

NOM, PRENOM : .....  
NUMERO°: .....

Examen de mécanique rationnelle 2  
2<sup>ième</sup> session 26/08/2008 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que les brouillons**

$$\frac{d}{dt} \bar{R} = \sum \bar{F}_e$$

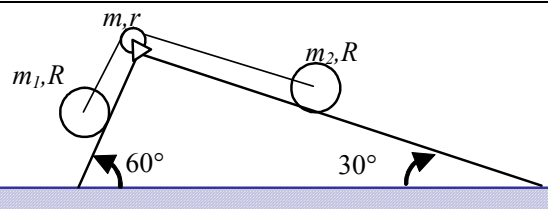
$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{AB} \times \bar{R} \quad \text{ou} \quad \bar{M}_A = m \bar{AG} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum \bar{F}_h \cdot \bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

**Question 1 : questions rapides (5 points)**

Deux roues cylindrique et homogène de rayon R, de masse  $m_1$  et  $m_2$  roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre. Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique (de masse  $m$  et de rayon  $r$ ) lié au sol par une rotule.



Peut-on considérer la tension dans la corde comme constante ? Justifiez votre réponse en utilisant le théorème du moment cinétique sur la poulie. (2 points)

Déterminer les produits d'inertie dans le système d'axe Oxyz de l'appareil photo représenté ci-dessous.

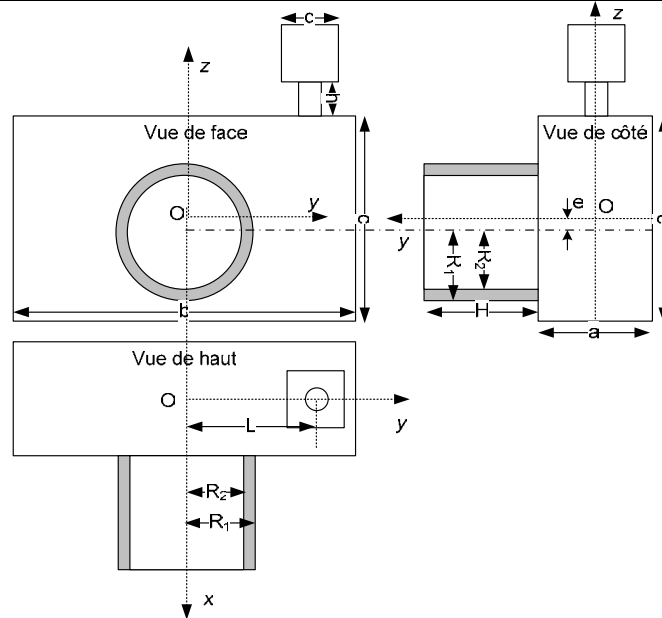
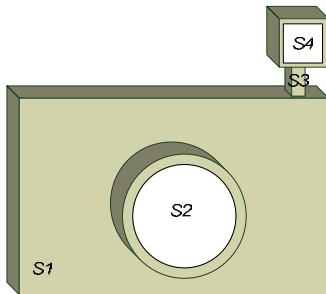
S1 = **parallélépipède** de côté  $abc$  et de masse  $M_1$ .

S2 = l'objectif est un **cylindre creux** de longueur  $H$  et de rayon extérieur  $R_1$  et intérieur  $R_2$  et de masse  $M_2$ .

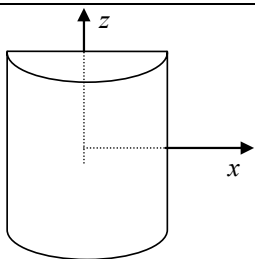
S3 = la pièce sur laquelle est fixée le flash est un **cylindre** de longueur  $h$  et de rayon  $r$  et de masse  $M_3$ .

S4 = le flash est un **cube** de côté  $d$  et de masse  $M_4$ .

(1 point)

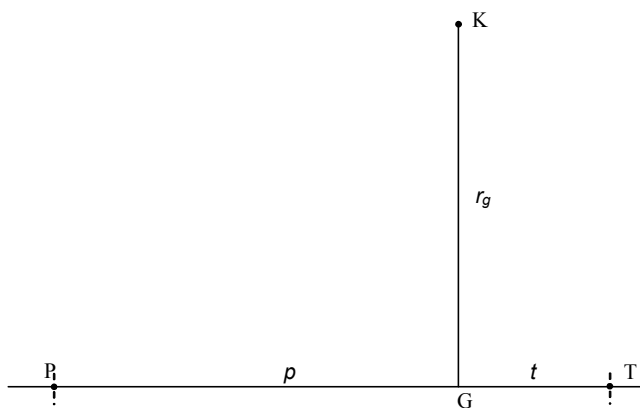


Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe  $x$  du demi-cylindre de hauteur  $H$  et de rayon  $R$  en partant des données connues du cylindre plein (1 point)



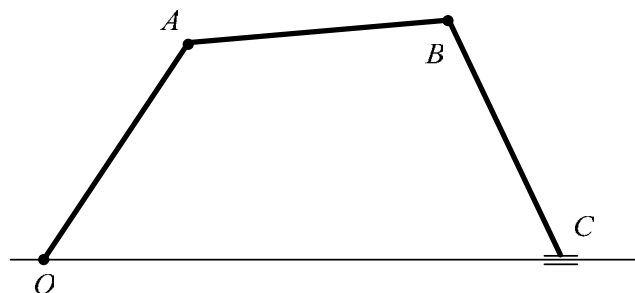
Si l'on veut réduire un système à deux points  $P$  et  $T$  imposés, ceux-ci ne sont pas nécessairement conjugués. Pour déterminer le moment d'inertie correcteur, nous devons trouver le rayon de giration correcteur.

