NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
1ère session 15/06/2007 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

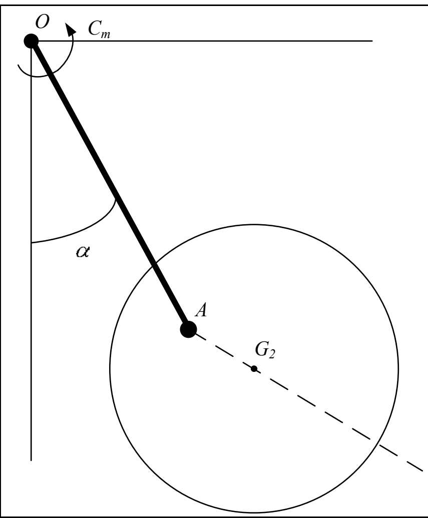
$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB} \times \overline{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : (4 points + bonus : 1 point)

Considérons un système plan composé de deux solides S_1 (tige) et S_2 (disque).
La tige homogène *OA* (S_1) de longueur $2L$ et de masse m_1 tourne autour de la rotule *O* (liaison pivot). L'angle entre la tige et la vertical est donnée : α.
Le disque (S_2) de rayon *R* et de masse m_2 est lié à la tige en *A* par une rotule. La distance entre le centre du disque et la rotule *A* vaut *d*.

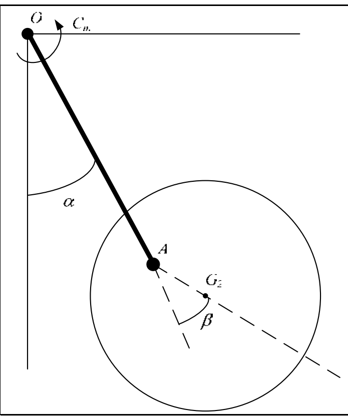


Déterminer le nombre de degrés de liberté du système.

2 solides en 2D =>2*3 coordonnées = 6 coordonnées
Tige : fixée en O par une rotule (2 réaction de liaison) ; = 2
Disque : Point A lié à la tige par une rotule (2 réaction de liaison) = 2
⇨ 2 ddl.

Déterminer la vitesse angulaire des deux solides.

$$\begin{cases} R1 \text{ lié à la tige, centré en O.} \Rightarrow \overline{\omega}_{R1/R0} = \overline{\omega}_{tige} = \dot{\alpha}\overline{1}_z \\ R2 \text{ lié au disque, centré en A} \Rightarrow \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_{disque} = \alpha\overline{1}_z + \dot{\beta}\overline{1}_z \end{cases}$$



Déterminer le Lagrangien du système

$\overline{OA} = 2L\overline{1}_{x_1}$ => $\overline{v}_{G_1} = L\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1}$

$\overline{OG_2} = (2L + d\cos\beta)\overline{1}_{x_1} + (d\sin\beta)\overline{1}_{y_1}$

=> $\overline{v}_{G_2} = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG_2} = 2L\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overline{1}_{y_2} = -d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\beta\,\overline{1}_{x_1} + (2L\dot{\alpha} + d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta)\overline{1}_{y_1}$

$$T = T_{(S1)} + T_{(S2)} = \left[\underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}_t.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_t}_{\frac{1}{2}\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha}^2}\right]_{Tige} + \left[\underbrace{\frac{m_2 v_{G_2}{}^2}{2}}_{\frac{m_2\left(d^2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 + 4L^2\dot{\alpha}^2 + 4Ld(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta\dot{\alpha}\right)}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}_d.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_d}_{\frac{1}{2}\frac{m_2R^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2}\right]_{disque}$$

$$=> T = \frac{1}{2}\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{m_2\left(d^2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 + 4L^2\dot{\alpha}^2 + 4Ld\cos\beta(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\alpha}\right)}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_2R^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2$$

$$V = -m_1 gL\cos\alpha - m_2 g(2L\cos\alpha + d\cos(\alpha+\beta))$$

$$\boxed{L = \left(\frac{m_1 2L^2}{3} + m_2 2L^2\right)\dot{\alpha}^2 + \left(\frac{m_2}{2}d^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2R^2}{2}\right)(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 + m_2 2Ld\cos\beta(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\alpha} + (m_1+2m_2)gL\cos\alpha + m_2 gd\cos(\alpha+\beta)}$$

Déterminer la (les) équations de mouvement par le théorème de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i{}^* + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i} \text{ sans contraintes => } \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i{}^*}$$

$$\alpha : \left(\frac{m_1 4L^2}{3} + m_2 4L^2\right)\ddot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2 d^2\right)(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\cos\beta(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) - m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}$$
$$-m_2 2Ld\sin\beta(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\beta} + (m_1+2m_2)gL\sin\alpha + m_2 gd\sin(\alpha+\beta) = C$$

$$=> \boxed{\begin{aligned}&\left(\left(\frac{m_1 4L^2}{3} + m_2 4L^2 + m_2 2Ld\cos\beta\right)\ddot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2 d^2 + m_2 2Ld\cos\beta\right)(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) - m_2 4Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - m_2 2Ld\sin\beta\dot{\beta}^2\right)\\ &= C - (m_1+2m_2)gL\sin\alpha - m_2 gd\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}}$$

$$\beta : \left(m_2 d^2 + \frac{m_2R^2}{2}\right)(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} - m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + m_2 2Ld\sin\beta(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\alpha} + m_2 gd\sin(\alpha+\beta) = 0$$

$$=> \boxed{\left(m_2 d^2 + \frac{m_2R^2}{2}\right)(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}^2 + m_2 gd\sin(\alpha+\beta) = 0}$$

