

## Effet gyroscopique - Dynamique des systèmes

### Formulaire

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

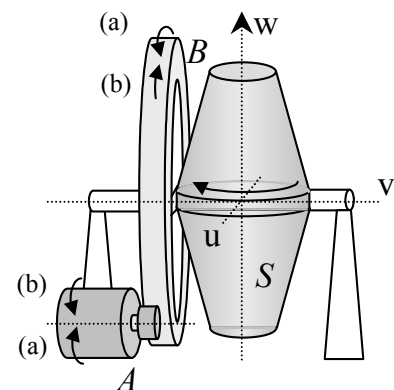
$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad \text{ou} \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{avec} \quad T = \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial q_i}$$

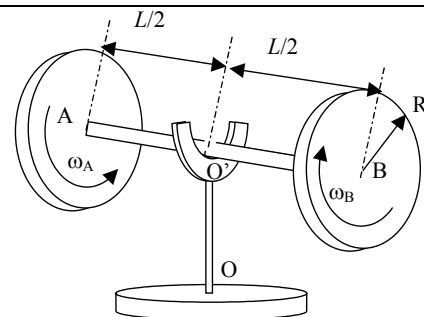
$$\bar{C}_g = \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega} \Rightarrow \frac{d \bar{M}_G}{dt} = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g$$

1. Tout bateau est naturellement soumis au roulis. Un bateau comportant une installation médicale doit être stabilisé. Pour se faire, on se propose d'utiliser le dispositif ci-contre. Un gyroscope  $S$ , comprenant un solide en rotation tournant suivant  $-\bar{l}_W$  comme montré sur le dessin, est solidaire de la roue  $B$ . Cette dernière peut être entraînée par le moteur  $A$ .
  1. Placer ce dispositif sur le bateau pour qu'il contre le roulis du bateau.
  2. En fonction de la réponse à la question 1, déterminer pour chacune des deux directions de roulis le sens rotation du moteur  $A$  ?



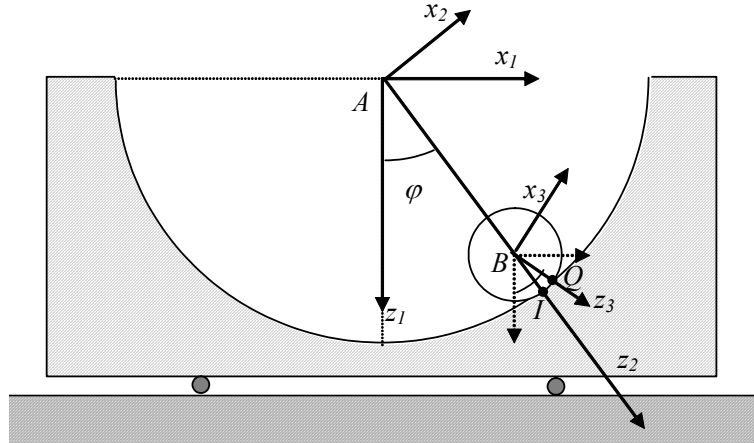
Rem : le roulis fait pivoter le bateau suivant son axe longitudinal.

2. Deux disques homogènes identiques de masse  $m$  et de rayon  $R$  sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur  $L$ , autour de laquelle ils peuvent tourner librement et séparément (vitesse angulaire  $\omega_A$  et  $\omega_B$ ). Le système est relié comme indiqué à un axe vertical  $OO'$ . En fonction de la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  (précession forcée), déterminer le moment de flexion qui va agir sur la barre  $AB$  en fonction du sens de rotation de cette dernière.

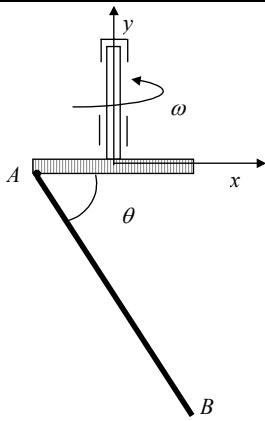


3. Le problème est plan (2-D). Le système, constitué de deux corps, est soumis à l'effet de la gravité suivant 3 :
  - (a) corps n1 : benne supportée par deux rouleaux. Les rouleaux, de masse et d'inertie négligeables, permettent à la benne de "glisser" horizontalement sans frotter sur un sol plat. Le profil de la partie interne de la benne est circulaire de centre  $A$ 
    - masse  $M$ , inertie  $I$
    - distance  $AB = L$
  - (b) corps n2 : disque de rayon  $a$  et de centre  $B$ . En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser à l'intérieur de la benne
    - disque de masse homogène  $m$
    - disque de rayon  $a$ .

**Déterminer** la (ou les) équation(s) décrivant le mouvement par la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**.  
Déterminer la (ou les) **réaction(s) de liaison** entre le disque et la benne.



4



Un disque de rayon  $L/4$  tourne à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe placé verticalement, suivant l'axe  $y$ . Une tige mince homogène  $AB$  de masse  $m$  et de longueur  $L$  est articulée en un point  $A$  de la périphérie du disque de manière à pouvoir osciller dans le plan vertical tournant  $x,y$ .

Déterminer l'équation différentielle du mouvement.  $\ddot{\theta} = f(\theta)$

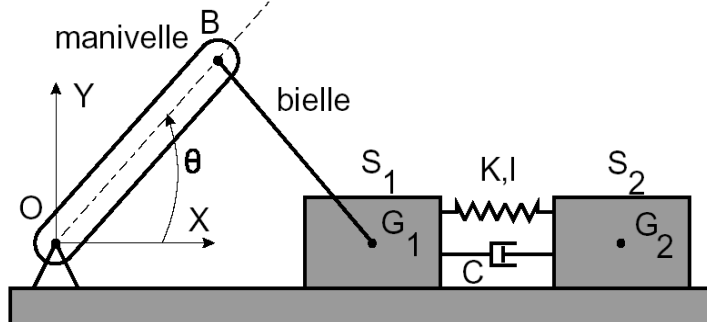
Déterminer les composantes de la réaction de liaison exercée en  $A$  par le disque sur la tige en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$

Si la tige est lâchée sans vitesse initiale relative dans la position où  $\theta = 60^\circ$ , déterminer entièrement, uniquement en fonction des données du problème, toutes les composantes de réaction de liaison en  $A$  pour  $\theta = 90^\circ$ .

5

Le piston du système bielle-manivelle est réalisé à partir de deux solides identiques  $S_1$  et  $S_2$  de masse  $m$  et de centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  respectivement. Les deux parties du piston glissent sans perte sur une glissière horizontale et sont reliées l'une à l'autre grâce à un ressort de raideur  $K$  et longueur initiale  $l$ , et à un amortisseur de constante  $C$ . La bielle et la manivelle sont des barres homogènes de longueur identique  $l$  mais la masse de la bielle est négligeable tandis que la masse de la manivelle vaut  $m$ . Toutes les liaisons sont sans perte.

On demande les équations du mouvement du système mécanique.



Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>