Faculté des Sciences Appliquées

NOM :
PRENOM :

Mécanique Rationnelle
2e candidature

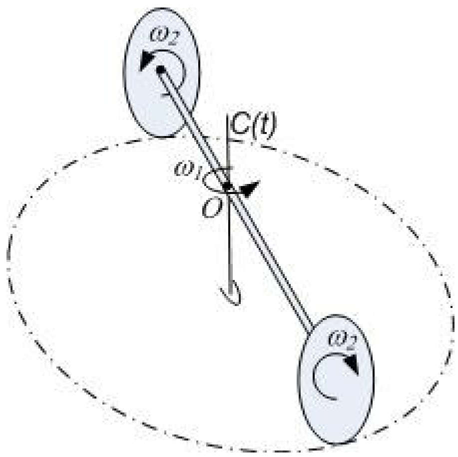
Examen de mécanique rationnelle
1ère session 11/01/2007 (8h-12h)
Année académique 2006-2007

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

Cinématique :	Inertie :	Cinétique :
$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BA}$ $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BA} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{BA}\right)$	$I^{\alpha\beta} = \int_{système} \left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta\right) dm$ $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$ $tg\, 2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$ $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)$	$\overline{R} = m\overline{v}_G$ $\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{R}$ $\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega} + m\overline{AG} \times \overline{v}_A$

Question 1 : Essieu (5 points)

On considère le système matériel constitué d'une tige rigide horizontale, de longueur $2L$ et de masse m, à répartition de masse uniforme, équipée, à chacune de ses extrémités (et orthogonale à la tige), d'une roue cylindrique verticale, de masse M et de rayon R, libre de tourner autour de son axe coïncidant avec la tige (voir la figure). Les roues sont modélisées comme des disques, c.-à-d. des figures planes.
Les roues parcourent une circonférence de rayon L, ce qui signifie que le point milieu de la tige est fixe ; de plus, les 2 roues roulent sans glisser sur le sol.



Déterminer le nombre de degré de liberté du système.

3 solides en 3D =>3*6 coordonnées = 18 coordonnées
Tige : centre fixé en O (3 réaction de liaison) ; = 3
Roue 1 : Centre lié à la tige (3 réaction de liaison) ; Roue perpendiculaire à la tige (2 couples de liaison) = 5
Roue 2 : Centre lié à la tige (3 réaction de liaison) ; Roue perpendiculaire à la tige (2 couples de liaison) = 5
Roulement sans glissement de la roue 1 (3 réaction de liaison) = 3
Roulement sans glissement de la roue 2 (3 réaction de liaison) = 3

Angle caractérisant la rotation de la tige
Angle caractérisant la rotation des roues
Roulement sans glissement entre les roues et le sol => une condition cinématique
⇨ 1 ddl.

