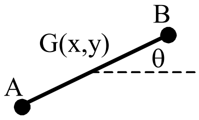
Faculté des Sciences Appliquées
Mécanique Rationnelle 2

Année académique 2007-2008
2e année de bachelier
Corrigé de la séance 9

1.a



3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ)
Dans un plan horizontal (V=0) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide indéformable.**

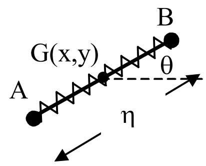
$$L=T=\left(\frac{M}{2}v_G{}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}\right)_{\text{solide}}=\frac{2.m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0\\ 0 & . & 0\\ 0 & 0 & I_z(A)+I_z(B)\end{pmatrix}.\bar{\omega}$$

$$=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A)=\underbrace{I_{z'}(A)}_{\substack{=0 \text{ masse}\\ \text{ponctuelle}}}+md^2=m\frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

$$\begin{cases} x: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \;=>\; \ddot{x}=0 \;=>\; \dot{x}=\dot{x}_0 \;=>\; x=\dot{x}_0 t+x_0\\ y: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \;=>\; \ddot{y}=0 \;=>\; \dot{y}=\dot{y}_0 \;=>\; y=\dot{y}_0 t+y_0\\ \theta: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 \;=>\; \ddot{\theta}=0 \;=>\; \dot{\theta}=\dot{\theta}_0 \;=>\; \theta=\dot{\theta}_0 t+\theta_0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

1.b 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ, η)
Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points.**



$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2=\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2\right)+\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_B}{dt}\right)^2\right)$$

avec $\mathrm{A}(x_G-\frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G-\frac{\eta}{2}\sin\theta)$ et $\mathrm{B}(x_G+\frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G+\frac{\eta}{2}\sin\theta)$

$$\bar{v}_{\mathrm{A}}(\dot{x}-\frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta+\frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y}-\frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta-\frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta}) \text{ et } \bar{v}_{\mathrm{B}}(\dot{x}+\frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta-\frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y}+\frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta+\frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta})$$

$$L=T-V=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{m}{4}\left(\dot{\eta}^2+\eta^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{k}{2}(\eta-l)^2$$

$$=>\begin{cases} x:\; \ddot{x}=0 \;=>\; \dot{x}=\dot{x}_0 t+x_0\\ y:\; \ddot{y}=0 \;=>\; \dot{y}=\dot{y}_0 t+y_0\\ \theta:\; \dfrac{m}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\eta^2\dot{\theta}\right)=0 \;=>\eta^2\ddot{\theta}+2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}=0 \quad \text{et} \quad \dfrac{m}{2}\eta^2\dot{\theta}=C=\text{intégrale première}\\ \eta:\; \dfrac{m}{2}\ddot{\eta}-\dfrac{m}{2}\eta\dot{\theta}^2+k\left(\eta-l\right)=0 \;=>\; \dfrac{m}{2}\ddot{\eta}-\dfrac{2C^2}{m\eta^3}+k\left(\eta-l\right)=0 \end{cases}$$

La 4$^{\text{ième}}$ équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T+V=E_0$

$$\frac{d\left(T+V\right)}{dt}=m(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y})+\frac{m}{4}\left(2\dot{\eta}\ddot{\eta}+2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2+2\eta^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right)+k\left(\eta-l\right)\dot{\eta}=0$$

$$=>\frac{m}{2}\ddot{\eta}-m\eta 2\left(\frac{C}{m\eta^2}\right)^2+k\left(\eta-l\right)=0$$

1.c Si on a une tige de longueur l seul le moment d'inertie est différent par rapport au premier cas :

$$L=T=\frac{m}{2}(\dot{x}_G{}^2+\dot{y}_G{}^2)+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 \;=> \text{Mouvement inchangé.}$$

1.d Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien L=T-V

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2-2mgy \quad \text{avec} \quad y:\; \ddot{y}=-g \;=>\; \dot{y}=-gt+\dot{y}_0 \;=>\; y=-g\frac{t^2}{2}+\dot{y}_0 t+y_0$$

