1.1 $\boxed{T = T_1 + T_2 + T_3} = \left(\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_2}.\bar{\omega}\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_3}^2\right)$

avec

$$\bar{v}_{G_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}\times\overline{BG}_{G_2} = L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right) - \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right)$$

$$= L\dot{\theta}\left(-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\bar{1}_x + L\dot{\theta}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\bar{1}_y = -\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_{G_3} = \frac{d}{dt}\left(2L\cos\theta + \frac{L}{2}\right)\bar{1}_x = -2L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x$$

$$T = \left(\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\left(8\sin^2\theta + 1\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + 3mL^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_h.\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i Q_i\delta q_i}$$

$\delta\overline{OG}_3 = -2L\sin\theta\delta\theta\bar{1}_x$ et $\bar{F} = F(\theta)\bar{1}_x \Rightarrow \delta\tau = Q_\theta\delta\theta = M\,\delta\theta - 2Fl\sin\theta\delta\theta$

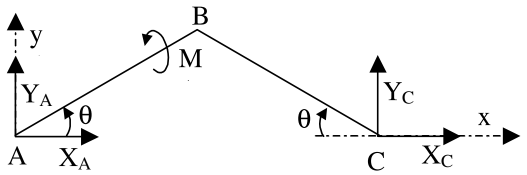
<u>Equation de Lagrange</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 6\sin^2\theta\right) + 6mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = M - 2FL\sin\theta$$

1.2 Théorème du moment en A sur ABC

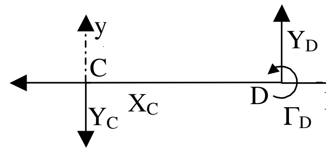
$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{M}_A = \bar{m}_{e,A}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{M}_A\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \bar{m}_{e,A}\left(M(\theta),\underline{\underline{Y_C}}\right)$$

où $\bar{M}_A = \bar{M}_{A,1} + \bar{M}_{A,2} = \left(\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}\right) + \left(\bar{M}_{G2} + \overline{AG}_2\times\bar{R}_2\right)$ et $\bar{m}_{e,A} = \left(M(\theta) + 2L\cos\theta Y_C\right)\bar{1}_z$



$$\bar{M}_A = \left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\bar{1}_z\right) + \left(-\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\bar{1}_z + m\frac{3l^2}{4}\dot{\theta}\bar{1}_z\right) = ml^2\dot{\theta}\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow Y_C = \frac{ml^2\ddot{\theta} - M(\theta)}{2l\cos\theta}$$



Théorème de la résultante en x sur CD

$$\boxed{\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}} \quad \frac{d}{dt}R_x\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \sum F_{e,x}\left(\underline{\underline{X_C}}, F(\theta)\right)$$

où $R_x = mv_{G3,x} = -2mL\sin\theta\dot{\theta}$

$$\Rightarrow X_C = F(\theta) + 2mL(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)$$

---

2. <u>Forces</u> :
Force de pesanteur en G, C_1, C_2
Force de réaction normale et frottement pour empêcher le glissement en O_1 et O_2 (N_1, T_1, N_2, T_2)
Couple moteur en C sur la roue arrière
<u>Degré de liberté</u> :
3 solides en 2D => 3 x 3 paramètres cinématiques de position.
8 condition cinématique entre ces solides :
Roulement sans glissement en O_1 = 2 conditions cinématiques
Roulement sans glissement en O_2 = 2 conditions cinématiques
Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_1 = 2 conditions cinématiques
Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_2 = 2 conditions cinématiques
9 – 8 = 1 ddl. On prend le paramètre x décrivant la position du centre de gravité G de la moto.

2.1 Théorème de la résultante cinétique sur le système complet.

$$\boxed{\frac{d\overline{R}}{dt}=\overline{F}_e}=M\overline{g}+2m\overline{g}+T_1\overline{1}_x+N_1\overline{1}_y+T_2\overline{1}_x+N_2\overline{1}_y$$

$$\begin{cases} x:(M+2m)\ddot{x}=T_1+T_2 \quad (1) \\ y:0=-Mg-2mg+N_1+N_2 \quad (2) \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en C_2 sur la roue 2 (force de liaison X_2 et Y_2)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_2}=\sum\overline{m}_{e,C_2}+m\overline{v}_G\times\overline{v}_{C_2}\underbrace{=}_{G=C_2}\overline{m}_{e,C_2}} \quad \text{avec } \overline{\omega}=-\omega_2\overline{1}_z$$

Condition cinématique : $\overline{v}_{O_2}=0=\overline{v}_{C_2}+\overline{\omega}_2\times\overline{C_2O_2}=\dot{x}\overline{1}_x-\omega_2 r\overline{1}_x \Rightarrow \overline{\omega}_2=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z$

$$\boxed{\overline{M}_{C_2}=\overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega}}=-mi^2\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_2}=\overline{m}_{e,C_2} \Rightarrow -mi^2\frac{\ddot{x}}{r}\overline{1}_z=rT_2\overline{1}_z \Rightarrow T_2=-m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x} \quad (3)$$

(3) dans (1) : $T_1=(M+2m)\ddot{x}+m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x}$ (4)

