NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle 2
2ième session 26/08/2008 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\bar{R}=\sum \bar{F}_{\mathrm{e}}$$

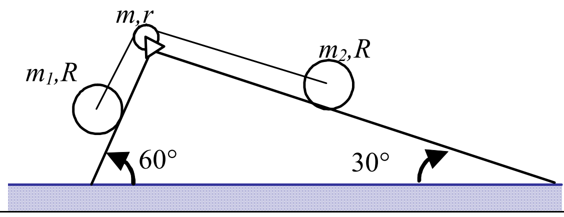
$$\frac{d}{dt}\overline{M_A}=m\overline{v_G}\times\overline{v_A}+\bar{m}_{\mathrm{e},A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A}=\overline{M_B}+\overline{AB}\times\bar{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A=m\overline{AG}\times\bar{v}_A+\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T=\sum \bar{F}_h.\bar{v}_h \quad \text{avec} \quad T=\frac{mv_A^2}{2}+m\bar{v}_A.\left(\bar{\omega}\times\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}$$

$$L=T-V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i=\sum_h \bar{F}_h.\frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : questions rapides (5 points)

Deux roues cylindrique et homogène de rayon R, de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre. Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique (de masse m et de rayon r) lié au sol par une rotule.



Peut-on considérer la tension dans la corde comme constante ? Justifiez votre réponse en utilisant le théorème du moment cinétique sur la poulie. (2 points)

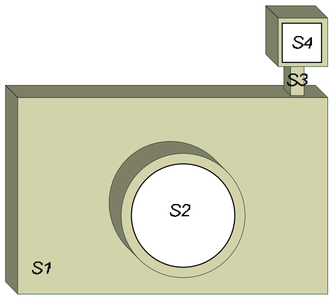
Par le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie en son centre

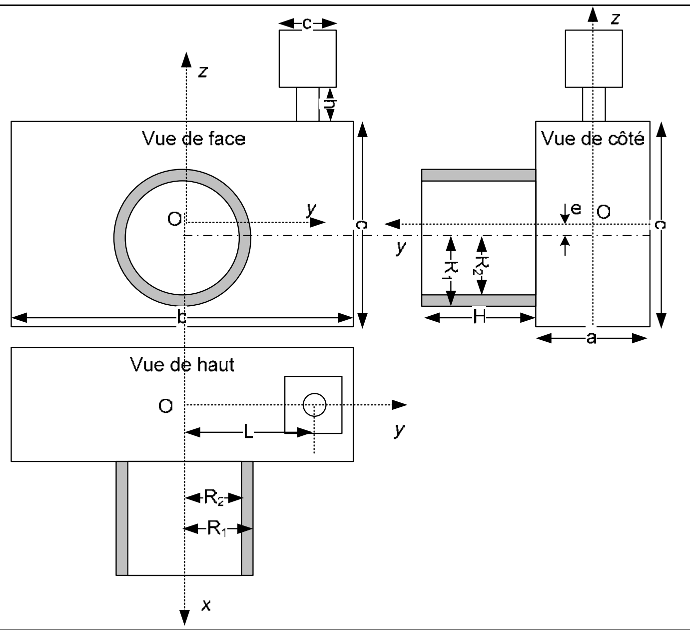
$$\left(\frac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \quad => \quad \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=r\left(F_2-F_1\right)$$

Si on considère une poulie avec une inertie comme dans ce cas-ci, le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie en son centre nous montre que les tensions doivent être différentes.

Déterminer les produits d'inertie dans le système d'axe Oxyz de l'appareil photo représenté ci-dessous.

