

Simulation : [http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008\\_2009/seance12.htm](http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008_2009/seance12.htm)

1.1

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \left( \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_{G_2} \cdot \bar{\omega} \right) + \left( \frac{1}{2} m v_{G_3}^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{G_2} &= \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BG_2} = L\dot{\theta}(-\sin\theta \bar{I}_x + \cos\theta \bar{I}_y) - \frac{L}{2}\dot{\theta}(\sin\theta \bar{I}_x + \cos\theta \bar{I}_y) \\ \text{avec} \quad &= L\dot{\theta}\left(-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\bar{I}_x + L\dot{\theta}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\bar{I}_y = -\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{I}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{I}_y \\ \bar{v}_{G_3} &= \frac{d}{dt}\left(2L\cos\theta + \frac{L}{2}\right)\bar{I}_x = -2L\sin\theta\dot{\theta}\bar{I}_x \end{aligned}$$

$$T = \left( \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m \frac{L^2}{4} (8\sin^2\theta + 1) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m 4L^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2 \right) \Rightarrow T = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + 3mL^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2$$

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i$$

$$\delta OG_3 = -2L \sin\theta \delta\theta \bar{I}_x \quad \text{et} \quad \bar{F} = F(\theta) \bar{I}_x \Rightarrow \delta\tau = Q_\theta \delta\theta = M \delta\theta - 2Fl \sin\theta \delta\theta$$

Equation de Lagrange

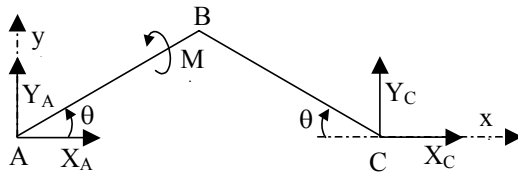
$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \right] \Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} \left( \frac{2}{3} + 6\sin^2\theta \right) + 6mL^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 = M - 2FL \sin\theta$$

1.2

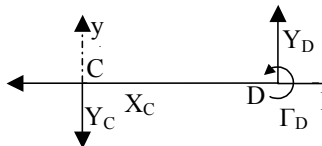
Théorème du moment en A sur ABC

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = \bar{m}_{e,A} \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{M}_A(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \bar{m}_{e,A}(M(\theta), Y_C)$$

$$\text{où } \bar{M}_A = \bar{M}_{A,1} + \bar{M}_{A,2} = (\bar{I}_A \cdot \bar{\omega}) + (\bar{M}_{G_2} + \overline{AG_2} \times \bar{R}_2) \quad \text{et} \quad \bar{m}_{e,A} = (M(\theta) + 2L \cos\theta Y_C) \bar{I}_z$$



$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= \left( \frac{ml^2}{3} \dot{\theta} \bar{I}_z \right) + \left( -\frac{ml^2}{12} \dot{\theta} \bar{I}_z + m \frac{3l^2}{4} \dot{\theta} \bar{I}_z \right) = ml^2 \dot{\theta} \bar{I}_z \\ \Rightarrow Y_C &= \frac{ml^2 \ddot{\theta} - M(\theta)}{2l \cos\theta} \end{aligned}$$



Théorème de la résultante en x sur CD

$$\left[ \frac{d}{dt} R_x = \sum F_{e,x} \right] \quad \frac{d}{dt} R_x(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \sum F_{e,x}(X_C, F(\theta))$$

$$\text{où } R_x = m v_{G3,x} = -2mL \sin\theta \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow X_C = F(\theta) + 2mL(\sin\theta \ddot{\theta} + \cos\theta \dot{\theta}^2)$$

2.

Forces :Force de pesanteur en G, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>Force de réaction normale et frottement pour empêcher le glissement en O<sub>1</sub> et O<sub>2</sub> (N<sub>1</sub>, T<sub>1</sub>, N<sub>2</sub>, T<sub>2</sub>)

Couple moteur en C sur la roue arrière

Degré de liberté :3 solides en 2D  $\Rightarrow$  3 x 3 paramètres cinématiques de position.

8 condition cinématique entre ces solides :

Roulement sans glissement en O<sub>1</sub> = 2 conditions cinématiquesRoulement sans glissement en O<sub>2</sub> = 2 conditions cinématiquesLiaison rotoïde (=de type rotule) en C<sub>1</sub> = 2 conditions cinématiquesLiaison rotoïde (=de type rotule) en C<sub>2</sub> = 2 conditions cinématiques

9 - 8 = 1 ddl. On prend le paramètre x décrivant la position du centre de gravité G de la moto.