Exprimer ω_1 en fonction de ω_2.
Vitesse de C_1 (centre de la roue 1) $\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C1\in \text{tige}} = L\omega_1(\theta)\overline{1}_\theta \\ \overline{v}_{C1\in \text{roue}} = R\omega_2(\varphi)\overline{1}_\theta\end{array}\right\}$ => $\boxed{\omega_2 = \frac{L}{R}\omega_1}$
Déterminer le moment cinétique en O du système.
$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C1\in \text{tige}} = L\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} \\ \overline{v}_{C1\in \text{roue}} = R\dot{\varphi}_1\overline{1}_{y_1}\end{array}\right\}$ => $\boxed{\dot{\varphi}_1 = \frac{L}{R}\dot{\theta}}$ de même pour la roue 2 $\left\{\begin{array}{l} R1 \text{ lié à l'axe avec z vertical.} \Rightarrow \overline{\omega}_{R1/R0} = \overline{\omega}_{tige} = \dot{\theta}\overline{1}_z = \overline{\omega}_{tige} \\ R2 \text{ lié à la roue 1} \Rightarrow \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_{Roue1} = \dot{\theta}\overline{1}_z - \dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} = \dot{\theta}\overline{1}_z - \frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} \\ R3 \text{ lié à la roue 2} \Rightarrow \overline{\omega}_{R3/R0} = \overline{\omega}_{Roue2} = \dot{\theta}\overline{1}_z + \dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} = \dot{\theta}\overline{1}_z + \frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1}\end{array}\right.$ $\overline{M_O} = \left[\underbrace{\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_{tige}}_{\frac{m(2L)^2}{12}\dot{\theta}\overline{1}_z}\right]_{Tige} + \left[\underbrace{\overline{M_{C_1\ Roue1}}}_{\overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{Roue1}} + \underbrace{\overline{OC_1}}_{L\overline{1}_{x_1}} \times \underbrace{\overline{R}_{Roue1}}_{m_1L\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}}\right]_{Roue1} + \left[\underbrace{\overline{M_{C_2\ Roue2}}}_{\overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega}_{Roue2}} + \underbrace{\overline{OC_2}}_{-L\overline{1}_{x_1}} \times \underbrace{\overline{R}_{Roue2}}_{-m_2L\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}}\right]_{Roue2}$ $\underbrace{\overline{M_{C_1\ Roue1}}}_{\overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{Roue1}} = \begin{pmatrix}\frac{m_1R^2}{2} & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & \frac{m_1R^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{L}{R}\dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = -\frac{m_1R^2}{2}\frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\theta}\overline{1}_{z_1} \Rightarrow \overline{M_O}1 = \frac{m_1R^2}{2}\frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\theta}\overline{1}_{z_1} + m_1L^2\dot{\theta}\overline{1}_{z_1}$ $\overline{M_{C_1\ Roue2}} = \overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{Roue2} = \frac{m_2R^2}{2}\frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{m_2R^2}{4}\dot{\theta}\overline{1}_{z_1} \Rightarrow \overline{M_{O\ Roue2}} = -\frac{m_1R^2}{2}\frac{L}{R}\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\theta}\overline{1}_{z_1} + m_1L^2\dot{\theta}\overline{1}_{z_1}$ $\boxed{\overline{M_O} = \left[\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z\right]_{axe} + 2\left[\left(\frac{MR^2}{4} + ML^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_{z_1}\right]_{2\ roues}}$

<u>Question 2</u> : Energie cinétique (4 points)

A partir de la définition de l'énergie cinétique, déterminer la formule de l'énergie cinétique d'un solide et simplifier en travaillant dans les axes centraux principaux.

$$T = \frac{1}{2}\int dm\bar{v}_P^{\,2} = \frac{1}{2}\int dm\left(\bar{v}_A + \bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{v}_A + \bar{\varpi}\times\overline{AP}\right) = \frac{1}{2}\int dm\left(\bar{v}_A.\bar{v}_A + 2\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right) + \left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\bar{v}_A^{\,2}\int dm + \bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times\int dm\overline{AP}\right) + \frac{1}{2}\int dm\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)$$

$$T = \frac{m\bar{v}_A^{\,2}}{2} + \bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\int dm\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)$$

$$\bar{a}.\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = \bar{b}.\left(\bar{a}\times\bar{c}\right) => \left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right) = \bar{\varpi}.\left(\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)$$

$$=> T = \frac{m\bar{v}_A^{\,2}}{2} + \bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\bar{\varpi}.\underbrace{\int dm\left(\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)}_{\bar{\bar{I}}_A.\bar{\varpi}}$$

On montre que :

$$\left[\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right]_i = \delta_{ijk}AP_j\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)_k = \delta_{ijk}AP_j\left(\delta_{k\alpha\beta}\omega_\alpha AP_\beta\right) = \delta_{kij}\delta_{k\alpha\beta}AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right)$$

$$= \left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\right)AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right) = \delta_{i\alpha}AP_j\omega_\alpha AP_j - AP_\alpha\omega_\alpha AP_i = \underbrace{\underbrace{\left(AP_jAP_j\delta_{i\alpha} - AP_\alpha AP_i\right)}_{\int\ =I_A^{\,i\alpha}\text{ par définition du tenseur}}\omega_\alpha}_{\int\ =I_A^{\,i\alpha}\omega_\alpha=\left[\bar{\bar{I}}_A\bar{\varpi}\right]_i}$$

$$=> \boxed{T = \frac{m\bar{v}_A^{\,2}}{2} + \bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_A.\bar{\varpi}}$$

Au centre de masse :

$$T = \frac{m\bar{v}_G^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\varpi}$$

