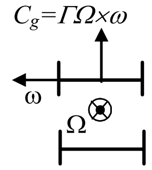
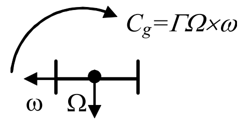
1. Gyrostat : $\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$
Le bus aura tendance à basculer vers la droite.

Vue de haut



Vue de derrière



---

2. $\frac{d}{dt}\overline{M}_O = \sum \overline{m}_{e,O} + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$ avec $\overline{\varpi}$ constant => $0 = \sum \overline{m}_{e,O} + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$

1. A l'équilibre (ω=0, Ω=0) : $0=\sum \overline{m}_{e,O}$ => $\sum \overline{m}_{e,O} = \overline{m}_{e,O}(m_A) + \overline{m}_{e,O}(M) = 0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x + C_e\,\overline{1}_x = 0$

   avec C_e = couple qui équilibre le moment généré par la masse A => $\overline{C}_e = -0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x$

2. Pendant le mouvement : $0 = \overline{m}_{e,O}(m_A) + \overline{m}_{e,O}(M) + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$

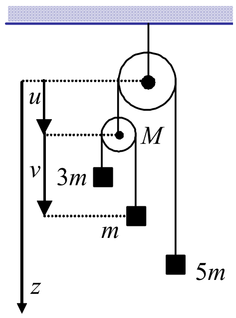
$$0 = b.m_A g\,\overline{1}_x - 0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x - \left(2{,}2\,.\,0{,}06^2\right).\left(\frac{1725}{60}.2\pi\right).\left(0{,}2\right)\overline{1}_x$$

=> $b - 0{,}18 = 0{,}0364$ => $b = 0{,}216\ m$

---

3. Nous avons 3 masses ponctuelles et deux solides (poulies). Soit les positions des solides S_1 (m), S_2 ($3m$), S_5 ($5m$), et la poulie S_4 (M) : z_1, z_2, z_3, z_4. $z_1 = u + v$; $z_2 = +u - v + C_1$; $z_3 = -u + C_2$; $z_4 = u$
2 degrés de liberté (u, v) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.

$$T = \sum_{\substack{\text{masses}\\ \text{ponctuelles}}} \left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}{}^2\right) + \sum_{\textit{solides}} \left(\frac{M_i}{2} v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i\right) \quad \text{avec } I = 2mR^2 \text{ donc } M = 4m \text{ car } I(disque) = \frac{MR^2}{2}$$



$$T = \left(\frac{m}{2}(\dot{u}+\dot{v})^2\right)_{S_1(m)} + \left(\frac{3m}{2}(\dot{u}-\dot{v})^2\right)_{S_2(3m)} + \left(\frac{5m}{2}(-\dot{u})^2\right)_{S_3(5m)} + \left(\frac{M}{2}(\dot{u})^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2{}^2\right)_{S_4}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{4M(2R)^2}{2}\omega_1{}^2\right)_{S_5(4M)} \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\dot{u}}{2R} \text{ et } \omega_2 = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{m}{2}\dot{v}^2 + m\dot{u}\dot{v} + \frac{3m}{2}\dot{u}^2 + \frac{3m}{2}\dot{v}^2 - 3m\dot{u}\dot{v} + \frac{5m}{2}\dot{u}^2 + \frac{8m}{2}\dot{u}^2 + \frac{4m}{2}\dot{u}^2 + \frac{2m}{2}\dot{v}^2$$

$$T = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v}$$

$$V = -mgz_1 - 3mgz_2 - 5mgz_3 - Mgu = -3mgu + 2mgv + C \;\Rightarrow\; L = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v} + 3mgu - 2mgv$$

$$\begin{cases} u : \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0 : \quad 21m\ddot{u} - 2m\ddot{v} - 3mg = 0 \\ v : \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0 : \quad 6m\ddot{v} - 2m\ddot{u} + 2mg = 0 \end{cases}$$

=> $\ddot{v} = -\frac{18g}{61}$ et $\ddot{u} = \frac{7g}{61}$

=> $\ddot{z}_1 = -\frac{18g}{61} + \frac{7g}{61} = -\frac{11g}{61}\ (\uparrow)$; $\ddot{z}_2 = \frac{7g}{61} + \frac{18g}{61} = \frac{25}{61}g\ (\downarrow)$; $\ddot{z}_3 = -\frac{7g}{61}\ (\uparrow)$; $\ddot{z}_4 = \frac{7g}{61}\ (\downarrow)$

Comparer cette résolution avec une résolution par les théorèmes généraux :
- Pour ne pas tenir compte des réactions au niveau des centres des deux poulies, il faudra appliquer le théorème du moment en ces centres.
- Les forces extérieures seront : les poids des 3 masses, les poids des 2 poulies ainsi que les réactions au niveau de la liaison de la grande poulie.
- Les forces internes sont les tensions dans les câbles, la réaction au niveau du centre de la petite poulie
- Etant donné que les poulies ont une masse, donc une inertie, les tensions de part et d'autre des poulies ne seront pas équivalentes !!! (théorème du moment sur chacune des poulies prises séparément, en leur centre)

