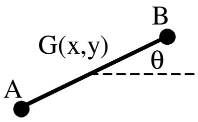


3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ)
Dans un plan horizontal (V=0) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide.**

1.a

$$L = T = \left(\frac{M}{2} v_G{}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}\right)_{\text{solide}} = \frac{2.m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & I_z(A)+I_z(B) \end{pmatrix}.\bar{\omega}$$

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A) = I_{z'}(A) + md^2 = m\frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

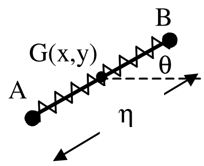
Or le moment d'inertie d'un point (masse ponctuelle) est nul, donc il ne reste que le terme de Steiner md^2 :

$$\begin{cases} x: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{x}_0 \Rightarrow x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{y} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} = \dot{y}_0 \Rightarrow y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

$$\text{Rem : } \frac{\partial mx}{\partial x} = m \ ; \ \frac{\partial mx}{\partial \dot{x}} = 0 \ ; \ \frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx} = m\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

1.b 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ, η)
Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points.**



$$L = T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2\right) + \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt}\right)^2\right)$$

avec $A(x_G - \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G - \frac{\eta}{2}\sin\theta)$ et $B(x_G + \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G + \frac{\eta}{2}\sin\theta)$

$$\bar{v}_A(\dot{x} - \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta + \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} - \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta - \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta}) \quad \text{et} \quad \bar{v}_B(\dot{x} + \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta - \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} + \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta + \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta})$$

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4}\left(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(\eta - l)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: \ \ddot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ \ddot{y} = 0 \ \Rightarrow \ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \ \dfrac{m}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\eta^2\dot{\theta}\right) = 0 \ \Rightarrow \eta^2\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{m}{2}\eta^2\dot{\theta} = C \\ \eta: \ \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{m}{2}\eta\dot{\theta}^2 + k(\eta - l) = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{2C^2}{m\eta^3} + k(\eta - l) = 0 \end{cases}$$

La 4$^{\text{ième}}$ équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T + V = E_0$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) + \frac{m}{4}\left(2\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2 + 2\eta^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + k(\eta - l)\dot{\eta} = 0$$

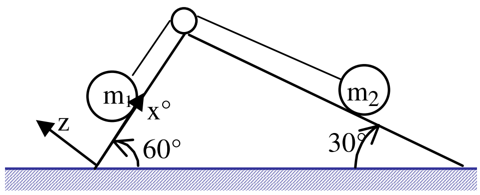
$$\Rightarrow \frac{m}{2}\ddot{\eta} - m\eta 2\left(\frac{C}{m\eta^2}\right)^2 + k(\eta - l) = 0$$

1.c
Si on a une tige de longueur l : $L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$ => Mouvement inchangé.

1.d Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 - 2mgy \quad \text{avec} \quad y: \ \ddot{y} = -g \ \Rightarrow \ \dot{y} = -gt + \dot{y}_0 \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0$$

2.



Condition de roulement sans glissement :

$\dot{x} = R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z} = R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x} = r\dot{\theta} = \dot{z}$ (1)

5 paramètres de positions :
4 équations liant ces paramètres dépendants
=> 1 ddl = 1 coordonnée généralisée

Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0}$

avec

$$T = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_i \bar{\bar{I}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right) = \left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2\right) + \left(\frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2\right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right)$$

$$T = \left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right) + \left(\frac{m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2R^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{r^2}\right) = \frac{3}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{3}\right)\dot{x}^2$$

$$V = m_1 g x \sin 60 + m_2 g\left(L\sin 60 - z\sin 30\right) \underset{\substack{z=C-(L-x) \\ C\text{ = longueur du cable}}}{\underbrace{=}} m_1 g x\frac{\sqrt{3}}{2} - m_2 g\frac{1}{2}x + Const \quad (\text{réf=Sol})$$

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V} = \frac{3}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{3}\right)\dot{x}^2 - gx\left(\frac{\sqrt{3}m_1}{2} - \frac{m_2}{2}\right) + Const$$

$$\frac{1}{2}\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)\ddot{x} + g\left(\frac{\sqrt{3}m_1}{2} - \frac{m_2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\left(m_2 - \sqrt{3}m_1\right)}{\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)}g$$

