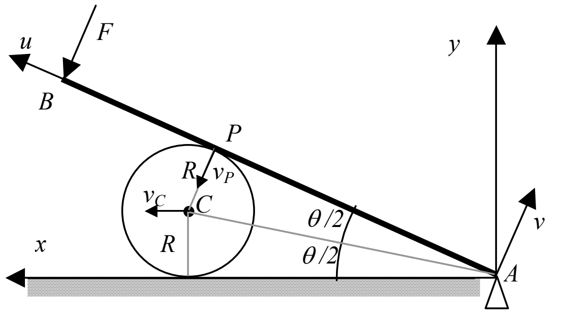
1. Forces : mg en C, centre du disque

Couples : $\begin{cases} \text{couple dû au poids : } mgh\sin\psi \text{ sortant de la feuille} \\ \text{couple gyroscopique : } \overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} \end{cases}$

Le couple gyroscopique s'oppose au couple dû à la pesanteur => la seule rotation provoquant ce couple est une rotation autour de l'axe z dans le sens négatif.
Le disque précessione autour de l'axe z, avec une vitesse angulaire égale à

$\overline{\Omega} = -\omega\overline{1}_d$ sur le dessin et $\Gamma = I$ => $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} = -mgh\sin\psi\,\overline{1}_y$ => $\overline{\omega} = -\dfrac{mgh}{I\omega}\overline{1}_z$

2.1 Considérons le système = {tige (m) + disque (2m)}}



Intégrale première => théorème de Lagrange pour définir une équation de mouvement ou par la conservation de l'énergie.
Calcul de <u>l'énergie cinétique</u> :

$T = T_{Tige} + T_{Disque}$

$$\begin{cases} T_{Tige} = \left(\dfrac{1}{2}\overline{\omega}_t.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_t\right)_{Tige} = \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_t = \dot{\theta}\overline{1}_z \quad (\text{avec } \dot{\theta} < 0) \\ T_{Disque} = \left(\dfrac{1}{2}mv_C^2 + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}_d.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d\right)_{Disque} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_d = \dot{\varphi}\overline{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{v}_C = \dfrac{d\overline{OC}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(R\,\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}\right)\overline{1}_x = -\dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\overline{1}_x \end{cases}$$

$$=> T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\dfrac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

1 degré de liberté, 2 coordonnées de Lagrange => deux solutions :

- utiliser les deux coordonnées de Lagrange et un multiplicateur de Lagrange
- remplacer une des coordonnées dans l'énergie cinétique pour n'utiliser qu'une coordonnée de Lagrange.

<u>Relation entre les deux paramètres</u> :

$\dot{\varphi}$ dépend de $\dot{\theta}$ => pour déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P (dans les axes liés à la tige $Auvw$ avec $u \,//\, AB$)

$\overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_{P\in\text{disque}}$

$$\text{avec} \begin{cases} \overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_t\times\overline{AP} = R\,\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}\dot{\theta}\overline{1}_v \\ \overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d\times\overline{CP} = \left(-\dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\cos\theta - \dot{\varphi}R\right)\overline{1}_u + \dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\sin\theta\,\overline{1}_v \end{cases}$$

$$=> \left(\overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_{P\in\text{tige}}\right)_{\overline{1}_u} => \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

$$\text{donc } T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\dfrac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\text{cotg}^2\theta\,\text{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2$$

Energie potentielle : $V = V_{\text{tige}} + V_{\text{disque}}$

L'intégrale première est $T + V = E_0$ car :

$$\begin{cases} m\overline{g} \text{ dérive d'une potentiel} \Rightarrow V = mg\dfrac{L}{2}\sin\theta \\ \overline{F} \text{ dérive d'un potentiel car } \overline{F} = -F\overline{1}_y = -\overline{grad}\ V = -\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow V = FL\theta \\ \overline{T}_P : \text{ la force de frottement (sans glissement) en } P \text{ ne travaille pas pour un petite déplacement } \delta\theta : \\ \text{Il n'y a pas de frottement en } Q \text{ donc pas de travail.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\dfrac{\theta}{2}} + \frac{mR^2}{2}\text{cotg}^2\theta\ \text{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta + FL\theta = E_0$$

2.2 Système = {disque (2m)} : Théorème du moment cinétique en C

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_C = \sum \overline{m}_{e,C}$$

$$\overline{M}_C = \overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d = \frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_z = -mR^2\text{cotg}\theta\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_C = -mR^2\text{cotg}\theta\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta}\overline{1}_z + mR^2\frac{1}{\sin^2\theta}\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\overline{1}_z + mR^2\text{cotg}\theta\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\overline{1}_z$$

$$\overline{m}_{e,C} = RT_P\overline{1}_z \Rightarrow T_P = mR\left(-\text{cotg}\theta\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} + \frac{\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{\text{cotg}\theta}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\right)$$

