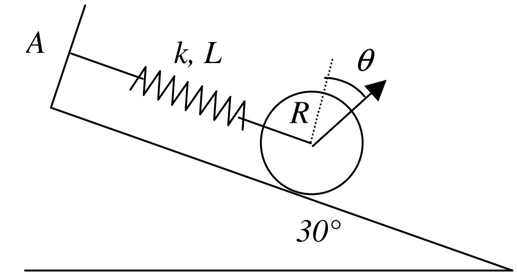
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2006-2007
Corrigé de la séance 8

1.



<u>Force en présence</u>

Force du ressort : $\overline{F} = -k\left(x-L\right)\overline{1}_x$

Poids de la roue : $\overline{P} = mg\left(\sin\alpha\overline{1}_x - \cos\alpha\overline{1}_z\right)$

Réaction du sol : $\overline{R}_I = -T\,\overline{1}_x + N\,\overline{1}_z$

<u>Théorème de la résultante cinétique</u> {masse (m)} <u>:</u>

$\overline{R} = m\dot{x}\overline{1}_x$

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_{\overline{1}_x} = \left.\sum \overline{F}_e\right|_{\overline{1}_x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k\left(x-L\right) + mg\sin\alpha - T \quad (1)$$

<u>Théorème de la résultante cinétique en G :</u>

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \cancel{m\overline{v_G}\times\overline{v_G}} + \sum \overline{m}_{e,G} = \sum \overline{m}_{e,G} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} / & 0 & / \\ / & I_y & / \\ / & 0 & / \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = I_y\omega\overline{1}_y$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \boxed{I_y\dot{\omega}\overline{1}_y = \sum \overline{m}_{e,G}} \underbrace{\Rightarrow}_{I_y=\frac{MR^2}{2}} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = RT \quad (3)$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact *I* nous donne :

$$\overline{v}_I = 0 = \overline{v}_G + \overline{\omega}\times\overline{GI} \Rightarrow \dot{x}\overline{1}_x + \dot{\theta}\overline{1}_y \times\left(-R\overline{1}_z\right) \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$(4)\to(3) \ : \ \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}}{R} = RT \Rightarrow T = \frac{m}{2}\ddot{x} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &(5)\to(1) \ : \ m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{m}{2}\ddot{x} - k\left(x-L\right) \\ &\boxed{\frac{3m}{2}\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\left(x-L\right)} \\ &\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2g}{3}\sin\alpha + \frac{2k}{3m}L \quad (6) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Solution de l'équation différentielle non homogène

$$\text{SP : } x(t) = L + \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

$$\text{SGENH : } x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

A et B seront fixé par les conditions initiales et la pulsation est $\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

Une autre méthode pouvait être utilisée : Le théorème du moment cinétique calculé en I.
Dans ce cas, seules les forces de pesanteur et de rappel vont intervenir. Donc on va bien obtenir directement l'équation de mouvement sans inconnue (réactions de liaison).

$$\frac{d}{dt}\overline{M_I} \underbrace{=}\sum \overline{m}_{e,I} \quad \text{où} \quad \overline{M_I} \underbrace{=}_{I\in S} \overline{\overline{I}}_I.\overline{\omega} = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\overline{M_G}\right|_y = \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta} \underset{\ddot{x}=R\ddot{\theta}}{=} \boxed{\frac{3mR}{2}\ddot{x} = -Rk\left(x-L\right) + Rmg\sin\alpha} \quad (=6)$$

L'énergie cinétique est donnée par : $\boxed{T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2\underbrace{=}_{\dot{x}=R\dot{\theta}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{m}{4}\dot{x}^2=\frac{3}{4}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle : $V=\frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2-mgx\sin\alpha$ avec le point A comme référence.

La force de frottement ne dérive pas d'un potentiel, mais sa puissance est nulle car il y a roulement sans glissement, la vitesse du point matériel sur lequel s'applique cette force est nulle.