S1 = **parallélépipède** de côté *abc* et de masse M_1.
S2 = l'objectif est un **cylindre creux** de longueur H et de rayon extérieur R_1 et intérieur R_2 et de masse M_2.
S3 = la pièce sur laquelle est fixée le flash est un **cylindre** de longueur h et de rayon r et de masse M_3.
S4 = le flash est un **cube** de côté d et de masse M_4.
(1 point)





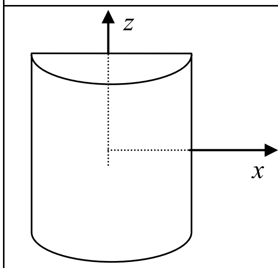
S1+S2 : Plan de symétrie orthogonal xz => $P_{xy}=P_{yz}=0$ Intégration de la cordonnée y (puissance impaire) sur un domaine symétrique.
S1+S3+S4 : Plan de symétrie orthogonal yz => $P_{xy}=P_{xz}=0$ Intégration de la cordonnée x (puissance impaire) sur un domaine symétrique.

$$P_{xz} = \underbrace{-M_2\left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2}\right)e}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_2}=\left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2},0,-e\right)}$$

$$P_{yz} = \underbrace{M_3 L\left(\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right)}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_3}=\left(0,L,\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right)} + \underbrace{M_4 L\left(\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right)}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_4}=\left(0,L,\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right)}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe x du demi-cylindre de hauteur H et de rayon R en partant des données connues du cylindre plein (1 point)



I_z (Cylindre=O) $= \dfrac{MR^2}{2} = \boxed{I_x(\mathrm{O}) + I_y(\mathrm{O}) - 2I_{xy}(\mathrm{O})} = 2I_x(\mathrm{O}) - 2I_{xy}(\mathrm{O})$ (par symétrie $I_x(\mathrm{O}) = I_y(\mathrm{O})$)

par symétrie on décompose en demi-cylindre $(\cup)$: $I_x(\mathrm{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap) \Rightarrow I_z(\mathrm{O}) = 4I_x(\cap) - 2I_{xy}(\mathrm{O})$

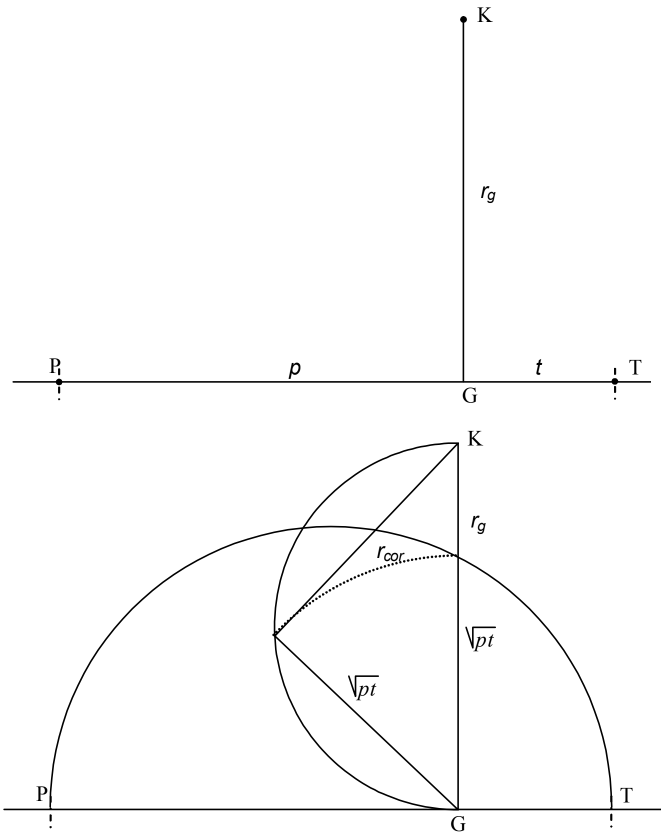
$$\Rightarrow I_x(\cap) = \frac{I_z(\mathrm{O})}{4} + \frac{I_{xy}(\mathrm{O})}{2} = \frac{M_{\mathrm{O}}}{8}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right) = \frac{M_{\cup}}{4}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \boxed{I_{xy}(\mathrm{O}) = \int z^2 dm = \dfrac{MH^2}{12}} = \displaystyle\int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}}\left(\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} z^2 \rho r d\theta\right)dr\right)dz \\ \boxed{I_z(\mathrm{O}) = \int r^2 dm = \dfrac{MR^2}{2}} = \displaystyle\int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}}\left(\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} r^2 \rho r d\theta\right)dr\right)dz \end{cases}$$

$$I_x(\mathrm{O}) = \frac{I_z(\mathrm{O})}{2} + I_{xy}(\mathrm{O}) = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12} = \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right)$$

