Faculté des Sciences Appliquées
Mécanique Rationnelle 2

Année académique 2007-2008
2e année de bachelier

NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle 2
1ère session 10/01/2008 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB}\times\overline{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

<u>Question 1</u> : questions rapides (5 points)

Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son diamètre passant par le centre de masse (1)

$I_x = I_{xz} + I_{xy}$

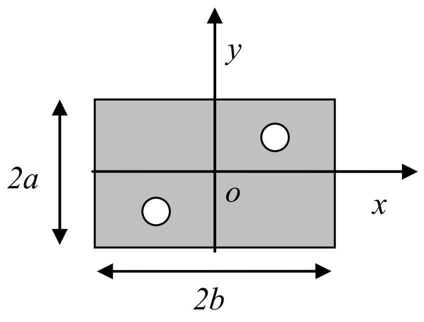
$I_{xy} = \int z^2 dm = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}}\left(\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} z^2\rho r d\theta\right)dr\right)dz = \frac{MH^2}{12}$ et $I_z = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}}\left(\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} r^2\rho r d\theta\right)dr\right)dz = \frac{MR^2}{2}$

Par définition : $I_z = I_{xz} + I_{yz}$ or par symétrie : $I_{xz} = \int y^2 dm = I_{yz}$ => $I_z = 2I_{xz}$ => $I_{xz} = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4}$

Ou avec la formule : $I_z = I_x + I_y - 2I_{xy} = 2I_x - 2I_{xy}$ => $I_x = \frac{I_z}{2} + I_{xy}$

=> $I_x = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}$

Déterminer le terme $\boldsymbol{I_{xy}}$ du rectangle sachant que x et y sont les médianes du rectangle. (0.5)



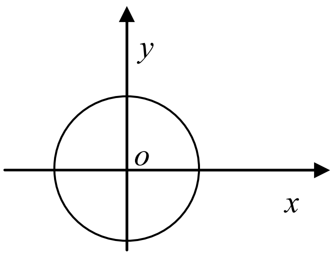
$I_{xy} = \int z^2 dm = \int 0\, dm = 0 \neq P_{xy}$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Que représente le terme I_z dans l'équation suivante : $T_{(\alpha)} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{P.a}}$ (0.5)

Le moment d'inertie du solide autour de l'axe auquel on fait l'oscillation pour calculer la période T.

Déterminer I_O d'un disque plein de masse *m* et de rayon *R*. (0.5)



$$I_O = \int \left(x^2+y^2+z^2\right)dm \underbrace{=}_{z=0} \int \left(x^2+y^2\right)dm = I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Démontrer l'expression du théorème de Lagrange suivante $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$ en fonction du théorème classique : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}$ en identifiant chacun des termes ainsi que les conditions d'application. (1.5)

$\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$ avec $\delta \overline{r}_h = \sum_i \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i$

Equation de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$ avec $Q_i = Q^*_{i(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel})} + Q_{i(\text{Force dérivant d'un potentiel})}$

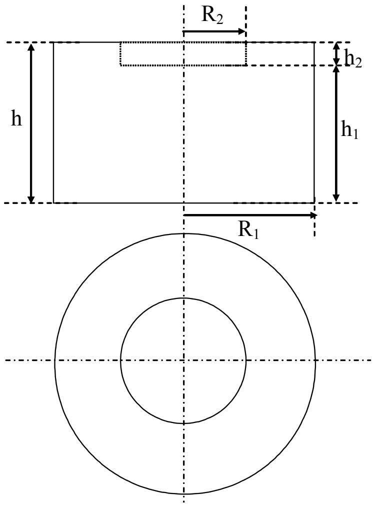
Pour les forces dérivent d'un potentiel : $\delta\tau = -\delta V$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_h \overline{F}_h . \delta \overline{r}_h = \sum_i \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i}_{\delta\tau} = -\underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i}_{\delta V} \Rightarrow \boxed{Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*}$$

Le dernier terme tombe si on choisit le même nombre de coordonnées généralisées que de degrés de liberté.

Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre évidé par rapport à son axe de révolution passant par le centre de masse (exprimer le résultant en fonction de la masse totale) (1)



Moment d'inertie d'un cylindre en son centre : $I_{z_G} = \frac{MR^2}{2}$

Moment d'inertie du cylindre évidé par rapport à l'axe z passant par G :

$$I_{z_G} = I_{z_G(cylindre1)} - I_{z_G(cylindre2)} = \frac{\rho\pi R_1^4\left(h_1+h_2\right)}{2} - \frac{\rho\pi R_2^4 h_2}{2}$$

$$M = \underbrace{\rho\pi R_1^2\left(h_1+h_2\right)}_{M_1} - \underbrace{\rho\pi R_2^2 h_2}_{M_2}$$

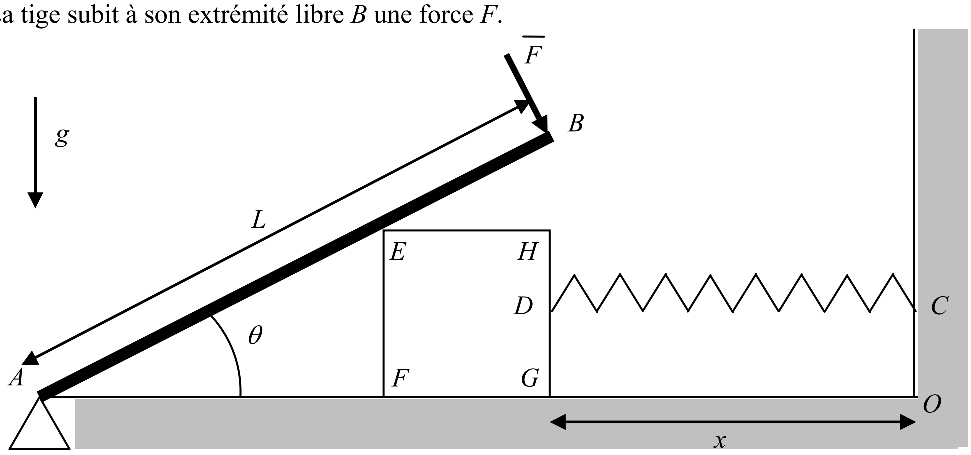
ou

$$I_{z_G} = I_{z_G(cylindre\ h1)} + I_{z_G(cylindre\ évidé\ h2)} = \underbrace{\frac{\rho\pi R_1^4 h_1}{2}}_{\frac{M_1R_1^2}{2}} + \underbrace{\left(\frac{\rho\pi R_1^4 h_2}{2} - \frac{\rho\pi R_2^4 h_2}{2}\right)}_{\frac{M_2}{2}\left(R_1^2+R_2^2\right)}$$

$$I_{z_G} = \frac{MR_1^2}{2} + \frac{M_2R_2^2}{2} \quad \text{avec } M_2 = \frac{h_2\left(R_1^2-R_2^2\right)}{h_1R_1^2+h_2\left(R_1^2-R_2^2\right)}M$$

Question 2 : (4 points)

Dans le plan vertical, une plaque carrée de masse *M* et de côté *H* peut glisser sans frottement horizontalement. La barre homogène *AB*, de masse *m* et de longueur *L* peut tourner sans perte autour de la liaison rotoïde en *A*. Le ressort horizontal *CD* relie le point *C* du bâti au point *D* du solide, à une hauteur *h (=GD)*. La rigidité de ce ressort vaut *k* et sa longueur au repos vaut *OA*. La tige subit à son extrémité libre *B* une force *F*.