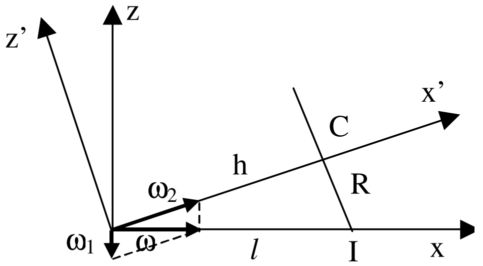
L'énergie s'écrit donc : E=$T+V=\frac{3}{4}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2-mgx\sin\alpha$

$$\dot{E}=\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x}+k\left(x-L\right)\dot{x}-mg\dot{x}\sin\alpha=\left(\frac{3}{2}m\ddot{x}+k\left(x-L\right)-mg\sin\alpha\right)\dot{x}=0 \quad (=6)$$

L'énergie mécanique totale est donc conservée.

---

2. Considérons les axes Ox'y'z' attaché au centre du disque tournant autour de l'axe z. ($l^2=R^2+h^2$)



Les forces extérieures : dans le repère $Oxyz$

Réaction en I du sol sur le disque : $\overline{R}_I\,(R_{Ix},R_{Iy},R_{Iz})$

Réaction en O du sol sur la tige : $\overline{R}_O\,(R_{Ox},R_{Oy},R_{Oz})$

Poids : $m\overline{g}=\left(0,0,-mg\right)$

Théorème de la résultante cinétique :

$\overline{R}=m\overline{v}_G=-mh\cos\alpha\omega_1\overline{1}_{y'}$

$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}\right)_z=\left(\overline{R}_e\right)_z \quad => \quad 0=R_{Oz}+R_{Iz}-mg$

Le théorème du moment cinétique en O :

Rem : le vecteur de Darboux du repère R' à utiliser pour dériver les axes du repère : $\overline{\omega}_{R'/R_0}=-\omega_1\overline{1}_z$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overline{M_O}\right)_y\underbrace{=}_{O\text{ fixe}}\left(\overline{m}_{e,O}\right)_y}$$

avec
$$\overline{\omega}_{R'/R_0}=-\omega_1\overline{1}_z \text{ avec } tg\alpha=\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{R}{h}=>\overline{\omega}_{R'/R_0}=-\,\omega.tg\alpha\overline{1}_z$$
$$\overline{M_O}=\begin{pmatrix}I_{x'}&0&0\\0&I_{y'}&0\\0&0&I_{z'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{x'}\\0\\-\omega_{z'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{x'}\omega\cos\alpha\\0\\-I_{z'}\omega\sin\alpha\end{pmatrix}=I_{x'}\omega\cos\alpha\overline{1}_{x'}-I_{z'}\omega\sin\alpha\overline{1}_{z'}=M_{Ox'}\overline{1}_{x'}+M_{Oz'}\overline{1}_{z'}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O}=\overline{\omega}_{R'/R_0}\times\overline{M_O}=\left(\omega_1\sin\alpha M_{Oz'}-\omega_1\cos\alpha M_{Ox'}\right)\overline{1}_y$$

avec $\sin\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$; $\cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$; $\omega_1=\frac{R\omega}{h}$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O}=-\omega^2\sin\alpha\left(I_{x'}\cos\alpha+I_{z'}\sin\alpha.tg\alpha\right)\overline{1}_y=-\omega^2\frac{R}{R^2+h^2}\left(I_{x'}.h+I_{z'}.\frac{R^2}{h}\right)\overline{1}_y$$

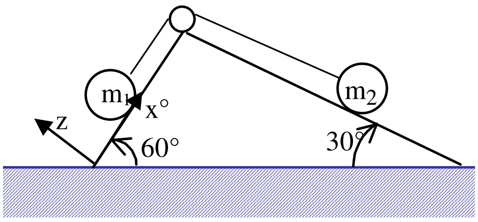
avec
$$I_{x'}=\frac{mR^2}{2};\ I_{y'}=I_{z'}=\underbrace{I_{tige}}_{=0(m=0)}+\underbrace{I_{disque}}_{=I_{diamètre}+M\left\|\overline{OC}\right\|^2}=m\frac{R^2}{4}+mh^2$$
$$\left(\overline{M_O}=\frac{mR^2}{2}\omega\cos\alpha\overline{1}_{x'}+\left(\frac{mR^2}{4}+mh^2\right)\left(-\omega\sin\alpha\right)\overline{1}_{z'}\right)$$
$$\left(\overline{m}_{e,O}\right)_y=mg\frac{h^2}{l}-lR_{Iz}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\overline{M_O}}{dt}\right)_y=\left(\overline{m}_{e,O}\right)_y}=>-m\omega^2\frac{R^3}{h\left(R^2+h^2\right)}\left(\frac{3h^2}{2}+\frac{R^2}{4}\right)=mg\frac{h^2}{l}-lR_{Iz}$$

