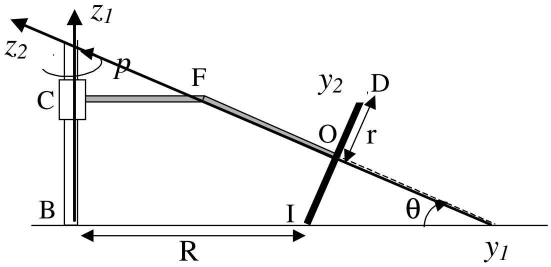
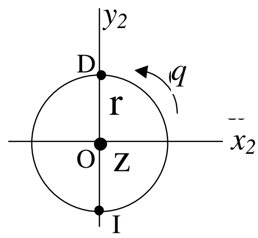
1





Pour la décomposition en système d'axes :

R_0 Repère fixe, R_1 Repère tournant avec p autour de BD (z_1), R_2 Repère incliné sur OF (z_2), OD (y_2), R_3 Repère tournant avec p autour de OF (z_2).

1.) Axe instantané de rotation : droite IQ avec I=Pt de contact entre le disque et le plan Q=intersection des droites OF et CB car OQ peut être considéré comme appartenant au solide étudié (tige+disque) et v_Q=0 car Q appartient à l'axe de rotation de Ω. Le point Q appartient virtuellement au solide. Remplacer la tige coudée par une tige OQ soudée au solide ne change rien au mouvement.

$\overline{\omega} = \overline{p} + \overline{q} = p\cos\theta\,\overline{1}_y + (p\sin\theta + q)\,\overline{1}_z$ avec $\overline{\omega}_{rel} = \overline{p}$

Condition de roulement sans glissement :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_I = 0 = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OI} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x + (rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x \\ \text{avec } \overline{OI} = -r\overline{1}_y \,;\, \overline{v}_O = \overline{p}\times\overline{OC} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

Ou

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_{O\in tige} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_t\times\overline{CO} \text{ et } \overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_I + \overline{\omega}_d\times\overline{IO} \\ \overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_{O\in tige} \Rightarrow \overline{\omega}_d\times\overline{IO} = \overline{\omega}_t\times\overline{CO} \Rightarrow -(rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

$\overline{\omega}_d = p\cos\theta\,\overline{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r})\overline{1}_z$ =vecteur libre constant dans les axes *Oxyz*.

Dériver un vecteur constant : produit vectoriel avec le vecteur de vitesse angulaire agissant sur le repère.

$$\overline{\varepsilon}_d = \underbrace{\left.\frac{d\overline{\omega}_d}{dt}\right|_{xyz}}_{=0} + \overline{\Omega}_{xyz/XYZ}\times\overline{\omega}_d \quad \text{où } XYZ \text{ est le repère fixe}$$

$$\overline{\varepsilon}_d = \left(p(\sin\theta + \frac{R}{r})p\cos\theta - p\cos\theta.p\sin\theta\right)\overline{1}_x = \frac{R}{r}p^2\cos\theta\,\overline{1}_x$$

2.)

$$\overline{v}_D = \overline{\omega}_d\times\overline{ID} = \left(p\cos\theta\,\overline{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r})\overline{1}_z\right)\times 2r\,\overline{1}_y = -2rp(\sin\theta + \frac{R}{r})\ \overline{1}_x$$

Comme Q appartient à l'axe de CIR, on peut écrire :

$$\overline{a}_D = \overline{a}_Q + \overline{\varepsilon}_d\times\overline{QD} + \overline{\omega}_d\times\overline{v}_D \quad avec \quad \overline{a}_Q = 0 \quad (!\,\overline{a}_I \neq 0)$$

$$\overline{QD} = -\frac{1}{\cos\theta}\left(R + r\sin\theta\right)\overline{1}_z + r\,\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_D = -rp^2\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\sin^2\theta + 3\frac{R}{r}\sin\theta\right)\overline{1}_y + rp^2\left(3\frac{R}{r}\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta\right)\overline{1}_z$$