2. Déterminer **la ou les équations de mouvement** du système en fonction des paramètres de l'énoncé

$\mu = AE; OA = L_0;\ x = DC \Rightarrow L_0 - x - H = \mu\cos\theta$ et $\mu = \dfrac{H}{\sin\theta} \Rightarrow x = L_0 - H\left(1+\dfrac{1}{tg\theta}\right)$

$T = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot\theta^2\right] + \left[\dfrac{1}{2}M\dot x^2\right]$ avec $\dot x = -\dot\mu\cos\theta + \mu\sin\theta\dot\theta = H\left(1+\dfrac{1}{tg^2\theta}\right)\dot\theta = \dfrac{H}{\sin^2\theta}\dot\theta$

$V = \dfrac{L}{2}mg\sin\theta + \dfrac{k}{2}\left(x-L_0\right)^2 = \dfrac{L}{2}mg\sin\theta + \dfrac{k}{2}H^2\left(1+\dfrac{1}{tg\theta}\right)^2$

2 coordonnée θ et x : Or nous avons 1 ddl => une contrainte : $\phi_1 = x + H\left(1+\dfrac{1}{tg\theta}\right) - L_0 = 0$

=> un multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0\right)$

$\Rightarrow L = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot\theta^2\right] + \left[\dfrac{1}{2}M\dot x^2\right] - \dfrac{L}{2}mg\sin\theta - \dfrac{k}{2}\left(x-L_0\right)^2$

$Q^*_\theta : \delta\tau = \overline{F}.\delta\overline{AB} = -FL\delta\theta \Rightarrow Q^*_\theta = -FL$ et $Q^*_x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = Q^*_\theta + \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\dfrac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial\theta}\ :\ \dfrac{mL^2}{3}\ddot\theta - \left[-\dfrac{L}{2}mg\cos\theta\right] = -FL - \lambda_1\dfrac{H}{\sin^2\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot x} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = Q^*_x + \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\dfrac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial x}\ :\ M\ddot x - \left[-\dfrac{k}{2}2\left(x-L_0\right)\right] = \lambda_1 \\ \dot x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\dot\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot\theta - 2MH^2\frac{\mathrm{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot\theta^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right) - FL = 0$$

1 coordonnée θ :

$T = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot\theta^2\right] + \left[\dfrac{1}{2}MH^2\left(1+\dfrac{1}{tg^2\theta}\right)^2\dot\theta^2\right]$ et $V = \dfrac{L}{2}mg\sin\theta + \dfrac{k}{2}H^2\left(1+\dfrac{1}{tg\theta}\right)^2$

$L = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{3}\dot\theta^2\right] + \left[\dfrac{1}{2}MH^2\dfrac{1}{\sin^4\theta}\dot\theta^2\right] - \dfrac{L}{2}mg\sin\theta - \dfrac{k}{2}H^2\left(1+\dfrac{1}{tg\theta}\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = Q^*_\theta$:

$$\frac{mL^2}{3}\ddot\theta + MH^2\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\ddot\theta - 4MH^2\frac{\mathrm{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot\theta^2 - \left[-\frac{1}{2}MH^2\dot\theta^2\left(-4\frac{\mathrm{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\right) - \frac{L}{2}mg\cos\theta + kH^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\right] = FL$$

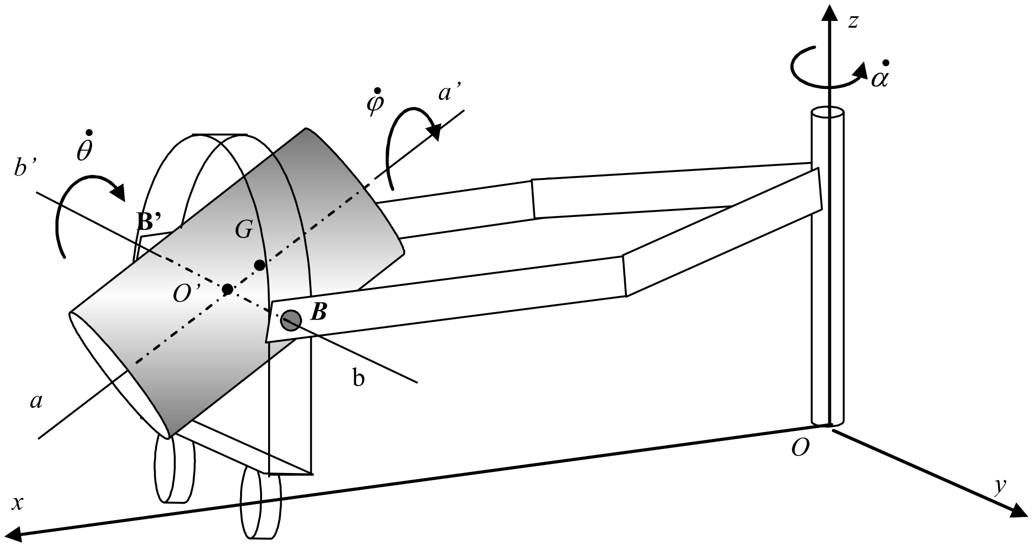
$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot\theta - 2MH^2\frac{\mathrm{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot\theta^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right) - FL = 0$$