2.1

Théorème de la résultante cinétique sur le système complet.

$$\left[ \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e \right] = M\bar{g} + 2m\bar{g} + T_1 \bar{I}_x + N_1 \bar{I}_y + T_2 \bar{I}_x + N_2 \bar{I}_y$$

$$\begin{cases} x : (M + 2m) \ddot{x} = T_1 + T_2 & (1) \\ y : 0 = -Mg - 2mg + N_1 + N_2 & (2) \end{cases}$$

**Théorème du moment cinétique en  $C_2$  sur la roue 2 (force de liaison  $X_2$  et  $Y_2$ )**

$$\boxed{\frac{d}{dt} \overline{M}_{C_2} = \sum \overline{m}_{e,C_2} + \overline{m} \overline{v}_G \times \overline{v}_{C_2} \Big|_{G=C_2} = \overline{m}_{e,C_2}} \quad \text{avec } \overline{\omega} = -\omega_2 \overline{l}_z$$

**Condition cinématique :**  $\overline{v}_{O_2} = 0 = \overline{v}_{C_2} + \overline{\omega}_2 \times \overline{C_2 O_2} = \dot{x} \overline{l}_x - \omega_2 r \overline{l}_x \Rightarrow \overline{\omega}_2 = -\frac{\dot{x}}{r} \overline{l}_z$

$$\boxed{\overline{M}_{C_2} = \overline{I}_{C_2} \cdot \overline{\omega}} = -m i^2 \frac{\dot{x}}{r} \overline{l}_z$$

$$\frac{d}{dt} \overline{M}_{C_2} = \overline{m}_{e,C_2} \Rightarrow -m i^2 \frac{\ddot{x}}{r} \overline{l}_z = r T_2 \overline{l}_z \Rightarrow T_2 = -m \frac{i^2}{r^2} \ddot{x} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1) : T_1 = (M + 2m) \ddot{x} + m \frac{i^2}{r^2} \ddot{x} \quad (4)$$

## 2.2 Théorème du moment cinétique en $O_L$ sur la moto et les 2 roues (force de liaison $X_L$ et $Y_L$ )

C'est un couple moteur interne au système, donc il n'est pas pris en compte quand on travaille sur le système entier.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \overline{M}_{O_L} = \sum \overline{m}_{e,O_L} + \overline{R} \times \overline{v}_{O_L} = \overline{m}_{e,O_L}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1 = -\omega_1 \overline{l}_z = -\frac{\dot{x}}{r} \overline{l}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

$$\text{où } \overline{M}_{O_L} = \overline{M}_{O_L,M} + \overline{M}_{O_L,r1} + \overline{M}_{O_L,r2} \text{ et } \begin{cases} \overline{M}_{O_L,M} = \underbrace{\overline{M}_{G,M}}_{=0} + \overline{O_L G} \times \overline{R} = -h M \dot{x} \overline{l}_z \\ \overline{M}_{O_L,r1} = \overline{I}_{O_1} \cdot \overline{\omega} + m \overline{O_L C_1} \times \overline{v}_{O_1} = -m (i^2 + r^2) \frac{\dot{x}}{r} \overline{l}_z \\ \overline{M}_{O_L,r2} = \overline{M}_{G_2,r2} + \overline{O_L G_2} \times \overline{R}_{r2} = -m \frac{i^2}{r} \dot{x} \overline{l}_z - m r \dot{x} \overline{l}_z \end{cases}$$

$$\left( -hM - m(i^2 + r^2) \frac{1}{r} - m \frac{i^2}{r} - m r \right) \ddot{x} = -\frac{L}{3} Mg - Lmg + L N_2$$

$$\Rightarrow N_2 = \left( \frac{M}{3} + m \right) g - \left( hM + 2m \frac{(i^2 + r^2)}{r} \right) \frac{\ddot{x}}{L} \quad (5)$$

En réinjectant (5) dans (2), on obtient :

$$N_1 = \left( \frac{2M}{3} + m \right) g + \left( hM + 2m \frac{(i^2 + r^2)}{r} \right) \frac{\ddot{x}}{L}$$

## 2.3 La moto démarrera en se cabrant lorsque la force verticale entre le sol et la route avant s'annule :

$$N_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_{\max} = \frac{Lr \left( \frac{M}{3} + m \right) g}{hMr + 2m(i^2 + r^2)}$$

**Théorème du moment cinétique en  $C_L$  sur la roue arrière (force de liaison  $X_L$  et  $Y_L$ )**

$$\boxed{\frac{d}{dt} \overline{M}_{C_L} = \sum \overline{m}_{e,C_L} + \overline{R} \times \overline{v}_{O_{C_L}} = \overline{m}_{e,C_L}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1 = -\omega_1 \overline{l}_z = -\frac{\dot{x}}{r} \overline{l}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

$$-m i^2 \frac{\ddot{x}}{r} = -C + r T_1 \Rightarrow \text{avec (4) : } C = \left( m \frac{i^2}{r^2} + (M + 2m) + m \frac{i^2}{r^2} \right) r \ddot{x} \Rightarrow C_{\max} = \left( Mr + 2m \left( \frac{i^2 + r^2}{r} \right) \right) \ddot{x}_{\max}$$

