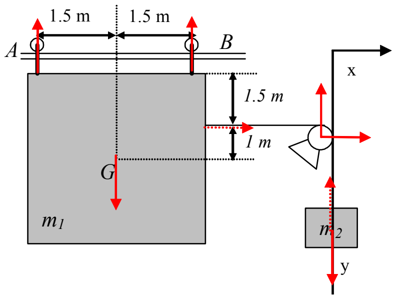
Corrigé de la séance 8

1.



Système {Porte (m_1)} : *Théorème de la résultante cinétique* suivant x : $\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_x = \sum \overline{F}_e\Big|_x \Rightarrow m_1\ddot{x} = F \quad (1)$

Système {Contrepoids (m_2)} : *Théorème de la résultante cinétique* suivant y : $\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_y = \sum \overline{F}_e\Big|_y \Rightarrow m_2\ddot{y} = -F + m_2 g \quad (2)$

(1) + (2) $\Rightarrow (m_1+m_2)a = m_2 g$ avec $\ddot{x} = \ddot{y} = a$

! : Système {(m_1+m_2)} : *Théorème de la résultante cinétique :*

$$\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_y = m_1\ddot{x} = \sum \overline{F}_e\Big|_y \quad (X_O)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_y = m_2\ddot{x} = \sum \overline{F}_e\Big|_y \quad (R_A,\ R_B,\ m_1 g,\ m_2 g,\ Y_O)$$

=> Pas intéressant.

Système {Porte (m_1)} :

Théorème de la résultante cinétique suivant y : $\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_y = \sum \overline{F}_e\Big|_y \Rightarrow 0 = -R_A - R_B + m_1 g \quad (3)$

Théorème du moment cinétique en *G* : (en un autre point P, le terme $m\overline{v}_G \times \overline{v}_P$ ne sera pas nul)

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = m\overline{v}_G \times \overline{v}_G + \sum \overline{m}_{e,G} \Rightarrow 0 = R_A.1,5 - R_B.1,5 + F.1 \quad \text{car} \quad \overline{\omega} = 0 \quad (4)$$

(3) + (4) : $R_B = \frac{m_1 g}{2} + \frac{F}{3} = m_1 g\left(\frac{8}{15}\right) = 2354,4\ N$ et $R_A = 2060,1\ N$

Remarque : Nous pouvons dire que la force de tension dans le câble est la même de part et d'autre de la poulie car la poulie est sans masse. Cela se vérifie en appliquant le théorème du moment cinétique sur la poulie seule.

2. *P* l'intersection de la barre uniforme avec l'axe *AB* : *Px'y'z'* = repère lié à la barre avec *x'* suivant la barre.

$$\boxed{\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O = \overline{M}_P + \overline{OP} \times \overline{R}}$$

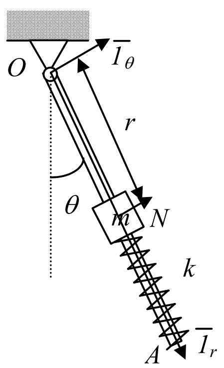
$\overline{M}_P = -P_{x'z'}.\omega\overline{1}_{z'} - P_{y'z'}.\omega\overline{1}_{z'} + I_{z'}.\omega\overline{1}_{z'}$ avec $\overline{\omega} = \dot{\theta}\overline{1}_z$ et $P_{x'z'} = P_{y'z'} = 0$ car $z' = 0$

$$\Rightarrow \overline{M}_P = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_{z'} \quad \text{et} \quad \overline{R} = m\frac{d\overline{OG}}{dt} = m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{y'}\ ;\ \overline{OP} = -b\overline{1}_{z'} \Rightarrow \overline{M}_O = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z + mb\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{x'}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O} : m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\overline{1}_{y'} = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x \Rightarrow m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_y - \sin\theta\overline{1}_x\right) = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x$$

$$\Rightarrow R_{Bx} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\cos\theta \quad \text{et} \quad R_{By} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\sin\theta \Rightarrow \overline{R}_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right) \text{ avec } R_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2$$

3.1



Système {masse (m)} : *Théorème de la résultante cinétique* suivant $\overline{1}_r$:

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e\Big|_{\overline{1}_r} \Rightarrow m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \underbrace{-k\left(r - r_0\right)}_{-k\left(\left(L-r\right)-\left(L-r_0\right)\right)\left(-\overline{1}_r\right)} + mg\cos\theta \quad (1)$$