<u>Question 3</u> : Centrifugeuse humaine (4 points)

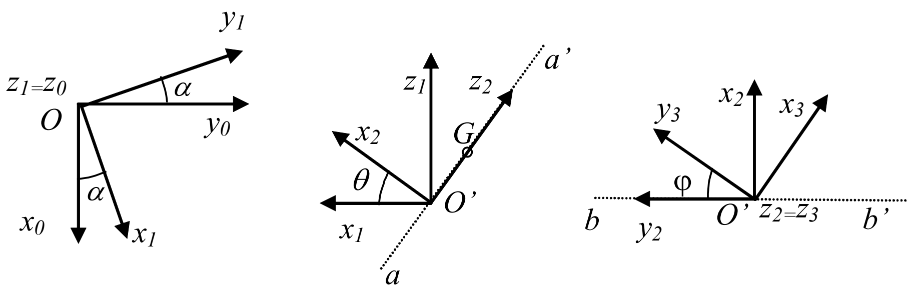
Dans le cadre de l'entraînement des pilotes de chasse, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. La centrifugeuse est constituée :

- d'un bâti en rotation autour de l'axe *Oz* . Sa position est définie par le paramètre α et la distance de *O'* à l'axe $z = L$.
- d'une nacelle en rotation (θ) autour de l'axe *bb'* (// axe *y*) ainsi que d'une rotation (φ) autour de l'axe *aa'* (perpendiculaire à *bb'*) Son centre de masse est à une distance *d* de *O'*. Cette nacelle est modélisée par un cylindre de rayon *R* et de hauteur *H*.

Le repère *Oxyz* tourne avec le bâti.



1. Déterminer les différents systèmes d'axes que vous allez utiliser pour calculer la vitesse angulaire de la nacelle (dessiner leur projection en 2D)



R_1/R_0 : Repère tournant autour de z_1 : $\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot\alpha\,\overline{1}_{z_1} = \dot\alpha\,\overline{1}_{z_0}$

R_2/R_1 : Repère suivant la rotation 1 de la nacelle : $\overline{\omega}_{R_2/R_1} = -\dot\theta\,\overline{1}_{y_2} = -\dot\theta\,\overline{1}_{y_1}$

R_3/R_2 : Repère attaché à la nacelle. $\overline{\omega}_{R_3/R_0} = -\dot\varphi\,\overline{1}_{z_3} = -\dot\varphi\,\overline{1}_{z_2}$

2. Déterminer la vitesse angulaire de la nacelle dans le repère du dessin.

R_3 = Repère suivant la rotation de la nacelle

$$\overline{\omega}_S = \overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot\alpha\,\overline{1}_{z_1} - \dot\theta\,\overline{1}_{y_2} - \dot\varphi\,\overline{1}_{z_2} = \begin{cases} \text{dans } R_1 : \overline{\omega}_S = \dot\varphi \sin\theta\,\overline{1}_{x_1} - \dot\theta\,\overline{1}_{y_1} + \left(\dot\alpha - \dot\varphi\cos\theta\right)\overline{1}_{z_1} \\ \text{dans } R_2 : \overline{\omega}_S = \dot\alpha \sin\theta\,\overline{1}_{x_2} - \dot\theta\,\overline{1}_{y_2} + \left(\dot\alpha\cos\theta - \dot\varphi\right)\overline{1}_{z_2} \end{cases}$$