$$R_{Iz}=mg\frac{h^2}{l^2}+m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)\ \text{ et }\ R_{Oz}=mg-\left(mg\frac{h^2}{l^2}+m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{Iz}=mg\dfrac{h^2}{l^2}+m\omega^2\dfrac{R^3}{hl^3}\left(\dfrac{3}{2}h^2+\dfrac{R^2}{4}\right)>0 \quad \text{pas de décollement en I} \\ R_{Oz}=mg\left(1-\dfrac{h^2}{l^2}\right)-m\omega^2\dfrac{R^3}{hl^3}\left(\dfrac{3}{2}h^2+\dfrac{R^2}{4}\right)\geq 0 \quad \text{pour garder le contact en O} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega^2_{\text{lim}}=g\,\frac{lh}{R\left(\dfrac{3}{2}h^2+\dfrac{R^2}{4}\right)}$$

3.



dans les axes liés à la pente inclinée à 60 °
(x vers la poulie et z perpendiculaire à la pente)

Le corps m_1, Variable (φ,x)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Les forces extérieures :} \\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_1(F_1,0,0) \\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_1 g\sin 60,0,-m_1 g\cos 60) \\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I1}\left(-T_1,0,N_1\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1-T_1 \quad (1) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_1 g}{2}+N_1 \quad (2) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}_1=RT_1 \quad (3) \end{array}\right.$$

Le corps m_2, Variable (φ,z)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Les forces extérieures :} \\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_2(0,0,F_2) \\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_2 g\cos 30,0,-m_2 g\sin 30) \\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I2}\left(N_2,0,T_2\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow -m_2\ddot{z}=-\dfrac{m_2 g}{2}+F_2+T_2 \quad (4) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}\sqrt{3}+N_2 \quad (5) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}_2=RT_2 \quad (6) \end{array}\right.$$

Le corps m , Variable (θ)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Les forces extérieures :} \\ \quad \text{Tension de les cordes : } \bar{F}(-F_1,0,-F_2) \\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-mg\cos 30,0,-mg\sin 30) \\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{C}\left(X,0,Z\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{mg}{2}\sqrt{3}+X-F_1 \quad (7) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}+Z-F_2 \quad (8) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=r\left(F_2-F_1\right) \quad (9) \end{array}\right.$$

Condition de roulement sans glissement : $\dot{x}=R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z}=R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x}=r\dot{\theta}=\dot{z}$ (10)

(10)–>(3) : $T_1=\dfrac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1=\dfrac{m_1}{2}\ddot{x}$; +(1) : $m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1-\dfrac{m_1}{2}\ddot{x} \Rightarrow \dfrac{3}{2}m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1$ (11)

(10)–>(6) : $T_2=\dfrac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2=\dfrac{m_2}{2}\ddot{z}$; +(4) : $-m_2\ddot{z}=-\dfrac{m_2 g}{2}+F_2+\dfrac{m_2}{2}\ddot{z} \Rightarrow \dfrac{3}{2}m_2\ddot{z}=\dfrac{m_2 g}{2}-F_2$ (12)

$(11)-(12)$ et $(\ddot{x}=\ddot{z})$: $\dfrac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\dfrac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)+\left(F_1-F_2\right)$ (13)

$$\left(F_2-F_1\right)\underset{(9)}{=}\frac{mr}{2}\ddot{\theta}\underset{(10)}{=}\frac{m}{2}\ddot{x} \quad \text{dans (13)} => \frac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\frac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)-\frac{m}{2}\ddot{x}$$

