Corrigé de la séance 7

1. Théorème de la résultante cinétique : $\boxed{\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{\mathrm{e},x}}$

Avant le départ des obus Système {canon + wagon + obus} $\overline{R_{t<0}} = -(m_1+2m_2)v_0\overline{1_x}$

Au moment du départ de l'obus : Système {canon + wagon + obus}: $\overline{R_{t>0}} = -m_1 v\overline{1_x} + 2m_2(v_r - v)\overline{1_x}$

Il n'y a pas de force extérieure suivant l'axe x => $\frac{d}{dt}R_x = 0$ => $R_x = const$: $\overline{R_{t>0}} = \overline{R_{t<0}}$

$$-m_1 v + 2m_2(v_r - v) = -(m_1+2m_2)v_0 \Rightarrow v = \frac{2m_2 v_r + (m_1+2m_2)v_0}{m_1+2m_2} \Rightarrow \overline{v} = -24{,}7\ m/s\ \overline{1_x}$$

2. a) Pour le système {barge A (M_A) + voiture (m)}: Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_e\Big|_x = 0 \Rightarrow R_x = Const\ :\ (M_A+m).0 = -M_A v_{Ax} + mv \quad \text{avec} \quad v = \underbrace{50\cos\alpha}_{v_{rel|x}}\ \underbrace{-v_{Ax}}_{v_{entr}} . \Rightarrow v_{Ax} = \frac{m50\cos\alpha}{M_A+m}$$

<u>Rem</u> : Les forces de frottement de l'eau sont négligées. On considère la variation de résultante cinétique entre l'instant t_1 où le système est immobile et l'instant t_2 où la voiture a atteint la vitesse de 50 km/h (par rapport au bateau = v_{rel}) à la sortie du tremplin.

b) Pour le système {barge B (M_B) + voiture (m)}: Etude du mouvement entre t_3 (avant que la voiture n'arrive sur la barge B) et l'arrêt de la voiture sur la barge B en t_4. Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_e\Big|_x = 0 \Rightarrow R_x = Const\ :\ mv + M_B.0 = (M_B+m)v_{Bx} \quad \text{avec} \quad v = 50\cos\alpha - v_{Ax}$$

$$\Rightarrow v_{Bx} = \frac{m50\cos\alpha\left(1-\dfrac{m}{M_A+m}\right)}{(M_B+m)} = \frac{mM50\cos\alpha}{(M+m)^2} \quad \text{car } M_A = M_B = M$$

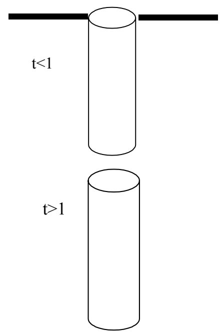
3. Par le théorème du moment cinétique : conservation du moment cinétique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M_0} = 0 \Rightarrow \overline{M_0^+} = \overline{M_0^-} \Rightarrow \frac{M_1R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega$$

$$\frac{M_2R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_2+3M_2)R^2}{6}\omega \Rightarrow \omega = \frac{\omega_2}{4}$$

Pourcentage de l'énergie cinétique initiale présente après la chute : $\boxed{\frac{T^+}{T^-} = \frac{\frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega^2}{\frac{M_1R^2}{2}\omega_1^2 + \frac{M_2R^2}{2}\omega_2^2} = 1{,}32\,\%}$

4. Pour le système {patineur} : $\overline{m_{e,G}} = 0$; $\overline{v_G} = 0$ => $\frac{d}{dt}\overline{M_G} = 0$ où $\overline{M_G} = \overline{\overline{I_G}}.\overline{\omega}$



$$\text{t<0 : } \overline{\omega} = \omega_1\overline{1_z} \quad \text{et} \quad I_z^- = \frac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\underbrace{\frac{m_2l_2^2}{12}}_{I_{zG(tige)}} + \underbrace{m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2}_{d_{zzG}}\right)$$

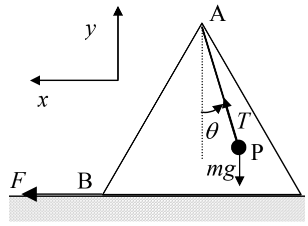
$$\text{t>0 : } \overline{\omega} = \omega_2\overline{1_z} \quad \text{et} \quad I_z^+ = \frac{m_3r_3^2}{2} \Rightarrow \overline{M_O^+} = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2\overline{1_z}$$

$$\overline{M_G^-} = \overline{M_G^+} \Rightarrow \left[\frac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\frac{m_2l_2^2}{12} + m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2\right)\right]\omega_1 = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 4{,}89\ \ t/s$$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.

