

Séance n° 04 : Tenseur d'inertie

Formulaire :

$$\text{Element du tenseur d'inertie : } I^{\alpha\beta} = \int_{\text{système}} (x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta) dm$$

$$\text{Changement d'axe : } I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$$

$$\text{Axes principaux : } \tan 2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\text{Steiner : } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta)$$

Rappel : Utilisation de la formule de Steiner

Pour calculer le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe x passant par O :

$$I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2$$

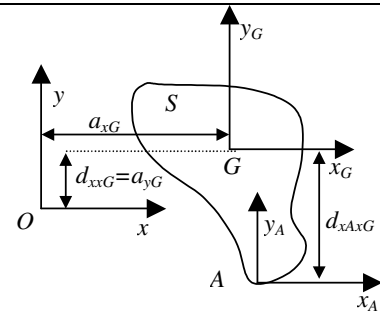
Parfois, il est plus facile de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par G :

$$I_{x_A} = I_{x_G} + m d_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m(d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2)$$

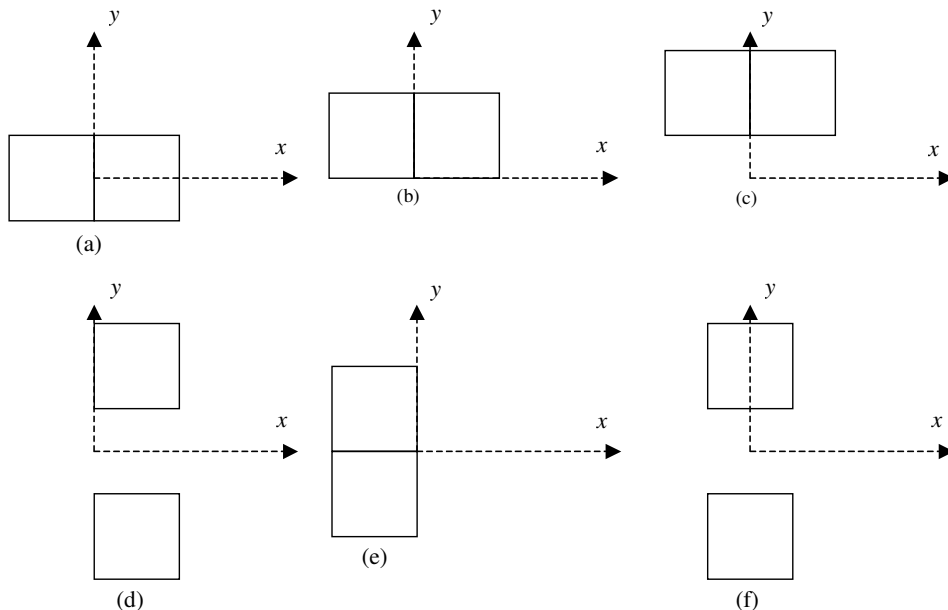
$$P_{xy} = \int xy dm = \int (x_G + a_{x_G})(y_G + a_{y_G}) dm = P_{x_G y_G} + m a_{x_G} a_{y_G} + a_{x_G} \underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{y_G} \underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

$$\text{ou } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - M a^x a^y \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + m a_{x_G} a_{y_G} \quad \text{avec } x = x_G + a^x$$

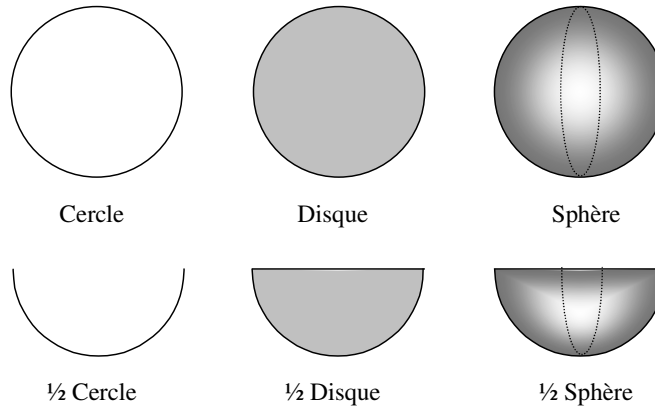
$$\text{En pratique : } \overline{OG}(a_{x_G}, a_{y_G}, a_{z_G}) \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m(a_{y_G}^2 + a_{z_G}^2) \quad \text{et } P_{xy} = P_{x_G} + m(a_{x_G} a_{y_G})$$



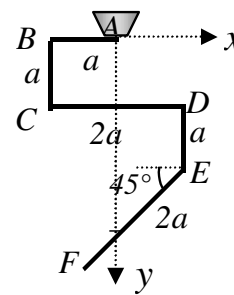
- Déterminer les moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côté L , l par rapport à ses médianes.
Dédire les moments d'inertie par rapport à x et y de chacune des deux plaques homogènes de même masse superficielle ρ représentées ci-dessous, ainsi que leurs **rayons de giration** par rapport à ces axes.



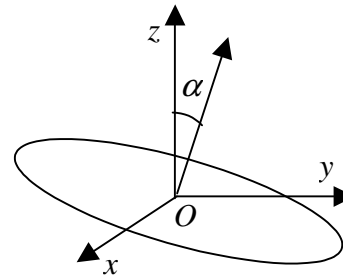
2. Déterminer les moments d'inertie d'un cercle, d'un disque et d'une sphère.
Déduire les moments d'inertie d'un demi-cercle, d'un demi-disque et d'une demi-sphère.



3. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y ainsi que le produit d'inertie P_{xy} du système composé de tiges minces homogènes AB , BC , CD , DE et EF de masse spécifique ρ ayant la forme indiquée ci-contre.



4. Calculer le tenseur d'inertie associé au disque S dans le repère $Oxyz$. L'axe de rotation du disque fait un angle α avec l'axe Oz .



Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
 Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
 Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>