2.1 Soit O_1 l'axe de la roue arrière et P_1 son point de contact avec le sol.

$$\overline{v}_{O_1} = \overline{v}_{P_1} + \overline{\omega}_1\times\overline{P_1O_1} \Rightarrow v_{Caddie}1_{x'} = -\omega_1\overline{1}_z\times R\overline{1}_{y'} = R\omega_1 1_{x'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{v}_{O_1} = \overline{v}_{Tapis} + \overline{v}_{Caddie} \\ \overline{v}_{P_1} = \overline{v}_{Tapis} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{\omega}_1 = -\frac{v_{Caddie}}{R}\overline{1}_z \ ; \ \overline{\varepsilon}_1 = 0 \text{ car } \overline{\omega}_1 = \text{constante}$$

2.2 Soit O_2 l'axe de la roue avant et β l'angle d'inclinaison du caddie par rapport à l'horizontale.
On a $\bar{v}_{O_2} = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_{caddie} \times \overline{O_1O_2}$; et si on projette la relation sur l'axe y, il vient :

$$v_{O_2}\bar{1}_x = (v_t + v_c)(\cos\alpha\,\bar{1}_x + \sin\alpha\,\bar{1}_y) + (-\omega_c\,\bar{1}_z) \times L(\cos\beta\,\bar{1}_x + \sin\beta\,\bar{1}_y)$$

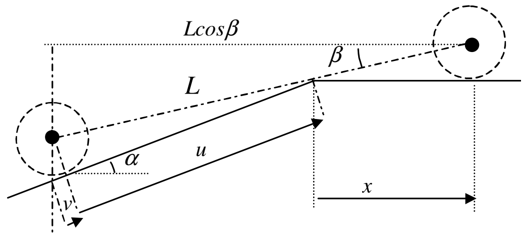
$$\begin{cases} v_{O_2} = (v_t + v_c)\cos\alpha + L\sin\beta\,\omega_c \quad (1) \\ 0 = (v_t + v_c)\sin\alpha - L\cos\beta\,\omega_c \quad (2) \end{cases} \qquad (2) \Rightarrow \bar{\omega}_c = \frac{-1}{L\cos\beta}(v_t + v_c)\sin\alpha\,\bar{1}_z$$

Pour trouver une relation donnant $\beta(x)$:

$$L\cos\beta = x + (u + v)\cos\alpha$$

avec $\tan\alpha = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}$; $\tan\gamma = \frac{u}{R}$; $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta$

$$\Rightarrow L\cos\beta = x + R\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right)\cos\alpha + R\tan\alpha\cos\alpha$$



On résout cette équation pour trouver $\beta(x)$ (avec un calculateur) et on la remplace dans l'équation donnant la vitesse angulaire

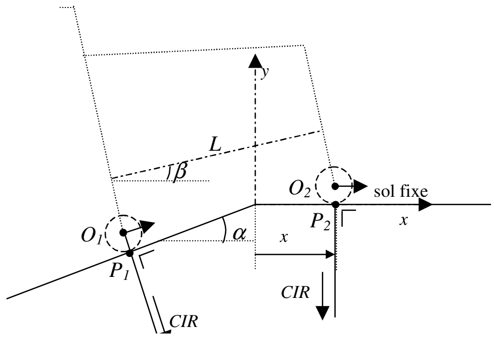
2.3 Le moins vite : Point de contact de la roue avec le tapis ($\bar{v}_{Tapis}$)