=> $(1)-(2)$:

$$\left(4L^2\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) + m_2 2Ld\cos\beta\right)\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\beta} - 2m_2 Ld\sin\beta(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 = C - (m_1+2m_2)gL\sin\alpha$$

Par les théorèmes généraux, déterminer les deux équations qui nous donneraient les équations de mouvement. Préciser le système choisi, les termes (détaillés), les paramètres en jeu, l'axe de projection… (0,5 bonus)

$$\overline{F}_O = X_O \overline{1}_x + Y_O \overline{1}_y \; ; \overline{F}_{G_1} = m_1 g \overline{1}_x \; ; \overline{F}_{G_2} = m_2 g \overline{1}_x \; ; \overline{F}_A = X_A \overline{1}_x + Y_A \overline{1}_y$$

$$\overline{\omega}_{tige} = \dot{\alpha} \overline{1}_z ; \; \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_{disque} = \dot{\alpha} \overline{1}_z + \dot{\beta} \overline{1}_z$$

$$\overline{OA} = 2L \overline{1}_{x_1} \; => \; \overline{v}_{G_1} = \frac{d\overline{OG_1}}{dt} = v_{G_1} \overline{1}_{y_1} \text{ et } \overline{v}_A = 2\overline{v}_{G_1}$$

$$\overline{OG_2} = (2L + d\cos\beta)\overline{1}_{x_1} + (d\sin\beta)\overline{1}_{y_1} => \overline{v}_{G_2} = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AG_2} = 2L\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2}$$

$$\overline{R}_1 = m_1 \overline{v}_{G_1} ; \; \overline{R}_2 = m_2 \overline{v}_{G_2}$$

2 équations contenant $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, m_1, m_2, L, d, R, g, C = 2$ équations de mouvement

- $\left.\dfrac{d\overline{M}_A}{dt}\right|_{S_2} = \underbrace{\overline{m}_{e,A(S2)}}_{\overline{AG_2} \times m_2 \overline{g}} + \overline{R}_2 \times \overline{v_A}$ avec $\overline{M}_{A\,disque} = \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}_d + m_2 \overline{AG_2} \times \overline{v}_A$ où $\overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}_d = I_{A_z} . \omega_d \overline{1}_z = \left(I_{G_z} + m_2 d^2\right) . \omega_d \overline{1}_z$
- $\left.\dfrac{d\overline{M}_O}{dt}\right|_{S_1+S_2} = \overline{m}_{e,O} = C + \overline{OG_1} \times m_1 \overline{g} + \overline{OG_2} \times m_2 \overline{g}$ avec $\overline{M}_O = \overline{M}_{O\,(S1)} + \overline{M}_{O\,(S2)} = M_O \overline{1}_z$

$$\overline{M}_{O\,(S1)} = \overline{\overline{I}}_O . \overline{\omega}_{tige} = I_{O_z} \dot{\alpha} \overline{1} \quad \text{et} \quad \overline{M}_{O\,(S2)} = \underbrace{\overline{M}_{G_2\,disque}}_{I_{G_z} \omega_{disque} \overline{1}_z} + \overline{OG_2} \times \overline{R}_2 \text{ ou } \overline{M}_{O\,(S2)} = \overline{M}_{A\,disque} + \overline{OA} \times \overline{R}_2$$

Déterminer les réactions en O. (0,5 bonus)

- $\boxed{\overline{R} = \overline{R}_{(S1)} + \overline{R}_{(S2)} = \left[m_1 L \dot{\alpha} \overline{1}_{y_1}\right] + \left[-m_2 d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\sin\beta \overline{1}_{x_1} + m_2\left(2L\dot{\alpha} + d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\cos\beta\right)\overline{1}_{y_1}\right]}$

$$\left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_{S_1+S2} = \overline{F}_{e(S1+S2)} => \left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_{R1} + \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{R} = \overline{F}_{e(S1+S2)}$$

$$=> \begin{cases} \overline{1}_{x_1} : m_2\left(-d\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right)\sin\beta - d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)cos\beta\dot{\beta}\right) - m_1 L\dot{\alpha}^2 - m_2\left(2L\dot{\alpha} + d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\cos\beta\right)\dot{\alpha} = X_O + (m_1 + m_2)g \\ \overline{1}_{y_1} : m_1 L\ddot{\alpha} + m_2\left(2L\ddot{\alpha} + d\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right)\cos\beta - d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\sin\beta\dot{\beta}\right) - m_2 d\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\sin\beta\dot{\alpha} = Y_O \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} X_O = -m_2 d\sin\beta\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) - m_2 d\cos\beta\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)^2 - (m_1 + m_2 2)L\dot{\alpha}^2 - (m_1 + m_2)g \\ Y_O = (m_1 + 2m_2)L\ddot{\alpha} + m_2 d\cos\beta\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) - m_2 d\sin\beta\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)^2 \end{cases}$$

$$\overline{F}_O = X_O\,\overline{1}_x + Y_O\,\overline{1}_y \;;\; \overline{F}_{G_1} = m_1 g\,\overline{1}_x \;;\; \overline{F}_{G_2} = m_2 g\,\overline{1}_x \;;\; \overline{F}_A = X_A\,\overline{1}_x + Y_A\,\overline{1}_y$$