Déterminer graphiquement ce rayon correcteur sachant que  $pt \pm r_{cor}^2 = r_g^2$  et que  $r_g (=GK)$  est déjà placé sur le graphique. (1 point)



**Question 2 : (5 points)**

Soit trois barres pesantes, homogènes, identiques, de masse  $m$  et de longueur  $L$ .  $OA$  est fixée en  $O$  par une rotule,  $AB$  est articulée à  $OA$  en  $A$ ,  $BC$  est articulée à  $AB$  en  $B$ .  $C$  est une glissière.



1. Combien de degrés de liberté comporte le système ? Justifiez.

2. Etablir les équations permettant de déterminer les équations de mouvement par Lagrange en choisissant judicieusement vos coordonnées généralisées pour simplifier le calcul de l'énergie cinétique (sans résoudre le système d'équations obtenu)

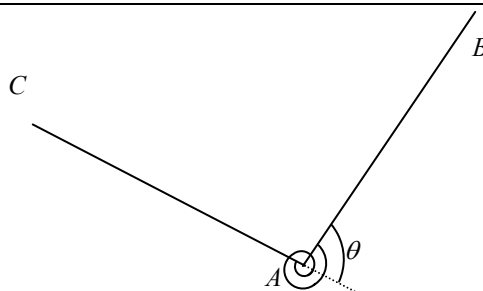
NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

**3.** Etablir les équations permettant de déterminer les différentes réactions en  $O$  et en  $C$  (sans détailler les calculs mais en montrant clairement comment établir chaque terme et chaque grandeur fondamentale)

**Question 3 : Deux barres articulées (4 points)**

On considère un système de deux tiges identiques  $AB$  et  $AC$  articulées en  $A$ , de masse  $m$ , de longueur  $2L$ . Elles sont liées par un ressort en spirale de constante  $C$ . L'ensemble des deux tiges glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le ressort exerce un couple proportionnel à la raideur de torsion du ressort,  $C$ , et à l'angle d'ouverture  $\theta$ .



Déterminer la ou les équations de mouvement du système articulé.

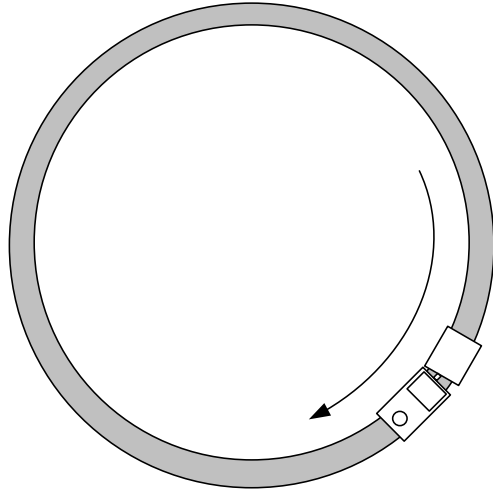
NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....



**Question 4 : Gyroscope (2 points)**

On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.

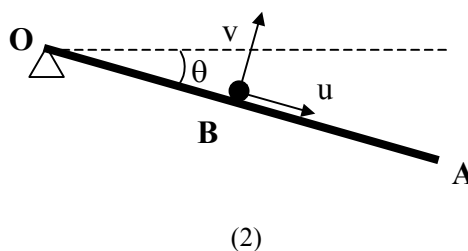
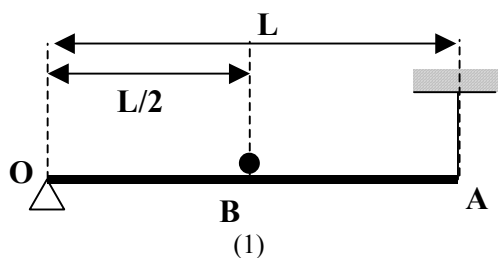
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.



**Question 5 : Trappe (4 points)**

Un individu situé au milieu d'une trappe qui se dérobe sous lui, *commence-t-il par glisser ou ses pieds décollent-ils par rapport à la trappe qui tombe ?*

Pour répondre à cette question, la modélisation suivante est utilisée. Une tige supposée homogène  $OA$  de masse  $m$  et de longueur  $L$ , porte en son centre une masse considérée comme ponctuelle  $B$ , également de masse  $m$ . Le coefficient de frottement entre la tige et la masse vaut  $f$ . Initialement, la tige est maintenue horizontale grâce à un fil qui maintient la barre en  $A$  (Figure 1). Au temps  $t = 0$ , on coupe le fil.



1. Si on se place dans l'hypothèse où, durant la chute, la masse reste solidaire de la tige (Figure 2), on demande : (3 points)
  - a) d'exprimer l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble (tige + masse);
  - b) d'exprimer les forces de liaison  $F_{lu}$  et  $F_{lv}$  exercées par la tige  $OA$  sur la masse  $B$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre la tige et l'horizontale;

NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

2. En déduire les conditions pour lesquelles il y aurait rupture d'équilibre entre la masse et la tige soit par glissement, soit par décollement. Pour chacun des cas, déterminer l'angle  $\theta_{max}$  correspondant. Préciser si l'individu va d'abord glisser ou décoller. (1 points)

NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

**BROUILLON**

NOM, PRENOM : .....NUMERO°: .....

---

**BROUILLON**