

## Dynamique des systèmes

### Formulaire

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad \text{ou} \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

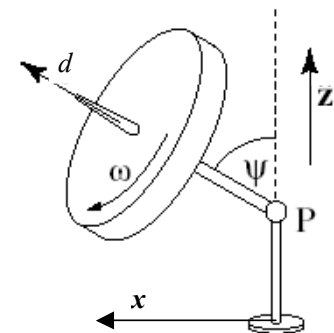
$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{avec} \quad T = \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_h}{\partial q_i}$$

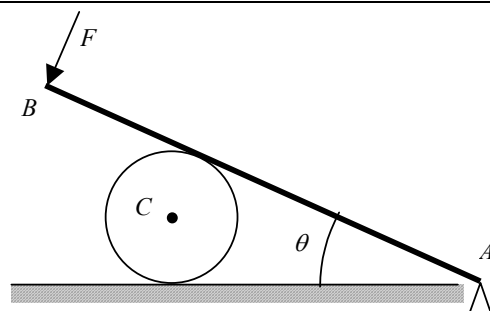
$$\bar{C}_g = \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega} \Rightarrow \frac{d \bar{M}_G}{dt} = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g$$

1. Un disque possède un moment d'inertie  $I$  par rapport à son axe de révolution et tourne avec une vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens indiqué ci-dessous. La distance entre le pivot  $P$  et le centre de masse du disque est  $h$ .

1. Déterminer les **forces et les couples** qui agissent sur le système.
2. Sans donner les équations de mouvement, expliquez précisément le **mouvement**.



2. Une tige homogène pesante  $AB$ , de masse  $m$  et de longueur  $L$ , est fixée en  $A$  et subit à son extrémité libre  $B$  une force  $F$  qui lui est perpendiculaire et dont la norme est constante. Elle s'appuie sur un disque circulaire de masse  $2m$ , de rayon  $R$  et de centre  $C$  de manière telle qu'il y a roulement sans glissement entre les deux solides, alors que le disque peut se déplacer sans frottement sur l'Horizontale passant par  $A$  (le système est dans un plan vertical fixe).

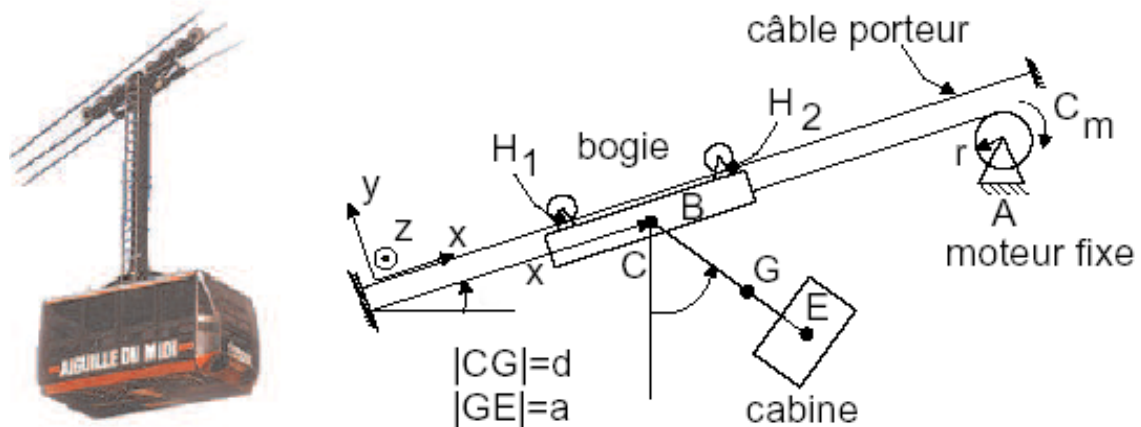


1. Ecrire une intégrale première du mouvement de la tige en justifiant la méthode utilisée.
  2. Déterminer la réaction de liaison exercée par la tige sur le disque (en fonction de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ )
3. Un téléphérique comporte un bogie  $B$  de masse  $m$  et d'inertie  $I_C$  autour de son centre de gravité  $C$ . Les galets du bogie (dont les masses et les inerties sont négligeables) roulent sans glisser sur le câble porteur, faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale ( $H_1$  et  $H_2 \equiv$  points de contact galet/câble). Le bogie  $B$  est tracté via un second câble par le moteur fixe placé en  $A$ . Le moteur exerce un couple  $C_m$  sur une poulie de rayon  $r$  dont on néglige la masse et l'inertie.

