Corrigé de la séance 6

1. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\Re} = m\overline{v}_G$	$\overline{m}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$	$T = \frac{1}{2} I_d \omega^2$ avec d=axe de rotation
a	$\overline{\Re} = -m\frac{b}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m}_O = -m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_y + m\frac{b^2}{6}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{b^2}{12}\omega^2$
b	$\overline{\Re} = m\frac{h}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m}_O = m\frac{h^2}{6}\omega\overline{1}_y - m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{h^2}{12}\omega^2$
c	$\overline{\Re} = \frac{m}{3}\omega\left(-h\overline{1}_y + b\overline{1}_z\right)$	$\overline{m}_O = m\frac{\left(b^2+h^2\right)}{6}\omega\overline{1}_x$	$T = m\frac{\left(b^2+h^2\right)}{12}\omega^2$
d	$\overline{\Re} = \frac{m}{3}\omega\frac{h^2-b^2}{\sqrt{h^2+b^2}}\overline{1}_x$	$\overline{m}_O = \frac{m}{12}\frac{\omega}{\sqrt{b^2+h^2}}\left[h\left(2h^2-b^2\right)\overline{1}_y + b\left(2b^2-h^2\right)\overline{1}_z\right]$ avec $\overline{\omega}^*$	$T = \frac{m}{12\left(b^2+h^2\right)}\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)\omega^2$ avec I_z^{**}

$$\underbrace{\overline{\overline{I}}_{O\,xyz}}_{Triangle} = \begin{pmatrix} m\frac{b^2+h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{h^2}{6} & -m\frac{bh}{12} \\ 0 & -m\frac{bh}{12} & m\frac{b^2}{6} \end{pmatrix}$$

Résultante (d) : Distance d'1 point $P_1(x_1, y_1)$ à la droite ax + by + c = 0,:

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Ou utiliser la formule classique de cinématique :

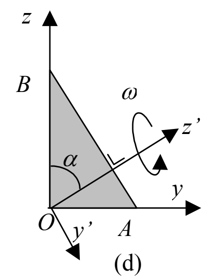
$$\overline{v}_G = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OG}$$

$$\overline{\omega}^* = \omega\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_y + \omega\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_z$$

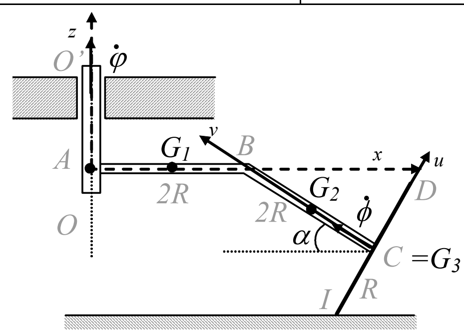
$$I_{z'}^{**} = \int y'^2 dm = \int (\cos\alpha\, y - \sin\alpha\, z)^2 dm$$

$$= \cos^2\alpha I_z + \sin^2\alpha I_y - 2\sin\alpha\cos\alpha P_{yz}$$

$$= \frac{m}{6}\frac{1}{b^2+h^2}.\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)$$



2. Les rotations subies par les trois solides ne sont pas identiques => calculer le moment cinétique de chaque solide. $\overline{M}_A = \overline{M}_{A(S1)} + \overline{M}_{A(S2)} + \overline{M}_{A(S3)}$



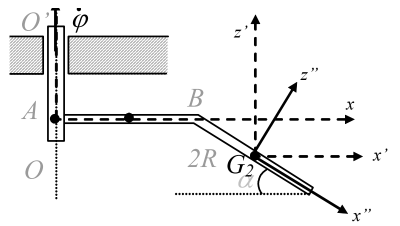
Solide 1 : A appartient à S_1

$$\overline{M}_{A(S1)} = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}_1 \underbrace{=}_{\text{ou}} \overline{M}_{G_1} + \overline{AG_1} \times m_1\overline{v}_{G_1}$$

$$\overline{M}_{A(S1)} = \begin{pmatrix} / & / & 0 \\ / & / & 0 \\ / & / & \frac{\rho 2R.(2R)^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \frac{\rho 8R^3}{3}\dot\varphi\overline{1}z$$

