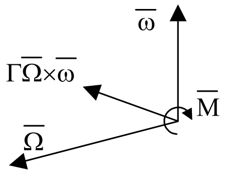
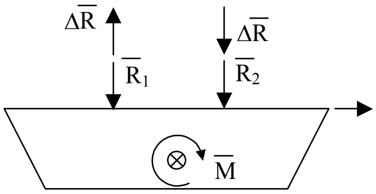
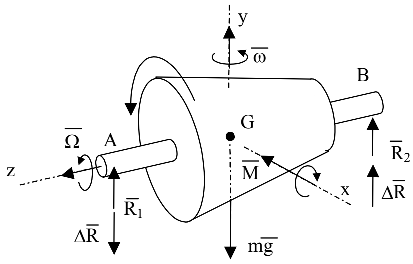
Simulation : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/2008_2009/seance10.htm

1.

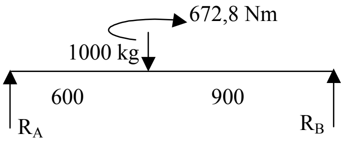






$M = \Gamma\Omega\omega$ où $\Gamma = mR^2 = 40$ kgm²; $\Omega = 523{,}6\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = \dfrac{v}{R} = 0{,}032125\ \mathrm{s}^{-}$

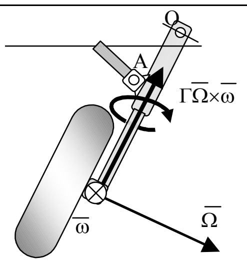
=> $M = 672{,}8\ Nm$ tend à faire descendre l'avant du bateau.



$$\left.\begin{aligned} &0{,}6R_A + 672{,}8 - 0{,}9R_B = 0 \\ &R_A + R_B = 9810 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_A = 5437 \text{ et } R_B = 4372$$

La réaction en B est plus élevée que si le rotor était à l'arrêt.

2.



L'axe OA subit un moment de torsion de $\Gamma\Omega\omega$ où Γ=2,97 kgm² ; Ω= 148,15 s^{-1} ; ω= 0,5 s^{-1} => C = 220 Nm

3. 2 paramètre de position dépendant (θ, φ) : $\pi - \theta = 2\varphi$ => 1 ddl

Lagrangien $\boxed{L = T - V}$

$$\boxed{T = \left[\frac{1}{2}\overline{\omega}\,\overline{\overline{I}}_O\,\overline{\omega}\right]_{OA} + \left[\frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}\,\overline{\overline{I}}_{G_2}\,\overline{\omega}\right]_{AB}}$$

avec

$$\overline{v}_{G_1} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_{G_2} = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG_2} = -L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x - L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y + L\cos\varphi\dot{\varphi}\overline{1}_y - L\sin\varphi\dot{\varphi}\overline{1}_x$$

$$\underset{\dot{\varphi}=-\frac{\dot{\theta}}{2}}{=}\left(-L\sin\theta\dot{\theta} + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_x + \left(-L\cos\theta\dot{\theta} - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2m\left(L^2\dot{\theta}^2 + L^2\frac{\dot{\theta}^2}{2} - L^2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 + L^2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{2m4L^2}{12}\left(-\frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2$$

$$T = ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$\boxed{V = V_{OA} + V_{AB} + V_\Gamma}$

avec
$$V_{OA} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad V_{AB} = 2mg\left(-L\sin\theta + L\sin\varphi\right) = 2mg\left(-L\sin\theta + L\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
Le couple est constant donc il dérive d'un potentiel : $V(\Gamma)$

Comme l'angle φ diminue lorsque le moment Γ travail, le travail est négatif.
$$\boxed{dV = -d\tau} = -(M(\varphi)d\varphi) = -(-\Gamma d\varphi) = -(\Gamma\frac{d\theta}{2})$$

$$\Rightarrow V = -mgl\left(\frac{5}{2}\sin\theta - 2\cos\frac{\theta}{2}\right) - \Gamma\frac{\theta}{2}$$

Thérorème de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0} \ : \ ml^2\frac{3}{2}\ddot\theta - 2ml^2\ddot\theta\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2} - \frac{5}{2}mgl\cos\theta - mgl\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\Gamma}{2} = 0$$

Autre méthode : Par les Q_i :

avec

Sur base de $\bar v_{G_1}$: $\delta\overline{OG_1} = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\bar 1_y - \frac{L}{2}\cos\theta\bar 1_y\right)\delta\theta$

