Animation en ligne :
http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/Seance02CinematiqueHelicoidal.htm

1. $\overline{\omega}_{AB} = 6 \text{ rad/sec}\, \overline{1}_z \;\Rightarrow\; \overline{\varepsilon}_{AB} = 0$; $\overline{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{BC} = \varepsilon_{BC}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{CD} = -\omega_{CD}\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{CD} = -\varepsilon_{CD}\overline{1}_z$

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_{C\in BC} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{BC} \times \overline{BC} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right) + \omega_{BC} L_{BC}\overline{1}_y \\ \overline{v}_{C\in CD} = \overline{v}_D + \overline{\omega}_{CD} \times \overline{DC} = \omega_{CD} L_{CD}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB};\;\; \omega_{BC} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{L_{AB}}{L_{BC}}\omega_{AB} \\ \overline{\omega}_{CD} = -2{,}165 \text{ s}^{-1}\,\overline{1}_z;\;\; \overline{\omega}_{BC} = 5{,}773 \text{ s}^{-1}\,\overline{1}_z \end{array}\right.$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \left(\overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) + \overline{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} = \overline{\omega}_{AB} \times \left(\overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) = \omega^2{}_{AB} L_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{a}_{C\in BC} = \overline{a}_B + \overline{\omega}_{BC} \times \left(\overline{\omega}_{BC} \times \overline{BC}\right) + \overline{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} = \omega^2{}_{AB} L_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right) - \omega^2{}_{BC} L_{BC}\overline{1}_x + \varepsilon_{BC} L_{BC}\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_{C\in CD} = \overline{a}_D + \overline{\omega}_{DC} \times \left(\overline{\omega}_{DC} \times \overline{DC}\right) + \overline{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} = \omega^2{}_{CD} L_{CD}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right) + L_{CD}\varepsilon_{DC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{DC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \omega^2{}_{BC} L_{BC} - \frac{1}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{L_{CD}} \\ \varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD} + \frac{1}{2} L_{CD}\varepsilon_{DC}\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{DC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{L_{AB}} - \frac{4}{3}\frac{1}{L_{BC}} - \frac{1}{6}\frac{1}{L_{CD}}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{L^2{}_{AB}}{L_{CD}}\omega^2{}_{AB} \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{DC} = 9{,}073\, s^{-2}\,\overline{1}_z \\ \varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB}\right)^2 L_{CD} + \frac{1}{2} L_{CD}\varepsilon_{DC}\right) \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{BC} = -26{,}4618\, s^{-2}\,\overline{1}_z \end{array}\right.$$

---

2. 1.). (rem : $\dot{\omega}_1 = 0$; $\dot{\omega}_3 = 0$)

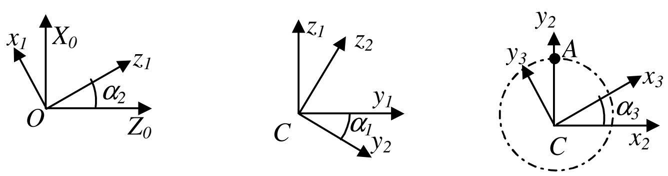
R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Y_0 = y_1$ ($\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \omega_2\overline{1}_{y_1}$)

R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ tournant avec R_1 et autour de l'axe $x_1 = x_2$($\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \overline{\omega}_{R_2/R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1\overline{1}_{x_2} + \omega_2\overline{1}_{y_1}$)

R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $z_2 = z_3$

($\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1\overline{1}_{x_2} + \omega_2\overline{1}_{y_1} + \omega_3\overline{1}_{z_2} = \overline{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)



$$\overline{\omega}_{disque} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_3 \overline{1}_{z_2} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right) + \omega_3 \overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{\omega}_{disque}\Big|_{\text{ins tan t } t:\alpha_1=0} = -\omega_1 \overline{1}_{x_1} + \omega_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_3 \overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{disque} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1 \overline{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \dot{\omega}_2 \underbrace{\left(\cos\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{y_1}} + \omega_2\omega_1 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} +$$

$$+\omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} - \omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} + \left(\omega_1\omega_3 \overline{1}_{y_2} + \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \overline{1}_{x_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 \cos\alpha_1\right) \overline{1}_{y_1} + \left(\omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_3 \sin\alpha_1\right) \overline{1}_{z_1}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}_{disque}\Big|_{\text{Instant } t:\alpha_1=0} = \omega_2\omega_3 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) \overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1 \overline{1}_{z_1}$$

autre méthode :

$$\overline{\varepsilon}_d = -\underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}}_{=0} \overline{1}_{x_2} - \omega_1 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{x_2}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{x_2}} + \underbrace{\frac{d\omega_2}{dt}}_{=\dot{\omega}_2} \overline{1}_{y_1} + \omega_2 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{y_1}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{1}_{y_1}} + \underbrace{\frac{d\omega_3}{dt}}_{=0} \overline{1}_{z_2} + \omega_3 \underbrace{\frac{d\overline{1}_{z_2}}{dt}}_{=\overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{z_2}}$$

