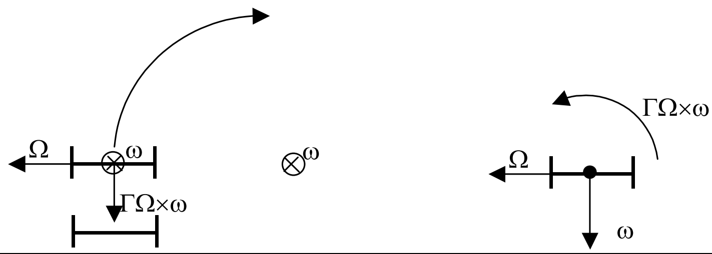
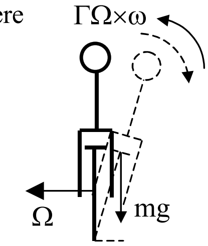
1. Gyrostat : $\Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}$
les roues droites de la voiture ont tendance à décoller.

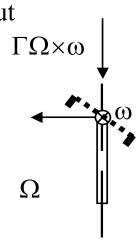
Vue de haut — Vue de derrière



2.a Vue de derrière



Vue de haut



Si le cycliste se penche vers la droite, la force de pesanteur génère un moment qui a tendance à faire basculer le cycliste. Pour ne pas tomber, il doit générer un moment opposé qui le ramène en position verticale. En tournant son guidon vers la droite (du côté où il penche), il crée un effet gyroscopique qui le ramène dans sa position verticale.

2.b Roue = 60 cm de diamètre ;
$\Gamma=0{,}6.(0{,}3)^2$

$v=\Omega R \quad \Rightarrow \quad 8=\Omega.0{,}3 \quad \Rightarrow \quad \Omega=8/0{,}3 \ \ rad/s$

$\bar{m}_{e,C}=\overline{CG}\times m\bar{g}=0{,}03.80.9{,}81$

$\Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}=0{,}6.(0{,}3)^2\dfrac{8}{0{,}3}\omega$

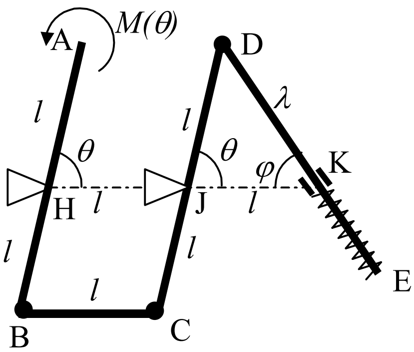
Pour retrouver l'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bar{M}_C=\mathrm{m}_{e,C}+\Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad 0=0{,}03.80.9{,}81-0{,}6.(0{,}3)^2\frac{8}{0{,}3}\omega$$

$$\omega=16{,}35 \ \ \text{rad/s}$$

3.1



3 Paramètre de position : $\theta,\ \varphi,\ \lambda$

2 relations : $\begin{cases}\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\theta}}{2}\\ \lambda=2L\sin\dfrac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad L\sin\theta=\lambda\sin\varphi\end{cases}$ => 1 ddl.

<u>Force</u> : 2 réactions en H, 2 réactions en J, 1 réaction en K perpendiculaire à DE, Force de rappel en E, poids des 4 tiges.
Equation de mouvement : Lagrange.
Les réactions en H, J et K ne travaillent pas car les points sont fixes ou le déplacement se fait perpendiculaire <u>aux forces</u>.

Le couple extérieur appliqué en A ne dérive pas d'un potentiel => Application du théorème de Lagrange généralisé.

