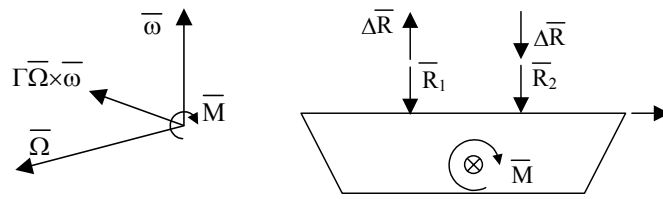
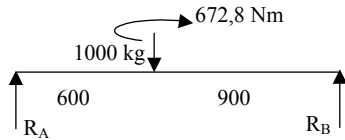


1.



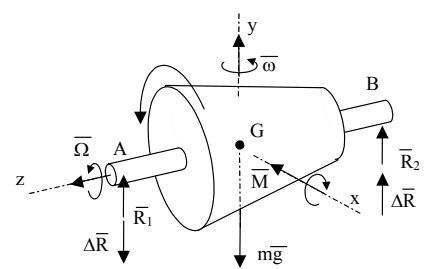
$$M = \Gamma \Omega \omega \text{ où } \Gamma = mR^2 = 40 \text{ kgm}^2; \Omega = 523,6 \text{ s}^{-1}; \omega = \frac{v}{R} = 0,032125 \text{ s}^{-1}$$

$\Rightarrow M = 672,8 \text{ Nm}$ tend à faire descendre l'avant du bateau.

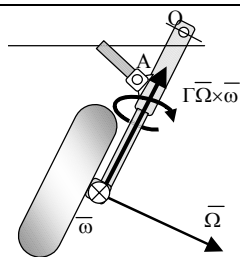


$$\left. \begin{aligned} 0,6R_A + 672,8 - 0,9R_B &= 0 \\ R_A + R_B &= 9810 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_A = 5437 \text{ et } R_B = 4372$$

La réaction en B est plus élevée que si le rotor était à l'arrêt.

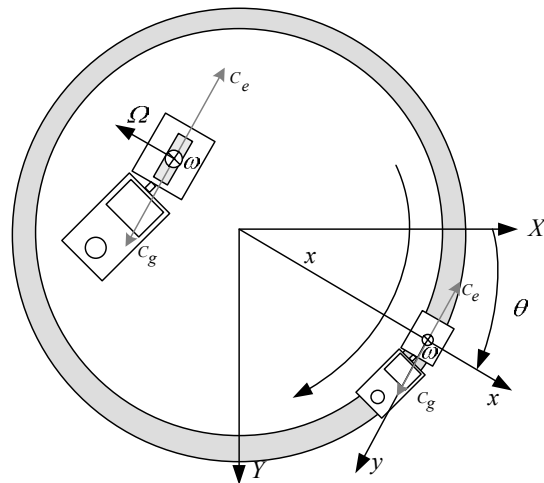


2.



L'axe OA subit un moment de torsion de $\Gamma \Omega \omega$ où $I = 2,97 \text{ kgm}^2$;
 $\Omega = 148,15 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 0,5 \text{ s}^{-1} \Rightarrow C = 220 \text{ Nm}$

3.



Le train tourne à vitesse constante \Rightarrow conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\vec{M}_{G,0}}{dt} = \vec{m}_{e,G} + \vec{C}_g$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{I}_z \text{ avec } \omega \text{ constant}$$

$$\text{le couple extérieur à contrer : } \vec{m}_{e,G} = -C_e \vec{I}_y$$

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit être

$$\vec{C}_g = C_g \vec{I}_y = \Gamma \vec{\Omega} \times \omega \vec{I}_z$$

\Rightarrow Le moment cinétique du gyroscope ($\Gamma \vec{\Omega}$) doit être suivant l'axe $-\vec{I}_x \Rightarrow \vec{M}_{G,gyr} = -\Gamma \Omega \vec{I}_x$

Donc on va placer une roue sur le wagon de manière à avoir son axe de révolution suivant l'axe x. On la fera tourner de manière à avoir le vecteur de rotation propre de la roue vers le centre des rails.