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,(S1)}} + \overline{M_{O\,(S2)}} = \left[\underbrace{\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_{tige}}_{\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha}\,\overline{1}_z}\right]_{Tige} + \left[\underbrace{\overline{M_{G_2\ disque}}}_{\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_d = \frac{m_2R^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overline{1}_z} + \underbrace{\overline{OG_2}\times\overline{R}_2}_{[m_2(2L\dot{\alpha}+d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta)(2L+d\cos\beta) + (d\sin\beta)m_2 d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\beta]\overline{1}_z}\right]_{disque} =$$

$$= \left(\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha} + \frac{m_2R^2}{2}\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2\left(2L\dot{\alpha} + d\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\cos\beta\right)\left(2L + d\cos\beta\right) + \left(d\sin\beta\right)m_2 d\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\sin\beta\right)\overline{1}_z$$

$$= \left(\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha} + \frac{m_2R^2}{2}\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2 4L\dot{\alpha} + m_2 2Ld\cos\beta\dot{\alpha} + m_2\left(2Ld\cos\beta + d^2\cos^2\beta\right)\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2 d^2\sin^2\beta\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\right)\overline{1}_z$$

$$= \left(\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2 4L\dot{\alpha} + 2m_2Ld\cos\beta\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2 2Ld\cos\beta\dot{\alpha}\right)\overline{1}_z$$

ou $$\overline{M_O} = \left[\underbrace{\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_{tige}}_{\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha}\,\overline{1}_z}\right]_{Tige} + \left[\underbrace{\overline{M_{A\ disque}}}_{\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}_d + m_2\,\overline{AG_2}\times\overline{v}_A = \left(\frac{m_2R^2}{2}+m_2d^2\right)(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overline{1}_z + m_2 d\cos\beta\, 2L\dot{\alpha}\,\overline{1}_z} + \underbrace{\overline{OA}\times\overline{R}_2}_{m_2 2L(2L\dot{\alpha}+d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta)\overline{1}_z}\right]_{disque}$$

$$\boxed{\overline{M_O} = \left(\frac{m_1(2L)^2}{3}\dot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) + m_2 2Ld\cos\beta\dot{\alpha} + m_2 2L\left(2L\dot{\alpha} + d\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\cos\beta\right)\right)\overline{1}_z}$$

- $$\frac{d\overline{M_O}}{dt} = \overline{m}_{e,O}$$

$$=> \frac{m_1(2L)^2}{3}\ddot{\alpha} + m_2 4L^2\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right) + m_2 2Ld\cos\beta\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)$$

$$\underbrace{-m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - m_2 2Ld\sin\beta\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\dot{\beta}}_{-m_2 4Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - m_2 2Ld\sin\beta\dot{\beta}^2} = C + m_1 gL\sin\alpha + m_2 g\left(2L\sin\alpha + d\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$=> \boxed{\begin{gathered}\left(\left(\frac{m_1 4L^2}{3} + m_2 4L^2 + m_2 2Ld\cos\beta\right)\ddot{\alpha} + \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2 + m_2 2Ld\cos\beta\right)\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right) - m_2 4Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - m_2 2Ld\sin\beta\dot{\beta}^2\right) \\ = C - \left(m_1 + 2m_2\right)gL\sin\alpha - m_2 gd\sin\left(\alpha+\beta\right)\end{gathered}}$$

- $$\left.\frac{d\overline{M_A}}{dt}\right|_{S_2} = \overline{m}_{e,A(S2)} + \underbrace{\overline{R}_2\times\overline{v_A}}_{=[-m_2 d(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\beta\, 2L\dot{\alpha}\,\overline{1}_z]} = -d\sin\left(\alpha+\beta\right)m_2 g\,\overline{1}_z - m_2 2Ld\sin\beta\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\dot{\alpha}\,\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_{A\,disque} = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}_d + m_2\,\overline{AG_2}\times\overline{v}_A = \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overline{1}_z + m_2 2Ld\cos\beta\dot{\alpha}\,\overline{1}_z$$

$$=> \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right) - \cancel{m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}} + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\sin\beta\left(\dot{\alpha}+\cancel{\dot{\beta}}\right)\dot{\alpha} = -d\sin\left(\alpha+\beta\right)m_2 g$$

$$=> \boxed{\left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2d^2\right)\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right) + m_2 2Ld\cos\beta\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\sin\beta\dot{\alpha}^2 = -d\sin\left(\alpha+\beta\right)m_2 g}$$

- $\left.\frac{d\overline{M_A}}{dt}\right|_{S_1} = \overline{m}_{e,A(S1)} + \underbrace{\overline{R}_1 \times \overline{v_A}}_{=0 \text{ car } //}$ avec $\overline{M_A} = \overline{M_{G_1}} + \overline{AG_1} \times \overline{R}_1 = \frac{m_1 (2L)^2}{12}\dot{\alpha}\overline{1}_z + \underbrace{\left(-L\overline{1}_{x_1}\right) \times m_1 L\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1}}_{-m_1 L^2 \dot{\alpha}\overline{1}_{y_1}}$

$$=> \left(\underbrace{\frac{m_1 (2L)^2}{12} - m_1 L^2}_{-\frac{m_1 2L^2}{3}}\right)\ddot{\alpha} = C + m_1 g L \sin\alpha - 2L\cos\alpha Y_O + 2L\sin\alpha X_O$$

$$=> -\frac{m_1 2L^2}{3}\ddot{\alpha} = C + m_1 g L \sin\alpha - 2L\cos\alpha\left(m_1 L\ddot{\alpha} + m_2\left(2L\ddot{\alpha} + d\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)\cos\beta - d\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\sin\beta\dot{\beta}\right)\right)$$

$$+2L\sin\alpha\left(-m_2 d\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta - m_2 d\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)cos\beta\dot{\beta} - \left(m_1+m_2\right)g\right)$$

$$=> -\frac{m_1 2L^2}{3}\ddot{\alpha} = C + \underbrace{m_1 g L\sin\alpha - 2L\sin\alpha\left(m_1+m_2\right)g}_{-L\sin\alpha\left(m_1+2m_2\right)g}$$