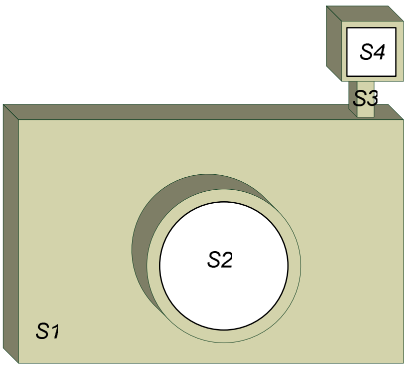
Dans les axes principaux :

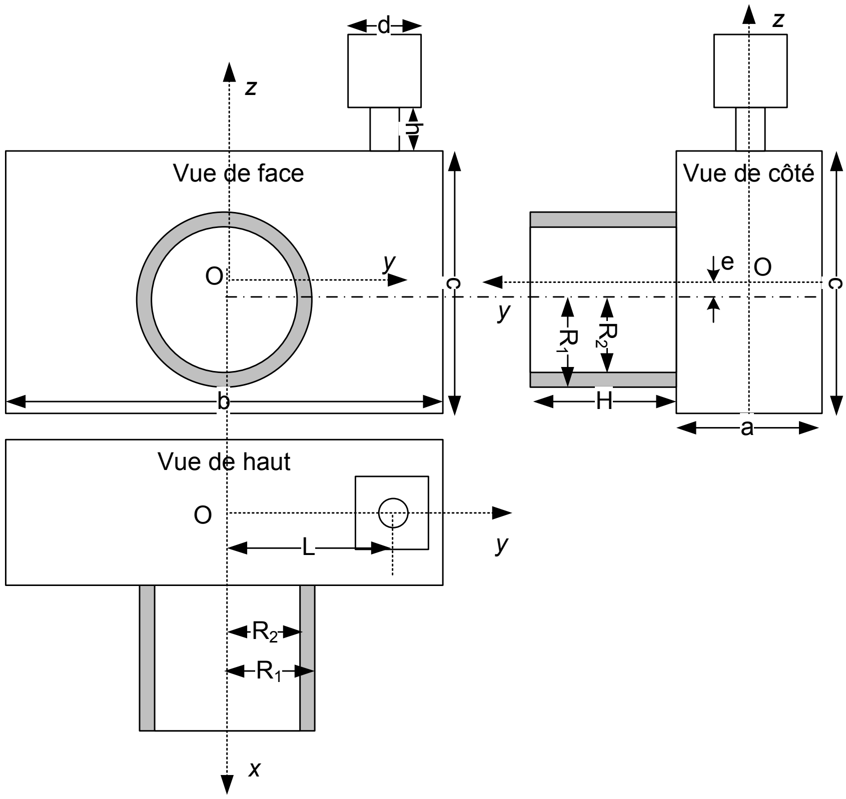
$$T = \frac{m\bar{v}_G^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\bar{\varpi}.\begin{pmatrix} I_{G,x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{m\bar{v}_G^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\left(I_{G,x}p^2 + I_{G,y}q^2 + I_{G,z}r^2\right)$$

Question 3 : Appareil photo (5 points)

Un appareil photo est représenté ci-contre et composé de 4 solides :
S1 = parallélépipède de côté *abc* et de masse M_1.
S2 = l'objectif est un cylindre creux de longueur H et de rayon extérieur R_1 et intérieur R_2 et de masse M_2.
S3 = la pièce sur laquelle est fixée le flash est un cylindre de longueur h et de rayon r et de masse M_3.
S4 = le flash est un cube de côté d et de masse M_4.

1. Sans faire de calcul mais en justifiant correctement vos réponses, déterminer les différents produits d'inertie **des solides.**
2. Déterminer **le tenseur d'inertie** de l'appareil par rapport au point O.





Produits d'inertie :
S1+S2 : Plan de symétrie orthogonal xz => $P_{xy}=P_{yz}=0$ Intégration de la cordonnée y (puissance impaire) sur un domaine symétrique.
S1+S3+S4 : Plan de symétrie orthogonal yz => $P_{xy}=P_{xz}=0$ Intégration de la cordonnée x (puissance impaire) sur un domaine symétrique.