4. 2 paramètre de position dépendant $(\theta, \varphi) : \pi - \theta = 2\varphi \Rightarrow 1 \text{ ddl}$

Lagrangien $[L = T - V]$

$$T = \left[\frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_O \bar{\omega} \right]_{OA} + \left[\frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_{G_2} \bar{\omega} \right]_{AB}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \bar{v}_{G_1} &= -\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \bar{1}_x - \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \bar{1}_y \\ \bar{v}_{G_2} &= \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AG_2} = -L \sin \theta \dot{\theta} \bar{1}_x - L \cos \theta \dot{\theta} \bar{1}_y + L \cos \varphi \dot{\varphi} \bar{1}_y - L \sin \varphi \dot{\varphi} \bar{1}_x \\ &\quad \bar{\omega} = \left(-L \sin \theta \dot{\theta} + L \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \bar{1}_x + \left(-L \cos \theta \dot{\theta} - L \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \bar{1}_y \\ &\quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\theta}}{2} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2m \left(L^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2} - L^2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 + L^2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{2m4L^2}{12} \left(-\frac{\dot{\theta}}{2} \right)^2 \\ T &= mL^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{3}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$V = V_{OA} + V_{AB} + V_{\Gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } V_{OA} &= -mg \frac{L}{2} \sin \theta \quad \text{et} \quad V_{AB} = 2mg (-L \sin \theta + L \sin \varphi) = 2mg \left(-L \sin \theta + L \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \text{Le couple est constant donc il dérive d'un potentiel : } V(\Gamma) \\ \text{Comme l'angle } \varphi \text{ diminue lorsque le moment } \Gamma \text{ travail, le travail est négatif.} \\ \boxed{dV = -d\tau} &= -(M(\varphi) d\varphi) = -(-\Gamma d\varphi) = -(\Gamma \frac{d\theta}{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = -mgl \left(\frac{5}{2} \sin \theta - 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) - \Gamma \frac{\theta}{2}$$

Théorème de Lagrange

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \right] : mL^2 \frac{3}{2} \ddot{\theta} - 2mL^2 \ddot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 \cos \frac{\theta}{2} - \frac{5}{2} mgl \cos \theta - mgl \sin \frac{\theta}{2} - \frac{\Gamma}{2} = 0$$

Autre méthode : Par les Q_i :

$$\begin{aligned} \text{Sur base de } \bar{v}_{G_1} : \delta \overline{OG_1} &= \left(-\frac{L}{2} \sin \theta \bar{1}_y - \frac{L}{2} \cos \theta \bar{1}_x \right) \delta \theta \\ \text{avec } \text{Sur base de } \bar{v}_{G_2} : \delta \overline{OG_2} &= \left(-L \sin \theta + L \cos \frac{\theta}{2} \right) \delta \theta \bar{1}_x + \left(-L \cos \theta - L \sin \frac{\theta}{2} \right) \delta \theta \bar{1}_y \\ \text{le travail du couple : } \delta \tau &= -\Gamma \delta \varphi \quad \text{avec} \quad d\theta = -2d\varphi \Rightarrow \delta \tau = -\Gamma \delta \varphi = \Gamma \frac{\delta \theta}{2} \end{aligned}$$

$$Q_\theta = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_y} = (-mg) \cdot \left(-\frac{L}{2} \sin \theta \right) + (-2mg) \cdot \left(-L \cos \theta - L \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\Gamma}{2}$$

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \right] : mL^2 \frac{3}{2} \ddot{\theta} - 2mL^2 \ddot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 \cos \frac{\theta}{2} = \frac{5}{2} mgl \cos \theta + mgl \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\Gamma}{2}$$