Système = {tige (m)} : Théorème du moment cinétique en A

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = \sum \overline{m}_{e,A}$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -R\text{cotg}\frac{\theta}{2}N_P - LF - \frac{L}{2}\cos\theta m\text{g} \Rightarrow N_P = -\frac{mL^2}{3R}\text{tg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \frac{LF}{R}\text{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{Lm\text{g}}{2R}\cos\theta\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

---

3. Equation de mouvement => Théorème de Lagrange sur le système complet = {Bogie + Ensemble T (cabine + axe CE)} :

1. Energie cinétique : $T = T_{Bogie} + T_{Cabine}$

$$T_{Bogie} = \left(\frac{1}{2}mv_C^2\right)_{Bogie} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_T = \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{Cabine} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{z_G}\dot{\theta}^2$$

avec $\overline{v}_G = \overline{v}_C + \overline{\omega}\times\overline{CG} = \left(\dot{x} + d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \left(d\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\overline{1}_y$ et $I_E = I_{z_G} + Ma^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\dot{x}\right) + \frac{1}{2}\left(I_E - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

2. Energie potentielle :

- Bogie

$$V_{Bogie} = mgx\sin\alpha \Rightarrow Q_{x(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg\sin\alpha \text{ et } Q_{\theta(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

($y_C = x\sin\alpha$; $\delta y_C = \sin\alpha\delta x$ et $F_y = -mg \Rightarrow Q_{x(mg)}\delta x = -mg\sin\alpha\delta x$)

- Ensemble T

$$V_T = Mg\left(x\sin\alpha - d\cos\theta\right) \Rightarrow Q_{x(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Mg\sin\alpha \text{ et } Q_{\theta(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -Mgd\sin\theta$$

($y_G = x\sin\alpha - d\cos\theta$; $\delta y_G = \sin\alpha\delta x + d\sin\theta\delta\theta$ et $F_y = -Mg \Rightarrow Q_{x(Mg)}\delta x = -Mg\sin\alpha\delta x$ et $Q_{\theta(Mg)}\delta\theta = -Mgd\sin\theta\delta\theta$)

3. Forces extérieures = Couple moteur

$$Q_{x(C_M)} = \frac{C_M}{r} \quad \text{car} \quad \delta\tau = Q_x \delta x = C_M \delta\alpha = C_M \frac{\delta x}{r}$$

4. Equation du mouvement : théorème de Lagrange

$$=> \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x = Q_{x(mg)} + Q_{x(Mg)} + Q_{x(C_M)} \\ => (m+M)\ddot{x} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{\theta} - Md\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}^2 = -(m+M)g\sin\alpha + \dfrac{C_M}{r} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = Q_{\theta(mg)} + Q_{\theta(Mg)} + Q_{\theta(C_M)} \\ => Md^2\ddot{\theta} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{x} + \left(I_E - Ma^2\right)\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta \end{cases}$$

---

4. Equation de mouvement => Théorème de Lagrange avec comme coordonnée généralisée x = 1 degré de liberté

$$\text{Solides :} \begin{cases} S(M) \text{ pour le cycliste} \\ S_1'(M',R',G_1',\omega_1') \text{ pour la roue arrière} \\ S_2'(M',R',G_2',\omega_2') \text{ pour la roue avant} \\ S''(0,R'',\omega'') \text{ pour le pédalier} \end{cases}$$

$$\text{Energie cinétique : } T = \underbrace{\frac{M\dot{x}^2}{2} + 0}_{cycliste} + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_1'^2}_{roue\ arrière} + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_2'^2}_{roue\ avant}$$

Energie potentielle :

$$V = Mg(x\sin\theta + H\cos\theta) + M'g\left((x-R')\sin\theta + R'\cos\theta\right) + M'g\left((x+2R')\sin\theta + R'\cos\theta\right)$$

$$=> V = (M+2M')gx\sin\theta + const$$

Contrainte de roulement sans glissement :

$$\overline{v}_{I_1} = \overline{v}_{G_1} + \overline{\omega}_1' \times \overline{G_1 I_1} => \omega_1' = \frac{\dot{x}}{R'} \quad \text{et} \quad \overline{v}_{I_2} = \overline{v}_{G_2} + \overline{\omega}_2' \times \overline{G_2 I_2} => \omega_2' = \frac{\dot{x}}{R'} => \delta\alpha' = \frac{\delta x}{R'}$$

Avec le rapport de rayons : $R''\omega'' = R\omega' => R''\delta\alpha'' = R\delta\alpha'$

Travail du couple : $\delta\tau = C\delta\alpha'' = C\dfrac{R}{R''}\delta\alpha' = C\dfrac{R}{R''.R'}\delta x$

Lagrangien : $L = \dfrac{1}{2}(M+4M')\dot{x}^2 - (M+2M')gx\sin\theta$

$$=> \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = Q_x^* : \boxed{(M+4M')\ddot{x} + (M+2M')g\sin\theta = C\frac{R}{R''.R'}}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html