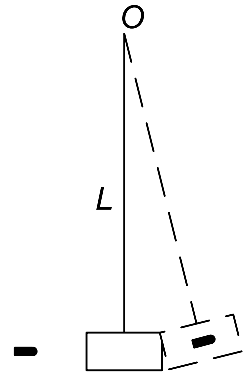
$$-\left(m_1+2m_2\right)2L\cos\alpha L\ddot{\alpha} - m_2 2Ld\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)\underbrace{\left(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\right)}_{\cos(\alpha-\beta)} + m_2 2Ld\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\dot{\beta}\left(\underbrace{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha cos\beta}_{\sin(\beta-\alpha)}\right)$$

$$=> -\frac{m_1 2L^2}{3}\ddot{\alpha} + \left(m_1+2m_2\right)2L\cos\alpha L\ddot{\alpha} + m_2 2Ld\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}\right)\cos\left(\alpha-\beta\right) + m_2 2Ld\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\dot{\beta}\sin\left(\alpha-\beta\right)$$

$$= C - L\sin\alpha\left(m_1+2m_2\right)g$$

Question 2 : Pendule balistique (4 points)

Dans la masse M d'un pendule, on envoie une balle de fusil (de masse m) qui s'y logera.
Le pendule est attaché à une longueur L à une fixation O.
Son moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par O vaut I.



Déterminer la vitesse de la balle avant le choc en fonction de longueur de la déviation du pendule x.

1 (avant le choc); 2 (au moment du choc); 3 (après le choc)

Phase 1 et 2

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{F}_e \;\Rightarrow\; \left.\frac{d\overline{R}}{dt}\right|_x = 0 \;\Rightarrow\; m_{balle} v_{balle}^{(1)} = \left(m_{balle} + M_{pendule}\right) v_{balle+pendule}^{(2)} \quad \text{avec } v_{balle+pendule}^{(2)} \overline{1}_x = L\dot{\theta}_0 \overline{1}_x$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{m}{m+M}\frac{v_{balle}^{(1)}}{L} \quad (1)$$

Phase 2 et 3

$$\text{Conservation d'énergie} \quad T^2 + V^2 = T^3 + V^3 \text{ avec } T_{pendule} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\,\overline{\overline{I}}_O\overline{\omega} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 \text{ et } T_{balle} = \frac{m v_G^2}{2} = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(mL^2\dot{\theta}_0{}^2 + I\dot{\theta}_0{}^2\right) - (m+M)gL = 0 - (m+M)gL\cos\theta \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2(m+M)gL(1-\cos\theta)}{\left(mL^2+I\right)}} \quad (2)$$

$$\text{Théorème du moment : } \frac{d\overline{M_O}}{dt} = \overline{m_e} \text{ avec } \overline{M_O} = \overline{M_{O,balle}} + \overline{M_{O,pendule}} = mLv^{(3)}\overline{1}_z + I\dot{\theta}\overline{1}_z \text{ avec } v^{(3)} = L\dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\left(mL^2+I\right)\dot{\theta}\overline{1}_z\right)}{dt} = -(m+M)gL\sin\theta\,\overline{1}_z \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = -\dfrac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}\sin\theta \\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\dot{\theta}_0}^{0} d\dot{\theta}^2 = \int_0^{\theta} -\dfrac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}\sin\theta\, d\theta = \dfrac{g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(\cos\theta - 1) \\[2ex] \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\dfrac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)} \underset{I=ML^2}{=} \sqrt{\dfrac{2g}{L}(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+M}\frac{v_{balle}^{(1)}}{L} = \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)} \Rightarrow v_{balle}^{(1)} = L\frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}(1-\cos\theta)}$$

$$\text{avec } \sin\theta = \frac{x}{L} \Rightarrow 1-\cos\theta = 1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}} \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}} \underset{I=ML^2}{=} \sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}}$$

$$(1)+(2) : \boxed{v_{balle}^{-} = \frac{m+M}{m} L \sqrt{\frac{2g(m+M)L}{\left(mL^2+I\right)}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}}}$$

Simplifier l'équation dans le cas où le pendule est considéré comme une masse ponctuelle.

Pendule = masse ponctuelle $\left(I = ML^2\right)$: $\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{1-\cos\theta}$ (2')

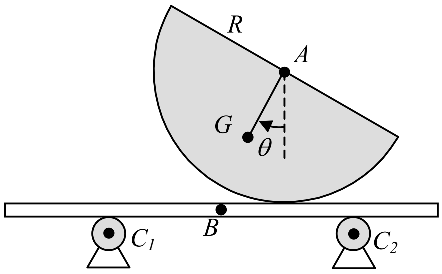
$$\boxed{v_{balle}^{(1)} = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gL\left(1-\cos\theta\right)} = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gL}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{L^2}}}}$$

Question 3 : Demi disque (3 points)

Le problème est plan (2-D). Le système est constitué de quatre corps : une bascule ayant la forme d'un demi-disque (de rayon *R*, de masse *M*) est posée sur une planche (de longueur *L*, de masse *m,* d'épaisseur négligeable) qui est supportée à son tour par deux roulettes (de rayon *r*, de masse *m*) donc les centres (C_1 et C_2) sont fixes. Les mouvements entre le demi-disque et la planche ainsi que le mouvement entre la planche et les roulettes se font sans glisser.

Demi-disque :

AG = a (=$\frac{4R}{3\pi}$)



Déterminer la(les) réactions entre le demi-disque et la planche

Coordonnées généralisées :
u : détermine la position du centre de masse de la planche (S_3) (suivant x)
φ : détermine la rotation des deux rouleaux (S_1 et S_2)
il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et la planche donc on peut écrire φ en fonction de u.