2.4 Le plus vite : Point diamétralement opposé au premier ($\bar{v}_{Tapis} + 2\bar{v}_{Caddie}$)

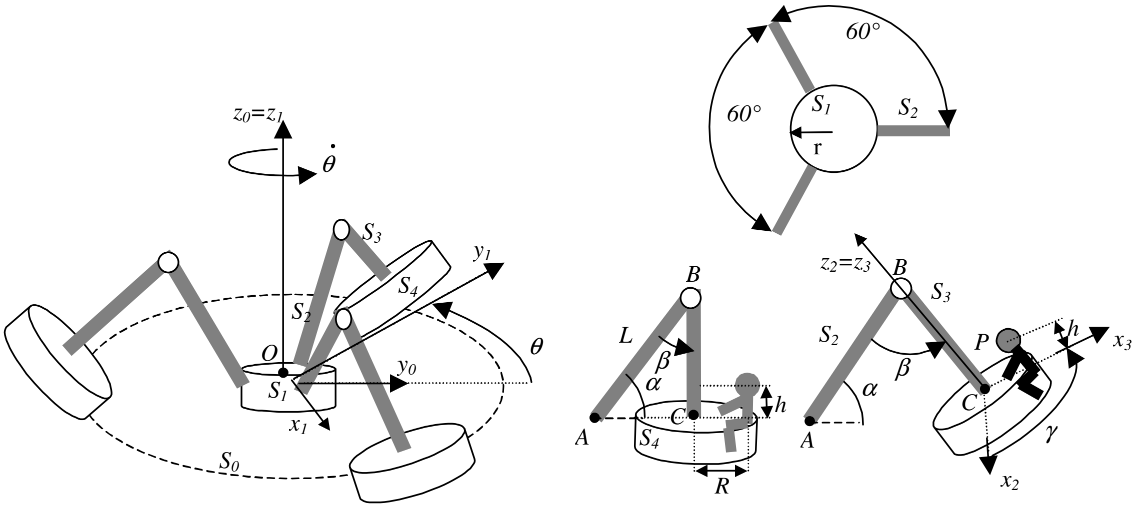
2.5 (voir dessin) le CIR se trouve à l'intersection des perpendiculaires :

- au tapis et passant par le point de contact de la roue arrière

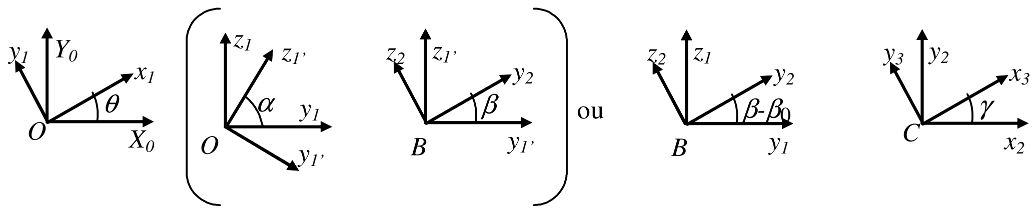
au sol horizontal et passant par le point de contact de la roue avant.



3.



Position au repos



Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$\overline{\omega}_{R_1/R_0}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}$; $\overline{\omega}_{R_2/R_0}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}+\dot\beta\overline{1}_{x_1}$; $\overline{\omega}_{R_3/R_0}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}+\dot\beta\overline{1}_{x_1}+\dot\gamma\overline{1}_{z_2}$

Dans le repère $Ox_1y_1z_1$

<u>1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :</u>

$$\overline{\omega}_{S_4}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}+\dot\beta\overline{1}_{x_1}+\dot\gamma\overline{1}_{z_2}=\dot\beta\overline{1}_{x_1}-\sin(\beta-\beta_0)\dot\gamma\overline{1}_{y_1}+\left[\dot\theta+\cos(\beta-\beta_0)\dot\gamma\right]\overline{1}_{z_1}$$

<u>3) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_1 :</u>

$$\overline{\omega}_{R_1/R_0}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}$$