$$\boxed{T=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}\right)}$$

$$T=\left(\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2\right)_1+\left(\frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2\right)_2+\left(\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2\right)_3+\left(\frac{2m}{2}\frac{5}{4}l^2\dot{\theta}^2-\frac{2m}{2}l^2\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\frac{\dot{\theta}^2}{4}\right)_4$$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{5}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\text{avec}\quad\begin{cases}\overline{JG_4}=\left(L\cos\theta+L\cos\varphi\right)\bar{1}_x+\left(L\sin\theta-L\sin\varphi\right)\bar{1}_y\\ \bar{v}_{G_4}=\bar{v}_D+\left(-\dot{\varphi}\bar{1}_z\right)\times\overline{DG}_4=L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\bar{1}_x+\cos\theta\,\bar{1}_y\right)+\dfrac{\dot{\theta}}{2}L\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\bar{1}_x+\sin\dfrac{\theta}{2}\bar{1}_y\right)=\dfrac{d\left(\overline{JG}_4\right)}{dt}\\ v_{G_4}^2=L^2\dot{\theta}^2+\dfrac{\dot{\theta}^2}{4}L^2+L^2\dot{\theta}^2\left(-\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{5}{4}L^2\dot{\theta}^2+L^2\dot{\theta}^2\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\boxed{Q_\theta=\sum \bar{F}_h\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_\theta}}=-mg\,\bar{1}_y.\frac{\partial \overline{OG_2}}{\partial\theta}-2mg\,\bar{1}_y.\frac{\partial \overline{JG_4}}{\partial\theta}+\bar{F}_r.\frac{\partial \overline{JE}}{\partial\theta}+M(\theta)$$

$$\bar{F}_r=-k\left(L-L_0\right)\bar{1}_{DE}=k2L\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_{DE}=k2L\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_x-\cos\frac{\theta}{2}\bar{1}_x\right)$$

avec
$$\begin{cases}\overline{OG_2}=\left(-L\cos\theta+\dfrac{L}{2}\right)\bar{1}_x-L\sin\theta\,\bar{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OG_2}=\left(L\sin\theta\,\bar{1}_x-L\cos\theta\,\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial \overline{OG_2}}{\partial\theta}\delta\theta\\ \overline{JG_4}\Rightarrow \delta\overline{JG_4}=\left(\left(-L\sin\theta+\dfrac{1}{2}L\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+\left(L\cos\theta+\dfrac{1}{2}L\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial \overline{JG_4}}{\partial\theta}\delta\theta\\ \overline{JE}=\left(L\cos\theta+2Lcos\varphi\right)\bar{1}_x+\left(L\sin\theta-2L\sin\varphi\right)\bar{1}_y=L\left(\cos\theta+2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+L\left(\sin\theta-2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\\ \Rightarrow \delta\overline{JE}=\left(L\left(-\sin\theta+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+L\left(cos\theta+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial \overline{JE}}{\partial\theta}\delta\theta\end{cases}$$

Autre méthode, par le calcul du potentiel :

$$\boxed{Q_\theta=Q_{\theta(F\text{ dérivant de }V)}+Q_{\theta(F\text{ ne dérivant de }V)}}\quad\text{avec}\quad Q_{\theta(F\text{ ne dérivant de }V)}=M(\theta)$$

$$Q_{\theta(F\text{ dérivant de }V)}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}\quad\text{avec}\quad V=\frac{k}{2}\left(L-L_0\right)^2-mgL\sin\theta+2mg\left(L\sin\theta-L\sin\varphi\right)$$

$$Q_\theta=M-kL^2\sin\theta+mgL\cos\theta-2mg\left(L\cos\theta+\frac{L}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)=M-kL^2\sin\theta-mgL\cos\theta-mgL\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta}\Rightarrow\left(5-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\ddot\theta-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\dot\theta^2=\frac{M}{ml^2}-\frac{k}{m}\sin\theta-\frac{g}{L}\cos\theta-\frac{g}{L}\sin\frac{\theta}{2}$$

3.2.a

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{M}_D\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum\bar{m}_{e,D}+2m\bar{v}_G\times\bar{v}_D\Big|_{(\underline{\underline{R_K}},mg)}}$$ pour la tige DE seule

avec
$$\begin{cases}\boxed{\bar{M}_D=\bar{\bar{I}}_D.\bar\omega+2m\overline{DG}\times\bar{v}_D}=\left(\dfrac{4}{3}ml^2\dot\theta-2ml^2\sin\dfrac{\theta}{2}\dot\theta\right)\bar{1}_z\\ \bar{m}_{e,D}=-2mgl\sin\dfrac{\theta}{2}\bar{1}_z+2l\sin\dfrac{\theta}{2}R_K\,\bar{1}_z\end{cases}$$

$$ml^2\ddot\theta\left(\frac{4}{3}-2\sin\frac{\theta}{2}\right)-ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2}=-2mgl\sin\frac{\theta}{2}+2l\sin\frac{\theta}{2}R_K+ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow R_K=\frac{ml}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{4}{3}-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\ddot\theta-2\cos\frac{\theta}{2}\dot\theta^2\right)+mg$$