$\overline{\omega}_1 = -\dot{\varphi}\overline{1}_z = \overline{\omega}_1 \Rightarrow \overline{v}_{I\in C_1} = r\dot{\varphi}\overline{1}_x = \overline{v}_{I\in P} = \dot{u}\overline{1}_x \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{u}/r$

$\boxed{\overline{R}_i = m\overline{v}_{G_i}}$: $\overline{R}_1 = m\overline{v}_{G_1} = 0$; $\overline{R}_2 = m\overline{v}_{G_2} = 0$; $\overline{R}_3 = m\ddot{u}\overline{1}_x$

$\overline{R}_4 = M\left(\ddot{u} + R\ddot{\theta} - a\cos\theta\ddot{\theta}\right)\overline{1}_x + M\left(a\sin\theta\ddot{\theta}\right)\overline{1}_y$ car $\overline{JG} = \left(-a\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(R - a\cos\theta\right)\overline{1}_y$

$\boxed{\overline{M_{G_i}} = \overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i}$:

$$\overline{M_{C1(S1)}} = -\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi}\overline{1}_z = -\frac{mr\ddot{u}}{2}\overline{1}_z \text{ ; } \overline{M_{C2(S2)}} = -\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi}\overline{1}_z = -\frac{mr\ddot{u}}{2}\overline{1}_z \text{ ; } \overline{M_{B(S3)}} = 0 \text{ ; } \overline{M_{G(S4)}} = -\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\ddot{\theta}\overline{1}_z$$

<u>Réactions</u> : $\overline{R}_{C_1}\left(X_1, Y_1\right), \overline{R}_{C_2}\left(X_2, Y_2\right), \overline{R}_J\left(T, N\right), \overline{R}_{I_1}\left(T_1, N_1\right), \overline{R}_{I_2}\left(T_2, N_2\right)$

$$\begin{cases} \bullet\ S_4 : \frac{d}{dt}\overline{R} = \overline{F}_e \Rightarrow \overline{1}_y : Ma\sin\theta\ddot{\theta} + Ma\cos\theta\dot{\theta}^2 = -Mg + N \Rightarrow \boxed{N = M\left(a\sin\theta\ddot{\theta} + a\cos\theta\dot{\theta}^2 + g\right)} \\ \bullet\ S_4 : \frac{d}{dt}\overline{R} = \overline{F}_e \Rightarrow \overline{1}_x : \boxed{T = M\left(\ddot{u} + R\ddot{\theta} - a\cos\theta\ddot{\theta} + a\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = M\left(\ddot{x} - a\cos\theta\ddot{\theta} + a\sin\theta\dot{\theta}^2\right)} \end{cases}$$

ou

$$\boxed{T = M\left(\left(-\frac{R}{2} + a\cos\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{a}{R}\cos\theta\ddot{u} - \frac{a}{R}g\sin\theta\right)}$$

Par les théorèmes généraux.

- $S_4 : \frac{d}{dt}\overline{M_A} = M\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}$

$\overline{AG} = (-a\sin\theta)\overline{1}_x + (-a\cos\theta)\overline{1}_y$

$$\begin{cases} \overline{M_A} = \overline{M_G} + \overline{AG}\times\overline{R} = -\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_z + M\left(\dot{u} + (R - a\cos\theta)\dot{\theta}\right)(a\cos\theta)\overline{1}_z - Ma^2\sin^2\theta\dot{\theta}\overline{1}_z \\ \overline{M_A} = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + M\overline{AG}\times\overline{v_A} = -\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\overline{1}_z + M\left(\dot{u} + R\dot{\theta}\right)(a\cos\theta)\overline{1}_z \\ M\overline{v_G}\times\overline{v_A} = -M\left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\left(\dot{u} + R\dot{\theta}\right)\overline{1}_z \text{ car } \overline{v_A} = \overline{v_J} + \overline{\omega}\times\overline{JA} = \dot{u}\overline{1}_x + R\dot{\theta}\overline{1}_x = \dot{x}\overline{1}_x \\ \overline{m}_{e,A} = (a\sin\theta)Mg\overline{1}_z + RT\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Rightarrow -\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\ddot{\theta} + M\left(\ddot{u} + (R - a\cos\theta)\ddot{\theta}\right)(a\cos\theta) - M\left(\dot{u} + (R - a\cos\theta)\dot{\theta}\right)a\sin\theta\dot{\theta} + Ma\sin\theta\dot{\theta}^2 a\cos\theta \\ -Ma^2\sin^2\theta\ddot{\theta} - Ma^2 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = -M\left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\left(\dot{u} + R\dot{\theta}\right) + (a\sin\theta)Mg + RT \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow RT = -\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + M\left(\ddot{u} + R\ddot{\theta}\right)(a\cos\theta) + \cancel{Ma\sin\theta\dot{\theta}\left(\dot{u} + R\dot{\theta}\right)} - \cancel{Ma\sin\theta\dot{\theta}\left(\dot{u} + R\dot{\theta}\right)} - (a\sin\theta)Mg$$

$$\boxed{T = M\left(\left(-\frac{R}{2} + a\cos\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{a}{R}\cos\theta\ddot{u} - \frac{a}{R}g\sin\theta\right)}$$

- $\overline{M}_{GS_1} = \overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{S_1} = -\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_z = -\frac{mr\dot{u}}{2}\overline{1}_z = \overline{M}_{GS_2}$; $\overline{M}_{GS_3} = \overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega}_{S_3} = 0$; $\overline{M}_{GS_4} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_{S_4} = -\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_z$

$\overline{JG} = (-a\sin\theta)\overline{1}_x + (R - a\cos\theta)\overline{1}_y$

$\overline{v}_G = \overline{v}_J + \overline{\omega}_{S_4}\times\overline{JG} = \left(\dot{u} + (R - a\cos\theta)\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_y$

