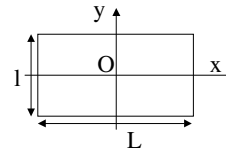


$$1.1 \quad I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho \frac{Ll^3}{12} = m \frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m \frac{L^2}{12}$$



$$1.2 \quad I_x^{(a)} = \rho \frac{(2a)(a)^3}{12} = \frac{1}{6} \rho a^4 ; I_y^{(a)} = \rho \frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3} \rho a^4$$

$$I_x^{(b)} = \rho \frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \rho a^4 ; I_y^{(b)} = \rho \frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3} \rho a^4$$

$$I_x^{(c)} = \rho \frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)(a)^2 \right] = \frac{13}{6} \rho a^4 ; I_y^{(c)} = \rho \frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3} \rho a^4$$

$$I_x^{(d)} = 2 \left(\rho \frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2 \right] \right) = \frac{13}{6} \rho a^4 ;$$

$$I_y^{(d)} = 2 \left(\rho \frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \right) = \frac{2}{3} \rho a^4$$

$$I_x^{(e)} = \rho \frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3} \rho a^4 ; I_y^{(e)} = \rho \frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \rho a^4$$

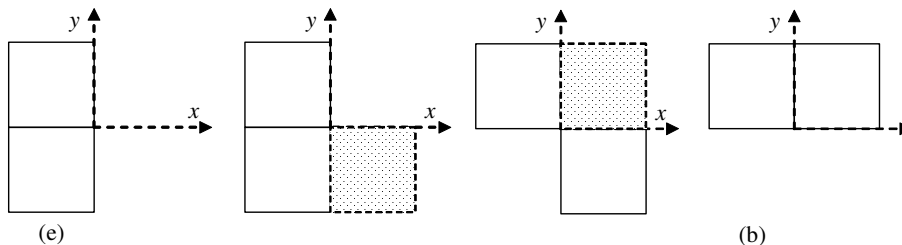
$$I_x^{(f)} = 2 \left(\rho \frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2 \right] \right) = \frac{13}{6} \rho a^4 ; I_y^{(f)} = 2 \left(\rho \frac{(a)(a)^3}{12} \right) = \frac{1}{6} \rho a^4$$

$$\Rightarrow I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_x^{(a)} = I_y^{(b)} < I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)}$$

Déplacer le rectangle le long de l'axe y, ne change rien au I_y comme le montre les cas a, b et c.

Grâce à la symétrie orthogonale, on peut voir que tant qu'on ne modifie pas la distance des répartitions des masses par rapport aux axes, les moments d'inertie ne sont pas modifiés.

$$(I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)})$$



$$\text{Rayons de gyration } (m = \rho 2a^2) : I_x = m r_x^2$$

$$I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_x^{(a)} = I_y^{(b)} = I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)} = I_x^{(c)}$$

$$r_x^{(a)} = r_y^{(f)} = \sqrt{\frac{1}{12}} a ; r_x^{(e)} = r_y^{(e)} = r_y^{(a)} = r_x^{(b)} = r_y^{(b)} = I_y^{(d)} = \sqrt{\frac{4}{12}} a ; r_x^{(f)} = r_x^{(d)} = r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{13}{12}} a$$

$$2.1 \quad \text{cercle : } I_z(\text{cercle}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = M_{\text{Cercle}} R^2 = I_x(\text{cercle}) + I_y(\text{cercle}) \text{ en 2D}$$

$$I_z(\text{cercle}) = 2I_x(\text{cercle}) \text{ (par symétrie)} \Rightarrow I_x(\text{cercle}) = \frac{M_{\text{Cercle}} R^2}{2}$$

$$\text{Par symétrie : } I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle } \cup) + I_x(\text{demi-cercle } \cap) \Rightarrow I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_{\cup} R^2}{2}$$