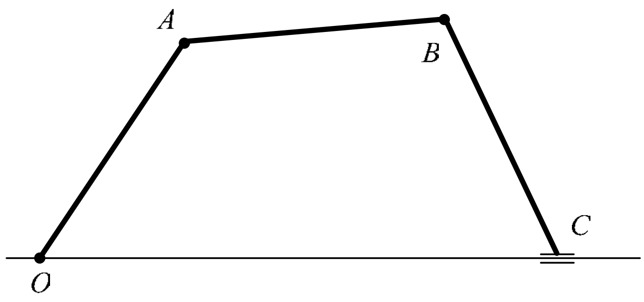
$$\Rightarrow I_x(\cup) = \frac{I_x(\mathrm{O})}{2} = \frac{M_{\mathrm{O}}}{8}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right) = \frac{M_{\cup}}{4}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right)$$

Si l'on veut réduire un système à deux points P et T imposés, ceux-ci ne sont pas nécessairement conjugués. Pour déterminer le moment d'inertie correcteur, nous devons trouver le rayon de giration correcteur.
Déterminer graphiquement ce rayon correcteur sachant que $pt \pm r_{cor}^2 = r_g^2$ et que r_g (=GK) est déjà placé sur le graphique. (1 point)



<u>Question 2</u> : (5 points)

Soit trois barres pesantes, homogènes, identiques, de masse m et de longueur L. OA est fixée en O par une rotule, AB est articulée à OA en A, BC est articulée à AB en B. C est une glissière.



1. Combien de degrés de liberté comporte le système ? Justifiez.

2 degrés de liberté (angles θ_1 et θ_2 définis respectivement entre les tiges OA et AB avec l'horizontale)
3 coordonnées / solide = 9 coordonnées
- 3 rotules = 2 équations de liaison (Réaction de liaison en O : X_O et Y_O ; Réaction interne en A et en B : X_A, Y_A, X_B et Y_B)
- 1 glissière = 1 équation de liaison (Réaction de liaison en C : Y_C)

2. Etablir les équations permettant de déterminer les équations de mouvement par Lagrange en choisissant judicieusement vos coordonnées généralisées pour simplifier le calcul de l'énergie cinétique (sans résoudre le système d'équations obtenu)

Coordonnées généralisées : $\theta_1,\theta_2,\theta_3,x_2,y_2\left(=\overline{OG_2}\right),x_3,y_3\left(=\overline{OG_3}\right)$

$$\begin{cases}\overline{OG_1}=\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta_1\,\overline{1}_x+\sin\theta_1\,\overline{1}_y\right) \Rightarrow \overline{v}_{G1}=\dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta_1\,\overline{1}_x+\cos\theta_1\,\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1\\ \overline{v}_{G2}=\overline{v}_A+\dot{\theta}_2\,\overline{1}_z\times\overline{AG_2}\ \text{ ou }\ \overline{v}_{G2}=\dot{x}_2\,\overline{1}_x+\dot{y}_2\,\overline{1}_y\\ \overline{v}_{G3}=\overline{v}_B-\dot{\theta}_3\,\overline{1}_z\times\overline{BG_3}\ \text{ ou }\ \overline{v}_{G3}=\dot{x}_3\,\overline{1}_x+\dot{y}_3\,\overline{1}_y\end{cases}$$