<u>4) Vitesse de P</u>

$$\overline{v_P}=\overline{v_C}+\overline{\omega}_{S_4}\times\overline{CP}$$

avec $\overline{CP}=R\cos\gamma\overline{1}_{x_1}+\left(R\sin\gamma\cos(\beta-\beta_0)-h\sin(\beta-\beta_0)\right)\overline{1}_{y_1}+\left(h\cos(\beta-\beta_0)+R\sin\gamma\sin(\beta-\beta_0)\right)\overline{1}_{z_1}$

$$\overline{v_C}=\overline{v_B}+\overline{\omega}_2\times\overline{BC}$$

avec $\overline{\omega}_{S_2}=\dot\beta\overline{1}_{x_1}+\dot\theta\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{BC}=-L\sin\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\overline{1}_{z_1}-\sin(\beta-\beta_0)\overline{1}_{y_1}\right)$

$$\overline{v_B}=\overline{v_O}+\overline{\omega}_1\times\overline{OB}=-(r+L\cos\alpha)\dot\theta\overline{1}_{x_1}$$

avec $\overline{\omega}_{S_1}=\dot\theta\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{OB}=(r+L\cos\alpha)\overline{1}_{y_1}+L\cos\alpha\overline{1}_{z_1}$

<u>5) Accélération angulaire du solide S_4.</u>

$$\overline{\varepsilon}_{S_4}=\left.\frac{d\overline{\omega}_{S_4}}{dt}\right|_{rel}+\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{\omega}_{S_4}=\left(\ddot\beta+\sin(\beta-\beta_0)\dot\gamma\dot\theta\right)\overline{1}_{x_1}+\left(\dot\beta\dot\theta-\cos(\beta-\beta_0)\dot\gamma\dot\beta\right)\overline{1}_{y_1}-\sin(\beta-\beta_0)\dot\gamma\dot\beta\overline{1}_{z_1}$$

<u>6) Accélération de P dans le repère $Ox_1y_1z_1$</u>

$$\overline{a_P}=\overline{a_C}+\overline{\omega}_{S_4}\times\left(\overline{\omega}_{S_4}\times\overline{CP}\right)+\overline{\varepsilon}_{S_4}\times\overline{CP}$$

$$\overline{a_C}=\overline{a_B}+\overline{\omega}_{S_2}\times\left(\overline{\omega}_{S_2}\times\overline{BC}\right)+\overline{\varepsilon}_{S_2}\times\overline{BC}\quad\text{avec}\quad\overline{\varepsilon}_{S_2}=\left.\frac{d\overline{\omega}_{S_2}}{dt}\right|_{rel}+\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{\omega}_{S_2}=\ddot\beta\overline{1}_{x_1}+\dot\beta\dot\theta\overline{1}_{y_1}$$

$$\overline{a_B}=\overline{a_0}+\overline{\omega}_{S_1}\times\left(\overline{\omega}_{S_1}\times\overline{OB}\right)+\overline{\varepsilon}_{S_1}\times\overline{OB}\quad\text{avec}\quad\overline{\varepsilon}_{S_1}=\left.\frac{d\overline{\omega}_{S_1}}{dt}\right|_{rel}+\underbrace{\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{\omega}_{S_1}}_{=0}=0\quad\text{et O fixe : }\overline{a_0}=0$$

Dans le repère $Cx_2y_2z_2$

<u>1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :</u>

$$\overline{\omega}_{S_4}=\dot\beta\overline{1}_{x_2}+\sin(\beta-\beta_0)\dot\theta\overline{1}_{y_2}+\left[\dot\gamma+\cos(\beta-\beta_0)\dot\theta\right]\overline{1}_{z_2}$$

2) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_2 :

$$\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1} + \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1}$$

4) Vitesse de P

$\overline{v_P} = \overline{v_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}$ avec $\overline{CP} = R\left(\cos\gamma\,\overline{1}_{x_2} + \sin\gamma\,\overline{1}_{y_2}\right) + h\,\overline{1}_{z_2}$

$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega}_{S_2} \times \overline{BC}$ avec $\overline{\omega}_{S_2} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_2} + \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et $\overline{BC} = -L\sin\alpha\,\overline{1}_{z_2}$