5. En régime, l'angle θ est constant

Pour le système {Triangle+pendule=$M+m$} :



$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F_e}\right)_x \Rightarrow (M+m)\ddot{x} = F \quad (1)$$

Pour le système {pendule=m} :

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F_e}\right)_x \Rightarrow m\ddot{x} = T\sin\theta \quad \text{et} \quad 0 = mg - T\cos\theta \Rightarrow \ddot{x} = g\, tg\theta \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \theta = arctg\frac{F}{g\left(M+m\right)}$$

On peu aussi utiliser le théorème du moment cinétique sur le pendule pour calculer la deuxième équation :

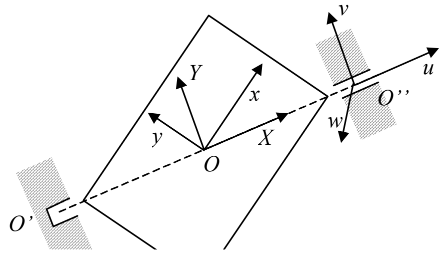
$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}} \text{ avec } \overline{v_G} // \overline{v_A}$$

$$\overline{M_A} = \overline{M_G} + m\overline{AG}\times\overline{v_G} = ml\cos\theta\dot{x}\,\overline{1_z} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = 0 \text{ car } m \text{ est une masse ponctuelle.}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = ml\cos\theta\ddot{x}\,\overline{1_z} = \overline{m}_{e,A} = \overline{AG}\times m\overline{g} = lmg\sin\theta\,\overline{1_z} \Rightarrow \ddot{x} = g\ \mathrm{tg}\theta$$

6. Les réactions sont définies dans les axes fixes $O''uvw$:

$F_{O'}=(U_{O'},V_{O'},W_{O'})$ et $F_{O''}=(0,V_{O''},W_{O''})$



Axes $O''uvw$ fixe,

Axes $OXYZ$ lié à la plaque, $\overline{\omega} = \omega\,\overline{1_X}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = m\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=0}\times\overline{v_{O'}} + \overline{m_{e,O'}}}$$

$$\overline{m_{e,O'}} = \overline{O'O}\times m\overline{g} + \overline{O'O''}\times\overline{R_{O''}} = \frac{L}{2}mg\overline{1_v} - LW_{O''}\overline{1_v} + LV_{O''}\overline{1_w}$$

$$\overline{M_{O'}} = \overline{M_O} + m\overline{O'O}\times\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=v_O=0} = I_X\omega\overline{1_X} - P_{XY}\omega\overline{1_Y}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = I_X\dot{\omega}\overline{1_X} - P_{XY}\dot{\omega}\overline{1_Y} - P_{XY}\omega^2\overline{1_Z}$$

$$\begin{cases}\overline{1_X} = \overline{1_u}\\ \overline{1_Y} = \cos\omega t\overline{1_v} + \sin\omega t\overline{1_w}\\ \overline{1_Z} = -\sin\omega t\overline{1_v} + \cos\omega t\overline{1_w}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0\\ \overline{1_v} : -P_{XY}\dot{\omega}\cos\omega t + P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''}\\ \overline{1_w} : -P_{XY}\dot{\omega}\sin\omega t - P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''}\end{cases} \Rightarrow \quad \omega \text{ constant} : \begin{cases}\overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0\\ \overline{1_v} : P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''} \quad (1)\\ \overline{1_w} : -P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''}\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum\overline{F_e} \quad \text{où} \quad \overline{v_G} = 0}$$

$$\begin{cases}\overline{1_u} : U_{O'} = 0\\ \overline{1_v} : V_{O'} + V_{O''} = 0\\ \overline{1_w} : W_{O'} + W_{O''} - mg = 0\end{cases} \quad (2) \qquad (1)+(2) \Rightarrow \begin{cases}U_{O'} = 0\\ V_{O'} = \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O'} = \frac{mg}{2} + \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}V_{O''} = -\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O''} = \frac{mg}{2} - \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases}$$