$$\overline{\varepsilon}_d\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = -\omega_1\left(-\omega_2 \overline{1}_{z_1}\right) + \dot{\omega}_2 \overline{1}_{y_1} + \omega_2(0) + \omega_3\left(\omega_1 \overline{1}_{y_2} + \omega_2 \underbrace{\cos\alpha_1}_{=1(\alpha_1=0)} \overline{1}_{x_2}\right) = \omega_2\omega_3 \overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) \overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1 \overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{v}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d \times \overline{CA} = -R\omega_3 \overline{1}_{x_1} - \left(b\omega_2 + R\omega_1\right) \overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{a}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{a}_C + \overline{\omega}_d \times \left(\overline{\omega}_d \times \overline{CA}\right) + \overline{\varepsilon}_d \times \overline{CA} = -\left(b\omega^2{}_2 + 2R\omega_1\omega_2\right) \overline{1}_{x_1} - R\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) \overline{1}_{y_1} + \left(2R\omega_2\omega_3 - b\dot{\omega}_2\right) \overline{1}_{z_1}$$

2.) Invariant scalaire $\boxed{\overline{v}_C.\overline{\omega} = -b\omega_2\omega_3}$

a) si $\omega_2 \neq 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: mouvement hélicoïdal instantané (HI) = mouvement de rotation et de translation de vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega} = -\omega_1 \overline{1}_x + \omega_2 \overline{1}_y + \omega_3 \overline{1}_z$. Axe HI est // à $\overline{\omega}$ passant par Q tel que

$$\overline{CQ} = -\frac{\overline{\omega}\times\left(\overline{v}_Q - \overline{v}_C\right)}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega} \quad \text{avec} \quad \overline{v}_Q = \frac{\overline{\omega}.\overline{v}_C}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\overline{\omega} = -b\omega_2\omega_3 \frac{\left(-\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3} \Rightarrow \overline{CQ} = \frac{\left(-b\omega^2{}_2, -b\omega_1\omega_2, 0\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3}$$

b) si $\omega_2 = 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\omega}$ passant par C avec $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, 0, \omega_3\right)$.

<u>Cas part</u>. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation instantanée (en t) de $\overline{\omega} = \left(0, 0, \omega_3\right)$ autour de C_z
- si de plus $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\omega}$, même axe de rotation. $\forall$t)

c) si $\omega_3 = 0$ *et* $\omega_2 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\omega}$ avec $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, \omega_2, 0\right)$

<u>Cas part</u>. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation continue autour de Oy.
- Si en plus $\dot{\omega}_2 = 0$: Rotation. continue uniforme

d) si $\omega_2 = \omega_3 = 0$: Rotation instantanée de $\overline{\omega} = \left(-\omega_1, 0, 0\right)$ autour de Ox.

<u>Cas part</u>. :

- si $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\omega}$, même axe)
- si $\omega_1 = 0$ Solide immobile à cet instant.

3) Si Q et Q' sont deux points distincts de l'axe hélicoïdal instantané ($\overline{v}_Q$ et $\overline{v}_{Q'}$ // $\overline{\omega}$)

$$\overline{a}_{Q'} = \overline{a}_Q + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) + \overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = \overline{\omega}\times\left(\overline{v}_{Q'} - \overline{v}_Q\right) = 0 \quad \text{car} \quad \overline{\omega}//\overline{v}_{Q'}//\overline{v}_Q$$

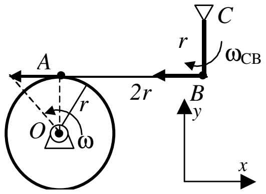
Pour que les points de l'axe hélicoïdal aient le même vecteur accélération, il faut $\overline{a}_{Q'} = \overline{a}_Q \Rightarrow \overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} = 0$

comme nous avons : $\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = 0 \Rightarrow \overline{QQ'} = \dfrac{\overline{QQ'}.\overline{\omega}}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\overline{\omega} \Rightarrow \overline{QQ'}//\overline{\omega}$

On peut donc vérifier la relation suivante $\overline{\varepsilon}\times\overline{\omega} = 0$

$$\begin{cases} \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\omega_3 - \omega_1\omega^2{}_2 = 0 \\ \omega_2\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) = 0 \\ \omega^2{}_2\omega_3 + \omega_1\left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_1 = \omega_3 = 0 \\ \text{ou} \\ \omega_2 = 0 \;\; et \;\; \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 \end{cases}$$

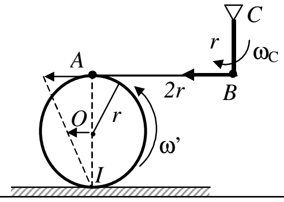
3.a $\left.\begin{array}{l}\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{\omega}\times\overline{OA} = \bar{\omega}\times\overline{OA} = -\omega r\,\bar{1}_x \\ \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{\omega}_{CB}\times\overline{CB} = -\omega_{CB}\, r\,\bar{1}_x\end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \omega_{CB}$



Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de A et B doivent être égales.

