

## Lagrange (solide)

## Formulaire

Lagrangien :  $L = T - V$  avec  $T = \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right)$

$n$  coordonnée de Lagrange  $\Rightarrow n$  équation de Lagrange ( $i = 1, \dots, n$ )

$$Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad \delta \bar{r}_h = \sum_i \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$$

Equation de Lagrange :  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$  avec  $Q_i = Q_i^*$  (Force ne dérivant pas d'un potentiel) +  $Q_i$  (Force dérivant d'un potentiel)

Pour les forces dérivent d'un potentiel :  $\delta \tau = -\delta V$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_h \bar{F}_h \cdot \delta \bar{r}_h}_{\delta \tau} = \underbrace{\sum_i \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i}_{\delta V} = \underbrace{\sum_i Q_i \delta q_i}_{\delta V} = - \underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i}_{\delta V} \Rightarrow Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\text{Rem : } \frac{\partial m x}{\partial x} = m ; \quad \frac{\partial m x}{\partial \dot{x}} = 0 ; \quad \frac{\partial m \dot{x}}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{d m \dot{x}}{d x} = \frac{d m \dot{x}}{d t} \frac{d t}{d x} = m \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

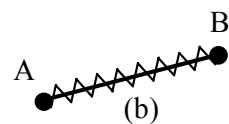
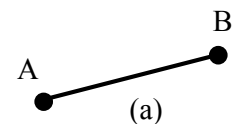
1. Deux points pesants A et B, de masse  $m$  chacun se déplacent sans frottement sur un plan horizontal Oxy.

Déterminer le nombre de degrés de liberté du système, choisir des coordonnées de lagrange, écrire la fonction Lagrangienne et déterminer le mouvement du système à partir des équation de Lagrange

- a) si A et B sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur  $l$ .  
b) si A et B sont reliés par un ressort linéaire de masse négligeable, de coefficient de rappel  $k$  et de longueur libre  $l$ .

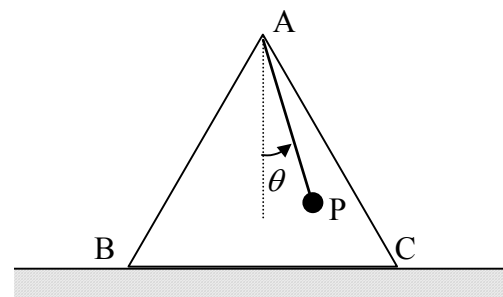
En quoi le mouvement trouvé dans le a) change-t-il

- c) si les deux points sont remplacés par une tige de masse  $m$  et de longueur  $l$  ?  
d) si le plan Oxy est vertical ?

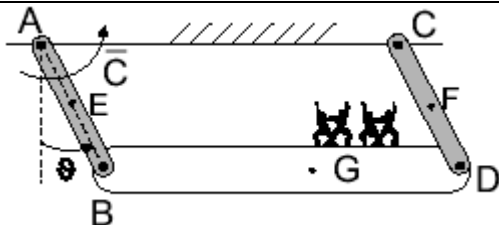


2. Un triangle est composé de 3 barres homogènes ABC, de côté  $L$ . Le triangle de masse  $M$  se déplace dans un plan vertical. Son côté BC glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet A est suspendu un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $l$  qui oscille dans le plan ABC.

Écrire la(les) équation(s) de Lagrange et leur intégrale(s) première(s).



3.



Le carrousel de la figure ci-contre est composé de 3 barres articulées. Les barres  $AB$  et  $CD$  sont identiques de longueur  $L$  et de masse  $m$ . Elles sont assimilées à des poutres. Les passagers se placent sur le solide  $BD$ . Ils se répartissent de façon aléatoire.

Le solide  $BD$  et les passagers ont une masse  $M$  et une inertie principale  $I_G$  connues ( $G$  : centre de gravité de  $BD$  + passagers). Le carrousel est entraîné par un moteur hydraulique agissant en  $A$  et développant un couple moteur connu  $C$ .

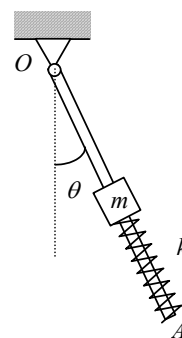
On demande l'équation différentielle du mouvement du carrousel.

4.

Une masse  $m$  glisse sans frottement sur une tige mince homogène  $OA$  de masse  $M$  et de longueur  $L$  qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité  $O$ . La masse est reliée à  $A$  par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel  $k$  et de longueur libre  $L - r_O$ .

En utilisant Lagrange :

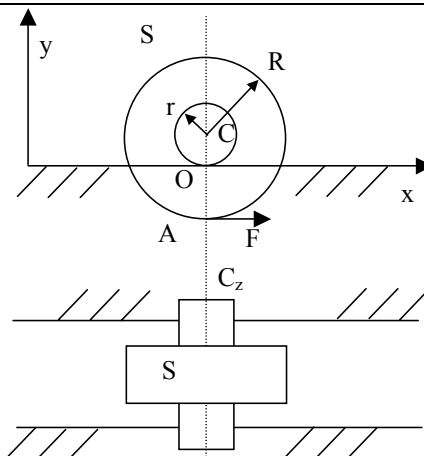
1. Déterminer les équations du mouvement
2. Déterminer les réactions de liaison de la masse  $m$  sur la tige.



5.

La poulie de rayon  $R$  roule sans glisser sur le sol horizontal grâce à deux ergots de rayon  $r$ . Le rayon de rotation du solide  $S$  (poulie + ergots) autour de l'axe  $C_z$  vaut  $i_c$  et sa masse est égale à  $m$ . Une force  $\vec{F} = F \vec{1}_x$  est appliquée en  $A$ .

Quel est (sont) l'(les) équation(s) permettant de définir le mouvement de la poulie ?



Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>