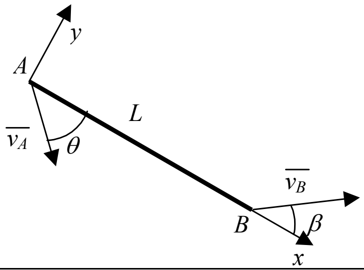
Corrigé de la séance 1

1.



$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} v_B \cos\beta = v_A \cos\theta \\ v_B \sin\beta = -v_A \sin\theta + \omega_{AB} L \end{cases}$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{L}\left(v_B \sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \cos^2\theta} + v_A \sin\theta \right)$$

2. $$\overline{AG} = \left[\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_y$$

Par dérivation des coordonnées dans le repère Axy

$$\overline{v}_G = \frac{d\overline{AG}}{dt} = \left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\dot{\theta}\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\dot{\theta}\right]\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_G = \frac{d\overline{v}_G}{dt} = \left[-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\ddot{\theta}\right]\overline{1}_x$$
$$+\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\ddot{\theta}\right]\overline{1}_y$$

Par la méthode des distribution des vitesse dans le repère Axy $(\overline{\omega}_{AG} = \dot{\theta}\overline{1}_z)$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AG} \times \overline{AG} = \dot{\theta}\overline{1}_z \times \left(\left[\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_A + \overline{\omega}_{AG} \times \left(\overline{\omega}_{AG} \times \overline{AG}\right) + \overline{\varepsilon}_{AG} \times \overline{AG} \quad \text{avec} \quad \overline{\varepsilon}_{AG} = \ddot{\theta}\overline{1}_z$$

3 1.) Solide BC : $\overline{v}_B = \overline{v}_C + \overline{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}$

Solide AB : $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}$

$$\overline{v}_C . \overline{1}_{AB} + \left(\overline{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}\right).\overline{1}_{AB} = \overline{v}_B . \overline{1}_{AB} = \overline{v}_A . \overline{1}_{AB} + \left(\overline{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}\right).\overline{1}_{AB} = \overline{v}_A . \overline{1}_{AB}$$

$$0.6 m/s\, \overline{1}_x . \overline{1}_{AB} - \Omega_{BC} 0.4 m\, \overline{1}_y . \overline{1}_{AB} = 1.2 m/s\, \overline{1}_x . \overline{1}_{AB}$$

$$\overline{1}_y . \overline{1}_{AB} = \sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \overline{1}_x . \overline{1}_{AB} = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{\Omega}_{BC} = -2s^{-1}\overline{1}_z \; et \; \overline{\Omega}_{AB} = +2s^{-1}\overline{1}_z$$

ou $tg\alpha = \frac{3}{4} = \frac{v_c}{|\Omega_{BC}|BC} \Rightarrow \Omega_{BC} = 2s^{-1}$

2.a) Analytiquement

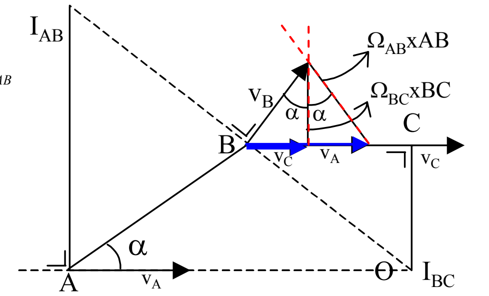
$$\overline{v}_B = 0,6\,\overline{1}_x + 0,8\,\overline{1}_y \;\; m/s = \overline{\Omega}_{BC} \times \overline{I_{BC}B} \;\text{ avec }\; \begin{cases} \overline{OI_{BC}} = x\overline{1}_x + y\overline{1}_y \\ x = 0 \;\text{ car }\; I_{BC} \in OC \end{cases}$$

$$\overline{v}_C = 0,6\, m/s\; \overline{1}_x = \overline{\Omega}_{BC} \times \overline{I_{BC}C} = 2(0,3 - y)\overline{1}_x \Rightarrow y = 0$$

$$\overline{v}_B = 0,6\,\overline{1}_x + 0,8\,\overline{1}_y \;\; m/s = \overline{\Omega}_{AB} \times \overline{I_{AB}B} \;\text{ avec }\; \begin{cases} \overline{OI_{AB}} = x'\overline{1}_x + y'\overline{1}_y \\ x' = -0,4 - 0,5\cos\alpha \\ x' = -0,8 \;\text{ car }\; I_{BC} \in \perp \overline{v}_A \end{cases}$$

$$\overline{v}_A = 1,2\, m/s\, \overline{1}_x = \overline{\Omega}_{AB} \times \overline{I_{AB}A} = 2y' \Rightarrow y' = 0,6$$

2.b) Graphiquement



1. construction de $\overline{v}_A$ et $\overline{v}_C$ horizontaux

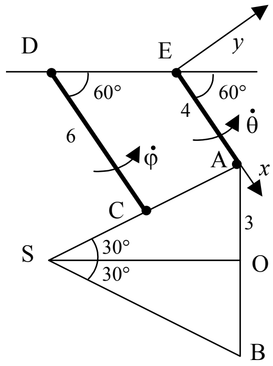
2. reporter les deux vitesses en B pour faire la composée des vitesses

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{v}_B = \overline{v}_C + \underbrace{\overline{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}}_{\perp CB} \\ \overline{v}_B = \overline{v}_A + \underbrace{\overline{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}}_{\perp AB} \end{cases}$$

3. l'intersection des deux droites pointillées rouges nous donne $\overline{v}_B$