Sur base de $\bar v_{G_2}$: $\delta\overline{OG_2} = \left(-L\sin\theta + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\bar 1_x + \left(-L\cos\theta - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\bar 1_x$

le travail du couple : $\delta\tau = -\Gamma\delta\varphi$ avec $d\theta = -2d\varphi \Rightarrow \delta\tau = -\Gamma\delta\varphi = \Gamma\frac{\delta\theta}{2}$

$$Q_\theta = \sum_h \bar F_h.\frac{\partial\bar\varphi_h}{\partial q_y} = (-mg).\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\right) + (-2mg).\left(-L\cos\theta - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right) + \frac{\Gamma}{2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta} : ml^2\frac{3}{2}\ddot\theta - 2ml^2\ddot\theta\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{2}mgl\cos\theta + mgl\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\Gamma}{2}$$

3.2 Le point C est au niveau de la glissière

R_C (1 composante inconnue) : Th. mom. cinétique en O pour l'ensemble du système

$$\boxed{\frac{d\bar M_O}{dt}\left(\theta,\dot\theta,\ddot\theta\right) \underset{\bar v_O = 0}{=} \bar m_{e,O}\left(\Gamma, \underline{\underline{R_C}}, mg\right)}$$

$$\boxed{\bar M_O = \bar M_{O,OA} + \bar M_{O,AB}}$$

- $\bar M_{O,OA} = \bar{\bar I}_O.\bar\omega = -\frac{mL^2}{3}\dot\theta\bar 1_z$;
- $\bar M_{O,AB} = \bar M_{G_2,AB} + \overline{OG_2}\times\bar R = \begin{bmatrix} \frac{2m4L^2}{12}\dot\varphi - 2m\left(\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(L\cos\theta + L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot\theta \\ -\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot\theta \end{bmatrix}\bar 1_z$

$$= \left[\frac{2mL^2}{3}\dot\varphi + 2m\begin{pmatrix} -\cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ -\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}L^2\dot\theta\right]\bar 1_z$$

$$\bar M_{O,AB} = \left[-\frac{2mL^2}{3}\frac{\dot\theta}{2} + 2m\left(-1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)L^2\dot\theta\right]\bar 1_z$$

$$\Rightarrow \bar M_O = \left[-\frac{8}{3} + 2\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\right]mL^2\dot\theta\bar 1_z$$

$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt} \underset{\bar{v}_O=0}{=} \bar{m}_{e,O}}$ en projetant sur l'axe z : une seule inconnue (R_C)

$$m\left[-\frac{33}{24}+\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right]L^2\ddot{\theta}+m\left[\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]L^2\dot{\theta}^2$$

$$=-\Gamma+LR_c\cos\varphi-\frac{L}{2}\cos\theta mg-\left(L\cos\theta+L\cos\varphi\right)2mg=-\Gamma+LR_c\cos\varphi-\left(\frac{5}{2}\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}2\right)Lmg$$

=> R_C

(Autre possibilité : Th. mom. cinétique en A pour la tige AB seule.)

R_O (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique et connaissant R_C

$$\boxed{\frac{d\bar{R}}{dt}=\bar{F}_e} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right)=\left.\bar{F}_e\right|_x\left(\underline{\underline{R_{O,x}}},R_C\right) \\ \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_y\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right)=\left.\bar{F}_e\right|_y\left(\underline{\underline{R_{O,y}}},R_C,mg\right) \end{cases}$$

$$\bar{R}=m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right]+2m\left[\left(-L\sin\theta\dot{\theta}+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_x+\left(-L\cos\theta\dot{\theta}-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x+2m\left(-L\sin\theta\dot{\theta}+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt}=R_{O,x}-R_C\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,x}$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}+2m\left(-L\cos\theta\dot{\theta}-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt}=R_{O,y}-mg-2mg+R_C\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,y}$$

R_A (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique pour OA seule (avec R_O connue)

$$\frac{d\bar{R}}{dt}=\bar{F}_e \quad \begin{cases} \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right)=\left.\bar{F}_e\right|_x\left(R_{O,x},\underline{\underline{R_{A,x}}}\right) \\ \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_y\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right)=\left.\bar{F}_e\right|_y\left(R_{O,y},\underline{\underline{R_{A,y}}},mg\right) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{R}=m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x\right)}{dt}=R_{O,x}+R_{A,x} \Rightarrow R_{A,x} \quad \text{et} \quad \frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)}{dt}=R_{O,y}+R_{A,y}-mg \Rightarrow R_{A,y}$$

ex4seance11.zip

---

4. 1 degré de liberté mais 2 coordonnées de Lagrange : θ_1,θ_2
liées par la condition (avec u suivant BC et v perpendiculaire à BC)

$$\bar{v}_C=\bar{v}_B+\bar{\omega}\times\overline{BC}=\lambda\overline{BC}=L\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\bar{1}_u+\left(L\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2\right)\bar{1}_v$$