Cylindre d'axe de révolution z : $I_z = \frac{mR^2}{2} = I_{yz} + I_{xz}$ par symétrie $I_{yz} = I_{xz} = \frac{mR^2}{4}$; $I_y = I_{xy} + I_{yz}$

avec $I_{xy} = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta \right)}_{\pi R^2} z^2 dz = \frac{mH^2}{12}$

Parallélépipède (*abc*) : $I_{xy} = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \underbrace{\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx dy \right)}_{ab} z^2 dz = \frac{mc^2}{12}$ => $I_y = I_{xy} + I_{yz} = \frac{mc^2}{12} + \frac{ma^2}{12} = \frac{m\left(a^2+c^2\right)}{12}$

Solide 1 : $\overline{\overline{I}}_O = \frac{M_1}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

Solide 2 : $\overline{\overline{I}}_G = \underbrace{\underbrace{\rho\pi\left(R_1^{\,2}-R_2^{\,2}\right)H}_{M_2}\begin{pmatrix} \frac{R_1^{\,2}+R_2^{\,2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1^{\,2}+R_2^{\,2}}{4}+\frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1^{\,2}+R_2^{\,2}}{4}+\frac{H^2}{12} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{I}}_{G2} \text{ au centre de masse du solide 2}}$

$$\underbrace{+M_2\begin{pmatrix} e^2 & 0 & \left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2}\right)e \\ 0 & e^2+\left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2}\right)e & 0 & \left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2}\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_2}=\left(\frac{H}{2}+\frac{a}{2},0,-e\right)}$$

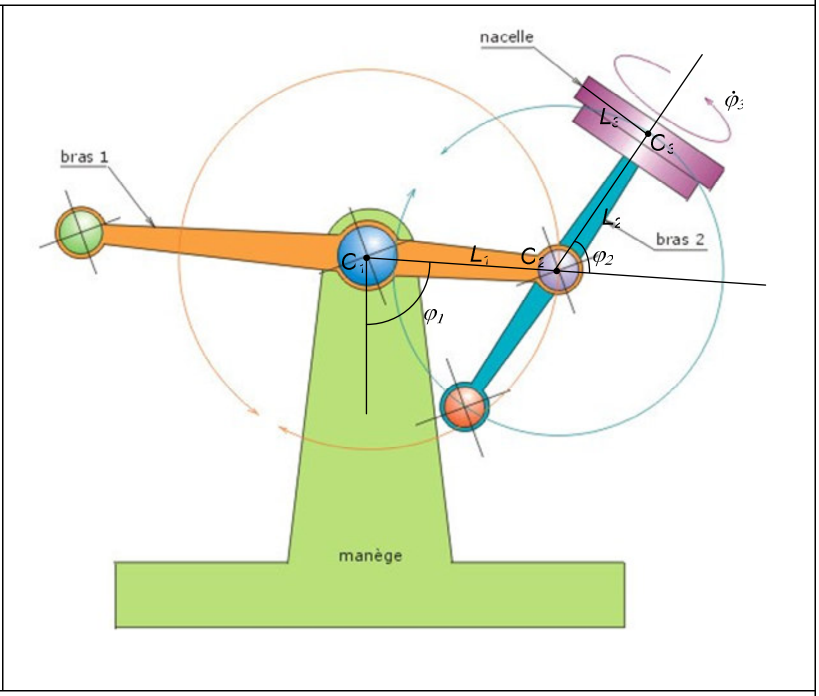
Solide 3 : $\overline{\overline{I}}_O = \underbrace{M_3\begin{pmatrix} \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{I}}_{G3} \text{ au centre de masse du solide 3}} \underbrace{+M_3\begin{pmatrix} L^2+\left(\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 & -L\left(\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right) \\ 0 & -L\left(\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right) & L^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_3}=\left(0,L,\frac{c}{2}+\frac{h}{2}\right)}$

Solide 4 : $\overline{\overline{I}}_O = \underbrace{M_4\begin{pmatrix} \frac{d^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{6} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{I}}_{G4} \text{ au centre de masse du solide 4}}$