2.2 Théorème du moment cinétique en O_1 sur la moto et les 2 roues (force de liaison X_1 et Y_1)

C est un couple moteur interne au système, donc il n'est pas pris en compte quand on travaille sur le système entier.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{O_1}=\sum\overline{m}_{e,O_1}+\overline{R}\times\overline{v}_{O_1}=\overline{m}_{e,O_1}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1=-\omega_1\overline{1}_z=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

$$\text{où } \overline{M}_{O_1}=\overline{M}_{O_1,M}+\overline{M}_{O_1,r1}+\overline{M}_{O_1,r2} \text{ et } \begin{cases} \overline{M}_{O_1,M}=\underbrace{\overline{M}_{G,M}}_{=0}+\overline{O_1G}\times\overline{R}=-hM\dot{x}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r1}=\overline{\overline{I}}_{O_1}.\overline{\omega}+m\overline{O_1C_1}\times\overline{v}_{O_1}=-m\left(i^2+r^2\right)\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r2}=\overline{M}_{G_2,r2}+\overline{O_1G_2}\times\overline{R}_{r2}=-m\frac{i^2}{r}\dot{x}\overline{1}_z-mr\dot{x}\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\left(-hM-m\left(i^2+r^2\right)\frac{1}{r}-m\frac{i^2}{r}-mr\right)\ddot{x}=-\frac{L}{3}Mg-Lmg+LN_2$$

$$\Rightarrow N_2=\left(\frac{M}{3}+m\right)g-\left(hM+2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L} \quad (5)$$

En réinjectant (5) dans (2), on obtient :

$$N_1=\left(\frac{2M}{3}+m\right)g+\left(hM+2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L}$$

2.3 La moto démarrera en se cabrant lorsque la force verticale entre le sol et la route avant s'annule :

$$N_2=0 \Rightarrow \ddot{x}_{\max}=\frac{Lr\left(\frac{M}{3}+m\right)g}{\left(hMr+2m\left(i^2+r^2\right)\right)}$$

Théorème du moment cinétique en C_1 sur la roue arrière (force de liaison X_1 et Y_1)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_1}=\sum\overline{m}_{e,C_1}+\overline{R}\times\overline{v}_{O_{C_1}}=\overline{m}_{e,C_1}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1=-\omega_1\overline{1}_z=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

$$-mi^2\frac{\ddot{x}}{r}=-C+rT_1 \Rightarrow \text{ avec (4) : } C=\left(m\frac{i^2}{r^2}+(M+2m)+m\frac{i^2}{r^2}\right)r\ddot{x} \Rightarrow C_{\max}=\left(Mr+2m\left(\frac{i^2+r^2}{r}\right)\right)\ddot{x}_{\max}$$

Ou par l'équation de mouvement : Le couple moteur travaille et dépense de l'énergie.

$$\begin{cases} T = T_M + T_{r1} + T_{r2} = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + 2\left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{mi^2}{2}\left(-\dfrac{\dot{x}}{r}\right)^2\right) = \left(\dfrac{M}{2} + m\dfrac{r^2+i^2}{r^2}\right)\dot{x}^2 \\ V = 0 \\ Q_x\delta x = C\delta\theta = \dfrac{C}{r}\delta x \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = Q_x} \Rightarrow \left(M + 2m\frac{r^2+i^2}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{C}{r} \Rightarrow C = \left(Mr + 2m\frac{r^2+i^2}{r}\right)\ddot{x}$$

3.1

$$\mu = AE;\ OA = L_0;\ \ x = DC \Rightarrow L_0 - x - H = \mu\cos\theta \ \text{ et } \ \mu = \frac{H}{\sin\theta} \Rightarrow x = L_0 - H\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)$$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \ \text{ avec } \ \dot{x} = -\dot{\mu}\cos\theta + \mu\sin\theta\dot{\theta} = H\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)\dot{\theta} = \frac{H}{\sin^2\theta}\dot{\theta}$$

$$V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}(x-L_0)^2 = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

3.2 1 coordonnée θ :

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}MH^2\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\dot{\theta}^2\right] \ \text{ et } \ V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$L = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}MH^2\frac{1}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2\right] - \frac{L}{2}mg\sin\theta - \frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \ :$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + MH^2\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\ddot{\theta} - 4MH^2\frac{\text{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 - \left[-\frac{1}{2}MH^2\dot{\theta}^2\left(-4\frac{\text{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\right) - \frac{L}{2}mg\cos\theta + kH^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta} - 2MH^2\frac{\text{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right) = 0$$

2 coordonnée θ et x :

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \ \text{ et } \ V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

avec une contrainte : $\delta x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0\right)$

$$\Rightarrow L = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] - \frac{L}{2}mg\sin\theta - \frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial\theta} \ : \ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \left[-\dfrac{L}{2}mg\cos\theta\right] = -\lambda_1\dfrac{H}{\sin^2\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial x} \ : \ M\ddot{x} - \left[-\dfrac{k}{2}2(x-L_0)\right] = \lambda_1 \\ \dot{x} - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta} - 2MH^2\frac{\text{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right) = 0$$

---

3 coordonnée θ , x et μ :

$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \quad \text{et} \quad V=\frac{L}{2}mg\sin\theta+\frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

avec deux contraintes : $\lambda_1(\delta x+\delta\mu\cos\theta-\mu\sin\theta\delta\theta=0)$ et $\lambda_2(\delta\mu\sin\theta+\mu\cos\theta\delta\theta=0)$

$$=>\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \;:\; \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}-\left[-\frac{L}{2}mg\cos\theta\right]=-\lambda_1\mu\sin\theta+\lambda_2\mu\cos\theta\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x} \;:\; M\ddot{x}-\left[-\frac{k}{2}2(x-L_0)\right]=\lambda_1\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial\mu}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\mu} \;:\; 0=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta\\ \dot{x}+\dot{\mu}\cos\theta-\mu\sin\theta\dot{\theta}=0\\ \dot{\mu}\sin\theta+\mu\cos\theta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$=>\left(\frac{mL^2}{3}+\frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta}-2MH^2\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}mg\cos\theta-\frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)=0$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html