Système {Tige (M) + masse (m)} : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_O = m\overline{v}_G \times \underbrace{\overline{v}_O}_{=0} + \sum \overline{m}_{e,O} \quad \text{où} \quad \overline{M}_O = \overline{M}_{O(m)} + \overline{M}_{O(M)}$$

$$\overline{M}_{O(M)} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}\,\overline{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{M}_{O(m)} = \underbrace{\overline{M}_G}_{\substack{=0 \text{ masse} \\ \text{ponctuelle}}} + \overline{OG} \times m\overline{v}_G = mr^2\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ML^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - mgr\sin\theta \quad (2)$$

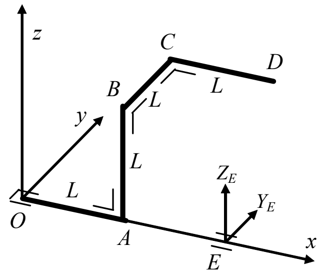
3.2 Système {Tige (M)} : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G}\times\underbrace{\overline{v_O}}_{=0} + \sum \overline{m}_{e,O} \Rightarrow \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - rN \quad (3) \Rightarrow N = -ML\frac{\frac{L}{3}\ddot{\theta}+\frac{g}{2}\sin\theta}{r}$$

OU Système {masse (m)} : *Théorème de la résultante cinétique* suivant 1_θ :

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e\right|_{\overline{1}_\theta} \Rightarrow m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right) = N - mg\sin\theta \Rightarrow N = m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)+mg\sin\theta \underbrace{=}_{(2)} -\frac{\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}+\frac{L}{2}\sin\theta Mg}{r}$$

4.



Système {système complet ($4m$)} : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G}\times\overline{v_O} + \sum \overline{m}_{e,O} \quad \text{où } \overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{1}_x \text{ et } \overline{M_O} = I_x\dot{\theta}\,\overline{1}_x - P_{xy}\dot{\theta}\,\overline{1}_y - P_{xz}\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\sum \overline{m}_{e,O} = \overline{\mathrm{OE}}\times(\overline{Y}_E+\overline{Z}_E) + \overline{\mathrm{OG}_1}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_2}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_3}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_4}\times m\overline{g}$$

Dans le système d'axe $Oxyz$ lié au solide :

$$\overline{\mathrm{OG}_1}\left(\frac{L}{2},0,0\right);\ \overline{\mathrm{OG}_2}\left(L,0,\frac{L}{2}\right);\ \overline{\mathrm{OG}_3}\left(L,\frac{L}{2},L\right);\ \overline{\mathrm{OG}_4}\left(L+\frac{L}{2},L,L\right);$$

$$m\overline{g} = -mg\,\overline{1}_Z = -mg\left(\sin\theta\,\overline{1}_y + \cos\theta\,\overline{1}_z\right)$$

$$I_x = \underbrace{0}_{OA} + \underbrace{\frac{mL^2}{12}+m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{AB} + \underbrace{\frac{mL^2}{12}+m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+L^2\right]}_{BC} + \underbrace{0+m\left[L^2+L^2\right]}_{CD} = \frac{11}{3}mL^2$$

$$P_{xy} = \underbrace{m.\frac{L}{2}.0}_{OA} + \underbrace{m.L.0}_{AB} + \underbrace{m.L.\frac{L}{2}}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 2mL^2 \quad \text{et} \quad P_{xz} = \underbrace{m.\frac{L}{2}.0}_{OA} + \underbrace{m.L.\frac{L}{2}}_{AB} + \underbrace{m.L.L}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 3mL^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}mL^2\ddot{\theta} = \frac{5}{2}mLg\sin\theta - \frac{3}{2}mLg\cos\theta & (1) \\ -2mL^2\ddot{\theta} + 3mL^2\dot{\theta}^2 = -2LZ_E + 4mLg\cos\theta & (2) \\ -3mL^2\ddot{\theta} - 2mL^2\dot{\theta}^2 = 2LY_E - 4mLg\sin\theta & (3) \end{cases}$$

$$(1)\ :\ \dot{\theta}^2 = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(5\left(-\cos\theta+1\right)-3\left(\sin\theta-0\right)\right) = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(-3\sin\theta-5\cos\theta+5\right) \quad (4)$$

$$(1)+(2)+(4)\ :\ \mathrm{Z_E} = \frac{mg}{22}\left(42\sin\theta+80\cos\theta-45\right)$$

$$(1)+(3)+(4)\ :\ \mathrm{Y_E} = \frac{mg}{44}\left(79\sin\theta+87\cos\theta-60\right)$$

