1.1
$$\overline{v}_C = \left.\frac{d}{dt}\overline{OC}\right|_{abs} = \left.\frac{d}{dt}\overline{OC}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{XYZ/xyz} \times \overline{OC}$$
$$\overline{OC} = \frac{3L}{2}\cos\theta\,\overline{1}_X + \frac{3L}{2}\sin\theta\,\overline{1}_Z \quad ; \quad \overline{\omega}_{XYZ/xyz} = -\dot{\phi}\,\overline{1}_Y$$
$$\overline{v}_C = \left(-\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_X + \frac{3L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_Z\right) + \left(\dot{\phi}\frac{3L}{2}\cos\theta\,\overline{1}_Z - \dot{\phi}\frac{3L}{2}\sin\theta\,\overline{1}_X\right) = \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\left(-\sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Z\right)$$
$$\overline{a}_C = \left.\frac{d}{dt}\overline{v}_C\right|_{abs} = \left.\frac{d}{dt}\overline{v}_C\right|_{rel} + \overline{\omega}_{XYZ/xyz} \times \overline{v}_C$$
$$\overline{a}_C = \frac{3L}{2}\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right)\left(-\sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Z\right) + \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\overline{1}_X - \sin\theta\,\overline{1}_Z\right) + \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\dot{\phi}\left(-\cos\theta\,\overline{1}_X - \sin\theta\,\overline{1}_Z\right)$$
$$\overline{a}_C = -\frac{3L}{2}\left(\sin\theta\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right) + \cos\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2\right)\overline{1}_X + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right) - \sin\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2\right)\overline{1}_Z$$

1.2
$$\overline{v}_C = \underbrace{\overline{v}_A}_{\overline{v}_{Arel}+\overline{v}_{Aentr}} + \underbrace{\overline{\omega}}_{\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y} \times \overline{AC}$$
$$\overline{a}_C = \underbrace{\overline{a}_A}_{\overline{a}_{Arel}+\overline{a}_{Aentr}+\overline{a}_{Acor}} + \underbrace{\overline{\varepsilon}}_{\left(\ddot{\theta}-\ddot{\phi}\right)\overline{1}_Y} \times \overline{AC} + \underbrace{\overline{\omega}}_{\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y} \left(\times \underbrace{\overline{\omega}}_{\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y} \times \overline{AC}\right)$$

1.3 C décrit un cercle de rayon *3L/2* à la vitesse angulaire $-\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y$

1.4 Rotation instantanée, vitesse angulaire $\dot{\theta}\,\overline{1}_Y$ autour de I_1Y, où I_1 est le sommet du rectangle $AOBI_1$.

1.5 a) Si $\dot{\theta} \neq \dot{\phi}$: rotation instantanée de vitesse angulaire $\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y$ autour de IY où I est tel que

$$\overline{v}_C = \cancel{\overline{v}_I} + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{IC} \Rightarrow \overline{\omega}_{AB} \times \overline{v}_C = \overline{\omega}_{AB} \times \overline{\omega}_{AB} \times \overline{IC} = \underbrace{\left(\overline{\omega}_{AB}.\overline{IC}\right)}_{\perp}\overline{\omega}_{AB} - \left(\overline{\omega}_{AB}{}^2\right)\overline{IC} \Rightarrow \overline{CI} = \frac{\overline{\omega}_{AB} \times \overline{v}_C}{\omega_{AB}^2}$$

$$\overline{CI} = \frac{3L}{2}\frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\left(\cos\theta\,\overline{1}_X + \sin\theta\,\overline{1}_Z\right) = \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\overline{CI_1}$$ où I_1 est le "CIR" relatif dans les axes $OXYZ$

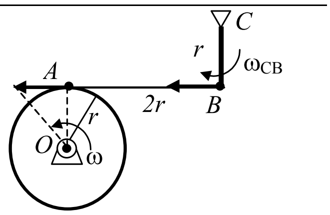
$$\begin{cases} \text{si } \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} > 1 \text{ : I est au delà de } I_1 \text{ ; si } 0 < \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 1 \text{ : I est entre } C \text{ et } I_1 \text{ ;} \\ \text{si } -1 < \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 0 \text{ : I est entre } O \text{ et } C \text{ ; si } \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < -1 \text{ : I est au delà de } O \text{ ; si } \dot{\theta} = -\dot{\phi} \text{ : I est en } C \text{ ;} \\ \text{si } \dot{\phi} = 0 \text{ : I est en } I_1 \text{ ; Si } \dot{\theta} = 0 \left(\dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} = -1\right) \text{ : rotation continue de vitesse angulaire } \left(-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y \text{ autour de } O \end{cases}$$

$$\Rightarrow AN : \overline{CI} = \frac{7}{3}\overline{CI_1}$$

b) si $\dot{\theta} = \dot{\phi}$: translation instantanée de vitesse instantanée $\overline{v}_C = \overline{v}_A = 3L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Z\right)$

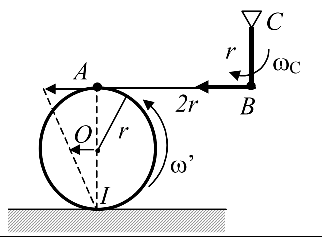
2.a
$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OA} = \overline{\omega}_{OA} \times \overline{OA} = \omega_{OA} r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB} \times \overline{CB} = \omega_{CB} r\,\overline{1}_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \omega_{CB}$$

Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de A et B doivent être égales.