Axes $G_2x'y'z'$ avec $x'y'z'$ parallèle à $Axyz$.
Axes $G_2x''y''z''$ = rotation du repère $Ax'y'z'$ d'un angle α tel que x'' est suivant G_2C.

$$\boxed{\overline{M}_{A(S2)} = \overline{M}_{G_2} + \overline{AG_2} \times m_2\overline{v}_{G_2}} \text{ avec } A \notin S_2$$



$$\overline{AG_2} = \left(2R + R\cos\alpha\right)\overline{1}_x - \left(R\sin\alpha\right)\overline{1}_z \text{ et } \overline{v}_{G_2} = \left(2R + R\cos\alpha\right)\dot\varphi\overline{1}_y$$

$$I_{z''} = I_{y''} = \frac{mL^2}{12} = \frac{mR^2}{3} \text{ et } I_{x''} = P_{x''z''} = P_{x''y''} = P_{y''z''} = 0 \text{ et } \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 = \dot\varphi\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_{G_2} = \overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & / & 0 \\ 0 & / & 0 \\ 0 & / & \frac{m_2R^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot\varphi\sin\alpha \\ 0 \\ \dot\varphi\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{m_2R^2}{3}\dot\varphi\cos\alpha\,\overline{1}_{z''} = \frac{m_2R^2}{3}\dot\varphi\cos\alpha\left(\sin\alpha\,\overline{1}_{x'} + \cos\alpha\,\overline{1}_{z'}\right)$$

$$\overline{M_{G_2}} \underbrace{=}_{\alpha=30°} \rho R^3 \dot{\varphi}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\bar{1}_{x'}+\frac{1}{2}\bar{1}_{z'}\right)$$

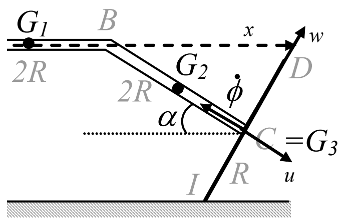
on peut aussi travailler directement dans les axes $G_2x'y'z'$ en calculant les éléments du tenseurs avec les changements d'axes : $P_{x'z'} = -\cos\alpha\sin\alpha I_{z''} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3$ et $I_{z'} = \cos^2\alpha I_{z''} = \frac{\rho R^3}{2}$

$$\overline{M_{G_2}} = -P_{x'z'}\omega_{z'}\bar{1}_{x'} - \underbrace{P_{y'z'}}_{=0}\omega_{z'}\bar{1}_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}\bar{1}_{z'} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \frac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'}$$

$$=> \begin{cases} \overline{M_{A\,tige\,2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \frac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'} + \rho 2R\left(\left(2R+R\cos\alpha\right)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z + \left(R\sin\alpha\right)\left(2R+R\cos\alpha\right)\dot{\varphi}\bar{1}_x\right) \\ => \overline{M_{A\,tige\,2}} = \rho\dot{\varphi}R^3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)\bar{1}_{x'} + \rho R^3\dot{\varphi}\left(10+4\sqrt{3}\right)\bar{1}_{z'} \end{cases}$$

Axes $Cuvw$ avec $C=G_3$; u suivant BC, $v//y$ et w suivant CD.