5.1 $\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = 0 \text{ car } \overline{R}=0}$ et $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \quad \text{car } O \text{ est un point fixe}}$

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} \frac{mH^2}{12} & 0 & - \\ 0 & \frac{mB^2}{12} & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\,\overline{1}_X + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\,\overline{1}_Y$$

Dans les axes $OXYZ$ liés à la plaque

$$\frac{d\overline{M}_O}{dt}=\frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\frac{d\overline{1}_X}{dt}+\frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\frac{d\overline{1}_Y}{dt}=\frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\left(-\omega\cos\theta\overline{1}_Z\right)+\frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\left(+\omega\sin\theta\overline{1}_Z\right)$$

$$=\left(-\frac{mH^2}{24}\omega^2\sin 2\theta+\frac{mB^2}{24}\omega^2\sin 2\theta\right)\overline{1}_Z=\frac{m}{24}\omega^2\sin 2\theta\left(B^2-H^2\right)\overline{1}_Z=\sum\overline{m}_{e,O}$$

Ou directement dans les Oxyz tournant avec la plaque :

$$\overline{M}_O=\begin{pmatrix}- & -P_{xy} & -\\ - & I_y & -\\ - & 0 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{pmatrix}=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y \quad \text{et} \quad \begin{cases}\overline{1}_x=\cos\theta\overline{1}_X-\sin\theta\overline{1}_Y\\ \overline{1}_y=\sin\theta\overline{1}_X+\cos\theta\overline{1}_Y\end{cases};\ I_X=\frac{mH^2}{12};\ I_Y=\frac{mB^2}{12}$$

$$\begin{cases}I_{y,plaque}=\sin^2\theta I_X+\cos^2\theta I_Y-2\sin\theta\cos\theta P_{XY}=\sin^2\theta\frac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\frac{mB^2}{12}\\ P_{xy,plaque}=\sin\theta\cos\theta\left(I_Y-I_X\right)=\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\end{cases}$$

$$\overline{M}_O=-\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega\overline{1}_x+\left(\sin^2\theta\frac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\frac{mB^2}{12}\right)\omega\overline{1}_y \Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt}=\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega^2\overline{1}_z$$

5.2 Dans les axes *Oxyz*.

$$\boxed{\sum\overline{m}_{e,O}=\frac{d\overline{M}_O}{dt}\ \text{car } O \text{ est un point fixe}} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y$$

$P1\left(X_1,d\right);P2\left(-X_2,d\right)$

$$\begin{cases}I_y=I_{y,plaque}-I_{y,r1}-I_{y,r2}=\sin^2\theta\frac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\frac{mB^2}{12}-\left(\frac{\rho\pi r^4}{4}+\rho\pi r^2X_1^2\right)-\left(\frac{\rho\pi r^4}{4}+\rho\pi r^2X_2^2\right)\\ P_{xy}=P_{xy,plaque}-P_{xy,r1}-P_{xy,r2}=\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}-\left(0+\rho\pi r^2X_1d\right)-\left(0+\rho\pi r^2X_2d\right)\end{cases}$$

$$\overline{M}_O=\left(-\frac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega\overline{1}_x+\left(\frac{m}{12}\left(H^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta\right)-\rho\pi r^2\left(\frac{r^2}{2}+X_1^2+X_2^2\right)\right)\omega\overline{1}_y$$

A l'équilibre statique et dynamique :

$$\boxed{\sum\overline{m}_{e,Oz}=0}\Rightarrow-\left(-\rho\pi r^2gX_1\right)-\left(\rho\pi r^2gX_2\right)=0\Rightarrow X_1=X_2\quad\left(//\quad\sum\overline{F}_{e,O}=\frac{d\overline{R}}{dt}=0\right)$$

De plus, $\boxed{\sum\overline{m}_{e,O}=\frac{d\overline{M}_O}{dt}=0}=\left(-\frac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt}$

$$\Rightarrow-\left(-\frac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega^2\overline{1}_z=0$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{m}{48}\frac{\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta}{\rho\pi r^2d}$$