3. Déterminer l'accélération angulaire de la nacelle.

$$\bar{\varepsilon}_S = \frac{d\bar{\omega}_S}{dt} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S(R_1)}}{dt}\right|_{R_1} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_S = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S_3/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_{R_3/R_1}}_{\dot{\alpha}\dot{\theta}\bar{1}_{x_1} + \dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\theta\bar{1}_{y_1}}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_S = \left[\ddot{\varphi}\sin\theta + \cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\alpha}\dot{\theta}\right]\bar{1}_{x_1} + \left[\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\theta - \ddot{\theta}\right]\bar{1}_{y_1} + \left[\ddot{\alpha} - \ddot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\dot{\theta}\right]\bar{1}_{z_1}$$

$$\bar{\varepsilon}_S = \frac{d\bar{\omega}_{S_3}}{dt} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S(R_2)}}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{S_3} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S_3/R_2}}{dt}\right|_{R_2} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{R_3/R_2}}_{\dot{\theta}\dot{\varphi}\bar{1}_{x_2} + \dot{\varphi}\dot{\alpha}\sin\theta\bar{1}_{y_2}}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_{S_3} = \left[\ddot{\alpha}\sin\theta + \dot{\alpha}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\right]\bar{1}_{x_2} + \left[\dot{\varphi}\dot{\alpha}\sin\theta - \ddot{\theta}\right]\bar{1}_{y_2} + \left[\ddot{\alpha}\cos\theta - \ddot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\theta\dot{\theta}\right]\bar{1}_{z_2}$$

4. Déterminer la somme de forces extérieures qui s'exercent sur la nacelle

Forces en présence : G $(m\bar{g})$, B (X_B, Y_B, Z_B); B' $(X_{B'}, Y_{B'}, Z_{B'})$ dans les axes R_1

$$\bar{v}_G = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_S \times \overline{O'G} \text{ avec } \begin{cases} \bar{v}_{O'} = \cancel{\bar{v}_O} + \bar{\omega}_{bati} \times \overline{OO'} = L\dot{\alpha}\bar{1}_{y_1} = L\dot{\alpha}\bar{1}_{y_2} \\ \overline{O'G} = d\bar{1}_{z_2} \end{cases}$$

$$\bullet\ \bar{v}_G = -\dot{\theta}d\cos\theta\bar{1}_{x_1} + (L - d\sin\theta)\dot{\alpha}\bar{1}_{y_1} - \dot{\theta}dsin\theta\bar{1}_{z_1} \Rightarrow \bar{R} = M\left(-\dot{\theta}d\cos\theta\bar{1}_{x_1} + (L - d\sin\theta)\dot{\alpha}\bar{1}_{y_1} - \dot{\theta}dsin\theta\bar{1}_{z_1}\right)$$

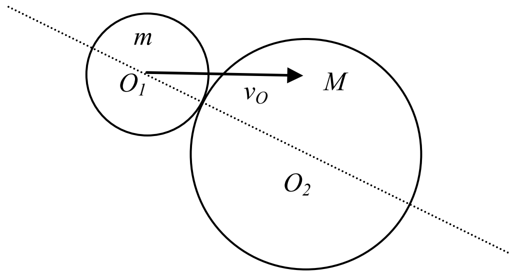
$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_{R_1} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{R} \text{ avec } \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{R} = M\left(-d\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha}\bar{1}_{y_1} - (L - d\sin\theta)\dot{\alpha}^2\bar{1}_{x_1}\right)$$