$S_4 : \frac{d}{dt}\overline{M_J} = M\overline{v_G}\times\overline{v_J} + \overline{m}_{e,J}$

$$\begin{cases} \overline{M_J} = \overline{M_G} + \overline{JG}\times M\overline{v_G} = -\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_z - M\left(a^2\sin^2\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_z - \left(M(R - a\cos\theta)\dot{u} + M(R - a\cos\theta)^2\dot{\theta}\right)\overline{1}_z \\ M\overline{v_G}\times\overline{v_J} = -M\left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\dot{x}\overline{1}_z \text{ avec } \overline{v}_J = \dot{x}\overline{1}_x \\ \overline{m}_{e,J} = (a\sin\theta)Mg\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\underbrace{\frac{MR^2}{2} - Ma^2}_{I_{zG}} - M\left(a^2\sin^2\theta\right)\right)\ddot{\theta} - \cancel{Ma^2 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2} - M(R - a\cos\theta)\ddot{u} - \cancel{Ma\sin\theta\dot{\theta}\dot{u}}$$

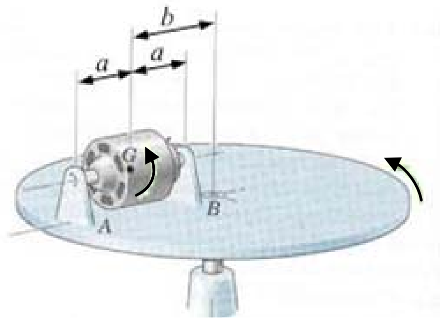
$$-M(R - a\cos\theta)^2\ddot{\theta} - M\cancel{2}\left(R - \cancel{a\cos\theta}\right)a\sin\theta\dot{\theta}^2 = -M\left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\left(\cancel{\dot{u}} + \cancel{R\dot{\theta}}\right) + (a\sin\theta)Mg$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{-\underbrace{\frac{MR^2}{2} - Ma^2}_{I_{zG}} - M\left(a^2\sin^2\theta\right) - \underbrace{M(R - a\cos\theta)^2}_{M\left(R^2 + a^2\cos^2\theta - 2Ra\cos\theta\right)}}_{-I_{zG} - Ma^2 - MR^2 + M2Ra\cos\theta}\right)\ddot{\theta} - M(R - a\cos\theta)\ddot{u} - MRa\sin\theta\dot{\theta}^2 - (a\sin\theta)Mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(-I_{z_G} - Ma^2 - MR^2 + M2Ra\cos\theta\right)\ddot{\theta} - M(R - a\cos\theta)\ddot{u} - MRa\sin\theta\dot{\theta}^2 - (a\sin\theta)Mg = 0}$$

Question 4 : (3 points)

Le moteur électrique a une masse totale M et est supporté par deux appuis en A et B attachés au disque en rotation. (a et b exprimés en m)
La partie tournante du moteur (autour de l'axe AB) a une masse m (en kg) et un rayon de giration de r_g (exprimé en m). Ce moteur tourne avec une vitesse de 1875 tours par minute dans le sens précisé sur le dessin. Le disque sur lequel le moteur est fixé tourne avec une vitesse constante de 48 tours par minute dans la direction montrée.



Déterminer la composante verticale des forces de réaction sur les appuis A et B.

1. $$\begin{cases} \bar{\varpi} \text{ et } \bar{\Omega} \text{ constant : } \dfrac{d\overline{M}_G}{dt} = 0 = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g \\ \text{avec } C_g = \left\| \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\varpi} \right\| \quad ; \ \Omega = \dfrac{1875.2.\pi}{60} = \dfrac{375.\pi}{6} \ ; \omega = \dfrac{48.2.\pi}{60} = \dfrac{24.\pi}{15} \\ C_g = m.r_g{}^2.\dfrac{375.\pi}{6}.\dfrac{24.\pi}{15} = m.r_g{}^2.100.\pi^2 \\ \Rightarrow 0 = aR_A - aR_B + mr_g^2\Omega\omega \end{cases}$$

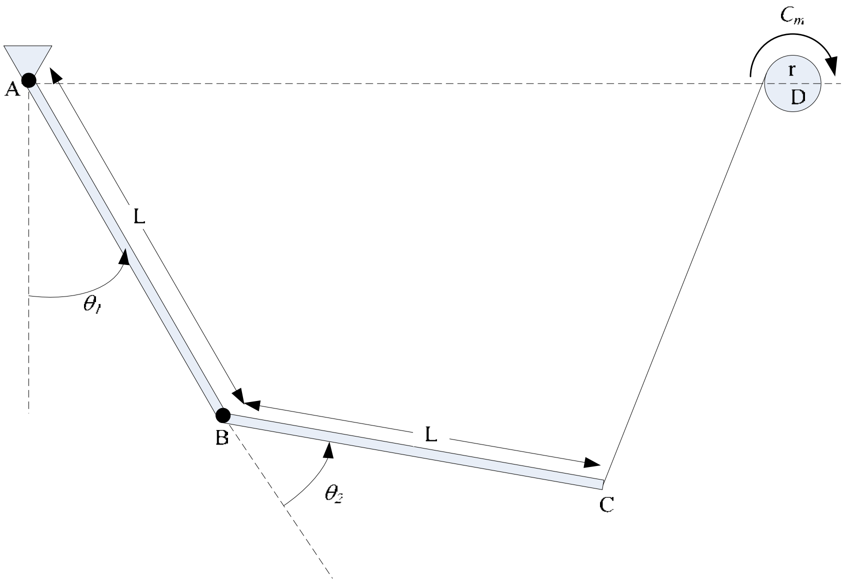
2. $$\left\{ \left. \dfrac{d\overline{R}}{dt} \right|_z = 0 = R_A + R_B - Mg \right.$$