$$\text{Contraintes : }\begin{cases}y_3+\dfrac{L}{2}\sin\theta_3=0 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta y_3+\dfrac{L}{2}\cos\theta_3\delta\theta_3=0\right)\\ x_2=L\cos\theta_1+\dfrac{L}{2}\cos\theta_2 \Rightarrow \lambda_2\left(\delta x_2+L\sin\theta_1\delta\theta_1+\dfrac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2=0\right)\\ y_2=L\sin\theta_1+\dfrac{L}{2}\sin\theta_2 \Rightarrow \lambda_3\left(\delta y_2-L\cos\theta_1\delta\theta_1-\dfrac{L}{2}\cos\theta_2\delta\theta_2=0\right)\\ x_3=L\cos\theta_1+L\cos\theta_2+\dfrac{L}{2}\cos\theta_3 \Rightarrow \lambda_4\left(\delta x_3+L\sin\theta_1\delta\theta_1+L\sin\theta_2\delta\theta_2+\dfrac{L}{2}\sin\theta_3\delta\theta_3=0\right)\\ y_3=L\sin\theta_1+L\sin\theta_2+\dfrac{L}{2}\sin\theta_3 \Rightarrow \lambda_5\left(\delta y_3-L\cos\theta_1\delta\theta_1-L\cos\theta_2\delta\theta_2-\dfrac{L}{2}\cos\theta_3\delta\theta_3=0\right)\\ \text{ou}\\ x_3=x_2+\dfrac{L}{2}\cos\theta_2+\dfrac{L}{2}\cos\theta_3\ \text{ et }\ y_3=y_2+\dfrac{L}{2}\sin\theta_2+\dfrac{L}{2}\sin\theta_3\ \text{ et }\ L\sin\theta_1+L\sin\theta_2=L\sin\theta_3\end{cases}$$

$$T=\left[\frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}\right]_{OA}+\left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^{\,2}+\dot{y}_2^{\,2}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_2^{\,2}\right]_{AB}+\left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}_3^{\,2}+\dot{y}_3^{\,2}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_3^{\,2}\right]_{BC}$$

$$V=mg\frac{L}{2}\sin\theta_1+mgy_2+mgy_3$$

$$L=T-V=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^{\,2}+\dot{y}_2^{\,2}\right)+\frac{m}{2}\left(\dot{x}_3^{\,2}+\dot{y}_3^{\,2}\right)+m\frac{L^2}{12}\left(4\dot{\theta}_1^{\,2}+\dot{\theta}_2^{\,2}+\dot{\theta}_3^{\,2}\right)-mg\frac{L}{2}\sin\theta_1-mgy_2-mgy_3$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_j\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}}$$

$$\begin{cases}m\ddot{x}_2=\lambda_2\\ m\ddot{y}_2+mg=\lambda_3\\ m\ddot{x}_3=\lambda_4\\ m\ddot{y}_3+mg=\lambda_1+\lambda_5\\ m\dfrac{L^2}{3}\ddot{\theta}_1+mg\dfrac{L}{2}\cos\theta_1=\lambda_2L\sin\theta_1-\lambda_3L\cos\theta_1+\lambda_4L\sin\theta_1-\lambda_5L\cos\theta_1\\ m\dfrac{L^2}{12}\ddot{\theta}_2=+\lambda_2\dfrac{L}{2}\sin\theta_2-\lambda_3\dfrac{L}{2}\cos\theta_2+\lambda_4L\sin\theta_2-\lambda_5L\cos\theta_2\\ m\dfrac{L^2}{12}\ddot{\theta}_3=\lambda_1\dfrac{L}{2}\cos\theta_3+\lambda_4\dfrac{L}{2}\sin\theta_3-\lambda_5\dfrac{L}{2}\cos\theta_3\\ +\ \text{Contraintes holonomes}\end{cases}$$

3. Etablir les équations permettant de déterminer les différentes réactions en O et en C (sans détailler les calculs mais en montrant clairement comment établir chaque terme et chaque grandeur fondamentale)

Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x :
1 équation liant θ_1 , θ_2, θ_3 et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y :
1 équation liant θ_1 , θ_2, θ_3, Y_C et Y_O

$$\frac{d}{dt}\overline{R}=\overline{F}_\mathrm{e} \text{ avec } \begin{cases} \overline{R}=\sum_i \overline{R_i} \\ \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i} \\ \overline{v}_{G_1}=\overline{v}_O+\overline{\omega}_1\times\overline{OG_1}\ ; \\ \overline{v}_{G_2}=\overline{v}_A+\overline{\omega}_2\times\overline{AG_2}\ ; \\ \overline{v}_{G_3}=\overline{v}_B+\overline{\omega}_3\times\overline{BG_3} \\ \text{et la contrainte : } L\sin\theta_1+L\text{sins}\,\theta_2=L\sin\theta_3 \\ \overline{F}_e=\overline{R}_O+\overline{R}_C-3m\overline{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_x(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\left.\overline{F}_\mathrm{e}\right|_x(X_O) \\ \left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_y(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\left.\overline{F}_\mathrm{e}\right|_y(Y_O,Y_C,mg) \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\Rightarrow \overline{R}(S_1+S_2+S_3)=m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]$$

$$\begin{cases} m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]=X_O \\ m\left[\frac{5L}{2}\left(+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_3\right]=Y_O+Y_C-3mg \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 et θ_2 et Y_C