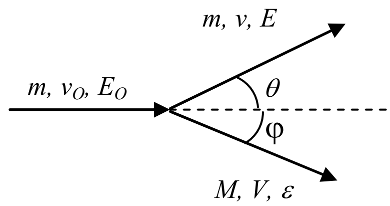
$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \begin{cases} \bar{1}_{x_1} : -M\left(-d\cos\theta\ddot{\theta} + d\sin\theta\dot{\theta}^2 - (L - d\sin\theta)\dot{\alpha}^2\right) = X_B + X_{B'} = \bar{F}_{e,x} \\ \bar{1}_{y_1} : M\left((L - d\sin\theta)\ddot{\alpha} - 2d\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha}\right) = Y_B + Y_{B'} = \bar{F}_{e,y} \\ \bar{1}_{z_1} : M\left(-dsin\theta\ddot{\theta} - d\cos\theta\dot{\theta}^2\right) = -Mg + Z_B + Z_{B'} = \bar{F}_{e,z} \end{cases}$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 4 : Choc élastique entre deux sphères rigides (4 points)

Considérons deux sphères rigides et polies, de masses respectives m et M. Nous supposerons la sphère 1 « incidente » possédant une vitesse de translation v_O tandis que la sphère heurtée est initialement fixe.





1. Déterminer la relation entre l'énergie cinétique de la bille incidente après le choc et celle avant le choc. Justifier les hypothèses faites.

Hypothèse :

1. Avec le théorème de la résultante cinétique appliqué au système, nous ne devons pas tenir compte du choc entre les deux sphères (=force interne)
2. On peut appliquer le principe de conservation du moment cinétique. Car nous travaillons avec des sphères rigides et polies ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'absorption d'énergie par élasticité.

Théorème de la résultante cinétique :

$$\overline{F}_e = 0 \Rightarrow \overline{R}_{avant} = \overline{R}_{après} \Rightarrow \begin{cases} mv_O = mv\cos\theta + MV\cos\varphi \\ 0 = mv\sin\theta - MV\sin\varphi \end{cases}$$

Eliminons θ : $m^2{v_0}^2 - 2mMv_0V\cos\varphi + M^2V^2 = m^2v^2$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}$$

Eliminons v : $m^2{v_0}^2 - 2mMv_0V\cos\varphi + M^2V^2 = m\left(m{v_0}^2 - MV^2\right)$

$$M^2V^2 = m\left(m{v_0}^2 - MV^2\right) - m^2{v_0}^2 + 2mMv_0V\cos\varphi$$

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = mv_0V\cos\varphi$$

$$\left((M+m)\frac{V}{2} = mv_0\cos\varphi\right)^2$$

$$(M+m)^2\frac{V^2}{4} = m^2{v_0}^2\cos^2\varphi$$

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{2mM}{(M+m)^2}m{v_0}^2\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{MV^2}{2} = \frac{4mM}{(m+M)^2}\left(\frac{m{v_0}^2}{2}\right)\cos^2\varphi$$

Posons : $E_0 = \frac{m{v_0}^2}{2}; E = \frac{mv^2}{2}; \varepsilon = \frac{MV^2}{2}$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi E_0 \Rightarrow \boxed{E = E_0 - \varepsilon = E_0\left[1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi\right]}$$

2. Donner les deux conditions pour lesquelles cette énergie s'annule-t-elle ?

1. Choc de plein fouet : $\varphi = 0 : E = E_0 \left[1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right] = E_0 \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2$
2. 2 solides de même masse : $m = M : E == E_0 \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 = 0$

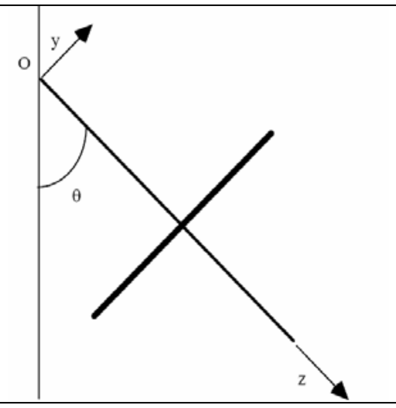
3. Dans quelle direction va partir la bille heurtée ?