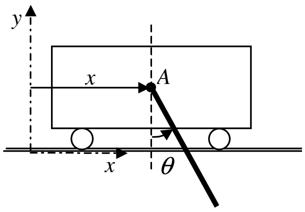
=> Equation du mouvment : $\ddot{x}=\dfrac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$

On trouve donc les tensions dans la corde :

$$F_1=\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+m_1\ddot{x}+T_1 \underbrace{=}_{T_1=\frac{m_1}{2}\ddot{x}} \frac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}m_1\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

$$F_2=\frac{m_2 g}{2}-m_2\ddot{z}-T_2 \underbrace{=}_{T_2=\frac{m_2}{2}\ddot{z}} \frac{m_2 g}{2}-\frac{3}{2}m_2\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

4.



Réactions : Réaction en A (X_A Y_A), le poids Mg, les réactions aux roues (2N).

Système = {Barre } :

Théorème de la résultante cinétique : $\dfrac{d\bar{R}}{dt}=\sum F_e$

$$\bar{v}_G=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\overline{AG}=\dot{x}\bar{1}_x+\frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_y\right)$$

$$m\left(\ddot{x}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\bar{1}_x+m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\bar{1}_y=X_A\bar{1}_x+\left(-mg+Y_A\right)\bar{1}_y$$

$$=>\begin{cases} X_A=m\left(\ddot{x}+\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) & (1)\\ Y_A=m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)+mg & (2)\end{cases}$$

Pour supprimer la variable x de l'équation, il faut trouver une équation supplémentaire (liant X_A et x)
Nous avons plusieurs possibilités :

- Le théorème de la résultante sur le chariot
- Le théorème du moment cinétique en A sur la barre
- Le théorème de la résultante sur l'ensemble
- Lagrange (qui sera vu dans les prochain TPs)

<u>Le théorème de la résultante</u> - **Système = {Chariot } :**

$$M\ddot{x}\bar{1}_x=-X_A\bar{1}_x+\left(-Y_A-Mg+2N\right)\bar{1}_y$$

$$\left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x=\left.\bar{F}_e\right|_x => \boxed{M\ddot{x}=-X_A} \quad (3)$$

$$=> M\ddot{x}=-X_A \quad (4) \quad => \text{dans (1)} : X_A=m\left(-\frac{X_A}{M}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$\text{dans (1)} : X_A=m\left(-\frac{X_A}{M}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)=\frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$=> X_A=\frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

<u>Le théorème du moment cinétique en A sur la barre</u> - **Système = {Barre} :**

$$\bar{M}_A=m\overline{AG}\times\bar{v}_A+\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}=\left(m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{x}+\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\right)\bar{1}_z$$

$$\frac{d\bar{M}_A}{dt}=m\bar{v}_G\times\bar{v}_A+\bar{m}_{e,A}$$

$$\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}+m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{x}+\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z=-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\dot{x}\bar{1}_z-\frac{L}{2}\sin\theta mg\bar{1}_z \quad => \ddot{x}=-\frac{2L}{3\cos\theta}\ddot{\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}g \quad (4)$$

$$=> \text{dans (1)} : X_A=m\left(\left(\frac{L}{2}\cos\theta-\frac{2L}{3\cos\theta}\right)\ddot{\theta}-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}g\right)$$

<u>Le théorème de la résultante sur l'ensemble</u> - **Système = {Chariot+Barre} :**

$\left.\bar{F}_e\right|_x = 0$ => Conservation de la résultante cinétique suivant x

$$\left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x = M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0 \;\; => \ddot{x} = \frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

dans (3) : $X_A = \dfrac{mM}{m+M}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

=> dans (1) : $X_A = m\left(\dfrac{m}{m+M}\dfrac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = \dfrac{mM}{M+m}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

<u>Par Lagrange, on verra que cela revient à ceci</u> - **Système = {Chariot+Barre} :**