4. Comme $\overline{v}_A = 2\,\overline{v}_C$, nous avons un trangle isocèle l'angle est connu α car $\underbrace{\overline{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}}_{\perp AB}$

4. 1. OS Horizontal : (*AS* est parallèle à l'axe *y*)



$$DC.\sin 60 - EA.\sin 60 = CA.\sin 30 \Rightarrow 6.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = CA.\frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}\ \text{m}$$

2. Vitesse angulaire de la barre DC : $\dot{\theta} = 3$ rad/s $\bar{1}_z$ *et* $\dot{\varphi}$?

$$\bar{v}_A = \underbrace{\bar{v}_E}_{0} + \dot{\theta}\bar{1}_z \times \overline{EA} = 4\dot{\theta}\bar{1}_y \quad \text{et} \quad \bar{v}_C = \underbrace{\bar{v}_D}_{0} + \bar{\omega}_{DC} \times \overline{DC} = 6\dot{\varphi}\ \text{m/s}\ \bar{1}_y \Rightarrow \bar{v}_C // \bar{v}_A$$

$\Rightarrow \bar{v}_C = \bar{v}_A$ (solide indéformable) => le triangle est en translation instantanée

$\Rightarrow \bar{\omega}_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = 2$ rad/s $\bar{1}_z$

3. Vitesse et accélération du point S

$$\bar{v}_S = \bar{v}_C = \bar{v}_A = 12\ \text{m/s}\ \bar{1}_y \quad \text{et} \quad \bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS} + \bar{\omega}_{SA} \times \left(\bar{\omega}_{SA} \times \overline{AS}\right) = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_E + \bar{\varepsilon}_{AE} \times \overline{EA} + \bar{\omega}_{EA} \times \left(\bar{\omega}_{EA} \times \overline{EA}\right) = \bar{\omega}_{EA} \times \left(\bar{\omega}_{EA} \times \overline{EA}\right) = -\omega_{EA}{}^2\overline{EA} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2\bar{1}_x = -4\dot{\theta}^2\bar{1}_x$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{C(C\in AC)} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{AC} \times \overline{AC} + \underbrace{\bar{\omega}_{AC} \times \left(\bar{\omega}_{AC} \times \overline{AC}\right)}_{=0} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2\bar{1}_x + \left\|\overline{AC}\right\|\varepsilon_{AC}\bar{1}_x \\ \bar{a}_{C(C\in AD)} = \underbrace{\bar{a}_D}_{=0} + \bar{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} + \bar{\omega}_{DC} \times \left(\bar{\omega}_{DC} \times \overline{DC}\right) = \left\|\overline{DC}\right\|\varepsilon_{DC}\bar{1}_y - \left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2\bar{1}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_{DC} = 0 \quad \text{et} \quad -\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2 + \varepsilon_{AC}\left\|\overline{AC}\right\| = -\left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \varepsilon_{AC} = \frac{\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2 - \left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2}{\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{4.3^2 - 6.2^2}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ \text{m/s}^2\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS} = \left(-4\dot{\theta}^2 + 2\sqrt{3}.\frac{3}{\sin 30}\right)\bar{1}_x = 12\left(-3 + \sqrt{3}\right)\bar{1}_x$$

5. L'angle θ représente l'inclinaison de l'avion. Le point C se déplace horizontalement (v_C et a_C), le point B subit une rotation autour du point C ($v_{rel\text{-}C}$) et une translation horizontale ($v_{entr}=v_C$). Le point A possède une vitesse d'entraînement (v_{entr}) et une vitesse relative ($v_{rel\text{-}A}$). La vitesse d'entrainement de A peut être calculée par la formule des distributions des vitesses en considérant que A est fixe dans l'avion (dans son repère relatif) et donc la longueur AB est constante.

$$\bar{\omega} = \omega\bar{1}_z = \dot{\theta}\bar{1}_z, \ \bar{\alpha} = \dot{\omega}\bar{1}_z \quad ; \quad \bar{r} = x\bar{1}_x, \ \bar{v}_{rel} = \dot{x}\bar{1}_x, \ \bar{a}_{rel} = \ddot{x}\bar{1}_x$$

$$\bar{v}_C = v_C(\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y) \quad \text{et} \quad \bar{a}_C = a_C(\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y) \neq \frac{d\bar{v}_c}{dt} \quad (\text{où } \bar{v}_c \text{ est la vitesse instantanée})$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \overline{CB} = \bar{v}_C + \omega\bar{1}_z \times h\bar{1}_y = (v_C\cos\theta - \omega h)\bar{1}_x - v_C\sin\theta\bar{1}_y$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{\varepsilon} \times \overline{CB} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{CB}\right) = \left(a_C\cos\theta - \alpha h\right)\bar{1}_x - \left(a_C\sin\theta + h\omega^2\right)\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BA} + \bar{v}_{rel} = (v_C\cos\theta - \omega h + \dot{x})\bar{1}_x + \left(\omega L - v_C\sin\theta\right)\bar{1}_y$$

$$\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_B + \bar{\varepsilon} \times \overline{BA} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{BA}\right)}_{\bar{a}_{A,entr}} + \underbrace{2\left(\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}\right)}_{\bar{a}_{a,cor}} + \bar{a}_{rel}$$

$$\bar{a}_A = \left(a_C\cos\theta - \alpha h - L\omega^2 + \ddot{x}\right)\bar{1}_x + \left(-a_C\sin\theta - h\omega^2 + L\alpha + 2\omega\dot{x}\right)\bar{1}_y$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html