$$\Rightarrow a\left(Mg - R_B\right) - aR_B + mr_g^2\Omega\omega = 0$$

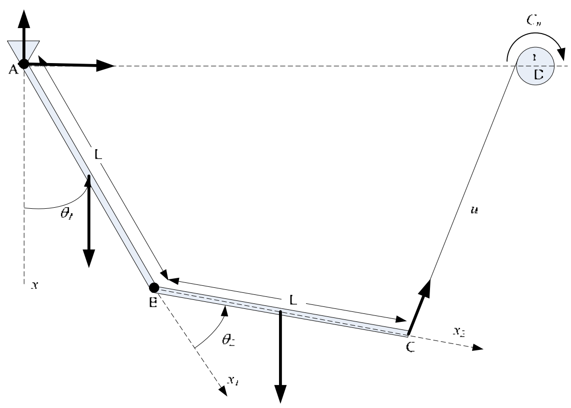
$$\Rightarrow \begin{cases} R_B = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{mr_g^2\Omega\omega}{2a} = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{m.r_g{}^2.50\pi^2}{a} \\ R_A = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{mr_g^2\Omega\omega}{2a} = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{m.r_g{}^2.50.\pi^2}{a} \end{cases}$$

Question 5 : Systèmes de 2 barres (5 points)

Le système comporte deux barres *AB* et *BC* homogènes identiques de masse *m* et longueur *L*. La barre *BC* est reliée par un câble sans masse à une poulie centrée en D (sans inertie) et un disque homogène de masse *m* et de rayon *r*. Les barres sont articulées en *A* et *B* grâce à des liaisons rotoïdes parfaites. θ_1 représente l'angle que fait la direction verticale avec la barre *AB*. θ_2 est l'angle entre les barres *AB* et *BC*. Pour définir la longueur du câble, on utilise le paramètre *u*.



Déterminer l'(les) équation(s) du mouvement (en fonction des paramètres de l'énoncé) par la méthode de votre choix.



Degré de liberté : θ_1, θ_2

Coordonnée de Lagrange : $\theta_1, \theta_2, u, \varphi$ liées par les conditions $\begin{cases} u\sin\varphi = L\cos\theta_1 + L\cos(\theta_1+\theta_2) \\ u\cos\varphi = 2L - L\sin\theta_1 - L\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$

=> 2 contraintes : $\boxed{\begin{cases} \delta u\sin\varphi + u\cos\varphi\delta\varphi + L\sin\theta_1\delta\theta_1 + L\sin(\delta\theta_1+\delta\theta_2) = 0 \\ \delta u\cos\varphi - u\sin\varphi\delta\varphi + L\cos\theta_1\delta\theta_1 + L\cos(\delta\theta_1+\delta\theta_2) = 0 \end{cases}}$

$\overline{v}_{G_1} = L\dot{\theta}_1\overline{1}_{y_1}$; $\overline{v}_{G_2} = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BG_2} = L\dot{\theta}_1\overline{1}_{y_1} + \dfrac{L}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\overline{1}_{y_2}$ avec $\begin{cases} \overline{1}_{x_2} = \cos\theta_2\overline{1}_{x_1} + \sin\theta_2\overline{1}_{y_1} \\ \overline{1}_{y_2} = -\sin\theta_2\overline{1}_{x_1} + \cos\theta_2\overline{1}_{y_1} \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{1}_{x_1} = \cos\theta_1\overline{1}_x + \sin\theta_1\overline{1} \\ \overline{1}_{y_1} = -\sin\theta_1\overline{1}_x + \cos\theta \end{cases}$

$$T=\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{m}{2}\left(\frac{L^2}{4}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2+\cos\theta_2 L^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_1+L^2\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2$$

$$T=\frac{1}{2}\frac{4mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{m}{2}\frac{L^2}{3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2+\frac{m}{2}\cos\theta_2 L^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_1$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\frac{5mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{m}{2}\frac{L^2}{3}\left(\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_2+\frac{m}{2}\cos\theta_2 L^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_1}$$

$$V=-mg\frac{L}{2}\cos\theta_1-mg\left(L\cos\theta_1+\frac{L}{2}\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\Rightarrow\boxed{V=-mg\frac{3L}{2}\cos\theta_1-mg\frac{L}{2}\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)}$$

$$Q_i^*:\ \overline{OC}=2L\overline{1}_x-u\overline{1}_u\Rightarrow\delta\tau=F\overline{1}_u.\delta\overline{OC}=-\frac{C}{r}\delta u=Q_u^{\,*}\delta u$$