3.2.b

tige AB seule : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\bar{M}_B\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum\bar{m}_{e,B}\Big|_{(\underline{\underline{X_H}},\underline{\underline{Y_H}},M,mg)}}$

$$\text{avec}\quad\boxed{\bar{M}_B=\bar{\bar{I}}_B.\bar\omega+2m\overline{BG}\times\bar{v}_B}=\frac{2m\left(2L\right)^2}{3}\dot\theta\,\bar{1}_z-2mL^2\dot\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\bar{1}_z=\frac{2mL^2}{3}\dot\theta\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow\frac{2mL^2}{3}\ddot\theta=M-2mgL\cos\theta+Y_HL\cos\theta-X_HL\sin\theta\quad(1)$$

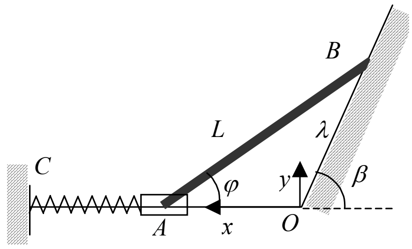
tiges AB et BC : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\bar{M}_C\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum\bar{m}_{e,C}\Big|_{(\underline{\underline{X_H}},\underline{\underline{Y_H}},M,mg)}+m\bar{v}_G\times\bar{v}_C}$ avec $m_{AB}\underbrace{\bar{v}_{G_1}}_{=0}\times\bar{v}_C+m_{BC}\underbrace{\bar{v}_{G_2}\times\bar{v}_C}_{//}=0$

$$\text{avec}\quad\boxed{\bar{M}_C=\bar{M}_{C,AB}+\bar{M}_{C,BC}}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\boxed{\bar{M}_{C,BC}=\cancel{\bar{\bar{I}}_C.\bar\omega}+m\overline{CG_2}\times\bar{v}_C}=m\dfrac{L}{2}.L\dot\theta.\cos\theta\,\bar{1}_z\\ \boxed{\bar{M}_{C,AB}=\bar{M}_{G_1,AB}+\cancel{\overline{CG_1}\times\bar{R}_{AB}}}=\dfrac{2m\left(2L\right)^2}{12}\dot\theta\,\bar{1}_z\end{cases}$$

$$\Rightarrow mL^2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\ddot\theta-m\frac{L^2}{2}\sin\theta\dot\theta^2=M+2mg\left(L-L\cos\theta\right)+mg\frac{L}{2}-Y_H\left(L-L\cos\theta\right)-X_HL\sin\theta\quad(2)$$

2 équations, 2 inconnues

4.



$$\boxed{T=\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}\right)}=\frac{1}{2}mv_{G_{AB}}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_{AB}}.\overline{\omega}$$

Un degré de liberté ϕ . On travaille avec une coordonnée généralisée donc la coordonnée λ doit être remplacée dans le Lagrangien avec la relation $L\sin\phi=\lambda\sin\beta$.

$$T=\frac{1}{2}m\left(L^2\frac{\cos^2(\beta-\phi)\dot{\phi}^2}{\sin^2\beta}+\frac{L^2}{4}\dot{\phi}^2-L^2\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\phi}^2$$

4.1

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{OG}=\left(\dfrac{L}{2}\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\overline{1}_x+\dfrac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y=\left(\dfrac{L}{2}\cos\phi-L\dfrac{\sin\phi\cos\beta}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x+\dfrac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y\\ \overline{OG}=\left(\dfrac{L}{2}\cos\phi-L\cos\phi+L\dfrac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x+\dfrac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y=\left(L\dfrac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}-\dfrac{L}{2}\cos\phi\right)\overline{1}_x+\dfrac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y\\ \overline{v}_G=\left(L\dfrac{\cos(\beta-\phi)(-\dot{\phi})}{\sin\beta}+\dfrac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_x+\left(\dfrac{L}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_y\end{cases}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}^2$$

$$\boxed{Q_i=\sum_h\overline{F}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$$

