

Séance n° 05 : Tenseur d'inertie

Formulaire :

$$\text{Element du tenseur d'inertie : } I^{\alpha\beta} = \int_{\text{système}} (x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta) dm$$

$$\text{Changement d'axe : } I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$$

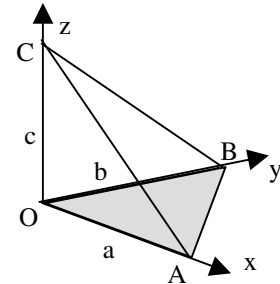
$$\text{Axes principaux : } \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\text{Steiner : } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m(a^\alpha a^\beta - a^\alpha a^\beta)$$

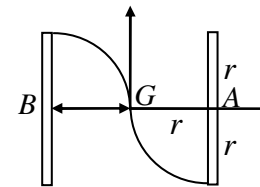
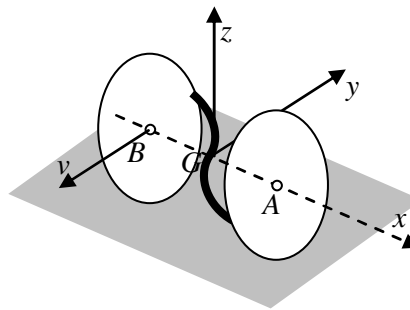
Rappel : avec l'axe z = axe de révolution

$$3D : I_z = \int (x^2 + y^2) dm = I_x + I_y - 2I_{xy} \underset{\substack{z=\text{axe de} \\ \text{révolution}}}{=} 2I_x - 2I_{xy} \underset{2D(z=0)}{=} 2I_x$$

1. Déterminer le tenseur d'inertie en O du volume homogène de masse m situé à l'intérieur d'un tétraèdre rectangle homogène $OABC$ ($OA=a$, $OB=b$, $OC=c$)



2. Deux disques circulaires, chacun de masse m_1 , sont connectés à l'aide d'une barre circulaire composée de deux quarts de cercle. Cette barre possède une masse m_2 .



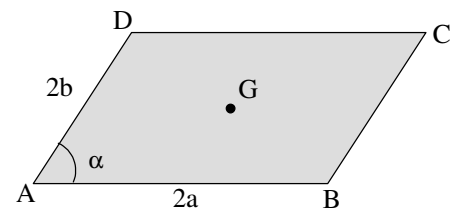
Vue de haut

1. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes $Gxyz$ du système.

2. Que pouvez-vous dire sur chacun des produits d'inertie ? Justifiez.

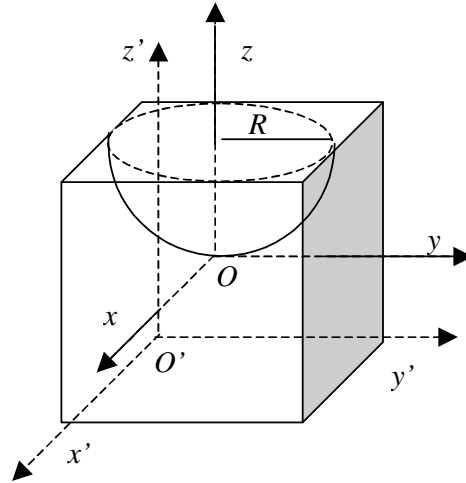
3. Une plaque plane homogène de masse m est délimitée par un parallélogramme $ABCD$ de côtés $2a$, $2b$.

- Calculer le moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan passant par son centre de masse G
- Sous quelles conditions l'ellipse centrale d'inertie est-elle un cercle ?
- Déterminer la direction des axes principaux d'inertie en A , et écrire l'équation de l'ellipse d'inertie en A .
- Calculer le moment d'inertie de la surface par rapport à la diagonale AC .



4. Un solide homogène plein de masse spécifique ρ est constitué d'un cube de côté $2R$ creusé par une demi-sphère de rayon R .

1. Calculer ses moment d'inertie par rapport aux axes x, y, z centré en O du cube.
2. Déterminer s'il existe des points de l'axe z où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère. Dans l'affirmative, indiquer comment les obtenir.
3. Calculer le produit d'inertie $P_{x'y'}$ au sommet O' .

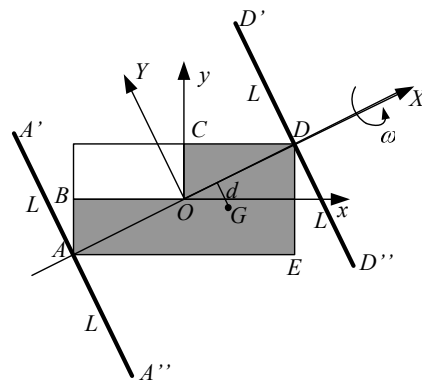


5. Un solide S est constitué par :

- une plaque homogène $ABOCDEA$ (S_1), de masse M . Il s'agit pratiquement d'un rectangle de longueur $2H$ et de largeur H auquel on aurait enlevé le quart supérieur gauche.
- deux tiges homogènes $A'A''$ (S_2) et $D'D''$ (S_3), chacune de masse m et de longueur $2L$, soudées perpendiculairement à la diagonale AD de la plaque, de telle façon que le centre de la tige $A'A''$ coïncide avec le sommet A de la plaque, tandis que le centre de la tige $D'D''$ coïncide avec le sommet D .

G = le centre de gravité de la plaque seule ;

d = la distance entre le centre de gravité et l'axe AD .



Déterminer le tenseur d'inertie dans les axes $OXYZ$ du système S .

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>