=> $L\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0$ => <u>Contrainte</u> : $\delta\theta_2+\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\delta\theta_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_2}\delta\theta_2+\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_1}\delta\theta_1=0 \quad (\lambda)$

=> Théorème de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}}$

$$\boxed{T=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}\right)}$$

$$T=\left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\left(\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_2^{\,2}+L^2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_2^{\,2}\right)$$

$$=> T=\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}_2^{\,2}+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_h.\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i Q_i\delta q_i} => Q_i$$

$$\left.\overline{OG_1}\right|_y=\frac{L}{2}\cos\theta_1 => \left.\delta\overline{OG_1}\right|_y=-\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1=\frac{\partial\bar{\varphi}_1}{\partial\theta_1}\delta\theta_1 \text{ et } \bar{F}_{G_1}=mg\bar{1}_y$$

$$\left.\overline{OG_2}\right|_y=L\cos\theta_1+\frac{L}{2}\cos\theta_2 => \left.\delta\overline{OG_2}\right|_y=-L\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2=\frac{\partial\bar{\varphi}_2}{\partial\theta_1}\delta\theta_1+\frac{\partial\bar{\varphi}_2}{\partial\theta_1}\delta\theta_2 \text{ et } \bar{F}_{G_2}=mg\bar{1}_y$$

En tenant compte du couple M appliqué à la barre AB, le travail virtuel du couple pour un déplacement virtuel $\delta\theta_1$ vaut $M\delta\theta_1$

$$=>\begin{cases}Q_{\theta_1}=mg\bar{1}_y.\left(-\frac{L}{2}\sin\theta_1\bar{1}_y\right)+mg\bar{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\bar{1}_y\right)=-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M\\ Q_{\theta_2}=mg\bar{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\bar{1}_y\right)=-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2\end{cases}$$

=>2 équations + l'équation de contrainte $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}+\lambda\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}+\lambda\\ L\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0\end{cases}$

$$=>\begin{cases}\left(\frac{4mL^2}{3}\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_2-\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_2\right)-\left(+\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\ \qquad=-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M+\lambda\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ \ (1)\\ \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_1-\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1\right)-\left(-\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\ \qquad=-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2+\lambda\ \ (2)\\ L\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0\ (3)\ => \ \cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_1=\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\ \ (3)\end{cases}$$

En résolvant ce système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(2):\left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\frac{L}{2}mg\sin\theta_2=+\lambda$$

$$(2)->(1):\frac{mL^2}{2}\left(\left(\frac{8}{3}-\cos^2(\theta_2-\theta_1)\right)\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_2-\sin(\theta_2-\theta_1)\left(\dot{\theta}_2^{\,2}+\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}\right)\right)$$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-3\sin\theta_1\right)\quad(1)$$

$$\text{et avec (3) : }\left[\frac{mL^2}{3}\left(4-\cos^2(\theta_2-\theta_1)\right)\right]\ddot{\theta}_1-\left[\frac{mL^2}{3}\frac{\sin 2(\theta_2-\theta_1)}{2}\left(1+\cos(\theta_2-\theta_1)\right)\right]\dot{\theta}_1^{\,2}$$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-3\sin\theta_1\right)$$

4.2.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}\end{cases}$$

$$\delta\overline{OG_1}\Big|_y=-\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1\ \text{ et }\ \overline{F}_{G_1}=mg\overline{1}_y$$

$$\delta\overline{OG_2}\Big|_y=-L\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2\ \text{ et }\ \overline{F}_{G_2}=mg\overline{1}_y$$

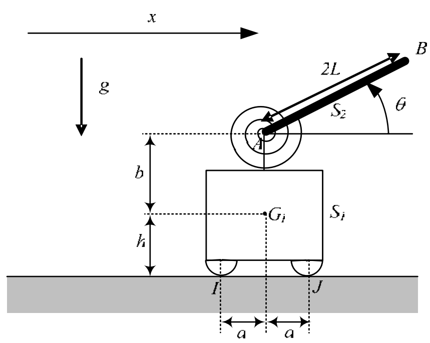
$$L\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\overline{1}_u+\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2\right)\overline{1}_v\ =>\ \delta\overline{OC}\Big|_{v\perp BC}=\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\delta\theta_1+L\delta\theta_2\right)\overline{1}_\perp\ \text{ et }\ \overline{F}_C=F\overline{1}_\perp$$

$$=>\begin{cases}Q_{\theta_1}=mg\overline{1}_y.\left(-\dfrac{L}{2}\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+mg\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+F\overline{1}_\perp.\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\right)\overline{1}_\perp\\[2ex]\quad=-\dfrac{3L}{2}mg\sin\theta_1+FL\cos(\theta_2-\theta_1)\\[2ex]Q_{\theta_2}=mg\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\overline{1}_y\right)+F\overline{1}_\perp.\left(+L\overline{1}_\perp\right)=-\dfrac{L}{2}mg\sin\theta_2+FL\end{cases}$$

Nous retrouvons les mêmes équations qu'au point (5.1) où λ est remplacé par *FL*.