2. 2 degrés de liberté (x, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.
Axes centrés en A : z = verticale descendante, x = horizontale dirigée de B vers C => vitesse angulaire positive suivant y.

$$T = T_M + T_m \quad \text{avec} \quad T_M = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \underbrace{M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}}_{=0\ (\omega=0)} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad \text{car le triangle ne tourne pas.}$$

Pour le point matériel de masse m : $T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{=0\ (\text{point matériel, } \overline{\overline{I}}_G=0)}$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AP} = \left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x - \ell\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_z \;\Rightarrow\; T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$V = -mg\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;:\; \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = A \text{ est une intégrale première : } M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \ell\cos\theta\dot{\theta}\right) = A$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \;:\; \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \quad (\text{ou directement avec } T + V = E_0)$$

---

3. Système à un seul degré de liberté (θ)=> 1 coordonnée de Lagrange => 1 équation de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel mais avec un couple extérieur => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.

$\overline{v}_B = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta$; $\overline{v}_D = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta$ => $\overline{v}_B = \overline{v}_D = \overline{v}_G$ => Le solide 2 est en translation curviligne : $\omega_2 = 0$

$$T = 2T_{tigeAB}\,2.\left(\frac{1}{2}mv_{G_1}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1.\overline{\overline{I}}_{G_1}.\overline{\omega}_1\right) + \left(\frac{M}{2}v_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2\right)$$

$$T = 2.\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{M}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\cos\theta = -\left(m+M\right)gL\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \left(m+M\right)gL\cos\theta$$

Le travail du couple C : $\delta\tau = C\delta\theta$

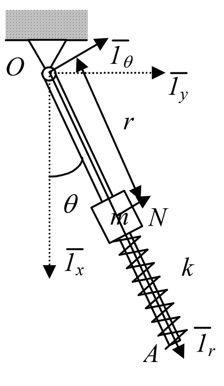
- $\delta\tau\left(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel}\right) = Q^*_\theta\delta\theta$ => $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^*_\theta}$ avec $Q^*_\theta = C$

  $$\Rightarrow m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} + \left(m+M\right)gL\sin\theta = C$$

- $\delta\tau\left(\text{Toutes les forces}\right) = Q_\theta\delta\theta$ => $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta}$ avec $Q_\theta = Q^*_\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} = C - \left(m+M\right)gL\sin\theta$

  $$\Rightarrow m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} = C - \left(m+M\right)gL\sin\theta$$

4.1



2 degrés de liberté (r, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.

Système {Tige (M) + masse (m)} : *Théorème de Lagrange.* Dans les axes polaires r θ

$$T = T_m + T_M \quad \text{où} \quad \begin{cases} T_M = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_O^2 + M\overline{v}_O.\left(\overline{\omega}\times\overline{OG}\right)}_{O \text{ fixe}} + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{I_G=0\ (\text{masse ponctuelle, } \overline{\overline{I}}_G=0)} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$=> L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2+Mg\frac{L}{2}\cos\theta+mgr\cos\theta-\frac{k}{2}\left(r-r_0\right)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0\ :\ m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta+k\left(r-r_0\right)=0 \quad (1)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0\ :\ mr^2\ddot{\theta}+m2r\dot{r}\dot{\theta}+\dfrac{ML^2}{3}\ddot{\theta}+Mg\dfrac{L}{2}\sin\theta+mgr\sin\theta=0 \quad (2)\end{cases}$$