Ou par **l'équation de mouvement** : Le couple moteur travaille et dépense de l'énergie.

$$\begin{cases} T = T_M + T_{r1} + T_{r2} = \frac{M \dot{x}^2}{2} + 2 \left( \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m i^2}{2} \left( -\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 \right) = \left( \frac{M}{2} + m \frac{r^2 + i^2}{r^2} \right) \dot{x}^2 \\ V = 0 \\ Q_x \delta x = C \delta \theta = \frac{C}{r} \delta x \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = Q_x} \Rightarrow \left( M + 2m \frac{r^2 + i^2}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{C}{r} \Rightarrow C = \left( Mr + 2m \frac{r^2 + i^2}{r} \right) \ddot{x}$$

3.1

$$\mu = AE; OA = L_0; x = DC \Rightarrow L_0 - x - H = \mu \cos \theta \text{ et } \mu = \frac{H}{\sin \theta} \Rightarrow x = L_0 - H \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right] \text{ avec } \dot{x} = -\dot{\mu} \cos \theta + \mu \sin \theta \dot{\theta} = H \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \dot{\theta} = \frac{H}{\sin^2 \theta} \dot{\theta}$$

$$V = \frac{L}{2} mg \sin \theta + \frac{k}{2} (x - L_0)^2 = \frac{L}{2} mg \sin \theta + \frac{k}{2} H^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right)^2$$

3.2 1 coordonnée  $\theta$  :

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} MH^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 \right] \text{ et } V = \frac{L}{2} mg \sin \theta + \frac{k}{2} H^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right)^2$$

$$L = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} MH^2 \frac{1}{\sin^4 \theta} \dot{\theta}^2 \right] - \frac{L}{2} mg \sin \theta - \frac{k}{2} H^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 :$$

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + MH^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 \ddot{\theta} - 4MH^2 \frac{\cot \theta}{\sin^4 \theta} \dot{\theta}^2 - \left[ -\frac{1}{2} MH^2 \dot{\theta}^2 \left( -4 \frac{\cot \theta}{\sin^4 \theta} \right) - \frac{L}{2} mg \cos \theta + kH^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4 \theta} \right) \ddot{\theta} - 2MH^2 \frac{\cot \theta}{\sin^4 \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{L}{2} mg \cos \theta - \frac{kH^2}{\sin^2 \theta} \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right) = 0$$

2 coordonnée  $\theta$  et  $x$  :

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right] \text{ et } V = \frac{L}{2} mg \sin \theta + \frac{k}{2} (x - L_0)^2$$

$$\text{avec une contrainte : } \delta x - \frac{H}{\sin^2 \theta} \delta \theta = 0 \text{ et un multiplicateur de Lagrange } \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 \left( \delta x - \frac{H}{\sin^2 \theta} \delta \theta = 0 \right)$$

$$\Rightarrow L = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right] - \frac{L}{2} mg \sin \theta - \frac{k}{2} (x - L_0)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} : \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} - \left[ -\frac{L}{2} mg \cos \theta \right] = -\lambda_1 \frac{H}{\sin^2 \theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} : M \ddot{x} - \left[ -\frac{k}{2} 2(x - L_0) \right] = \lambda_1 \\ \dot{x} - \frac{H}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4 \theta} \right) \ddot{\theta} - 2MH^2 \frac{\cot \theta}{\sin^4 \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{L}{2} mg \cos \theta - \frac{kH^2}{\sin^2 \theta} \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right) = 0$$

3 coordonnée  $\theta$ ,  $x$  et  $\mu$  :

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right] \quad \text{et} \quad V = \frac{L}{2} mg \sin \theta + \frac{k}{2} (x - L_0)^2$$

avec deux contraintes :  $\lambda_1 (\delta x + \delta \mu \cos \theta - \mu \sin \theta \delta \theta = 0)$  et  $\lambda_2 (\delta \mu \sin \theta + \mu \cos \theta \delta \theta = 0)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} : \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} - \left[ -\frac{L}{2} mg \cos \theta \right] = -\lambda_1 \mu \sin \theta + \lambda_2 \mu \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} : M \ddot{x} - \left[ -\frac{k}{2} 2(x - L_0) \right] = \lambda_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \mu} : 0 = \lambda_1 \cos \theta + \lambda_2 \sin \theta \\ \dot{x} + \dot{\mu} \cos \theta - \mu \sin \theta \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\mu} \sin \theta + \mu \cos \theta \dot{\theta} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left( \frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4 \theta} \right) \ddot{\theta} - 2MH^2 \frac{\cot \theta}{\sin^4 \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{L}{2} mg \cos \theta - \frac{kH^2}{\sin^2 \theta} \left( 1 + \frac{1}{\tan \theta} \right) = 0$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez [CFAO.Matlab@ulb.ac.be](mailto:CFAO.Matlab@ulb.ac.be)

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>