- $\overline{OG}=\left(\dfrac{L}{2}\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\overline{1}_x+\dfrac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y\Rightarrow\delta\overline{OG}\Big|_y=\dfrac{L}{2}\cos\phi\delta\phi$ et $\overline{F}_G=-mg\overline{1}_y$
- $\overline{OA}=L\left(\dfrac{\sin\beta\cos\phi-\sin\phi\cos\beta}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x=L\left(\dfrac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x$

$$\Rightarrow\delta\overline{OA}=-L\left(\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\delta\phi\ \text{ et }\ \overline{F}_A=k\big(L-(L\cos\phi-\lambda\cos\beta)\big)\overline{1}_x$$

- $\overline{OB}=-\lambda\cos\beta\overline{1}_x+\lambda\sin\beta\overline{1}_y=-L\dfrac{\sin\phi}{\sin\beta}\cos\beta\overline{1}_x+L\sin\phi\overline{1}_y=\lambda\overline{1}_v=L\dfrac{\sin\phi}{\sin\beta}\overline{1}_v$

$$\Rightarrow\delta\overline{OB}=L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}\delta\phi\overline{1}_v\ \text{ et }\ \overline{F}_B=N_B\overline{1}_u-T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\overline{1}_v\ \text{ avec }\ \overline{T}_B=fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\overline{1}_v$$

$$Q_\phi=\sum_i\overline{F}_i.\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial q_\phi}\Rightarrow Q_\phi=-mg\frac{L}{2}\cos\phi-\frac{kL^2}{\sin^2\beta}\cos(\beta-\phi)\big(\sin\beta-\sin(\beta-\phi)\big)-fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=Q_\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\left(\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\dot{\phi}+m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}\right)$$
$$-\left(m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}m\left(\dfrac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\dfrac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\dfrac{L^2}{3}\ddot{\phi}\\+m\left(\dfrac{2\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\dfrac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\dfrac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\end{array}\right)$$
$$-\left(m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$= m\left(\frac{1}{3}+\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$-m\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi+\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=Q_\phi}$$

$$m\left(\frac{1}{3}+\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-2\phi)}{2\sin\beta}\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$=-mg\frac{L}{2}\cos\phi-\frac{kL^2}{\sin^2\beta}\cos(\beta-\phi)\left(\sin\beta-\sin(\beta-\phi)\right)-fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}$$

Théorème de la résultante cinétique :

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_x=\left.\overline{F}\right|_x}$$

$$\frac{d}{dt}m\left(L\frac{\cos(\beta-\phi)(-\dot{\phi})}{\sin\beta}+\frac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)=k\left(L-\left(L\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\right)+fN_B\cos\beta+N_B\sin\beta$$

$$mL\left(\frac{1}{2}\sin\phi-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\ddot{\phi}+mL\left(\frac{1}{2}\cos\phi-\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\dot{\phi}^2$$

$$=k\left(L-\left(L\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\right)+\left(f\cos\beta+\sin\beta\right)N_B$$

=> N_B à remplacer dans l'équation de mouvement.

4.2. 2 coordonnées généralisées x_A et ϕ

$$\boxed{T=\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}\right)}=\frac{1}{2}mv_{G_{AB}}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_{AB}}.\overline{\omega}$$

avec $\overline{OG}=\left(x_A-\frac{L}{2}\cos\phi\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y \Rightarrow \overline{v}_G=\left(\dot{x}_A+\frac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_x+\left(\frac{L}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_y$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+\frac{L^2}{4}\dot{\phi}^2+L\dot{x}_A\sin\phi\dot{\phi}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+L\dot{x}_A\sin\phi\dot{\phi}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}^2$$

1 contraintes liant les deux coordonnées généralisées

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial q_i}}$$

$\lambda_1: x_A\sin\beta=L\sin(\beta-\phi) \Rightarrow x_A\sin\beta-L\sin(\beta-\phi)=0 \Rightarrow \delta x_A\sin\beta+L\cos(\beta-\phi)\delta\phi=0$

$$\boxed{Q_i=\sum_h\overline{F}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$$