4.2 Le point C est au niveau de la glissière

R_C (1 composante inconnue) : Th. mom. cinétique en O pour l'ensemble du système

$$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt} \Big|_{\bar{v}_O=0} \equiv \bar{m}_{e,O} \left(\Gamma, R_C, mg \right)}$$

$$\boxed{\bar{M}_O = \bar{M}_{O,OA} + \bar{M}_{O,AB}}$$

$$\bullet \bar{M}_{O,OA} = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega} = -\frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \bar{1}_z ;$$

$$\bullet \bar{M}_{O,AB} = \bar{M}_{G_2,AB} + \overline{OG_2} \times \bar{R} = \left[\begin{array}{l} \frac{2m4L^2}{12} \dot{\varphi} - 2m \left(\cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(L \cos \theta + L \sin \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} \right) L^2 \dot{\theta} \\ - \left(-\sin \theta + \cos \frac{\theta}{2} \right) \left(-\sin \theta + \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} \right) L^2 \dot{\theta} \end{array} \right] \bar{1}_z$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{2mL^2}{3} \dot{\varphi} + 2m \left(-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) L^2 \dot{\theta} \\ - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + -\frac{1}{2} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right] L^2 \dot{\theta} \bar{1}_z$$

$$\bar{M}_{O,AB} = \left[-\frac{2mL^2}{3} \frac{\dot{\theta}}{2} + 2m \left(-1 + \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right) L^2 \dot{\theta} \right] \bar{1}_z$$

$$\Rightarrow \bar{M}_O = \left[-\frac{8}{3} + 2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \right] mL^2 \dot{\theta} \bar{1}_z$$

$$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt} \Big|_{\bar{v}_O=0} \equiv \bar{m}_{e,O}} \text{ en projetant sur l'axe z : une seule inconnue (R_C)}$$

$$m \left[-\frac{33}{24} + \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right] L^2 \ddot{\theta} + m \left[\cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right] L^2 \dot{\theta}^2$$

$$= -\Gamma + LR_c \cos \varphi - \frac{L}{2} \cos \theta mg - (L \cos \theta + L \cos \varphi) 2mg = -\Gamma + LR_c \cos \varphi - \left(\frac{5}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) Lmg$$

$$\Rightarrow R_C$$

(Autre possibilité : Th. mom. cinétique en A pour la tige AB seule.)

R_O (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique et connaissant R_C

$$\boxed{\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_x (\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \bar{F}_e|_x \left(\underline{R_{O,x}}, R_C \right) \\ \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_y (\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \bar{F}_e|_y \left(\underline{R_{O,y}}, R_C, mg \right) \end{array} \right.$$

$$\bar{R} = m \left[-\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \bar{1}_x - \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \bar{1}_y \right] + 2m \left[\left(-L \sin \theta \dot{\theta} + L \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \bar{1}_x + \left(-L \cos \theta \dot{\theta} - L \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \bar{1}_y \right]$$

$$\frac{d \left(-m \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + 2m \left(-L \sin \theta \dot{\theta} + L \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \right)}{dt} = R_{O,x} - R_C \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,x}$$

$$\frac{d \left(-m \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} + 2m \left(-L \cos \theta \dot{\theta} - L \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \right) \right)}{dt} = R_{O,y} - mg - 2mg + R_C \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,y}$$

R_A (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique pour OA seule (avec R_O connue)

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e \begin{cases} \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_x (\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \bar{F}_e|_x (R_{O,x}, \underline{R_{A,x}}) \\ \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_y (\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \bar{F}_e|_y (R_{O,y}, \underline{R_{A,y}}, mg) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{R} = m \left[-\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \bar{l}_x - \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \bar{l}_y \right]$$

$$\frac{d \left(-m \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \right)}{dt} = R_{O,x} + R_{A,x} \Rightarrow R_{A,x} \quad \text{et} \quad \frac{d \left(-m \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right)}{dt} = R_{O,y} + R_{A,y} - mg \Rightarrow R_{A,y}$$



ex4seance11.zip

5. 1 degré de liberté mais 2 coordonnées de Lagrange : θ_1, θ_2

liées par la condition (avec u suivant BC et v perpendiculaire à BC)