A exprimer en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Cherchons la relation $\ddot{x} = f\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right)$ = équation du mouvement

$$T = T_{chariot} + T_{Tige} = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot} + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige} \quad \text{et} \quad V = C - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \; : \; (M+m)\ddot{x} + \dfrac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = 0 \quad = th\; \left.\bar{R}\right|_x \text{ (barre+chariot)} \\ \qquad => \; \ddot{x} = -\dfrac{m}{M+m}\left(\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right) \quad \text{Equation du mouvement 1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \; : \; \left(\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x}\right) + mg\dfrac{L}{2}\sin\theta = 0 \quad = th\; \left.\bar{M}_A\right|_z \text{ (barre)} \quad \text{Equation du mouvement 2} \end{cases}$$

$$=> \boxed{\left(\frac{1}{3} + \frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta} - \frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\sin\theta = 0}$$

$$\boxed{=> \begin{cases} X_A = \dfrac{mM}{M+m}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}}$$

5.1 2 degré de liberté :
3 coordonnées / solide = 9 coordonnées
- 3 rotule = 3*2 réactions de liaison
- 1 glissière = 1 réactions de liaison
=2 ddl

5.2 2 ddl : angle θ_1 et θ_2 définis respectivement entre les tiges OA et AB avec l'horizontale
Réaction de liaison en O : X_O et Y_O
Réaction de liaison en C : Y_C

Réaction interne en A : X_A et Y_A
Réaction interne en B : X_B et Y_B

5.3 Par les théorèmes généraux :

S1+S2+S3 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et Y_C
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , θ_2, , Y_C et Y_O

S1 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1 : 1 équation liant θ_1 et X_A et Y_A
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , X_A et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , Y_A et Y_O

S1+S2 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1+S2 : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et Y_B
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 θ_2, ,, Y_B et Y_O

9 équations, 9 inconnues

5.4 Théorème de la résultante cinétique sur tout le système:

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \overline{F}_{\mathrm{e}} \text{ avec } \begin{cases} \overline{R} = \sum_i \overline{R_i} \\ \overline{R_i} = m\overline{v}_{G_i} \\ \overline{v}_{G_1} = \overline{v}_O + \overline{\omega}_1 \times \overline{OG_1}\ ; \overline{v}_{G_2} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_2 \times \overline{AG_2}\ ; \overline{v}_{G_3} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_3 \times \overline{BG_3} \\ \text{et la contrainte : } L\sin\theta_1 + L\sin s\theta_2 = L\sin\theta_3 \\ \overline{F}_e = \overline{R}_O + \overline{R}_C - 3m\overline{g} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{v}_{G1} = \overline{v}_O + \dot{\theta}_1 \overline{1}_z \times \overline{OG_1} = \frac{L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 \text{ avec } \overline{OG_1} = \frac{L}{2}\left(\cos\theta_1 \overline{1}_x + \sin\theta_1 \overline{1}_y\right)$$

$$\overline{v}_{G2} = \overline{v}_A + \dot{\theta}_2 \overline{1}_z \times \overline{AG_2} = L\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2$$

$$\begin{aligned} \overline{v}_{G3} &= \overline{v}_B - \dot{\theta}_3 \overline{1}_z \times \overline{BG_3} \\ &= L\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + L\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y + \sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} => \overline{R}\left(S_1 + S_2 + S_3\right) = m\Bigg[&\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x + \cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y - \sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 \\ &+ \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y + \sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\Bigg] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(-\sin\theta_2 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(+\sin\theta_3 \overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right] = X_O \\ m\left[\frac{5L}{2}\left(+\cos\theta_1 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3 \overline{1}_y\right)\dot{\theta}_3\right] = Y_O + Y_C - 3mg \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 et θ_2 et Y_C

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = \overline{m}_{\mathrm{e},O} \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \overline{M_O} = \sum_i \overline{M_{O_i}} \\ \overline{M_{O_i}} = \overline{M_{G_i}} + \overline{OG_i} \times \overline{R_i} \\ \overline{M_{G_i}} = \overline{\overline{I}}_{G_i} . \overline{\omega}_i = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}_i \overline{1}_z \\ \overline{R_i} = m\overline{v}_{G_i} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{m}_{\mathrm{e},O} = \sum_i \overline{OG_i} \times m\overline{g} + \overline{OC} \times \overline{R}_C$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html