2.2

$$\text{Disque : } I_z (\text{Disque O}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r dr d\theta = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{M_{\text{Disque}} R^2}{2}$$

$$\boxed{I_z (\text{O}) \underset{\text{en 2D}}{=} I_x (\text{O}) + I_y (\text{O}) \underset{\text{symétrie}}{=} 2I_x (\text{O})} \Rightarrow I_x (\text{O}) = \frac{M_O R^2}{4}$$

$$\text{Par symétrie : } I_x (\text{O}) = I_x (\cup) + I_x (\cap) \Rightarrow I_x (\cup) = \frac{M_O R^2}{8} = \frac{M_{\cup} R^2}{4}$$

2.3

$$\text{Sphère : } I_z (\text{Sphère O}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^R \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r \sin \theta)^2 \rho r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{2}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$$

$$\text{ou } \boxed{I_z (\text{Sphère O}) = I_x (\text{O}) + I_y (\text{O}) - 2I_{xy} (\text{O})}$$

$$\text{avec } \boxed{I_{xy} (\text{O}) = \int z^2 dm} = \int_0^R \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r \cos \theta)^2 \rho r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$$

$$I_x (\text{O}) = I_y (\text{O}) \text{ (par symétrie)} \Rightarrow I_x (\text{O}) = \frac{I_z (\text{O})}{2} + I_{xy} (\text{O}) = \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2 + \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2 = \frac{2}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$$

On pouvait évidemment trouver directement $I_x = I_y = I_z$ par symétrie.

$$\text{Par symétrie : } I_x (\text{O}) = I_x (\cup) + I_x (\cap) \Rightarrow I_x (\cup) = \frac{M_{\text{Sphère}} R^2}{5} = \frac{2M_{\cup} R^2}{5}$$

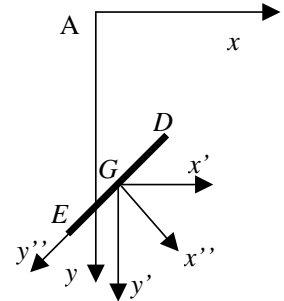
3.

$$\overline{AG_1} = \left(-\frac{a}{2}, 0, 0 \right) : I_x (AB) = 0; I_y (AB) = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$$

$$\text{et } P_{xy} (AB) = 0$$

$$\overline{AG_2} = \left(-a, \frac{a}{2}, 0 \right) : I_x (BC) = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4}; I_y (BC) = 0 + ma^2$$

$$\text{et } P_{xy} (BC) = 0 + m \cdot (-a) \cdot \frac{a}{2}$$



$$\overline{AG_3} = (0, a, 0) : I_x (CD) = 0 + 2ma^2; I_y (CD) = \frac{2m(2a)^2}{12} \text{ et } P_{xy} (CD) = \rho 2a \cdot 0 \cdot a = 0$$

$$\overline{AG_4} = \left(a, \frac{3a}{2}, 0 \right) : I_x (DE) = \frac{ma^2}{12} + m \left(\frac{3a}{2} \right)^2; I_y (DE) = 0 + ma^2 \text{ et } P_{xy} (DE) = 0 + \rho a \cdot a \cdot \frac{3a}{2}$$