3.b $\left.\begin{array}{l}\bar{v}_A = \bar{v}_I + \bar{\omega}'\times\overline{IA} = \bar{\omega}'\times\overline{IA} = -\omega' 2r\,\bar{1}_x \\ \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{\omega}_{CB}\times\overline{CB} = -\omega_{BC}\, r\,\bar{1}_x\end{array}\right\} \Rightarrow 2\omega' = \omega_{CB}$

(avec I le point de contact du disque avec le sol)



---

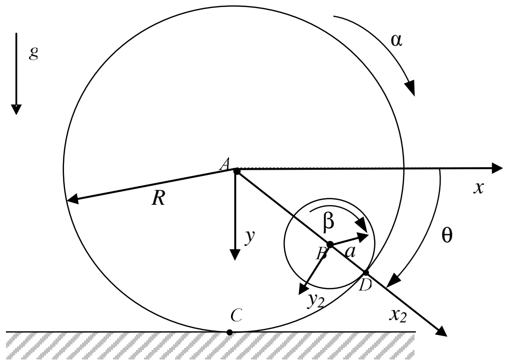
4. 2 degré de liberté $\{x,\theta\}$

Coordonnées $\{x,\alpha,\beta,\theta\}$

$\bar{\omega}_{cercle\ S1} = \dot{\alpha}\bar{1}_z$; $\bar{\omega}_{disque\ S2} = \dot{\beta}\bar{1}_z$; $\bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\bar{1}_z$

Repère xyz fixe ; Repère $x_1y_1z_1$ lié à S_1 ; Repère $x_2y_2z_2$ lié à AB ; Repère $x_3y_3z_3$ lié à S_2

Condition de roulement sans glissement en D point de contact entre S_1 et S_2 : $\bar{v}_{D\in S_1} = \bar{v}_{D\in S_2}$



$$\left\{\begin{array}{l}\bar{v}_{D\in S_1} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1\times\overline{AD} = \dot{x}\bar{1}_x + R\dot{\alpha}\bar{1}_{y_2} \\ \bar{v}_{D\in S_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2\times\overline{BD} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\bar{1}_{y_2}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} = R\dot{\alpha}$

Condition de roulement sans glissement en I point de contact entre S_1 et le sol : $\bar{v}_{I\in Sol} = \bar{v}_{I\in S_1}$

$\Rightarrow 0 = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1\times\overline{AI} = \dot{x}\bar{1}_x - R\dot{\alpha}\bar{1}_x \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\alpha}$

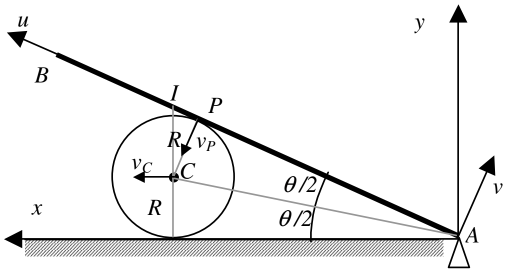
$$\Rightarrow \boxed{\bar{\omega}_{cercle\ S1} = \frac{\dot{x}}{R}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{disque\ S2} = \frac{\dot{x}-(R-a)\dot{\theta}}{a}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\bar{1}_z}$$

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AD}\times\overline{AB} \Rightarrow \bar{v}_B = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right)$

$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega}_{AB}\times\left(\bar{\omega}_{AB}\times\overline{AB}\right) + \bar{\varepsilon}_{AB}\times\overline{AB} = \ddot{x}\bar{1}_x + (R-a)\ddot{\theta}\bar{1}_{y_2} - (R-a)\dot{\theta}^2\bar{1}_{x_2}$

Ou $\bar{v}_B = \bar{v}_D + \bar{\omega}_2\times\overline{DB} \Rightarrow \bar{v}_B = \dot{x}\bar{1}_x + R\dot{\alpha}\bar{1}_{y_2} - a\dot{\beta}\bar{1}_{y_2} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2}$

5.



$$\bar{v}_C = \frac{d\overline{AC}}{dt} = \frac{d\left(R.\text{cotg}\frac{\theta}{2}\bar{1}_x + R\bar{1}_y\right)}{dt} = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\bar{1}_x$$

C.I.R. du disque : $\bar{v}_C\ //\ x$ et $\bar{v}_P \perp AP \Rightarrow I$ déterminé

$\bar{\omega}_{\text{disque}}$ dépend de $\dot{\theta}$ => pour déterminer $\bar{\omega}_{\text{disque}}(\dot{\theta})$,

il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P (ds les axes liés à la tige $Auvw$ avec $u\ //\ AB$) : $\bar{v}_{P\in\text{tige}} = \bar{v}_{P\in\text{disque}}$

$$\text{avec}\ \left\{\begin{array}{l}\bar{v}_{P\in\text{ tige}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_t\times\overline{AP} = R\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\bar{1}_v \\ \bar{v}_{P\in\text{ disque}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d\times\overline{CP} = \left(-\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta - \omega_d R\right)\bar{1}_u + \frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta\bar{1}_v\ \ \text{avec}\ \bar{\omega}_d = \omega_d\bar{1}_z\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\bar{v}_{P\in\text{ disque}} = \bar{v}_{P\in\text{ tige}}\right)_{\bar{1}_u} \Rightarrow \omega_d = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\,\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\,\theta\ \text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html