$\boxed{\overline{M_{A(S3)}} = \overline{M_{G_3}} + \overline{AG_3}\times m_3\overline{v_{G_3}}}$ avec $A \notin S_3$



$$\overline{OG_3} = \left(2R+2R\cos\alpha\right)\bar{1}_x - \left(2R\sin\alpha\right)\bar{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{v_{G_3}} = \frac{d\overline{OG_3}}{dt} = \left(2R+2R\cos\alpha\right)\dot{\varphi}\bar{1}_y$$

ou par la formule de cinématique de distribution des vitesses avec $\overline{\omega_{S_3}} = \left(-\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w$

$$\overline{v_{G_3}} = \underbrace{\bar{\omega}_{S_1}\times\overline{AC}}_{\bar{v}_{C\in tige}} = 2R\left(1+\cos\alpha\right)\dot{\varphi}\bar{1}_{y'} = \underbrace{\bar{\omega}_{S_3}\times\overline{IC}}_{\bar{v}_{C\in disque}} = R\left(\dot{\varphi}\sin\alpha+\dot{\phi}\right)\bar{1}_y$$

ce qui nous donne le lien entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\phi}$ (en égalant la vitesse de C appartenant à la tige et la vitesse de C appartenant au disque) avec $=> \dot{\phi} = \left(2\left(1+\cos\alpha\right)-\sin\alpha\right)\dot{\varphi} \underbrace{=}_{\alpha=30°} \left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}$

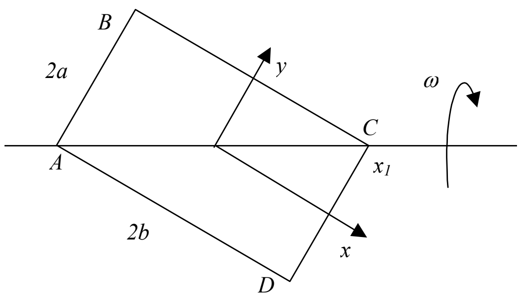
$$I_v = I_w = \frac{mR^2}{4} \quad \text{et} \quad I_u = \frac{mR^2}{2}; \quad P_{uw} = P_{vw} = P_{uv} = 0$$

$$\overline{M_{G_3}} = \bar{\bar{I}}_{G_3}.\bar{\omega}_3 = \begin{pmatrix} \frac{m_3R^2}{2} & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & \frac{m_3R^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = I_u\omega_u\bar{1}_u + I_w\omega_w\bar{1}_w$$

$$=> \overline{M_{G_3}} = -\frac{\rho\pi R^4}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\alpha+\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\rho\pi R^4}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w = -\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_w$$

$$=> \begin{cases} \overline{M_{O\,tige\,3}} = -\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_w + \rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z + \rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}\bar{1}_x \\ => \overline{M_{O\,tige\,3}} = \rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(2+\frac{15}{16}\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_x + \rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(\frac{117}{16}+4\sqrt{3}\right)+\frac{1}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_z \end{cases}$$

3.



$$\bar{\omega} = \omega\bar{1}_{x_1} = \omega\cos\alpha\,\bar{1}_x + \omega\sin\alpha\,\bar{1}_y$$

où $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Les produits d'inertie sont nuls car nous travaillons dans les axes principaux. En effet, l'intégration des puissances impaire (x et y) sur le domaine symétrique est nulle. Et la coordonnée z est nulle pour toute la plaque.

$$\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & - \\ 0 & I_y & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\cos\alpha\\ \omega\sin\alpha \\ 0\end{pmatrix} = I_x\cos\alpha\,\omega\,\overline{1}_x + I_y \sin\alpha\,\omega\,\overline{1}_y$$

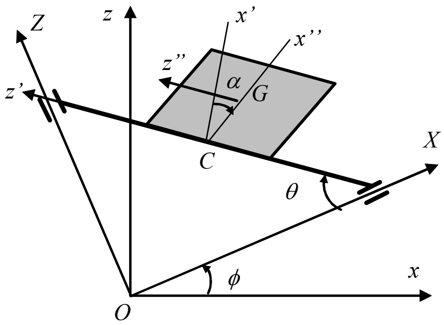
$$\overline{M}_G = \frac{(\rho 2a2b)(2a)^2}{12}\omega\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\overline{1}_x + \frac{(\rho 2a2b)(2b)^2}{12}\omega\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\overline{1}_y = \frac{\rho 4}{3}\frac{a^2b^2\omega}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\left(a\overline{1}_x + b\overline{1}_y\right)$$