- $\overline{OG}=\left(x_A-\frac{L}{2}\cos\phi\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y \Rightarrow \left.\delta\overline{OG}\right|_y=\frac{L}{2}\cos\phi\delta\phi$ et $\overline{F}_G=-mg\overline{1}_y$
- $\overline{OA}=x_A\overline{1}_x \Rightarrow \delta\overline{OA}=\delta x_A\overline{1}_x$ et $\overline{F}_A=k(L-x_A)\overline{1}_x$
- $\overline{OB}=x_A\overline{1}_x-L\cos\phi\overline{1}_x+L\sin\phi\overline{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OB}=\left(\delta x_A+L\sin\phi\delta\phi\right)\overline{1}_x+L\cos\phi\delta\phi\overline{1}_y$

$$\overline{F}_B=N_B\overline{1}_u-T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\overline{1}_v=\left(N_B\sin\beta+T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\cos\beta\right)\overline{1}_x+\left(N_B\cos\beta-T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\sin\beta\right)\overline{1}_y$$

$$
=>\begin{cases}
Q_\phi = -mg\dfrac{L}{2}\cos\phi + L\sin\phi N_B\left(\sin\beta + f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta\right) + L\cos\phi N_B\left(\cos\beta - f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin\beta\right)\\
Q_{x_A} = k\left(L-x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta\right)
\end{cases}
$$

$$
=>\begin{cases}
Q_\phi = -mg\dfrac{L}{2}\cos\phi + LN_B\left(\cos\left(\beta-\phi\right) - f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin\left(\beta-\phi\right)\right)\\
Q_{x_A} = k\left(L-x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta\right)
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) = Q_\phi + \sum_i \lambda_i\frac{\partial\phi_i}{\partial q_j}}
$$

$$
\begin{cases}
m\left(\dfrac{L}{2}\ddot x_A\sin\phi + \dfrac{L}{2}\dot x_A\cos\phi\dot\phi + \dfrac{L^2}{3}\ddot\phi - \dfrac{L}{2}\dot x_A\cos\phi\dot\phi\right) = m\left(\dfrac{L^2}{3}\ddot\phi + \dfrac{L}{2}\ddot x_A\sin\phi\right) =\\
\qquad -mg\dfrac{L}{2}\cos\phi + LN_B\left(\cos\left(\beta-\phi\right) - f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin\left(\beta-\phi\right)\right) + \lambda_1 L\cos\left(\beta-\phi\right)\quad(1)\\
m\ddot x_A + \dfrac{1}{2}mL\sin\phi\ddot\phi + \dfrac{1}{2}mL\cos\phi\dot\phi^2 = k\left(L-x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\dfrac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta\right) + \lambda_1\sin\beta\quad(2)\\
x_A\sin\beta = L\sin\left(\beta-\phi\right);\ \dot x_A\sin\beta = -L\cos\left(\beta-\phi\right)\dot\phi;\ \ddot x_A\sin\beta = -L\sin\left(\beta-\phi\right)\dot\phi^2 - L\cos\left(\beta-\phi\right)\ddot\phi\quad(3)
\end{cases}
$$

On remplace la coordonnée x_A ainsi que ses dérivées dans les équations (1) et (2) par les équations (3)
On isole le multiplicateur de Lagrange de l'équation (2) et on le réinjecte dans l'équation (1).
On retrouve la même équation de mouvement qu'au (4).1 après quelques remplacements.

$$
mL^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\cos^2\left(\beta-\phi\right)}{\sin^2\beta} - \sin\phi\frac{\cos\left(\beta-\phi\right)}{\sin\beta}\right)\ddot\phi + mL^2\left(\frac{\cos\left(\beta-\phi\right)\sin\left(\beta-\phi\right)}{\sin^2\beta} - \frac{\cos\left(\beta-2\phi\right)}{2\sin\beta}\right)\dot\phi^2
$$

$$
= -mg\frac{L}{2}\cos\phi - kL\frac{L\cos\left(\beta-\phi\right)}{\sin\beta}\left(\sin\beta - \sin\left(\beta-\phi\right)\right) - N_BLf\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\frac{\cos\phi}{\sin\beta}
$$