L'ensemble  $T$ , composé de la cabine du téléphérique et de l'axe  $CE$ , de masse  $M$  et d'inertie  $I_E$  (autour du point  $E$ ), est articulé en  $C$  par rapport au bogie  $B$ . Le centre de gravité de l'ensemble  $T$  correspond au point  $G$ .  $|CG| = d$ ,  $|GE| = a$ .

On notera  $x$  l'avancement du bogie sur le câble porteur et  $\theta$  l'angle que fait l'axe du téléphérique par rapport à la verticale.

On demande d'écrire l'équation du mouvement

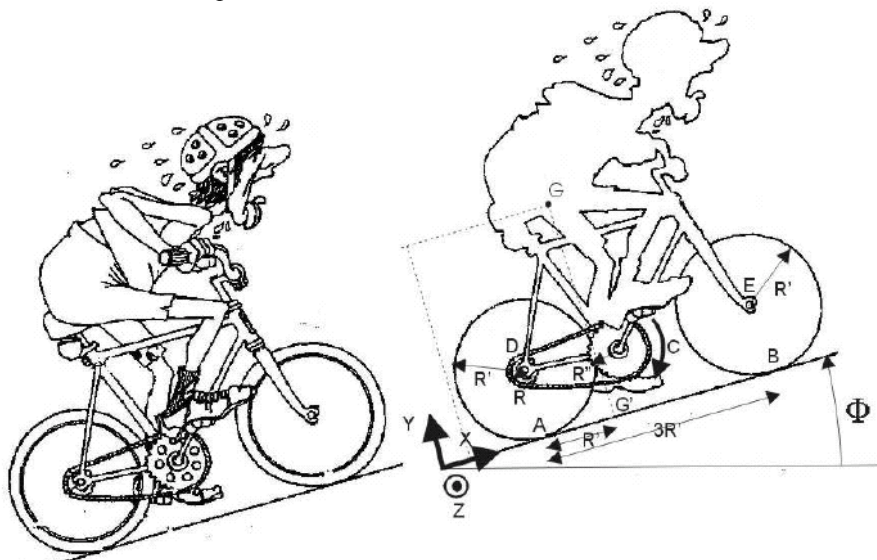


4. Un cycliste grimpe une pente d'angle  $\theta$ . L'ensemble constitué par le cadre du vélo et le cycliste est considéré comme un solide indéformable  $S$ , de masse  $M$  et de centre de gravité  $G$ . La roue arrière a une masse  $M'$ , un rayon  $R'$ , et son centre de gravité est en  $D$  sur l'axe de rotation de la roue arrière par rapport au cadre; idem pour la roue avant ( $M'$ ,  $R'$ ) autour de  $E$  (seule la contribution de la masse circonférentielle des roues est prise en compte pour leurs propriétés d'inertie).

Le plateau du pédalier  $S''$  sur lequel le cycliste exerce un couple  $C$  a un rayon  $R''$ ; ce plateau tourne par rapport au cadre autour du point  $O$  (la masse du plateau est considérée comme négligeable). La roue arrière est entraînée par l'intermédiaire d'une chaîne (supposée inextensible et sans poids) reliant le plateau du pédalier  $S''$  avec le pignon de la roue arrière, de centre  $D$  et de rayon  $R$  (ce pignon de masse négligeable est solidaire de la roue arrière).

Autres données (pas toutes nécessairement utiles...) :

- La distance entre les points  $A$  et  $B$  de contact des roues vaut  $3R'$ . Le point  $G$ , centre de gravité de  $S$  se trouve à une hauteur du sol égale à  $H$ ,  $AG'$  étant égal à  $R'$  ( $G'$  est la projection de  $G$  sur le sol);
- Toutes les liaisons sont sans perte.



**Déterminer la (ou les ) équation(s) différentielle(s) du mouvement.**

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>