$$\overline{AG_5} = \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}, 2a + \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0 \right) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{x''} (Tige_{EF}) = \int_{-a}^{+a} \rho y''^2 dy = \rho \frac{2a^3}{3} \\ I_{x'} (Tige_{EF}) = \int y'^2 dm = \int \left(y'' \frac{\sqrt{2}}{2} + x'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dm = \frac{I_{x''} (Tige_{EF})}{2} + \underbrace{\frac{I_{y''} (Tige_{EF})}{2}}_{=0} + \underbrace{P_{x''y''} (Tige_{EF})}_{=0} \\ \Rightarrow I_{x'} (Tige_{EF}) = I_{x''} (Tige_{EF}) + \rho 2a \left(2a + a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \rho \left(\frac{28}{3} a^3 + 4\sqrt{2} a^3 \right) \\ I_{y'} (Tige_{EF}) = \int x'^2 dm = \int \left(x'' \frac{\sqrt{2}}{2} - y'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dm = \frac{I_{x''} (Tige_{EF})}{2} + \underbrace{\frac{I_{y''} (Tige_{EF})}{2}}_{=0} - \underbrace{P_{x''y''} (Tige_{EF})}_{=0} = \rho \frac{a^3}{3} \\ I_{y'} (Tige_{EF}) = I_{y''} (Tige_{EF}) + \rho 2a \left(a - a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \rho \frac{5a^3}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
P_{x'y'}(Tig_{EF}) &= \int \left(x'' \frac{\sqrt{2}}{2} - y'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(y'' \frac{\sqrt{2}}{2} + x'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dm = \frac{P_{x''y''}}{2} + \underbrace{\frac{I_{y''}}{2} - \frac{I_{x''}}{2}}_{=0} - \frac{P_{x''y''}}{2} = -\frac{I_{x''}}{2} = -\rho \frac{a^3}{3} \\
P_{xy}(Tig_{EF}) &= P_{x'y'}(Tig_{EF}) + \rho 2a \cdot \left(2a + a \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(a - a \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
I_x(AB) &= I_x(BC) + I_y(BC) + I_x(CD) + I_x(DE) = \rho a^3 (15 + 4\sqrt{2}) \\
\Rightarrow I_y(AB) + I_y(BC) + I_y(CD) + I_y(DE) + I_y(EF) &= \rho a^3 \frac{7}{6} \\
P_{xy}(AB) + P_{xy}(BC) + P_{xy}(CD) + P_{xy}(DE) + P_{xy}(EF) &= \rho a^3 \left(\frac{5}{3} + 2 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

4. Dans les axes liés au disque, nous avons

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{I}}_{GXYZ} &= \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
\bar{I}_x &= (1; 0; 0) = (\alpha_1^1; \alpha_2^1; \alpha_3^1) \\
\bar{I}_y &= (0; \cos \alpha; \sin \alpha) = (\alpha_1^2; \alpha_2^2; \alpha_3^2) \\
\bar{I}_z &= (0; -\sin \alpha; \cos \alpha) = (\alpha_1^3; \alpha_2^3; \alpha_3^3)
\end{aligned}$$

La matrice de changement de base vaut :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Donc : le moment d'inertie I'_x ne dépend que du vecteur unitaire I_x .

$$I'_x = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I^{ij} = (\alpha_1^1)^2 I_x + (\alpha_2^1)^2 I_y + (\alpha_3^1)^2 I_z - 2\alpha_1^1 \alpha_2^1 P_{xy} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^1 P_{xz} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^1 P_{yz}$$

$$I'_x = I_x = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'_y = \alpha_i^2 \alpha_j^2 I^{ij} = \cos^2 \alpha \frac{mR^2}{4} + \sin^2 \alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$I'_z = \alpha_i^3 \alpha_j^3 I^{ij} = \sin^2 \alpha \frac{mR^2}{4} + \cos^2 \alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4} (1 + \cos^2 \alpha)$$

$$-P'_{xy} = \alpha_i^1 \alpha_j^2 I^{ij} = (\alpha_1^1 \alpha_1^2 I_x + \alpha_2^1 \alpha_2^2 I_y + \alpha_3^1 \alpha_3^2 I_z - 2\alpha_1^1 \alpha_2^2 P_{xy} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^2 P_{xz} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^2 P_{yz}) = 0$$

$$\text{et } -P'_{xz} = \alpha_i^1 \alpha_j^3 I^{ij} = 0$$

Les axes Ox et OY sont confondus et forment une direction principale. \Rightarrow les produits d'inertie comprenant l'axe x sont nuls.

$$-P'_{yz} = I'^{23} = \alpha_i^2 \alpha_j^3 I^{ij} = \alpha_2^2 \alpha_3^3 I_y + \alpha_3^2 \alpha_2^3 I_z = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{mR^2}{4} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{mR^2}{2} = m \frac{R^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\bar{\bar{I}}_{Gxyz} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \alpha) & \frac{mR^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & \frac{mR^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha & \frac{mR^2}{4} (1 + \cos^2 \alpha) \end{pmatrix}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sur le site de méca :

<http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html>