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BC} = \lambda \overline{BC} = L \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \bar{l}_u + (L \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + L \dot{\theta}_2) \bar{l}_v$$

$$\Rightarrow L \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + L \dot{\theta}_2 = 0 \Rightarrow \text{Contrainte : } \delta \theta_2 + \cos(\theta_2 - \theta_1) \delta \theta_1 = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 = 0 \quad (\lambda)$$

$$\Rightarrow \text{Théorème de Lagrange : } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial q_i}$$

$$T = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_{G_i} \cdot \bar{\omega} \right)$$

$$T = \left(\frac{1}{2} m \frac{L^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \frac{L^2}{12} \dot{\theta}_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m \left(L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + L^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) + \frac{1}{2} m \frac{L^2}{12} \dot{\theta}_2^2 \right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{2mL^2}{3} \dot{\theta}_1^2 + \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}_2^2 + \frac{mL^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\sum_i \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_h}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i \Rightarrow Q_i$$

$$\overline{OG_1}|_y = \frac{L}{2} \cos \theta_1 \Rightarrow \delta \overline{OG_1}|_y = -\frac{L}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 \quad \text{et} \quad \bar{F}_{G_1} = mg \bar{l}_y$$

$$\overline{OG_2}|_y = L \cos \theta_1 + \frac{L}{2} \cos \theta_2 \Rightarrow \delta \overline{OG_2}|_y = -L \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{L}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 = \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 \quad \text{et} \quad \bar{F}_{G_2} = mg \bar{l}_y$$

En tenant compte du couple M appliqué à la barre AB , le travail virtuel du couple pour un déplacement virtuel $\delta \theta_1$ vaut $M \delta \theta_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{\theta_1} = mg \bar{l}_y \left(-\frac{L}{2} \sin \theta_1 \bar{l}_y \right) + mg \bar{l}_y \left(-L \sin \theta_1 \bar{l}_y \right) = -\frac{3L}{2} mg \sin \theta_1 + M \\ Q_{\theta_2} = mg \bar{l}_y \left(-L \sin \theta_2 \bar{l}_y \right) = -\frac{L}{2} mg \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ équations} + 1 \text{ équation de contrainte} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1} + \lambda \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_{\theta_2} + \lambda \\ L \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + L \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{4mL^2}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{mL^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \frac{mL^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_2 \right) - \left(+ \frac{mL^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \\ = -\frac{3L}{2} mg \sin \theta_1 + M + \lambda \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (1) \\ \left(\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta}_2 + \frac{mL^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 - \frac{mL^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_1 \right) - \left(-\frac{mL^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \\ = -\frac{L}{2} mg \sin \theta_2 + \lambda \quad (2) \\ L \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + L \dot{\theta}_2 = 0 \quad (3) \Rightarrow \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 = \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \quad (3) \end{cases}$$

En résolvant ce système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(2) : \left(\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta}_2 + \frac{mL^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + \frac{mL^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{L}{2} mg \sin \theta_2 = +\lambda$$

$$(2) -> (1) : \frac{mL^2}{2} \left(\left(\frac{8}{3} - \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2) \right)$$

$$= M + \frac{L}{2} mg (\sin \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 3 \sin \theta_1) \quad (1)$$

$$\text{et avec (3)} : \left[\frac{mL^2}{3} (4 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)) \right] \ddot{\theta}_1 - \left[\frac{mL^2}{3} \frac{\sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{2} (1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) \right] \dot{\theta}_1^2 \\ = M + \frac{L}{2} mg (\sin \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 3 \sin \theta_1)$$

5.2.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_{\theta_2} \end{cases}$$

$$\delta \overline{OG_1} \Big|_y = -\frac{L}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 \text{ et } \bar{F}_{G_1} = mg \bar{1}_y$$

$$\delta \overline{OG_2} \Big|_y = -L \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{L}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 \text{ et } \bar{F}_{G_2} = mg \bar{1}_y$$