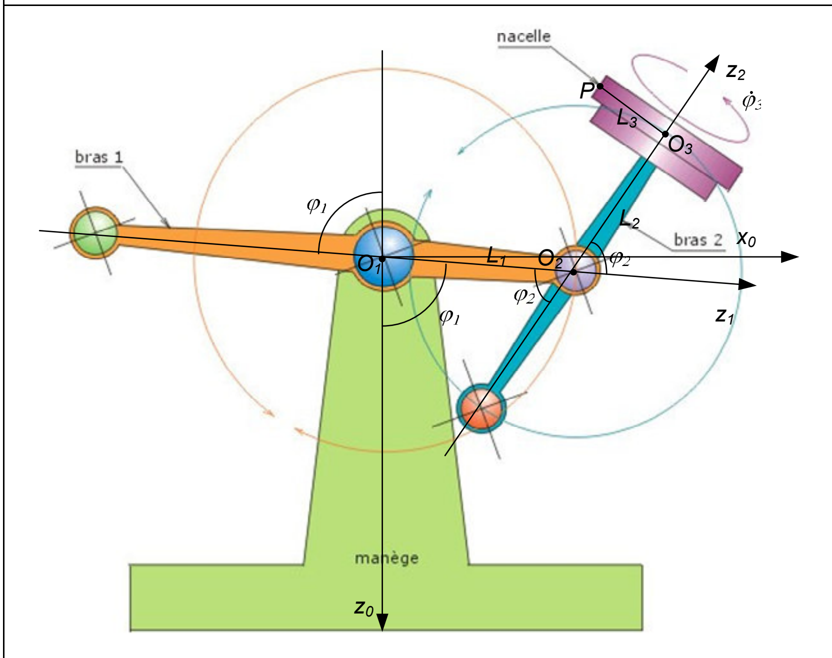
$$\underbrace{+M_4\begin{pmatrix} L^2+\left(\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right)^2 & -L\left(\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right) \\ 0 & -L\left(\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right) & L^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{OG_4}=\left(0,L,\frac{c}{2}+h+\frac{d}{2}\right)}$$

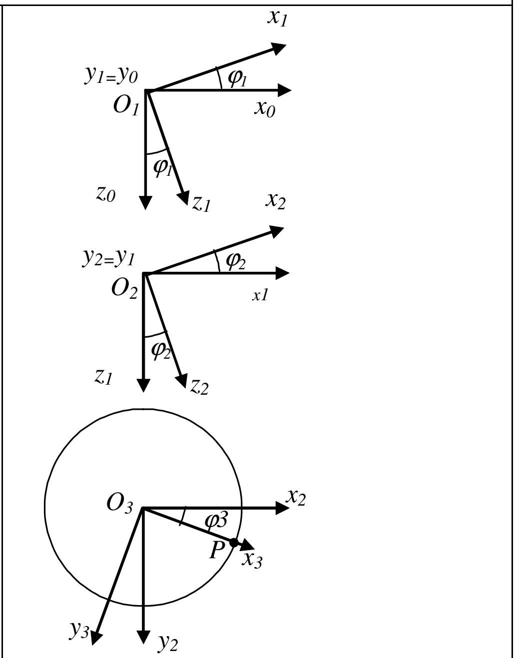
Question 4 : Panneaux en rotation (6 points)

Avec le "Magic Arms", la société WAAGNER-BIRO a développé un nouveau manège procurant aux passagers de nouvelles sensations dues à des séquences variées de mouvements. L'installation est composée d'une structure métallique d'environ 12m de haut avec 2 bras mobiles.
Les passagers s'assoient sur 39 sièges en mousse disposés sur une plate-forme tournante au design novateur et sont parfaitement maintenus par un harnais. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, le bras principal (bras l) et le bras pivot (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle (la laison en O_2 est rigide, avec $\varphi_2 = 0$)), commencent à tourner. En même temps la nacelle tourne autour de son axe. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les 2 bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur.



1. Donner, pour chaque solide, l'expression de son vecteur vitesse angulaire





$R1(O_1xyz)$ repère lié au bras 1 : $\overline{\omega}_{R1/R0} = \dot{\varphi}_1 \overline{1}_{y_1}$ => $\overline{\omega}_{S1} = \dot{\varphi}_1 \overline{1}_{y_1}$

$R2(O_2x_2y_2z_2)$ repère lié au bras 2 : $\overline{\omega}_{R2/R1} = \dot{\varphi}_2 \overline{1}_{y_2}$ => $\overline{\omega}_{R2/R0} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2}$ => $\overline{\omega}_{S2} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2}$

$R3(O_3x_3y_3z_3)$ repère lié à la nacelle : $\overline{\omega}_{R3/R2} = \dot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_3}$ => $\overline{\omega}_{R3/R0} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_2}$ => $\overline{\omega}_{S3} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_2}$