5.1 1 degré de liberté , 3 coordonnées $\{z,\theta_1,\theta_2\}$

5.2 $T = \left[\frac{1}{2}M\dot z^2\right] + \left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1\omega^2 + \dot\theta_1^2\right)\right] + \left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_2\omega^2 + \dot\theta_2^2\right)\right]$ et $V = -Mgz - mgL\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$

$$
\text{avec}\begin{cases}
\bar v_{m1} = \bar\omega_1\times\overline{OM_1}\ \text{ et }\ \bar\omega_1 = \omega\bar 1_z - \dot\theta_1\bar 1_x => \bar v_{m1} = -L\cos\theta_1\dot\theta_1\bar 1_y + L\sin\theta_1\dot\theta_1\bar 1_z + L\sin\theta_1\omega\bar 1_x\\
\bar v_{m2} = \bar\omega_2\times\overline{OM_2}\ \text{ et }\ \bar\omega_2 = \omega\bar 1_z + \dot\theta_2\bar 1_x => \bar v_{m2} = +L\cos\theta_2\dot\theta_2\bar 1_y + L\sin\theta_2\dot\theta_2\bar 1_z - L\sin\theta_2\omega\bar 1_x
\end{cases}
$$

$$
=> L = \frac{1}{2}M\dot z^2 + \frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mL^2\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\right) + Mgz + mgL\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)
$$

$$
\text{Deux contraintes : }\begin{cases}
b^2 = z^2 + a_1^2 - 2a_1z\cos\theta_1 => \lambda_1\left(z\delta z - a_1\delta z\cos\theta_1 + a_1z\sin\theta_1\delta\theta_1 = 0\right)\\
b^2 = z^2 + a_2^2 - 2a_2z\cos\theta_2 => \lambda_2\left(z\delta z - a_2\delta z\cos\theta_2 + a_2z\sin\theta_2\delta\theta_2 = 0\right)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \ : M\ddot{z} - Mg = \lambda_1\left(z - a_1\cos\theta_1\right) + \lambda_2\left(z - a_2\cos\theta_2\right) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_1} \ : \ mL^2\ddot{\theta}_1 - mL^2\omega^2 \sin\theta_1\cos\theta_1 + mgL\sin\theta_1 = \lambda_1 a_1 z\sin\theta_1 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_2} \ : \ mL^2\ddot{\theta}_2 - mL^2\omega^2 \sin\theta_2\cos\theta_2 + mgL\sin\theta_2 = \lambda_2 a_2 z\sin\theta_2 \\
z\dot{z} - a_1\cos\theta_1\dot{z} + a_1 z\sin\theta_1\dot{\theta}_1 = 0 \\
z\dot{z} - a_2\cos\theta_2\dot{z} + a_2 z\sin\theta_2\dot{\theta}_2 = 0
\end{cases}
$$

5.3 Dans ce cas, nous n'avons plus qu'un degré de liberté : 2 équations de Lagrange avec 1 multiplicateur.

$$
\begin{cases}
a_1 = a_2 = b \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \\
z\dot{z} - b\cos\theta\dot{z} + bz\sin\theta\dot{\theta} = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \ : M\ddot{z} - Mg = 2\lambda_1\left(z - b\cos\theta\right) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \ : \ mL^2\ddot{\theta} - mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta = \lambda_1 bz\sin\theta
\end{cases}
$$

$$z = 2b\cos\theta \,;\, \dot{z} = -2b\sin\theta\dot{\theta}; \ddot{z} = -2b\cos\theta\dot{\theta}^2 - 2b\sin\theta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} - mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta = \frac{M\ddot{z} - Mg}{2\left(z - b\cos\theta\right)} bz\sin\theta$$

$$= \frac{M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2 - 2b\sin\theta\ddot{\theta}\right) - Mg}{2\left(2b\cos\theta - b\cos\theta\right)} b2b\cos\theta\sin\theta = \left(M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2 - 2b\sin\theta\ddot{\theta}\right) - Mg\right) b\sin\theta$$

$$\Rightarrow \left(mL^2 + 2Mb^2\sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + \left(2Mb^2\cos\theta\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 - mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + \left(mL + Mb\right)g\sin\theta = 0$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez **Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be**
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez **CFAO.Matlab@ulb.ac.be**
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html