Les percussions s'exercent dans la direction O_1O_2 donc la variation des vitesses seront également dirigée suivant O_1O_2

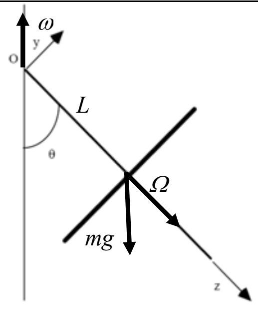
<u>Question 5</u> : Roue en rotation uniforme (3 points)

Une roue de vélo est maintenue avec un axe sans masse incliné d'un angle θ par rapport à la verticale. La vitesse angulaire de rotation propre de la roue et celle de précession sont constantes.
L'axe Oy est supposé dans un plan vertical en tout temps. Le plan du dessin est le plan vertical qui tourne avec la roue.

Introduisez les grandeurs nécessaires qui caractérisent le solide et son mouvement afin de formuler vos réponses.



Quel théorème général faut-il invoquer pour trouver le moment qu'il faut appliquer à l'extrémité O de l'axe de la roue afin de maintenir le mouvement décrit ?



On applique le théorème du moment cinétique avec un gyroscope.
Roue=disque
Moment extérieur appliqué : $\overline{m}_{e,O} = mgL\sin\theta\,\overline{1}_x$
Pour maintenir le mouvement de précession,
il y a un couple gyroscopique : $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} = \frac{mR^2}{2}\Omega\overline{1}_z \times \omega\overline{1}_Z = -\frac{mR^2}{2}\Omega\omega\sin\theta\,\overline{1}_x$

Expliciter le moment cinétique de la roue. Trouver ses composantes dans le repère indiqué sur la figure

$\overline{M_O} = \overline{M_G} + \overline{OG} \times \overline{R}$ avec $\overline{OG} \times \overline{R} = L\overline{1}_z \times L\sin\theta\omega\overline{1}_x = L^2\sin\theta\omega\overline{1}_y$

$$\overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\left(\overline{\omega} + \overline{\Omega}\right) = \begin{pmatrix} / & 0 & 0 \\ / & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ / & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\sin\theta \\ -\omega\cos\theta + \Omega \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{4}\omega\sin\theta\overline{1}_y + \frac{mR^2}{2}\left(-\omega\cos\theta + \Omega\right)\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \overline{M_O} = \left(mL^2\sin\theta\omega + \frac{mR^2}{4}\omega\sin\theta\right)\overline{1}_y + \frac{mR^2}{2}\left(-\omega\cos\theta + \Omega\right)\overline{1}_z$$

Dériver le moment cinétique en *O*. Quelle simplification peut-on faire ? Que vaut la vitesse angulaire de précession ?

$$\frac{d\overline{M_O}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{M_O} = \left[\left(mL^2\sin\theta + \frac{mR^2}{4}\sin\theta\right)\omega^2\cos\theta + \frac{mR^2}{2}\left(-\omega\cos\theta + \Omega\right)\omega\sin\theta\right]\overline{1}_x$$

$$\frac{d\overline{M_O}}{dt} = \left[\left(mL^2\sin\theta - \frac{mR^2}{4}\sin\theta\right)\cos\theta\omega^2 + \frac{mR^2}{2}\sin\theta\omega\Omega\right]\overline{1}_x$$

$$\omega << \Omega \Rightarrow \frac{d\overline{M_O}}{dt} = \left[\frac{mR^2}{2}\sin\theta\omega\Omega\right]\overline{1}_x = -\overline{C}_g = \overline{m}_{e,O} = mgL\sin\theta\overline{1}_x \Rightarrow \frac{R^2}{2}\omega\Omega = gL \Rightarrow \omega = \frac{2gL}{R^2\Omega}$$

Roue=cercle=> $\omega = \dfrac{gL}{R^2\Omega}$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLON

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

BROUILLON