2. Déterminer **l'accélération angulaire** de la nacelle.

$\overline{\omega}_{R1/R0} = \dot{\varphi}_1 \overline{1}_{y_1}$; $\overline{\omega}_{R2/R0} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2}$; $\overline{\omega}_{R3/R0} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_2}$

=> $\overline{\omega}_{S3} = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_2} =$

$$=> \overline{\varepsilon}_{S3} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S3}}{dt}\right|_{R2} + \underbrace{\overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{\omega}_{S3}}_{\overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{\omega}_{R3/R1}} = (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)\overline{1}_{y_2} + \ddot{\varphi}_3 \overline{1}_{z_2} + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\dot{\varphi}_3 \overline{1}_{x_2}$$

3. Déterminer la **vitesse d'un passager** assis sur son siège en périphérie de la nacelle.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O_3} + \bar{\omega}_{S3} \times \underbrace{\overline{O_3P}}_{L_3\overline{1}_{x_3}} = L_1\dot{\varphi}_1\overline{1}_{x_1} + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} + L_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\underbrace{\left(\overline{1}_{y_2}\times\overline{1}_{x_3}\right)}_{-\cos\varphi_3\overline{1}_{z_2}} + L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_3}$$

avec
$$\begin{cases} \bar{v}_{O_3} = \bar{v}_{O_2} + \bar{\omega}_{S2}\times\underbrace{\overline{O_2O_3}}_{L_2\overline{1}_{z_2}} = L_1\dot{\varphi}_1\overline{1}_{x_1} + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} \\ \bar{v}_{O_2} = \underbrace{\bar{v}_{O_1}}_{=0} + \bar{\omega}_{S1}\times\underbrace{\overline{O_1O_2}}_{L_1\overline{1}_{z_1}} = L_1\dot{\varphi}_1\overline{1}_{x_1} \end{cases}$$

$\bar{\omega}_{S1} = \dot{\varphi}_1\overline{1}_{y_1}$; $\bar{\omega}_{S2} = \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{y_2}$; $\bar{\omega}_{S3} = \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3\overline{1}_{z_2}$

$\Rightarrow \bar{v}_P = L_1\dot{\varphi}_1\overline{1}_{x_1} + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} - L_3\cos\varphi_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{z_2} + L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_3}$

$\Rightarrow \bar{v}_P = L_1\dot{\varphi}_1\left(\cos\varphi_2\overline{1}_{x_2} + \sin\varphi_2\overline{1}_{z_2}\right) + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} - L_3\cos\varphi_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{z_2} + L_3\dot{\varphi}_3\left(-\sin\varphi_3\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3\overline{1}_{y_2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\bar{v}_P = \left(\cos\varphi_2L_1\dot{\varphi}_1 + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right) - \sin\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2} + \left(\sin\varphi_2L_1\dot{\varphi}_1 - L_3\cos\varphi_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)\overline{1}_{z_2}}$

OU

Vérification :

$\overline{\mathrm{O}_1P} = L_1\overline{1}_{z_1} + L_2\overline{1}_{z_2} + L_3\overline{1}_{x_3} = L_1\left(-\sin\varphi_2\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_2\overline{1}_{z_2}\right) + L_2\overline{1}_{z_2} + L_3\left(\cos\varphi_3\overline{1}_{x_2} + \sin\varphi_3\overline{1}_{y_2}\right) =$

$\overline{\mathrm{O}_1P} = \left(\cos\varphi_3L_3 - \sin\varphi_2L_1\right)\overline{1}_{x_2} + \sin\varphi_3L_3\overline{1}_{y_2} + \left(L_2 + \cos\varphi_2L_1\right)\overline{1}_{z_2}$