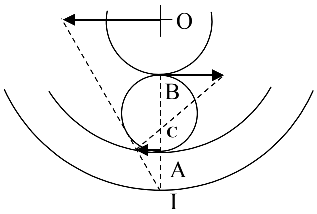


2.b
$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_A &= \overline{v}_I + \overline{\omega}' \times \overline{IA} = \overline{\omega}' \times \overline{IA} = \omega' 2r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB} \times \overline{CB} = \omega_{BC} r\,\overline{1}_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\omega' = \omega_{CB}$$

(avec *I* le point de contact du disque avec le sol)



3.



Nous pouvons appliquer la formule de cinématique pour les solides.

Pour la bague extérieure ($IA=d$) : I=CIR

$\overline{v}_O = -v\overline{1}_x = \cancel{\overline{v}_I} + \overline{\Omega}_{ext}\times\overline{IO} \Rightarrow v = \Omega_{ext}c/2 \Rightarrow \Omega_{ext} = \frac{2v}{c}$

$\overline{v}_A = \cancel{\overline{v}_I} + \overline{\Omega}_{ext}\times\overline{IA} \Rightarrow \overline{v}_A = -\frac{2v}{c}d\,\overline{1}_x$

ou $\overline{v}_A = \frac{AI}{AO}\overline{v}_0 = -\frac{d}{c/2}v\,\overline{1}_x$

Pour la bague intérieure :

$\overline{v}_B\left(=\overline{v}_{rel}+\overline{v}_{entr}\right) = \overline{v}_0 + \overline{\Omega}\times\overline{OB} = \left(-v+\Omega\frac{a}{2}\right)\overline{1}_x$

Pour la bille (C=CIR) :

$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BA} \Rightarrow -|v_A| = |v_B| - \omega|BA|$ *avec* $\overline{\omega} = -\omega\overline{1}_z$

$v_A + v_B = \omega\frac{b-a}{2} \Rightarrow \omega = 2\frac{v_A+v_B}{b-a}$

$$\overline{\omega} = -2\frac{\frac{2dv}{c}+\Omega\frac{a}{2}-v}{b-a}\overline{1}_z = -\left|\frac{-\frac{2b}{c}v+\Omega a}{b-a}\right|\overline{1}_z$$

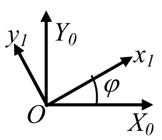
4.1 R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

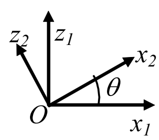
R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Z_0 = z_1$ ($\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \Omega\overline{1}_{z_1}$)

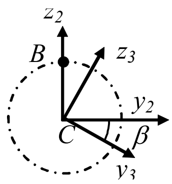
R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ incliné par rapport à R_1 autour de l'axe $y_1 = y_2$ ($\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \underbrace{\overline{\omega}_{R_2/R_1}}_{\dot\theta=0} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \overline{\omega}_{R_1/R_0}$)

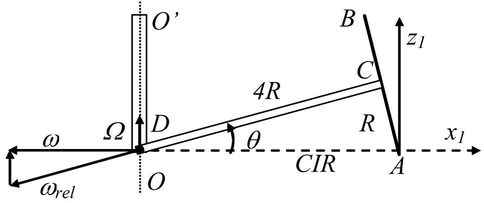
R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $x_2 = x_3$

($\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_r\overline{1}_{x_2} + \Omega\overline{1}_{z_1} = \overline{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)









$\Rightarrow\ \overline{\omega} = \overline{\Omega} + \overline{\omega}_{rel} = -\omega_{rel}\cos\theta\,\overline{1}_x + (\Omega-\omega_{rel}\sin\theta)\overline{1}_z$

Nous repérons deux points appartenant au solide qui ont une vitesse nulle : le disque ne glisse pas donc la vitesse du point A est nulle. Il en est de même pour le point D qui est appartient à l'axe fixe OO'. Donc l'axe instantané de rotation passe bien par ses deux points. Le vecteur vitesse angulaire du disque se trouvera sur cet axe.

<u>Condition de roulement sans glissement :</u>

$\overline{v}_A = 0 = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d\times\overline{CA}$ avec $\overline{CA} = -R\overline{1}_{z_2} = R\sin\theta\,\overline{1}_{x_1} - R\cos\theta\,\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{v}_C = \underbrace{\overline{v}_O}_{=0} + \overline{\Omega}\times\overline{OC} = \Omega 4R\cos\theta\,\overline{1}_{y_1}$

$\overline{v}_A = 0 = \Omega 4R\cos\theta\,\overline{1}_{y_1} + (\Omega R\sin\theta - \omega_{rel}R)\overline{1}_{y_1} \Rightarrow \Omega 4R\cos\theta + R\Omega\sin\theta - R\omega_{rel} = 0$

