrace{I_{X(S3)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + \underbrace{I_{Y(S3)}}_{\frac{5mH^2}{4}} \right] \\
P_{XY} = P_{XY(S1)} + P_{XY(S2)} + P_{XY(S3)} = P_{XY(S1)} + \underbrace{\left[\underbrace{P_{X_AY_A(S2)}}_{0} + m\left(-H\sqrt{\frac{5}{4}}\right).0 \right] + \left[\underbrace{P_{X_DY_D(S3)}}_{0} + mH\sqrt{\frac{5}{4}}.0 \right]}_{=0}
\end{cases}$$

Rem : la symétrie des deux barres par rapport aux axes XYZ permettait de conclure directement que $P_{XY(S2+S3)}=0$

$$\begin{cases}
I_{X(S_1)} = \sin^2\theta I_{y(S_1)} + \cos^2\theta I_{x(S_1)} - 2\sin\theta\cos\theta P_{xy(S_1)} = \frac{1}{5}I_{y(S_1)} + \frac{4}{5}I_{x(S_1)} - \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} \\
I_{Y(S_1)} = \cos^2\theta I_{y(S_1)} + \sin^2\theta I_{x(S_1)} + 2\sin\theta\cos\theta P_{xy(S_1)} = \frac{4}{5}I_{y(S_1)} + \frac{1}{5}I_{x(S_1)} + \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} \\
I_{Z(S_1)} = I_{X(S_1)} + I_{Y(S_1)} = \frac{1}{5}I_{y(S_1)} + \frac{4}{5}I_{x(S_1)} - \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} + \frac{4}{5}I_{y(S_1)} + \frac{1}{5}I_{x(S_1)} + \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} = I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)} \\
P_{XY(S_1)} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)}\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy(S_1)} = \frac{2}{5}\left(-I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)}\right) + \frac{3}{5}P_{xy(S_1)}
\end{cases}$$

$$I_{x(S1)} = \left[\left(\rho 2H^2.\frac{H^2}{12}\right)_{\square\rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{4}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12}} \right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}} \right] = \left(\rho 2H^2 - \frac{\rho H^2}{2}\right).\frac{H^2}{12} = \frac{MH^2}{12}$$

$$I_{y(S1)} = \left[\left(\rho 2H^2.\frac{(2H)^2}{12}\right)_{\square\rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{2}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{3}} \right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}} \right] = \left(\rho 2H^2 - \frac{\rho H^2}{2}\right).\frac{H^2}{3} = \frac{MH^2}{3}$$

$$I_{z(S1)} = I_{x(S1)} + I_{y(S1)} = M\frac{H^2}{12} + M\frac{H^2}{3} = M\frac{5H^2}{12}$$

$$P_{xy}=\left[(0)_{\square\rho 2H^2}-\left(0+\frac{\rho H^2}{2}.\left(-\frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{4}\right)\right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}}\right]=\frac{MH^2}{24}\quad \text{avec } \overline{\mathrm{OG}}\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{4},0\right)$$

$$=>\begin{cases} I_{X(S_1)}=\frac{1}{5}\frac{MH^2}{3}+\frac{4}{5}\frac{MH^2}{12}-\frac{4}{5}\frac{MH^2}{24}=\frac{MH^2}{10} \\ I_{Y(S_1)}=\frac{4}{5}\frac{MH^2}{3}+\frac{1}{5}\frac{MH^2}{12}+\frac{4}{5}\frac{MH^2}{24}=\frac{19MH^2}{60} \\ I_{Z(S_1)}=M\frac{H^2}{3}+M\frac{H^2}{12}=M\frac{5H^2}{12} \\ P_{XY(S_1)}=\frac{2}{5}\left(-M\frac{H^2}{3}+M\frac{H^2}{12}\right)+\frac{3}{5}M\frac{H^2}{24}=\frac{-3MH^2}{40} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_X=\frac{MH^2}{6}+\left[\frac{mL^2}{3}\right]+\left[\frac{mL^2}{3}\right]=\frac{MH^2}{6}+\frac{m2L^2}{3} \\ I_Y=\frac{MH^2}{4}+\left[0+\frac{5mH^2}{4}\right]+\left[0+\frac{5mH^2}{4}\right]=\frac{MH^2}{4}+\frac{5mH^2}{2} \\ I_Z=\frac{5MH^2}{12}+\left[\frac{mL^2}{3}+\frac{5mH^2}{4}\right]+\left[\frac{mL^2}{3}+\frac{5mH^2}{4}\right]=\frac{5MH^2}{12}+\frac{m2L^2}{3}+\frac{5mH^2}{2} \\ P_{XY}=\frac{-3MH^2}{40}+\left[0+m\left(-HL\sqrt{\frac{5}{4}}\right).0\right]+\left[0+mHL\sqrt{\frac{5}{4}}.0\right]=\frac{-3MH^2}{40} \end{cases}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html