$\Rightarrow \bar{v}_P = L_1\left(\bar{\omega}_{R1/R0}\times\overline{1}_{z_1}\right) + L_2\left(\bar{\omega}_{R2/R0}\times\overline{1}_{z_2}\right) + L_3\left(\bar{\omega}_{R3/R0}\times\overline{1}_{x_3}\right)$

$$\bar{v}_P = \frac{d\overline{\mathrm{O}_1P}}{\mathrm{dt}} = \left(-\sin\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3 - \cos\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2} + \left(L_2 - \sin\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{z_2} + \bar{\omega}_{R2/R0}\times\overline{\mathrm{O}_1P}$$

$$\bar{v}_P = \left(-\sin\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3 - \cos\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2} + \left(-\sin\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2\right)\overline{1}_{z_2} - \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\left(\cos\varphi_3L_3 - \sin\varphi_2L_1\right)\overline{1}_{z_2}$$
$$+ \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\left(L_2 + \cos\varphi_2L_1\right)\overline{1}_{x_2}$$

$$\bar{v}_P = \left(-\sin\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3 - \cos\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2 + \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\left(L_2 + \cos\varphi_2L_1\right)\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2}$$
$$+ \left(-\sin\varphi_2L_1\dot{\varphi}_2 - \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\left(\cos\varphi_3L_3 - \sin\varphi_2L_1\right)\right)\overline{1}_{z_2}$$

$$\bar{v}_P = \left(-\sin\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3 + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right) + \cos\varphi_2L_1\dot{\varphi}_1\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2} + \left(-\cos\varphi_3L_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right) + \sin\varphi_2L_1\dot{\varphi}_1\right)\overline{1}_{z_2}$$

3. Déterminer **l'accélération d'un passager de la nacelle** pendant les 9 premières secondes (les deux bras ne sont pas encore désolidarisés)

$$\boxed{\overline{v}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)} = \left(\left(L_1+L_2\right)\dot{\varphi}_1 - \sin\varphi_3 L_3\dot{\varphi}_3\right)\overline{1}_{x_1} + \cos\varphi_3 L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_1} + \left(-L_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_1\right)\overline{1}_{z_1}}$$

$$\overline{a}_P = \left.\frac{d\overline{v}_P}{dt}\right|_{R1} + \overline{\omega}_{R1/R0}\times\overline{v}_P = \left[\ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right) - \sin\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \dot{\varphi}_1^2 L_3\cos\varphi_3 - L_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3\right]\overline{1}_{x_1}$$
$$+\left[\cos\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \dot{\varphi}_3^2 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{y_1} + \left[-\ddot{\varphi}_1 L_3\cos\varphi_3 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{z_2}$$
$$+\left[-\dot{\varphi}_1^2 L_3\cos\varphi_3\right]\overline{1}_{x_1} - \left[\dot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right) - \dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\right]\dot{\varphi}_1\overline{1}_{z_2}$$

OU

Par dérivation des coordonnées absolues

$$\boxed{\overline{v}_P = \left(\cos\varphi_2 L_1\dot{\varphi}_1 + L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right) - \sin\varphi_3 L_3\dot{\varphi}_3\right)\overline{1}_{x_2} + \cos\varphi_3 L_3\dot{\varphi}_3\overline{1}_{y_2} + \left(\sin\varphi_2 L_1\dot{\varphi}_1 - L_3\cos\varphi_3\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)\overline{1}_{z_2}}$$

$$\overline{a}_P = \left.\frac{d\overline{v}_P}{dt}\right|_{R2} + \overline{\omega}_{R2/R0}\times\overline{v}_P$$

$$\overline{a}_P = \left[\left(\ddot{\varphi}_1 L_1\overline{1}_{x_1} - \dot{\varphi}_1^2 L_1\overline{1}_{z_1}\right) + \left(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2\right)L_2\overline{1}_{x_2} - L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)^2\overline{1}_{z_2}\right]$$
$$-\left(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2\right)L_3\cos\varphi_3\overline{1}_{z_2} + \ddot{\varphi}_3 L_3\overline{1}_{y_3} + \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\overline{1}_{z_2}$$
$$+\left(-\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)^2 L_3\cos\varphi_3\overline{1}_{x_2} + \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\overline{1}_{z_2}\right) - L_3\dot{\varphi}_3^2\overline{1}_{x_3}$$

$$\overline{a}_P = \left[\cos\varphi_2\ddot{\varphi}_1 L_1 + \dot{\varphi}_1^2 L_1\sin\varphi_2 + \left(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2\right)L_2 - \sin\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)^2 L_3\cos\varphi_3 - L_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3\right]\overline{1}_{x_2}$$
$$\left[+\cos\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \dot{\varphi}_3^2 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{y_2}$$
$$\left[\sin\varphi_2\ddot{\varphi}_1 L_1 - L_2\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)^2 - \dot{\varphi}_1^2 L_1\cos\varphi_2 - \left(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2\right)L_3\cos\varphi_3 + \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3 + \left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{z_2}$$