4.2 Système {Tige (M)} : (m est au point P) *Théorème de Lagrange*

$$T=\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V=-Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\begin{cases}\bullet\ \boxed{Q_\theta=\overline{N}.\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}+M\overline{g}.\dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}}=-rN-Mg\dfrac{L}{2}\sin\theta\\ \text{où}\begin{cases}\overline{N}=-N\overline{1}_\theta \text{ et } \overline{OP}=r\overline{1}_r;\ \delta\overline{OP}=\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r}\delta r+\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}\delta\theta=\delta r\overline{1}_r+r\delta\theta\overline{1}_\theta \ => \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r}=\overline{1}_r \text{ et } \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}=r\overline{1}_\theta\\ M\overline{g}=Mg\overline{1}_x \text{ et } \overline{OG}=\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\overline{1}_x+\sin\theta\overline{1}_y\right);\ \delta\overline{OG}=\dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r}\delta r+\dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}\delta\theta=\dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)\delta\theta\\ => \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r}=0 \text{ et } \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}=\dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)\end{cases}\\ \bullet\ \boxed{Q_\theta=Q_\theta^*-\dfrac{\partial V}{\partial\theta}}=\overline{N}.\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}-\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=-rN-Mg\dfrac{L}{2}\sin\theta\end{cases}$$

L'équation de Lagrange

$$\begin{cases}\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\dfrac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta} \ => \ \dfrac{ML^2}{3}\ddot{\theta}=-rN-\dfrac{L}{2}\sin\theta Mg \ => N=-ML\dfrac{\dfrac{L}{3}\ddot{\theta}+\dfrac{g}{2}\sin\theta}{r}\\ \text{OU en utilisant directement ce qui a été calculé précédemment :}\\ \boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta^*} \text{ avec } L=\dfrac{1}{2}\dfrac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2+Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta \ => \dfrac{ML^2}{3}\ddot{\theta}+\dfrac{L}{2}\sin\theta Mg=-rN\end{cases}$$

Il est préférable d'utiliser les théorèmes généraux pour trouver les réactions de liaison (voir TP 8)

5. 1 degré de liberté (θ) => 1 coordonnées de Lagrange => 1 équations de mouvement
Il y a une force extérieure ne dérivant pas d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.
Axes : $Axyz$ avec x dans le sens de F et z est la verticale ascendante. $\bar{\omega} = \omega \bar{1}_z$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^*_\theta}$$

Il y a roulement sans glissement en O $(\bar{v}_O = 0)$: $\bar{v}_G = \dot{x}\bar{1}_x = \bar{\omega} \times \overline{OG} = -r\dot{\theta}\bar{1}_x$ => $\dot{x} = -r\dot{\theta}$

$L = T - V$ avec $V = Const$ et $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 m\, i_z{}^2$

Avec O' l'origine du repère $O'xy$

$$\boxed{Q^*_\theta = \sum_h F_h \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial \theta}} = \bar{F}.\frac{\partial \bar{\varphi}_A}{\partial \theta} = Q^*_\theta = (R-r)F$$

Les axes $x'y'$ sont les axes lié à la poulie et qui coincide avec xy à l'instant étudié.

- pour un petit déplacement $\delta\theta$, on a $\overline{O'A} = x\bar{1}_x - R\bar{1}_{y'}$ => $\delta\overline{OA} = \delta x\bar{1}_x - R\delta\bar{1}_{y'} = \delta x\bar{1}_x + R\delta\theta\bar{1}_{x'}$

  Or on a vu que $\dot{x} = -r\dot{\theta}$ donc $\delta x = -r\delta\theta$ => $\delta\overline{O'A} = (R-r)\delta\theta\bar{1}_x = \frac{\partial \bar{\varphi}_A}{\partial \theta}\delta\theta$
- le déplacement peut aussi se calculer à partir de O qui a une vitesse nulle :

  $\overline{OA} = -(R-r)\bar{1}_{y'}$ => $\delta\overline{OA} = (R-r)\delta\theta\bar{1}_{x'} = \frac{\partial \bar{\varphi}_A}{\partial \theta}\delta\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^*_\theta$: $m\left(r^2 + i_z{}^2\right)\ddot{\theta} = (R-r)F$ => $\ddot{\theta} = \frac{F(R-r)}{m\left(r^2 + i_z{}^2\right)}$

La poulie va reculer avec une accélération : $\ddot{x} = -\frac{Fr(R-r)}{m\left(r^2 + i_z{}^2\right)}$