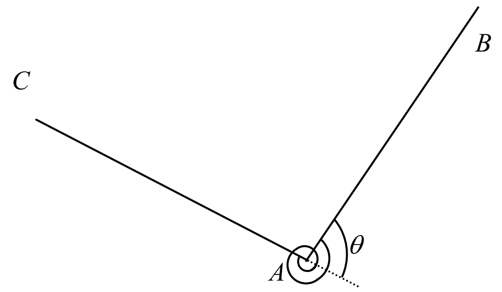
$$\frac{d}{dt}\overline{M_O}=\overline{m}_{\mathrm{e},O} \text{ avec } \begin{cases} \overline{M_O}=\sum_i \overline{M_{O_i}} \\ \overline{M_{O_i}}=\overline{M_{G_i}}+\overline{OG_i}\times\overline{R_i} \\ \overline{M_{G_i}}=\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i=\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}_i\overline{1}_z \\ \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i} \end{cases} \Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\overline{M_O}\right|_z(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\left.\overline{m}_{\mathrm{e},O}\right|_z(mg,Y_C)$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{m}_{\mathrm{e},O}=\sum_i \overline{OG_i}\times m\overline{g}+\overline{OC}\times\overline{R}_C$$

<u>Question 3</u> : Deux barres articulées (4 points)

On considère un système de deux tiges identiques AB et AC articulées en A, de masse m, de longueur $2L$.
Elles sont liées par un ressort en spirale de constante C.
L'ensemble des deux tiges glisse sans frottement sur un plan horizontal.
Le ressort exerce un couple proportionnel à la raideur de torsion du ressort, C, et à l'angle d'ouverture θ.



Déterminer la ou les équations de mouvement du système articulé.

Degrés de liberté : 4 (3 pour la tige AC (x,y,α) et l'angle θ qui définit la position de AB par rapport à AC)
=> 2 solides en 2D (6 coordonnées de positionnement) une rotule en A (2 réactions internes, X_A et Y_A) => 4 ddl

6 coordonnées gérénalisées : $\begin{cases} \text{Milieu de } AB = OG_1(x_1, y_1) \\ \text{Milieu de } AC = OG_2(x_2, y_2) \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha = \text{angle entre } AC \text{ et } x \\ \theta = \text{angle entre } AB \text{ et } AC \end{cases}$

2 contraintes pour exprimer la liaison en A $\begin{cases} x_2 + L\cos\alpha = x_1 - L\cos(\theta-\alpha) \\ y_2 - L\sin\alpha = y_1 - L\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$

$$=> \begin{cases} \lambda_{1:}\left(\delta x_2 - \delta x_1 - L\sin(\theta-\alpha)\delta\theta + \left(-L\sin\alpha + L\sin(\theta-\alpha)\right)\delta\alpha = 0\right) \\ \lambda_2\left(\delta y_2 - \delta y_1 + L\cos(\theta-\alpha)\delta\theta + \left(-L\cos\alpha - L\cos(\theta-\alpha)\right)\delta\alpha = 0\right) \end{cases}$$

Rem: le centre de masse total du système se situe sur la droite G_1G_2 qui fait un angle $\theta/2$ avec la tige AB

$$T = \left[\frac{mv_{G_1}^2}{2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1.\overline{\overline{I}}_{G_1}.\overline{\omega}_1\right] + \left[\frac{mv_{G_2}^2}{2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2\right] = \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m(2L)^2}{12}\left(\dot{\alpha} - \dot{\theta}\right)^2\right] + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m(2L)^2}{12}\dot{\alpha}^2\right]$$