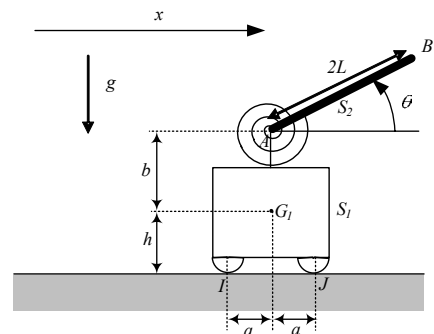
$$L \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \bar{1}_u + (L \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + L \dot{\theta}_2) \bar{1}_v \Rightarrow \delta \overline{OC} \Big|_{v \perp BC} = L \cos(\theta_2 - \theta_1) \delta \theta_1 + L \delta \theta_2 \text{ et } \bar{F}_C = F \bar{1}_\perp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{\theta_1} = mg \bar{1}_y \cdot \left(-\frac{L}{2} \sin \theta_1 \bar{1}_y \right) + mg \bar{1}_y \cdot (-L \sin \theta_1 \bar{1}_y) + F \bar{1}_\perp \cdot (L \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ = -\frac{3L}{2} mg \sin \theta_1 + FL \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ Q_{\theta_2} = mg \bar{1}_y \cdot (-L \sin \theta_2 \bar{1}_y) + F \bar{1}_\perp \cdot (+L) = -\frac{L}{2} mg \sin \theta_2 + FL \end{cases}$$

Nous retrouvons les mêmes équations qu'au point (5.1) où λ est remplacé par FL .

6.1 Deux degrés de liberté $\{x, \theta\}$

Deux coordonnées généralisées $\{x, \theta\}$



$$6.2 \quad \bar{R} = m_1 \bar{v}_{G_1} + m_2 (\bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AG_2}) = m_1 \dot{x} \bar{i}_x + m_2 (\dot{x} \bar{i}_x + L \dot{\theta} \bar{i}_y) = ((m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 L \dot{\theta} \sin \theta) \bar{i}_x + m_2 L \dot{\theta} \cos \theta \bar{i}_y$$

$$6.3 \quad \overline{M}_A = [m_1 \overline{AG_1} \times \bar{v}_A] + [m_2 \overline{AG_2} \times \bar{v}_A + \bar{I}_A \cdot \bar{\omega}] = m_1 b \dot{x} \bar{i}_z - m_2 L \sin \theta \dot{x} \bar{i}_z + \frac{m_2 4L^2}{3} \dot{\theta} \bar{i}_z$$

$$6.4 \quad \bar{R}_I = -T_1 \bar{i}_x + N_1 \bar{i}_y; \quad \bar{R}_J = -T_2 \bar{i}_x + N_2 \bar{i}_y; \quad \bar{R}_A = X_A \bar{i}_x + Y_A \bar{i}_y; \quad \bar{F}_{G_1} = -m_1 g \bar{i}_y; \quad \bar{F}_{G_2} = -m_2 g \bar{i}_y; \quad \bar{C}_A = -C \theta \bar{i}_z$$

6.5 6 inconnues de réactions + 2 degrés de liberté \Rightarrow 8 équations pour tout identifier

$$\text{Th. résultante cinétique sur } \{S_1 + S_2\} : \begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 L \ddot{\theta} \sin \theta - m_2 L \dot{\theta}^2 \cos \theta = -T_1 - T_2 & (1) \\ m_2 L \cos \theta \ddot{\theta} - m_2 L \sin \theta \dot{\theta}^2 = N_1 + N_2 - (m_1 + m_2) g & (2) \end{cases}$$

$$\text{Th. résultante cinétique sur } \{S_2\} : \begin{cases} m_2 \ddot{x} - m_2 L \ddot{\theta} \sin \theta - m_2 L \dot{\theta}^2 \cos \theta = X_A & (3) \\ m_2 L \cos \theta \ddot{\theta} - m_2 L \sin \theta \dot{\theta}^2 = Y_A - m_2 g & (4) \end{cases}$$