5.1 Deux degrés de liberté $\{x,\theta\}$

Deux coordonnées généralisées $\{x,\theta\}$



5.2 $\overline{R}=m_1\overline{v}_{G_1}+m_2\left(\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AG_2}\right)=m_1\dot{x}\overline{1}_x+m_2\left(\dot{x}\overline{1}_x+L\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}\right)=\left((m_1+m_2)\dot{x}-m_2L\dot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_x+m_2L\dot{\theta}\cos\theta\overline{1}_y$

5.3 $\overline{M_A}=\left[m_1\overline{AG_1}\times\overline{v}_A\right]+\left[m_2\overline{AG_2}\times\overline{v}_A+\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]=m_1b\dot{x}\overline{1}_z-m_2L\sin\theta\dot{x}\overline{1}_z+\frac{m_2 4L^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z$

5.4 $\overline{R}_I=-T_1\overline{1}_x+N_1\overline{1}_y;\ \overline{R}_J=-T_2\overline{1}_x+N_2\overline{1}_y;\ \overline{R}_A=X_A\overline{1}_x+Y_A\overline{1}_y;\ \overline{F}_{G_1}=-m_1g\overline{1}_y;\ \overline{F}_{G_2}=-m_2g\overline{1}_y;\ \overline{C}_A=-C\theta\overline{1}_z$

5.5 6 inconnues de réactions + 2 degrés de libertée => 8 équations pour tout identifier

Th. résultante cinétique sur $\{S_1{+}S_2\}$: $\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-T_1-T_2 \quad (1)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=N_1+N_2-(m_1+m_2)g \quad (2)\end{cases}$

Th. résultante cinétique sur $\{S_2\}$: $\begin{cases}m_2\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=X_A \quad (3)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=Y_A-m_2g \quad (4)\end{cases}$

ou $\left[\text{Th. résultante cinétique sur } \{S_1\} : \begin{cases}m_1\ddot{x}=-X_A-T_1-T_2 \quad (5)\ =\ (3)-(1)\\ 0=N_1+N_2-Y_A-m_1g \quad (6)\ =\ (4)-(2)\end{cases}\right]$

Th. moment cinétique en A sur $\{S_1\}$: $m_1b\ddot{x}=-aN_1+aN_2+C\theta-(b+h)(T_1+T_2)$ (7)

Th. moment cinétique en A sur $\{S_2\}$: $\dfrac{d}{dt}\overline{M}_A=m\overline{v}_G\times\overline{v}_A+\overline{m}_{e,A}$

$$=> -m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)$$

ou $\left[\begin{array}{l}\text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_1+S_2\} : \dfrac{d}{dt}\overline{M}_A=m\overline{v}_G\times\overline{v}_A+\overline{m}_{e,A}\\ => m_1b\ddot{x}-m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\dfrac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}\\ \qquad =-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-L\cos\theta m_2g-aN_1+aN_2-(b+h)(T_1+T_2) \quad (9)=(7)+(8)\end{array}\right]$

=> 6 équations indépendantes (1,2,3,4,7,8) + équations de Coulomb $(T_1=fN_1 \ \ (10))$ et $(T_2=fN_2 \ \ (11))$

5.6 2 équations de mouvement : l'équation (8) ainsi que la résolution de l'équation (1) et (2) avec la (10) et (11)

$$=>\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\dfrac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-f\left(m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2+(m_1+m_2)g\right) \quad (12)\end{cases}$$

=>Dans le cas d'un frottement nul :

$$\boxed{\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\dfrac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=0 \quad (12)\end{cases}}$$

5.7 par le théorème de Lagrange :

$$T=\left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2+L^2\dot{\theta}^2-2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{m_2 4L^2}{12}\dot{\theta}^2\right] \text{ et } V=m_2gL\sin\theta \ => L=T-V$$

Couple du ressort de torsion : $\overline{C}=-C\theta\overline{1}_z$ opposé à l'accroissement $\delta\theta$ => $Q_\theta=-C\theta$

$$=>\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=Q_x \ : \ m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-L\sin\theta\ddot{\theta}-L\cos\theta\dot{\theta}^2\right)=0\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta \ : \ m_2\left(\left(\dfrac{4L^2}{12}+L\right)\ddot{\theta}-L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)-\left[-m_2gL\cos\theta-m_2L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}\right]=-C\theta\\ => m_2\left(\dfrac{4L^2}{3}\ddot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)+m_2gL\cos\theta=-C\theta\end{cases}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html