$$=> T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}\dot{\theta}$$

$V_{mg} = 0$

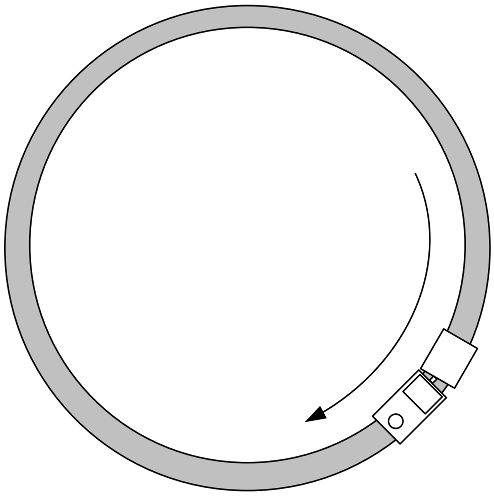
$$\delta\tau = Q_\theta^*\delta\theta = -C\theta\delta\theta \Rightarrow Q_\theta^* = -C\theta$$

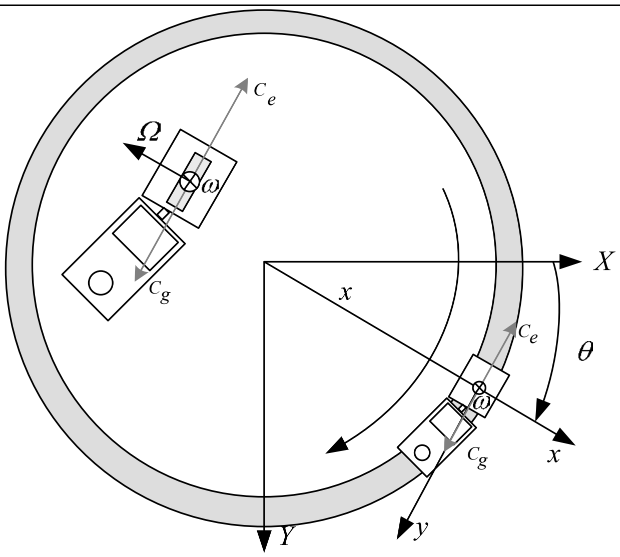
$$\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \ : m\ddot{x}_1 = -\lambda_1 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \ : m\ddot{x}_2 = \lambda_1
\end{array}\right\} - m\ddot{x}_1 = m\ddot{x}_2 = \lambda_1 \\
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial y_1} \ : m\ddot{y}_1 = -\lambda_2 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial y_2} \ : m\ddot{y}_2 = \lambda_2
\end{array}\right\} - m\ddot{y}_1 = m\ddot{y}_2 = \lambda_2 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^* + \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \ : \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\alpha} = \lambda_2\left(-L\cos\alpha - L\cos(\theta-\alpha)\right) - \lambda_1 L\sin(\theta-\alpha) - C\theta \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial \alpha} \ : \dfrac{2mL^2}{3}\ddot{\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = \lambda_1\left(-L\sin\alpha + L\sin(\theta-\alpha)\right) + \lambda_2 L\cos(\theta-\alpha) \\
x_2 + L\cos\alpha = x_1 - L\cos(\theta-\alpha) \\
y_2 - L\sin\alpha = y_1 - L\sin(\theta-\alpha)
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\alpha} = -m\ddot{y}_1\left(-L\cos\alpha - L\cos(\theta-\alpha)\right) + m\ddot{x}_1 L\sin(\theta-\alpha) - C\theta \\
\dfrac{2mL^2}{3}\ddot{\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -m\ddot{x}_1\left(-L\sin\alpha + L\sin(\theta-\alpha)\right) - m\ddot{y}_1 L\cos(\theta-\alpha)
\end{cases}$$

<u>Question 4</u> : Gyroscope (2 points)

On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.





Le train tourne à vitesse constante => conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

$\overline{\omega} = \omega \overline{1}_z$ avec ω constant

le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,G} = -C_e \overline{1}_y$

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit etre

$\overline{C}_g = C_g \overline{1}_y = \Gamma\overline{\Omega} \times \omega \overline{1}_z$

=> Le moment cinétique du gyroscope ($\Gamma\overline{\Omega}$) doit etre suivant l'axe $-\overline{1}_x$ => $\overline{M}_{G,gyr} = -\Gamma\Omega\overline{1}_x$

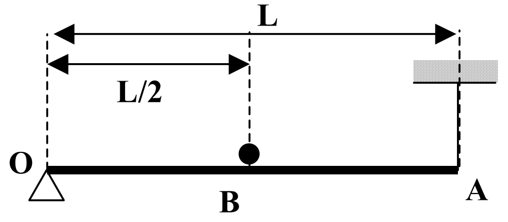
Donc on va placer une roue sur le wagon de manière à avoir son axe de révolution suivant l'axe x. On la ferra tourner de manière à avoir le vecteur de rotation propre de la roue vers le centre des rails.