4. 1 degré de liberté (θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement avec un multiplicateur de Lagrange λ_1.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$. $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial q_i}}$

Relation entre θ et α : $x = \text{AC} = 2L\sin\theta$ => $\phi_1 = x-2L\sin\theta = 0$ => Dérivée : $\dot{x}-2L\cos\theta\dot{\theta}=0$

Or $\dot{x}=r\dot{\alpha}$ => $r\dot{\alpha}-2L\cos\theta\dot{\theta}=0$

Transformation des dérivées temporelles en dérivée infinitésimale (δ) :

Contrainte 1 à utiliser avec λ_1: $\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta+\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}\delta\alpha = \mathrm{r}\delta\alpha-2L\cos\theta\delta\theta=0$ => $\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}=-2L\cos\theta;\ \frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}=r$

$\boxed{L=T-V}$

$$\begin{cases}\overline{OG_2}=\frac{3L}{2}\sin\theta\overline{1}_x+\frac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_y \Rightarrow \overline{v}_{G_2}=\frac{3L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_x-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_y\\ T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{AB}+\left[\frac{m}{2}\left(\frac{9L^2}{4}\cos^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{L^2}{4}\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{BC}+\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{\text{Roue }(\dot{x}=r\dot{\alpha})}\\ T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{m}{2}2L^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]+\frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2=\frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2+mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2\\ V=-2.\left(mg\frac{L}{2}\cos\theta\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ L=\frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2+mL^2\cos\theta\dot{\theta}^2+\frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2+mgL\cos\theta$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}\Rightarrow\frac{3}{2}mr^2\ddot{\alpha}=\lambda_1 r\Rightarrow\lambda_1=\frac{3}{2}mr\ddot{\alpha}=\frac{3}{2}m\left(-2L\sin\theta\dot{\theta}^2+2L\cos\theta\ddot{\theta}\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\\ \Rightarrow\frac{8mL^2}{12}\ddot{\theta}+2mL^2\cos^2\theta\ddot{\theta}-4mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2+2mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2+mgL\sin\theta=-\lambda_1 2L\cos\theta\\ \text{Contrainte : } r\dot{\alpha}-2L\cos\theta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

Système de 3 équations à 3 inconnues : => $\left(\frac{2}{3}+2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta}-\sin2\theta\dot{\theta}^2+\frac{g}{L}\sin\theta=\left(3\sin2\theta\dot{\theta}^2-6\cos^2\theta\ddot{\theta}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{2}{3}+8\cos^2\theta\right)\ddot{\theta}-4\sin2\theta\dot{\theta}^2+\frac{g}{L}\sin\theta=0}$$

OU

Possibilité de résoudre avec 3 coordonnées de Lagrange et donc 2 multiplicateurs de Lagrange :

relation entre θ et α $\left(x=2L\sin\theta\right)$: $x-2L\sin\theta=0\Rightarrow\lambda_1:\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta+\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}\delta\alpha=2L\cos\theta\delta\theta-r\delta\alpha=0$

relation entre x et α : $\dot{x}=r\dot{\alpha}\Rightarrow\lambda_2:\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\delta\theta+\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha}\delta\alpha=\delta x-r\delta\alpha=0$

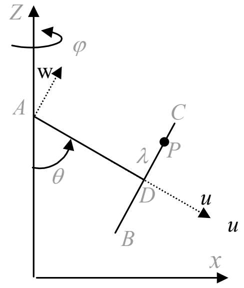
$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{AB}+\left[\frac{m}{2}2L^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{BC}+\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{\text{Roue }(\dot{x}=r\dot{\alpha})}$$

et $V=-2.\left(mg\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ => $L=\frac{1}{2}\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2+mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2+mgL\cos\theta$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\end{cases}\quad \text{et}\quad \text{les deux contraintes}\ \begin{cases}2L\cos\theta\dot{\theta}-r\dot{\alpha}=0\\ \dot{x}-r\dot{\alpha}=0\end{cases}$$

On obtient le même résultat en résolvant ce système de 5 équations à 5 inconnues (λ_1, λ_2, x, α, θ)

5.1 3 degrés de liberté (θ, φ, λ) => 3 coordonnées de Lagrange => 3 équations de mouvement.
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.



λ = distance entre le point P et le centre du T (D). AD et BC sont perpendiculaires.

$T = T_{AD} + T_{BC} + T_P \quad (\text{axes principaux } uvw)$

- $T_{AD} = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \overline{v}_A . \left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2} \overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$

avec $\overline{\omega} = -\dot{\theta} \overline{1}_y + \dot{\phi} \overline{1}_z = -\dot{\phi} \cos\theta \overline{1}_u - \dot{\theta} \overline{1}_v + \dot{\phi} \sin\theta \overline{1}_w$

=> $T_{AD} = \frac{1}{2}\left(I_w \omega_w^2 + I_v \omega_v^2\right) = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3}\left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$

On remarque que les différentes parties de l'énergie cinétique peuvent être calculée indépendamment dans le repère le plus simple (Axes principaux pour le terme avec le tenseur, uvw)

- $T_{BC} = \frac{1}{2} M v_D^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_D . \overline{\omega}$ où $\begin{cases} \overline{\omega}_{BC} = \overline{\omega}_{AD} = -\dot{\phi} \cos\theta \overline{1}_u - \dot{\theta} \overline{1}_v + \dot{\phi} \sin\theta \overline{1}_w \\ \overline{v}_D = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \underbrace{\overline{AD}}_{\ell \overline{1}_u} = -\ell \sin\theta \dot{\phi} \overline{1}_v - \ell \dot{\theta} \overline{1}_w \end{cases}$ => $v_D^2 = \ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right)$

=> $T_{BC} = \frac{m\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2\theta\right)\{$

- $T_P = \frac{1}{2} M v_P^2 + M \overline{v}_P . \left(\overline{\omega} \times \overline{PP}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_P . \overline{\omega}}_{\overline{\overline{I}}_P = 0 \,:\, \text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2} M v_P^2$

avec $\overline{v}_P = \frac{d\overline{AP}}{dt} = \frac{d\left(\ell \overline{1}_u + \lambda \overline{1}_w\right)}{dt} = \ell \overline{\omega} \times \overline{1}_u + \dot{\lambda} \overline{1}_w + \lambda \overline{\omega} \times \overline{1}_w = \ell \dot{\theta} \overline{1}_w + \ell \dot{\phi} \sin\theta \overline{1}_v + \dot{\lambda} \overline{1}_w - \lambda \dot{\theta} \overline{1}_u + \lambda \dot{\phi} \cos\theta \overline{1}_v$

=> $T_P = \frac{1}{2} M \left(\lambda^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell \dot{\theta} \dot{\lambda} + \left(\ell \dot{\phi} \sin\theta + \lambda \dot{\phi} \cos\theta\right)^2\right)$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0}$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12}\left(17\dot{\theta}^2 + 16\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\phi}^2 \cos^2\theta\right) + \frac{1}{2} M \left(\lambda^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell \dot{\theta} \dot{\lambda} + \left(\ell \dot{\phi} \sin\theta + \lambda \dot{\phi} \cos\theta\right)^2\right) \\ V = \underbrace{-mg \frac{\ell}{2} \cos\theta}_{V_{AD}} \underbrace{- mg\ell \cos\theta}_{V_{BC}} + \underbrace{Mg\left(-\ell \cos\theta + \lambda \sin\theta\right)}_{V_P} = -\frac{3\ell}{2} mg \cos\theta + Mg\left(+\lambda \sin\theta - \ell \cos\theta\right) \end{cases}$$

=> $L = T - V = T + \frac{3\ell}{2} mg \cos\theta - Mg\left(+\lambda \sin\theta - \ell \cos\theta\right)$

$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0}$

=> $\left(\frac{17m\ell^2}{12} + M\left(\lambda^2 + \ell^2\right)\right)\ddot{\theta} + M\ell \ddot{\lambda} + M 2\lambda \dot{\lambda} \dot{\theta}$

$$-\left(M\ell\lambda \cos 2\theta + \left(M \frac{\left(\ell^2 - \lambda^2\right)}{2} + \frac{5m\ell^2}{8}\right) \sin 2\theta\right) \dot{\phi}^2 + \frac{3\ell}{2} mg \sin\theta + Mg\left(\ell \sin\theta + \lambda \cos\theta\right) = 0$$

Comme toutes les forces dérivent d'un potentiel, on aurait pu écrire directement $T + V = E_0$, cette relation nous donne directement une intégrale première.

$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0}$: $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ => $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$ => $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = A$ est une intégrale première :

$$\left(m\ell^2\left(\frac{4}{3} \sin^2\theta + \frac{1}{12} \cos^2\theta\right) + M\left(\ell \sin\theta + \lambda \cos\theta\right)^2\right)\dot{\phi} = A$$

$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0}$: $\ddot{\lambda} + \ell \ddot{\theta} - \lambda \dot{\theta}^2 - \left(\ell \sin\theta + \lambda \cos\theta\right)\dot{\phi}^2 \cos\theta + g \sin\theta = 0$

5.2 $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0}$ => Identique

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = C} \Rightarrow \frac{d\left(m\ell^2\left(\frac{15}{12}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\right) + M\left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)^2\right)\dot{\phi}_0}{dt} = C$$

$$\Rightarrow \left(m\ell^2 \frac{15}{6}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} + 2M\left(\left(\left(\ell^2 - \lambda^2\right)\sin\theta\cos\theta + \lambda\ell\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right)\dot{\theta} + \left(\lambda\cos^2\theta + \ell\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\lambda}\right)\right) = \frac{C}{\dot{\phi}_0}$$

$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0}$ => Identique

Seule l'équation en φ est modifiée. Les intégrales premières ne sont pas conservées.