$\overline{a}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)}$ on remplace dans l'équation générale $\left(\varphi_2 = 0 => \overline{1}_{x_2} = \overline{1}_{x_2}\right)$

$$\overline{a}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)} = \left[\ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right) - \sin\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \dot{\varphi}_1^2 L_3\cos\varphi_3 - L_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3\right]\overline{1}_{x_2}$$
$$\left[+\cos\varphi_3\ddot{\varphi}_3 L_3 - \dot{\varphi}_3^2 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{y_2} + \left[-\dot{\varphi}_1^2\left(L_1+L_2\right) - \ddot{\varphi}_1 L_3\cos\varphi_3 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\right]\overline{1}_{z_2}$$

Par la formule de distribution des accélérations valable pour les mouvements instantanés.

$$\overline{a}_P = \overline{a}_{O_3} + \overline{\varepsilon}_{S3}\times\overline{O_3P} + \overline{\omega}_{S3}\times\overline{\omega}_{S3}\times\overline{O_3P}$$

où $\overline{a}_{O_3} = \overline{a}_{O_1} + \overline{\varepsilon}_{S2}\times\overline{O_1O_3} + \overline{\omega}_{S2}\times\overline{\omega}_{S2}\times\overline{O_1O_3}$ et $\begin{cases}\overline{O_1O_3} = \left(L_1+L_2\right)\overline{1}_{z_1};\ \overline{\omega}_{S2} = \dot{\varphi}_1\overline{1}_{y_2};\ \overline{\varepsilon}_{S2} = \ddot{\varphi}_1\overline{1}_{y_2} \\ \overline{O_3P} = L_3\overline{1}_{x_3};\ \overline{\omega}_{S3} = \dot{\varphi}_1\overline{1}_{y_2} + \dot{\varphi}_3\overline{1}_{z_2} \\ \overline{\varepsilon}_{S3} = \ddot{\varphi}_1\overline{1}_{y_2} + \ddot{\varphi}_3\overline{1}_{z_2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\overline{1}_{x_2}\end{cases}$

$$\overline{a}_{O_3} = \ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right)\overline{1}_{x_2} - \dot{\varphi}_1^2\left(L_1+L_2\right)\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{a}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)} = \ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right)\overline{1}_{x_2} - \dot{\varphi}_1^2\left(L_1+L_2\right)\overline{1}_{z_2}$$
$$-\ddot{\varphi}_1 L_3\cos\varphi_3\overline{1}_{z_2} + \ddot{\varphi}_3 L_3\overline{1}_{y_3} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\overline{1}_{z_2}$$
$$-L_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_1^2\overline{1}_{x_2} + L_3\dot{\varphi}_3\dot{\varphi}_1\sin\varphi_3\overline{1}_{z_2} - L_3\dot{\varphi}_3^2\overline{1}_{x_3}$$

$$\overline{a}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)} = \left(\ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right) - \dot{\varphi}_1^2 L_3\cos\varphi_3\right)\overline{1}_{x_2} + \left(2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3 - \dot{\varphi}_1^2\left(L_1+L_2\right) - \ddot{\varphi}_1 L_3\cos\varphi_3\right)\overline{1}_{z_2}$$
$$+\ddot{\varphi}_3 L_3\overline{1}_{y_3} - \dot{\varphi}_3^2 L_3\overline{1}_{x_3}$$

$$\overline{a}_{P\left(t<9s:\varphi_2=0=>\overline{1}_{x1}=\overline{1}_{x2}\right)} = \left(\ddot{\varphi}_1\left(L_1+L_2\right) - \dot{\varphi}_1^2 L_3\cos\varphi_3 - \dot{\varphi}_3^2 L_3\cos\varphi_3 - \ddot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3\right)\overline{1}_{x_2}$$
$$\left(+\ddot{\varphi}_3 L_3\cos\varphi_3 - \dot{\varphi}_3^2 L_3\sin\varphi_3\right)\overline{1}_{y_2} + \left(2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 L_3\sin\varphi_3 - \dot{\varphi}_1^2\left(L_1+L_2\right) - \ddot{\varphi}_1 L_3\cos\varphi_3\right)\overline{1}_{z_2}$$

BROUILLONS

BROUILLONS