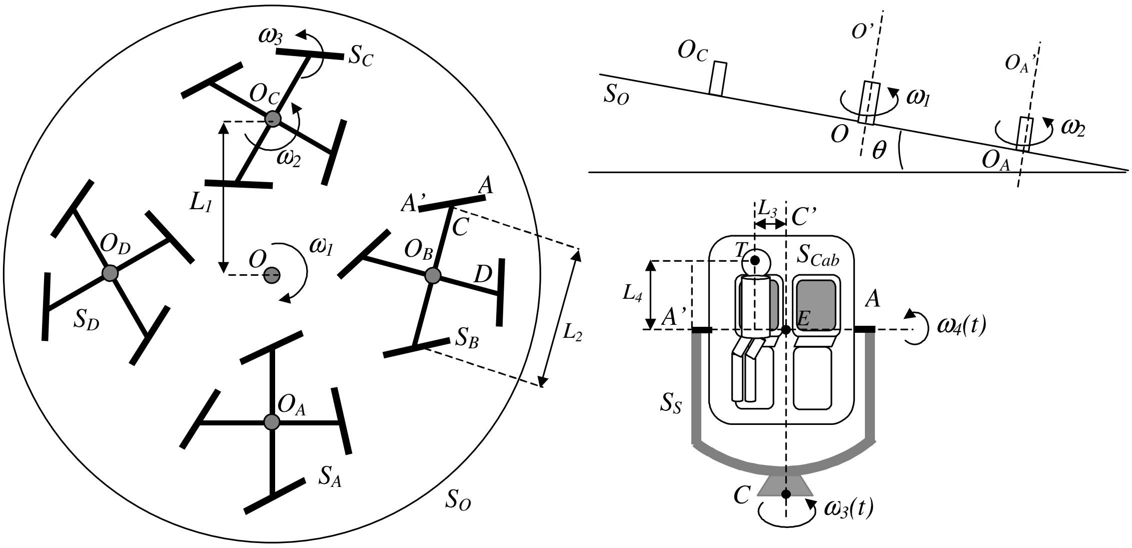
$\overline{v_B} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_{S_1} \times \overline{OB} = -(r + L\cos\alpha)\dot{\theta}\,\overline{1}_{x_2}$ avec $\overline{\omega}_1 = \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et

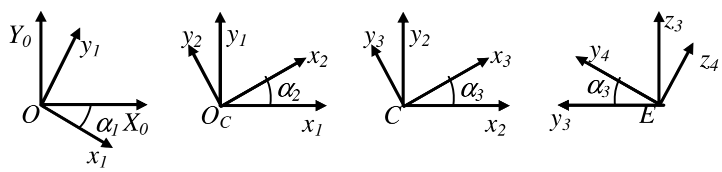
$\overline{OB} = (r + L\cos\alpha)\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2} - \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2}\right) + L\sin\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$

5) Accélération angulaire du solide S_4.

$$\overline{\varepsilon}_{S_4} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_4}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{S_4}$$

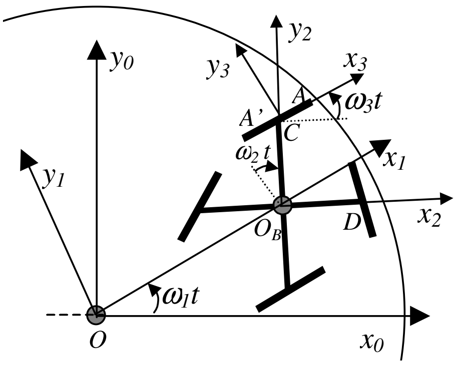
4.





Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$\overline{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1\overline{1}_{z_1}$; $\overline{\omega}_{R_2/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2)\overline{1}_{z_2}$; $\overline{\omega}_{R_3/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\overline{1}_{z_3}$; $\overline{\omega}_{R_4/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\overline{1}_{z_3} + \omega_4\overline{1}_{x_3}$



1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$$\overline{\omega}_{S_{Cab}} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 + \overline{\omega}_4$$

$$\overline{\omega}_{S_{Cab}} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\overline{1}_{z_3} + \omega_4\overline{1}_{x_3}$$

Vecteur accélération angulaire du solide S_4 :

$$\overline{\varepsilon}_{S_{Cab}} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_{Cab}}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{R_3/R_0} \times \overline{\omega}_{S_{Cab}}$$

$$= \dot{\omega}_3\overline{1}_{z_3} + \dot{\omega}_4\overline{1}_{x_3} + \omega_4(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\overline{1}_{y_3}$$

2) $\overline{v_{O_B}} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_{S_0} \times \overline{OO_B} = -\omega_1 L_1 \overline{1}_{y_1}$ avec $\overline{\omega}_{S_0} = -\omega_1 \overline{1}_{z_3}$ et $\overline{OO_B} = L_1 \overline{1}_{x_1}$

$$\overline{v_C} = \overline{v_{O_B}} + \overline{\omega}_{S_B} \times \overline{O_B C} = -L_1\omega_1 \underbrace{\left(\cos(\omega_2 t)\overline{1}_{y_2} + \sin(\omega_2 t)\overline{1}_{x_2}\right)}_{\overline{1}_{y_1}} - \frac{L_2}{2}(-\omega_1+\omega_2)\overline{1}_{x_2}$$

avec $\overline{\omega}_{S_S} = (-\omega_1+\omega_2)\overline{1}_{z_2}$ et $\overline{O_B C} = \frac{L_2}{2}\overline{1}_{y_2}$

$\overline{v_E} = \overline{v_C}$ car $\overline{EC}$ est l'axe de rotation du solide S_S

$\overline{v_T} = \overline{v_E} + \overline{\omega}_{Cab} \times \overline{ET}$ avec $\overline{v_C} = \overline{v_E}$ et $\overline{ET} = -L_3\overline{1}_{x_4} \underline{+ L_4 \overline{1}_{z_4}} = -L_3\overline{1}_{x_3} + L_4\left(\cos(\omega_4 t)\overline{1}_{z_3} - \sin(\omega_4 t)\overline{1}_{y_3}\right)$

$$\overline{\omega}_{Cab} \times \overline{ET} = -L_4\sin(\omega_4 t)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3)\overline{1}_{x_3} - \left(L_4\cos(\omega_4 t)\omega_4 + L_3(-\omega_1+\omega_2+\omega_3)\right)\overline{1}_{y_3} - L_4\sin(\omega_4 t)\omega_4\overline{1}_{z_3}$$

$$\overline{v_T} = A(t)\overline{1}_{x_2} + B(t)\overline{1}_{y_2} + C(t)\overline{1}_{z_2} =$$

$$\begin{pmatrix} -L_1\sin(\omega_2 t)\sin(\omega_3 t)\omega_1 - L_4\cos(\omega_4 t)\sin(\omega_3 t)\omega_4 - \frac{L_2}{2}\sin(\omega_3 t)(-\omega_1+\omega_2) \\ -\left(L_4\sin(\omega_4 t)\cos(\omega_3 t)\sin(\omega_3 t) + L_3\sin(\omega_3 t)\right)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) \end{pmatrix}\overline{1}_{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} -L_1\cos(\omega_2 t)\omega_1 + L_4\cos(\omega_4 t)\cos(\omega_3 t)\omega_4 \\ +\left(L_3\cos(\omega_3 t) - L_4\sin(\omega_4 t)\sin(\omega_3 t)\right)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) \end{pmatrix}\overline{1}_{y_2}$$

$$-L_4\sin(\omega_4 t)\omega_4\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{a_T} = \left.\frac{d\overline{v}_T}{dt}\right|_{R_2-rel} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{v}_T = \dot{A}(t)\overline{1}_{x_2} + \dot{B}(t)\overline{1}_{y_2} + \dot{C}(t)\overline{1}_{z_2} + (-\omega_1+\omega_2)\overline{1}_{z_2} \times \overline{v_T}$$