$$\text{ou } \left[\begin{array}{l} \text{Th. résultante cinétique sur } \{S_1\} : \begin{cases} m_1 \ddot{x} = -X_A - T_1 - T_2 & (5) = (3) - (1) \\ 0 = N_1 + N_2 - Y_A - m_1 g & (6) = (4) - (2) \end{cases} \end{array} \right]$$

$$\text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_1\} : m_1 b \ddot{x} = -a N_1 + a N_2 + C \theta - (b + h)(T_1 + T_2) \quad (7)$$

$$\text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_2\} : \frac{d}{dt} \overline{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A}$$

$$\Rightarrow -m_2 L \sin \theta \ddot{x} - m_2 L \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{m_2 4L^2}{3} \ddot{\theta} = -m_2 L \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} - C \theta - L \cos \theta m_2 g \quad (8)$$

$$\text{ou } \left[\begin{array}{l} \text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_1 + S_2\} : \frac{d}{dt} \overline{M}_A = m \bar{v}_G \times \bar{v}_A + \bar{m}_{e,A} \\ \Rightarrow m_1 b \ddot{x} - m_2 L \sin \theta \ddot{x} - m_2 L \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{m_2 4L^2}{3} \ddot{\theta} \\ \quad = -m_2 L \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} - L \cos \theta m_2 g - a N_1 + a N_2 - (b + h)(T_1 + T_2) \quad (9) = (7) + (8) \end{array} \right]$$

\Rightarrow 6 équations indépendantes (1,2,3,4,7,8) + équations de Coulomb ($T_1 = f N_1$ (10)) et ($T_2 = f N_2$ (11))

6.6 2 équations de mouvement : l'équation (8) ainsi que la résolution de l'équation (1) et (2) avec la (10) et (11)

$$\Rightarrow \begin{cases} -m_2 L \sin \theta \ddot{x} + \frac{m_2 4L^2}{3} \ddot{\theta} = -C \theta - L \cos \theta m_2 g & (8) \\ (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 L \ddot{\theta} \sin \theta - m_2 L \dot{\theta}^2 \cos \theta = -f (m_2 L \cos \theta \ddot{\theta} - m_2 L \sin \theta \dot{\theta}^2 + (m_1 + m_2) g) & (12) \end{cases}$$

\Rightarrow Dans le cas d'un frottement nul :

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_2 L \sin \theta \ddot{x} + \frac{m_2 4L^2}{3} \ddot{\theta} = -C \theta - L \cos \theta m_2 g \quad (8) \\ (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 L \ddot{\theta} \sin \theta - m_2 L \dot{\theta}^2 \cos \theta = 0 \quad (12) \end{array} \right.$$

6.7 par le théorème de Lagrange :

$$T = \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 - 2L \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{2} \frac{m_2 4L^2}{12} \dot{\theta}^2 \right] \text{ et } V = m_2 g L \sin \theta \Rightarrow L = T - V$$

Couple du ressort de torsion : $\bar{C} = -C \theta \bar{i}_z$ opposé à l'accroissement $\delta \theta \Rightarrow Q_\theta = -C \theta$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x : m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - L \sin \theta \ddot{\theta} - L \cos \theta \dot{\theta}^2) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta : m_2 \left(\left(\frac{4L^2}{12} + L \right) \ddot{\theta} - L \dot{x} \cos \theta \dot{\theta} - L \dot{x} \sin \theta \right) - [-m_2 g L \cos \theta - m_2 L \dot{x} \cos \theta \dot{\theta}] = -C \theta \\ \Rightarrow m_2 \left(\frac{4L^2}{3} \ddot{\theta} - L \ddot{x} \sin \theta \right) + m_2 g L \cos \theta = -C \theta \end{array} \right.$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>