---

4. $T = T_{Tige} + T_{carré}$

Dans les axes principaux $(Cx'y'z')$ lié au centre de masse de la tige :

$$T_{Tige} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2 + v_{C_z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x \underbrace{p}_{=0}{}^2 + I_y q^2 + I_z \underbrace{r}_{=0}{}^2\right)$$



$$\text{avec}\begin{cases} \overline{OC} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\,\overline{1}_X + \sin\theta\,\overline{1}_Z\right) \\ \overline{v}_C = \dfrac{d\overline{OC}}{dt} = \dfrac{3a}{2}\left(-\sin\theta\left(\dot\theta+\dot\phi\right)\overline{1}_X + \cos\theta\left(\dot\theta+\dot\phi\right)\overline{1}_Z\right) \\ I_{Cy} = \dfrac{mL^2}{12} = \dfrac{\rho 9a^3}{4} \quad \text{et } \overline{\omega} = \left(\dot\theta-\dot\phi\right)\overline{1}_Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{Tige} = \rho\frac{9a^3}{8}\left(\left(\dot\theta+\dot\phi\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\dot\theta-\dot\phi\right)^2\right)$$

Dans les axes principaux $Gx''y''z''$ lié au centre de masse du carré.

$$T_{Carré} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 + v_{Gz}^2\right) + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$$

$$\text{avec}\begin{cases} \overline{OG} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\,\overline{1}_X + \sin\theta\,\overline{1}_Z\right) + \dfrac{a}{2}\overline{1}_{x''} = \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\overline{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\sin\alpha\,\overline{1}_{y'} - \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\,\overline{1}_{z'} \\ \overline{v}_G = \left(3a\cos 2\theta\dot\theta - \dfrac{a}{2}\sin\alpha\dot\alpha - \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\left(\dot\theta-\dot\phi\right)\right)\overline{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\dot\alpha\,\overline{1}_{y'} \\ \quad + \left(3a\sin 2\theta\dot\theta - \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\left(\dot\theta-\dot\phi\right)\right)\overline{1}_{z'} = v_{Gx}\overline{1}_{x''} + v_{Gy}\overline{1}_{y''} + v_{Gz}\overline{1}_{z''} \\ \overline{\omega} = \left(\dot\theta-\dot\phi\right)\overline{1}_{y'} + \dot\alpha\,\overline{1}_{z'} = \left(\dot\theta-\dot\phi\right)\sin\alpha\,\overline{1}_{x''} + \left(\dot\theta-\dot\phi\right)\cos\alpha\,\overline{1}_{y''} + \dot\alpha\,\overline{1}_{z''} = p\overline{1}_{x''} + q\overline{1}_{y''} + r\overline{1}_{z''} \\ A = C = I_{x''G} = \dfrac{ml^2}{12} = \dfrac{\rho a^4}{12} \quad \text{et} \quad B = I_{y''G} = \dfrac{ml^2}{6} = \dfrac{\rho a^4}{6} \end{cases}$$

Pour les moments cinétiques :

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,tige}} + \overline{M_{O\,carré}}$$

$$\overline{M_{O\,tige}} = \overline{M_C} + \overline{OC}\times\overline{\Re} = \overline{\overline{I_C}}.\overline{\omega} + \overline{OC}\times m\overline{v}_C$$

$$\overline{M_{O\,carré}} = \overline{M_G} + \overline{OG}\times\overline{\Re} = \overline{\overline{I_G}}.\overline{\omega} + \overline{OG}\times m\overline{v}_G = Ap\overline{1}_{x''} + Bq\overline{1}_{y''} + Cr\overline{1}_{z''} + \overline{OG}\times m\overline{v}_G$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html