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

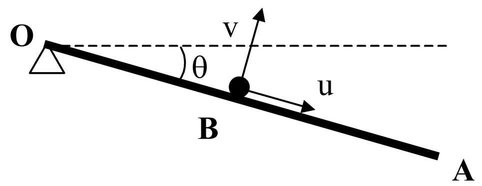
<u>Question 5</u> : Trappe (4 points)

Un individu situé au milieu d'une trappe qui se dérobe sous lui, *commence-t-il par glisser ou ses pieds décollent-ils par rapport à la trappe qui tombe ?*

Pour répondre à cette question, la modélisation suivante est utilisée. Une tige supposée homogène *OA* de masse *m* et de longueur *L*, porte en son centre une masse considérée comme ponctuelle *B*, également de masse *m*. Le coefficient de frottement entre la tige et la masse vaut *f*. Initialement, la tige est maintenue horizontale grâce à un fil qui maintient la barre en *A* (Figure 1). Au temps $t = 0$, on coupe le fil.



(1)



(2)

1. Si on se place dans l'hypothèse où, durant la chute, la masse reste solidaire de la tige (Figure 2), on demande : (3 points)
   a) d'exprimer l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble (tige + masse);
   b) d'exprimer les forces de liaison F_{lu} et F_{lv} exercées par la tige *OA* sur la masse *B* en fonction de l'angle θ entre la tige et l'horizontale;

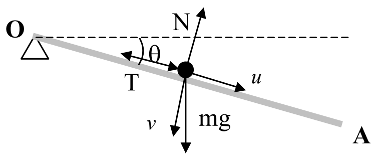
<u>Système {tige + masse}</u> : Équation différentielle => Lagrange

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_O.\bar{\varpi}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\varpi}}_{=0}\right)_{\text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$V = -2mg\frac{L}{2}\sin\theta \;\; => \;\; L = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mgL\sin\theta$$

Il n'y a pas de force qui ne dérive pas d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\; => \;\; \frac{7mL^2}{12}\ddot{\theta} - mgL\cos\theta = 0 \;\; => \;\; \ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta$$



$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \sum\bar{F}_e \; :$$

$$m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\,\bar{1}_v - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\,\bar{1}_u = +mg\cos\theta\,\bar{1}_v + mg\sin\theta\,\bar{1}_u - N\,\bar{1}_v - T\,\bar{1}_u$$

Théorème de la résultante cinétique sur la masse : (Si Système {tige}, on doit tenir compte des réactions en O)

$$\begin{cases} -m\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \\ m\dfrac{L}{2}\ddot{\theta} = mg\cos\theta - N \;\; => \;\; N = mg\cos\theta - m\dfrac{L}{2}\dfrac{12g}{7L}\cos\theta = \dfrac{1}{7}mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta => \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta \;\; => \;\; \dot{\theta}^2 = \frac{24g}{7L}\sin\theta \;\; => \;\; T = m\frac{12g}{7}\sin\theta + mg\sin\theta = \frac{19}{7}mg\sin\theta$$

2. En déduire les conditions pour lesquelles il y aurait rupture d'équilibre entre la masse et la tige soit par glissement, soit par décollement. Pour chacun des cas, déterminer l'angle θ_{max} correspondant. Préciser si l'individu va d'abord glisser ou décoller. (1 points)

Glissement si *T=fN :* $T = \frac{19}{7} mg \sin\theta = fN = f \frac{1}{7} mg \cos\theta$ => $tg\theta = \frac{f}{19}$

Décollement si *N=0 :* $N = \frac{1}{7} mg \cos\theta = 0$ => $\theta = \frac{\pi}{2}$

Il y aura glissement avant décollement

BROUILLON

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLON