

$$1. \quad I_z = \rho R^4 \int_0^\alpha \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{3} \rho R^4 (1 - \cos \alpha) (2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$\text{avec } m = 2\pi \rho R^2 (1 - \cos \alpha) \Rightarrow I_z = \frac{mR^2}{3} (2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha) \text{ pour } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha = \pi : I_z = \frac{2mR^2}{3}$$

2. Axes principaux en A : Axy : xz est un plan de symétrie donc par symétrie du domaine de x , les produits P_{xy} et P_{xz} seront nuls. De plus, $z=0$ pour toute la plaque, donc $P_{yz}=0$

$$I_{x_1} = \frac{mR^2}{4} = I_{x_{G1}} + m \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \Rightarrow I_{x''(S_1)} = I_{x_{G1}} + m \left(\frac{4R}{3\pi} + R \right)^2 = \frac{mR^2}{4} - m \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m \left(\frac{4R}{3\pi} + R \right)^2$$

$$I_{x''(S_1)} = I_{x''(S_2)} = \frac{mR^2}{4} + mR^2 + 2m \frac{4R^2}{3\pi} = \frac{5mR^2}{4} + \frac{8mR^2}{3\pi}$$

$$I_{x''(S_3)} = I_{x''(S_4)} = \frac{mR^2}{4} \Rightarrow I_{x''} = \frac{2mR^2}{4} + \frac{10mR^2}{4} + \frac{16mR^2}{3\pi} = 3mR^2 + \frac{16mR^2}{3\pi}$$

Par symétrie $I_{x''} = I_{y''}$ et $P_{x''y''} = 0$ (grâce au plan de symétrie orthogonal $x''z''$, l'intégrale impaire de y'' sur un domaine symétrique est nulle)

$$\text{En A : } \overline{AG}(R, 0) : I_{x'} = I_{x''} + \underbrace{\frac{4m}{4 \text{ demi disques}}}_{\text{4 demi disques}} R^2 = 7mR^2 + \frac{16mR^2}{3\pi} = I_{y'} \text{ et } P_{x'y'} = P_{x''y''} + 4mR^2 = 4mR^2$$

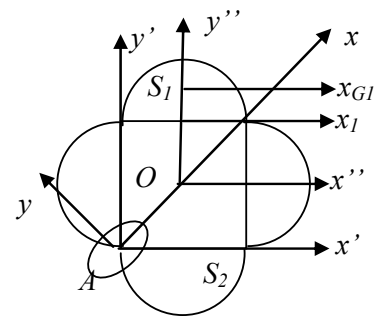
Les axes principaux en A sont orientés de θ par rapport aux axes

$$Ax'y' \text{ tel que } \tan 2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \infty \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

On trouve par la formule de rotation :

$$I_x = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} - P_{x'y'} ; I_y = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} + P_{x'y'} ; P_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow I_x = \left(3 + \frac{16}{3\pi} \right) mR^2 ; I_y = \left(11 + \frac{16}{3\pi} \right) mR^2$$



$$3.1 \quad I_y = \rho \int_0^b \int_0^{h(1-x/b)} x^2 dx dy = \rho \int_0^b x^2 dx \int_0^{h(1-x/b)} dy = \rho \frac{hb^3}{12} = \frac{Mb^2}{6} \Rightarrow I_x = \frac{Mh^2}{6}$$

$$3.2 \quad P_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^{h(1-x/b)} xy dx dy = \rho \int_0^b x dx \int_0^{h(1-x/b)} \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x}{b} \right)^2 dy = \rho \frac{h^2 b^2}{24} = \frac{Mbh}{12}$$

$$3.3 \quad \text{si } b = 4 \text{ cm et } h = 6 \text{ cm} : I_x = 6M \text{ cm}^2 ; I_y = \frac{8}{3} M \text{ cm}^2 \approx 2.67M \text{ cm}^2 ; P_{xy} = 2M \text{ cm}^2$$

$$\text{Axe principaux d'inertie en O sont les axes } Ox'y' \text{ tel que } \tan 2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = -1.2 \Rightarrow \theta \approx -25.1^\circ$$

- 3.4 En utilisant les formules de rotation d'un angle θ autour de l'axe z , nous obtenons les Moment principaux d'inertie en O : $I_{x'} \approx 6.94M \text{ cm}^2 ; I_{y'} \approx 1.73M \text{ cm}^2$

$$I_{y'} < I_y < I_x < I_{x'}$$

- 3.5 Vecteur unitaire nécessaire pour faire la rotation du système d'axes $Ax'y'z'$ ($//Oxyz$) vers $Ax''y''z''$:

$$\bar{l}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1; +1; +1) = (\alpha_1^1; \alpha_2^1; \alpha_3^1) \Rightarrow I_{AC} \text{ dépend seulement des cosinus directeurs de } \bar{l}_{AC}$$

$$I_{AC} = I_{x''} = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I_{ij} = (\alpha_1^1)^2 I_{x'} + (\alpha_2^1)^2 I_{y'} + (\alpha_3^1)^2 I_{z'} - 2\alpha_1^1 \alpha_2^1 P_{x'y'} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^1 P_{x'z'} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^1 P_{y'z'}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{3} I_{z'} + \frac{2}{3} P_{x'y'} + \frac{2}{3} \underbrace{P_{x'z'}}_{0(z'=0)} - \frac{2}{3} \underbrace{P_{y'z'}}_{0(z'=0)}$$