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}^{\ *}+\lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta_1}+\lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\theta_1}\\
\Rightarrow\dfrac{5mL^2}{3}\ddot{\theta}_1+\dfrac{m}{2}\dfrac{L^2}{3}2\ddot{\theta}_2+\dfrac{m}{2}\cos\theta_2L^2\ddot{\theta}_1+\dfrac{m}{2}\cos\theta_2L^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)-\dfrac{m}{2}\sin\theta_2L^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2+mg\dfrac{3L}{2}\sin\theta_1\\
\qquad+mg\dfrac{L}{2}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=0+\lambda_1\left(L\sin\theta_1+L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+\lambda_2\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}^{\ *}+\lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta_2}+\lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\theta_2}\\
\Rightarrow+\dfrac{m}{2}\dfrac{L^2}{3}\left(\ddot{\theta}_2+2\ddot{\theta}_1\right)+\dfrac{m}{2}\dfrac{L^2}{3}\ddot{\theta}_2+\dfrac{m}{2}\cos\theta_2L^2\dot{\theta}_2-\dfrac{m}{2}\sin\theta_2L^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dfrac{m}{2}\sin\theta_2L^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_1+mg\dfrac{L}{2}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\\
\qquad=0+\lambda_1\left(L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+\lambda_2\left(L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial u}=Q_u^{\ *}+\lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u}+\lambda_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial u}0\Rightarrow0=-\dfrac{C}{r}+\lambda_1\left(\sin\varphi\right)+\lambda_2\left(\cos\varphi\right)\\
0=\lambda_1\left(+u\cos\varphi\right)+\lambda_2\left(-u\sin\varphi\right)\\
\begin{cases}u\sin\varphi=L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\\u\cos\varphi=2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\end{cases}
\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{C}{r}\sin\varphi=\dfrac{C}{ru}\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\\[2ex]\lambda_2=\dfrac{C}{r}\cos\varphi=\dfrac{C}{ru}\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\end{cases}$$

$$u^2=\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2+\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow 2u\delta u=2\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\left(-L\sin\theta_1\delta\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\right)$$
$$+2\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\left(-L\cos\theta_1\delta\theta_1-Lcos\left(\theta_1+\theta_2\right)\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \delta u=\frac{\left[\begin{array}{l}\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\left(-L\sin\theta_1\delta\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\right)\\ \qquad+\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\left(-L\cos\theta_1\delta\theta_1-Lcos\left(\theta_1+\theta_2\right)\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\right)\end{array}\right]}{\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2+\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2}$$

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\theta_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}{}^*$

$$\frac{5mL^2}{3}\ddot\theta_1+\frac{m}{2}\frac{L^2}{3}2\ddot\theta_2+\frac{m}{2}\cos\theta_2L^2\ddot\theta_1+\frac{m}{2}\cos\theta_2L^2\left(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2\right)-\frac{m}{2}\sin\theta_2L^2\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2\right)\dot\theta_2+mg\frac{3L}{2}\sin\theta_1+mg\frac{L}{2}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)$$
$$=-\frac{C}{r}\frac{\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\left[\left(-\cancel{L\sin\theta_1}-\cancel{L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)}\right)-\left(2L-\cancel{L\sin\theta_1}-\cancel{L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)}\right)\right]}{\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2+\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2}$$
$$=-\frac{C}{r}\frac{-2L^2\left(\cos\theta_1+\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)}{\left(6L^2-4L^2\left(\sin\theta_1+\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+2L^2\cos\theta_2\right)}=\frac{C}{r}\frac{\left(\cos\theta_1+\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)}{\left(3-2\left(\sin\theta_1+\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+\cos\theta_2\right)}$$

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\theta_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}{}^*$

$$\frac{m}{2}\frac{L^2}{3}\left(\ddot\theta_2+2\ddot\theta_1\right)+\frac{m}{2}\frac{L^2}{3}\ddot\theta_2+\frac{m}{2}\cos\theta_2L^2\dot\theta_2-\frac{m}{2}\sin\theta_2L^2\dot\theta_1\dot\theta_2+\frac{m}{2}\sin\theta_2L^2\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2\right)\dot\theta_1+mg\frac{L}{2}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)$$
$$=\frac{C}{r}\frac{L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)L\cos\theta_1+\left(2L-L\sin\theta_1\right)Lcos\left(\theta_1+\theta_2\right)}{\left(L\cos\theta_1+L\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2+\left(2L-L\sin\theta_1-L\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)^2}$$
$$=\frac{C}{r}\frac{\left(\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\cos\theta_1+\left(2-\sin\theta_1\right)cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)}{\left(6-4\left(\sin\theta_1+\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+2\cos\theta_2\right)}=\frac{C}{r}\frac{\left(2cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\sin\theta_2\right)}{\left(6-4\left(\sin\theta_1+\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)+2\cos\theta_2\right)}$$

Ou avec 3 coordonnées :

$$\overline{OC}=L\overline{1}_{x_1}+L\overline{1}_{x_2}$$
$$\Rightarrow \delta\overline{OC}=L\delta\theta_1\overline{1}_{y_1}+L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\overline{1}_{y_2}=L\delta\theta_1\overline{1}_{y_1}+L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\left(-\sin\theta_2\overline{1}_{x_1}+\cos\theta_2\overline{1}_{y_1}\right)$$
$$\Rightarrow \delta\overline{OC}=-L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\sin\theta_2\left(\cos\theta_1\overline{1}_x+\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+\left(L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\cos\theta_2+L\delta\theta_1\right)\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)$$
$$\Rightarrow \delta\overline{OC}=\left(-L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\sin\theta_2\cos\theta_1-\left(L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\cos\theta_2+L\delta\theta_1\right)\sin\theta_1\right)\overline{1}_x$$
$$+\left(\left(L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\cos\theta_2+L\delta\theta_1\right)\cos\theta_1-L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\sin\theta_2\sin\theta_1\right)\overline{1}_y$$
$$\delta\tau=F\overline{1}_u.\delta\overline{OC}=\frac{C}{r}\left(-\sin\varphi\overline{1}_x+\cos\varphi\overline{1}_y\right)$$
$$\delta\tau=\frac{C}{r}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\left(-L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\sin\theta_2\cos\theta_1-\left(L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\cos\theta_2+L\delta\theta_1\right)\sin\theta_1\right)\\+\cos\varphi\left(\left(L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\cos\theta_2+L\delta\theta_1\right)\cos\theta_1-L\left(\delta\theta_1+\delta\theta_2\right)\sin\theta_2\sin\theta_1\right)\end{pmatrix}$$