En simplifiant grâce à : $OA = \sqrt{17}R$ et $\sin\theta = 1/\sqrt{17}\,;\cos\theta = 4/\sqrt{17}$; on obtient $\omega_{rel} = \Omega\sqrt{17}$

par le dessin on peut aussi directement établir que $\frac{\Omega}{\omega} = tg\theta$ et $\omega_{rel} = \frac{\omega}{\cos\theta}$

$\Rightarrow\ \overline{\omega} = -\Omega\sqrt{17}\cos\theta\,\overline{1}_{x_1} + \Omega(1-\sqrt{17}\sin\theta)\overline{1}_{z_1} = -4\Omega\overline{1}_{x_1}$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{\omega}_{disque} = \Omega\overline{1}_{z_1}\times\overline{\omega}_{disque} = -4\Omega^2\,\overline{1}_{y_1}$$

4.2

$\overline{v}_B = \overline{\omega}\times\overline{AB} = -4\Omega\overline{1}_x\times 2R\left(-\sin\theta\,\overline{1}_{x_1} + \cos\theta\,\overline{1}_{z_1}\right) = \frac{32\sqrt{17}}{17}\Omega R\,\overline{1}_{y_1}$ attention $\overline{v}_B \neq \left.\frac{d\overline{DB}}{dt}\right|_{abs}$

$$\overline{a}_C = \underbrace{\overline{a}_D}_{=0} + \underbrace{\overline{\varepsilon}\times\overline{DC}}_{=0} + \overline{\Omega}\times\left(\overline{\Omega}\times\overline{DC}\right) = -\Omega^2 4R\cos\theta\,\overline{1}_{x_1} = -\Omega^2 R\frac{16}{\sqrt{17}}\,\overline{1}_{x_1}$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{\varepsilon}_d\times\overline{CB} + \overline{\omega}_d\times\left(\overline{\omega}_d\times\overline{CB}\right) = -\Omega^2 R\frac{16}{\sqrt{17}}\,\overline{1}_{x_1} - 4\Omega^2\,\overline{1}_{y_1}\times R\left(-\sin\theta\,\overline{1}_{x_1} + \cos\theta\,\overline{1}_{z_1}\right) - 4\Omega\overline{1}_{x_1}\times\frac{16}{\sqrt{17}}\Omega R\,\overline{1}_{y_1}$$

$$\overline{a}_B = -\frac{16}{\sqrt{17}}R\Omega^2\,\overline{1}_{x_1} - \frac{4}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\,\overline{1}_{z_1} - \frac{16}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\,\overline{1}_{x_1} - \frac{64}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\,\overline{1}_{z_1} = -\frac{32}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\,\overline{1}_{x_1} - \frac{68}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\,\overline{1}_{z_1}$$

!!! $\overline{a}_A \neq 0 \Rightarrow \overline{a}_A = \overline{a}_C + \overline{\varepsilon}\times\overline{CA} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{CA}\right) = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\,\overline{1}_{z_1}$

5.1 $\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{1}_z + \dot{\theta}\overline{1}_y = -\dot{\theta}\sin\varphi\overline{1}_X + \dot{\theta}\cos\varphi\overline{1}_Y + \dot{\varphi}\overline{1}_Z$

5.2

$$\overline{v}_H = \frac{d\overline{OH}}{dt} = \frac{d\left(L\sin\theta\overline{1}_Z\right)}{dt} = L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_Z$$

$$\overline{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\overline{1}_x - \frac{L}{2}\overline{1}_y\right) = -L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x + \dot{\varphi}\overline{1}_Z \times \overline{OA} = \left(-L\sin\theta\dot{\theta} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)\overline{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_B = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\overline{1}_x + \frac{L}{2}\overline{1}_y\right) = \left(-L\sin\theta\dot{\theta} - \frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)\overline{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_E = -L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\overline{1}_y$$

5.3 invariant $\overline{v}.\overline{\omega} = L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$

1. $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ Solide immobile

2. $\dot{\theta} = 0; \dot{\varphi} \neq 0$ Rotation continue $\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{1}_Z$ (uniforme si $\ddot{\varphi} = 0$)

3. $\dot{\theta} \neq 0; \dot{\varphi} = 0$ Rotation instantanée CIR=($x = L\cos\theta; z = L\sin\theta$)

4. $\dot{\theta} \neq 0; \dot{\varphi} \neq 0$ Mvt hélicoidal instantané $\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{1}_Z + \dot{\theta}\overline{1}_y$

Axe hélicoidal : droite de point P tq $\overline{v}_P // \overline{\omega}$

$$\overline{v}_P = \left(\frac{\overline{\omega}.\overline{v}_H}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\right).\overline{\omega} = \frac{L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}\left(\dot{\theta}\overline{1}_y + \dot{\varphi}\overline{1}_z\right) \quad \text{et} \quad \overline{HP} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{v}_H}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega} = \frac{L\cos\theta\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}\overline{1}_x + \lambda\left(\dot{\theta}\overline{1}_y + \dot{\varphi}\overline{1}_z\right)$$

Animation sur : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/Seance02CinematiqueHelicoidal.htm

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html