

Tenseur d'inertie

Formulaire

$$\text{Element du tenseur d'inertie : } I^{\alpha\beta} = \int_{\text{système}} (x^i x^j \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta) dm$$

$$\text{Changement d'axe : } I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$$

$$\text{Axes principaux : } \tan 2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\text{Steiner : } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m(a^\alpha \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta)$$

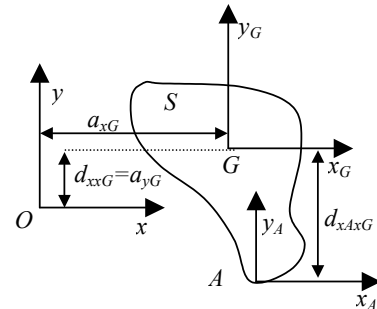
Rappel : Utilisation de la formule de Steiner

Pour calculer le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe x passant par O :

$$I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2$$

Parfois, il est plus facile de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par G :

$$I_{x_A} = I_{x_G} + m d_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m (d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2)$$



$$P_{xy} = \int xy dm = \int (x_G + a_{xG})(y_G + a_{yG}) dm = P_{x_G y_G} + m a_{xG} a_{yG} + a_{xG} \underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{yG} \underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

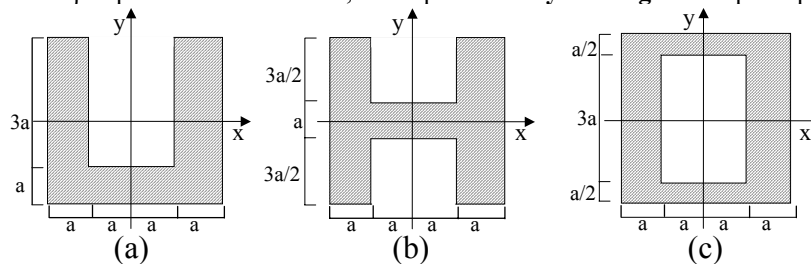
$$\text{ou } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M(a^\alpha \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - M a^x a^y \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + m a_{xG} a_{yG} \text{ avec } x = x_G + a^x$$

$$\text{En pratique : } \overline{OG}(a_{xG}, a_{yG}, a_{zG}) \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m(a_{yG}^2 + a_{zG}^2) \text{ et } P_{xy} = P_{x_G y_G} + m(a_{xG} a_{yG})$$

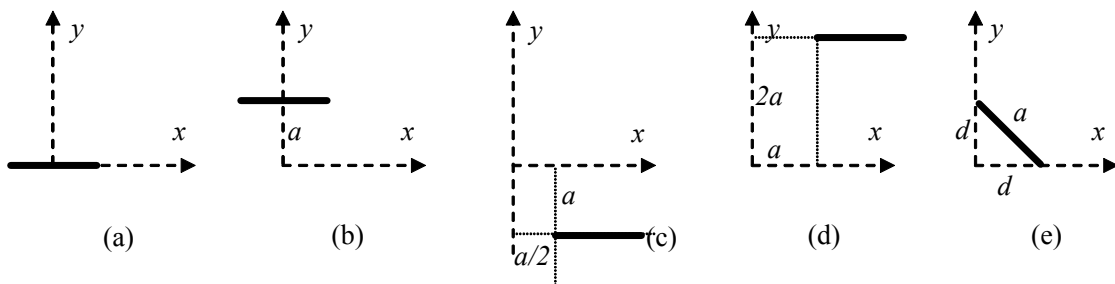
Des animations matlab sont disponibles sur le site : <http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/matlab.html>

- Déterminer les moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côté L , l par rapport à ses médianes.

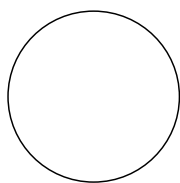
Déduire les moments d'inertie par rapport à x et y de chacune des trois plaques homogènes de même masse spécifique superficielle ρ représentées ci-dessous, ainsi que leurs **rayons de giration** par rapport à ces axes



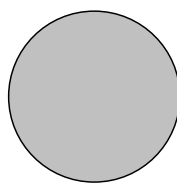
- Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y ainsi que le produit d'inertie P_{xy} des tiges minces homogènes de masse spécifique ρ et de longueur a .



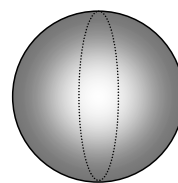
3. Déterminer les moments d'inertie d'un cercle, d'un disque et d'une sphère.
Déduire les moments d'inertie d'un demi-cercle, d'un demi-disque et d'une demi-sphère.



Cercle



Disque



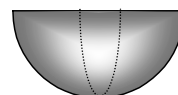
Sphère



$\frac{1}{2}$ Cercle

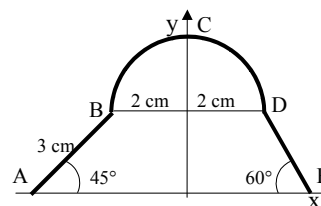


$\frac{1}{2}$ Disque

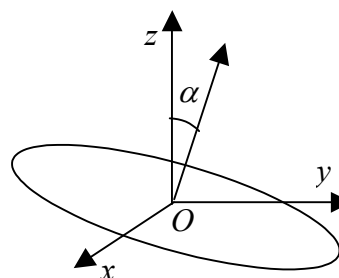


$\frac{1}{2}$ Sphère

4. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y de la tige mince homogène ABCDE de masse spécifique ρ ayant la forme indiquée ci-contre. (BCD=demi-cercle)



5. Calculer le tenseur d'inertie associé au disque S dans le repère $Oxyz$. L'axe de rotation du disque fait un angle α avec l'axe Oz .



Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>