Calcul des composantes du tenseur dans le repère $Ax'y'z'$ ($// Oxyz$) : utilisez Steiner en passant par

le repère au centre de masse Gx_Gy_G de la plaque triangulaire : $\overline{OG}\left(\frac{b}{3}, \frac{b}{3}, 0\right)$ et $\overline{AG}\left(-\frac{2b}{3}, \frac{b}{3}, 0\right)$

$$I_x = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \quad \text{et} \quad I_{x'} = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 \Rightarrow I_{x'} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6};$$

$$I_y = I_{y_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \quad \text{et} \quad I_{y'} = I_{x_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = I_y - md_{yy_G} + md_{y'y_G} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{2};$$

$$I_{z'} = I_{x'} + I_{y'} = \frac{2Mb^2}{3} \quad (\text{en 2D car } z = 0 \text{ pour la plaque});$$

$$P_{xy} = P_{x_Gy_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{Mbb}{12} \quad \text{et} \quad P_{x'y'} = P_{x_Gy_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow P_{x'y'} = \left[\frac{Mb^2}{12} - M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\right] + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = -\frac{Mb^2}{4}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3} \frac{Mb^2}{6} + \frac{1}{3} \frac{Mb^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{2Mb^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{Mb^2}{4} = \frac{5}{18} Mb^2$$

4.

$$S_1 - \text{Parallélogramme } abc : \overline{I}_{GS_1} = \frac{\rho abc}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

S_2 - Parallélogramme $\frac{a}{2}bc$:

$$\overline{I}_{GS_2} = \frac{\rho\left(\frac{a}{2}\right)bc}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \end{pmatrix} + \rho\left(\frac{a}{2}\right)bc \underbrace{\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -(-cd) \\ 0 & d^2 + c^2 & 0 \\ -(-cd) & 0 & d^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG_2} = (-d, 0, c)}$$

$$S_3 - 4 \text{ roues} : \overline{I}_{GS_3} = 4 \times \underbrace{\rho\pi R^2 \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4} \end{pmatrix}}_{\overline{I}_{Gi} \text{ au centre de chq roue}} + \rho\pi R^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 4\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & 4\left[e^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & 4\left[e^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Steiner pour les 4 roues} \\ \text{xyz = axes principaux pour le solide composé des 4 roues}}}$$

$$\overline{GG}_{r1} = \left(e, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r2} = \left(e, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r3} = \left(-e, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r4} = \left(-e, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$$

$$\text{Cylindre} : I_x = \frac{mR^2}{2} = I_{xy} + I_{xz} \quad \text{par symétrie} \quad I_{xy} = I_{xz} = \frac{mR^2}{4}; \quad I_y = I_{xy} + I_{yz} \quad \text{avec} \quad \underline{I_{yz}} = \frac{mL^2}{12}$$

Cylindre creux de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur R_i :

$$I_x = \frac{\rho\pi h(R_e^4 - R_i^4)}{2} = \frac{M(R_e^2 + R_i^2)}{2}; \quad I_y = \frac{M(R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{mL^2}{12} = I_z$$

$$S_3\text{-Canon} : \bar{I}_{G S_3} = \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r_e^2 + r_i^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}}_{\bar{I}_{G_i} \text{ au centre du canon}}$$

$$+ \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \underbrace{\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c \\ 0 & c^2 + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c & 0 & \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG}_{\text{canon}} = \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d, 0, c\right)}$$

$$\Rightarrow \bar{I}_G = \bar{I}_{G S_1} + \bar{I}_{G S_2} + \bar{I}_{G S_3} + \bar{I}_{G S_4}$$

$$\bar{I}_G = \frac{\rho abc}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}(3b^2 + 15c^2) & 0 & cd \\ 0 & \left(\frac{9a^2}{24} + \frac{15c^2}{12} + d^2\right) & 0 \\ cd & 0 & \left(\frac{9a^2}{24} + \frac{3b^2}{12} + d^2\right) \end{pmatrix}_{2 \text{ Parallélogramme}}$$

$$+ \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \begin{pmatrix} \frac{r_e^2 + r_i^2}{2} + c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c \\ 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} + c^2 + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c & 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 \end{pmatrix}_{\text{Canon}}$$

$$+ \rho\pi R^2 \begin{pmatrix} b^2 + c^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4e^2 + c^2 + 2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4e^2 + b^2 + R^2 \end{pmatrix}_{4 \text{ roues}}$$

\Rightarrow la symétrie du domaine d'intégration en y nous donnait directement que P_{xy} et P_{yz} étaient nuls pour chacun des solides du système.

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>