OU par la méthode des <u>multiplicateurs de Lagrange</u>. 5 coordonnées généralisées et 1 ddl.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial q_j}}$

avec

$$T = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_i \bar{\bar{I}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right) = \left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2\right) + \left(\frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2\right) + \left(0 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = m_1 g x \sin 60 + m_2 g\left(L\sin 60 - z\sin 30\right) + Const \underset{z=C-(L-x)}{\underbrace{=}} m_1 g x\frac{\sqrt{3}}{2} - m_2 g\frac{1}{2}x + Const \quad (\text{Réf=Sol})$$

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V} = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2 - m_1 g x\frac{\sqrt{3}}{2} + m_2 g\frac{1}{2}z + Const$$

4 Contraintes : $\dot{x} = R\dot{\varphi}_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x - R\delta\varphi_1 = 0\right)$; $\dot{z} = R\dot{\varphi}_2 \Rightarrow \lambda_2\left(\delta z - R\delta\varphi_2 = 0\right)$; $\dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_3\left(\delta x - r\delta\theta = 0\right)$;
$\dot{z} = r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_4\left(\delta z - r\delta\theta = 0\right)$

=> 5 coordonnées généralisées => 5 Equations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \varphi_1} : \ \dfrac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}_1 = -R\lambda_1 \ (1) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \varphi_2} : \ \dfrac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}_2 = -R\lambda_2 \ (2) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x} : \ m_1\ddot{x} + g\dfrac{\sqrt{3}m_1}{2} = \lambda_1 + \lambda_3 \ (3) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \dfrac{\partial L}{\partial z} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial z} : \ m_2\ddot{x} - g\dfrac{m_2}{2} = \lambda_2 + \lambda_4 \ (4) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \theta} : \ \dfrac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = -r\lambda_3 - r\lambda_4 \ (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) : \lambda_1 = -\dfrac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1 \\ (2) : \lambda_2 = -\dfrac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2 \\ (3)+(1) : m_1\ddot{x} + g\dfrac{\sqrt{3}m_1}{2} = -\dfrac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1 + \lambda_3 \\ (4)+(2) : m_2\ddot{x} - g\dfrac{m_2}{2} = -\dfrac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2 + \lambda_4 \end{cases}$$

(1),(2),(3),(4)->(5) : $\dfrac{mr}{2}\ddot{\theta} = -m_1\ddot{x} - g\dfrac{\sqrt{3}m_1}{2} - \dfrac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1 - m_2\ddot{x} + g\dfrac{m_2}{2} - \dfrac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2$

$\Rightarrow mr\ddot{\theta} + 2m_1\ddot{x} + m_1R\ddot{\varphi}_1 + 2m_2\ddot{x} + m_2R\ddot{\varphi}_2 = gm_2 - g\sqrt{3}m_1$

Si on fait les remplacements en fonction de *x*, grâce aux 4 equations de contraintes, on obtient :

$m\ddot{x} + 2m_1\ddot{x} + m_1\ddot{x} + 2m_2\ddot{x} + m_2\ddot{x} = gm_2 - g\sqrt{3}m_1 \Rightarrow \boxed{\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)\ddot{x} = \left(m_2 - \sqrt{3}m_1\right)g}$

3. $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0}$$

avec

$$\overline{\omega}=\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overline{1}_z \; ; \; \overline{OG}=x\overline{1}_{x_1}+R\overline{1}_{y_1} \; => \; \overline{v}_G=\left(\dot x-R\dot\theta\right)\overline{1}_{x_1}+x\dot\theta\overline{1}_{y_1}$$

$$T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}=\frac{1}{2}m\left(\left(\dot x+R\dot\theta\right)^2+x^2\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)^2$$

$$V=-mg\left(x\cos\theta-R\sin\theta\right)$$

Condition de roulement sans glissement : $\overline{v}_{P\in\text{corde}}=\overline{v}_{P\in\text{disque}}$ => $\boxed{\dot x=-R\dot\varphi}$

où
$$\begin{cases}\overline{v}_{P\in\text{corde}}=x\dot\theta\overline{1}_{y_1}\\ \overline{v}_{Q\in\text{disque}}=\dfrac{d\left(x\overline{1}_{x_1}+R\overline{1}_{y_1}+R\overline{1}_{y_2}\right)}{dt}=\left(\dot x-R\dot\theta\right)\overline{1}_{x_1}+x\dot\theta\overline{1}_{y_1}-R\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overline{1}_{x_2}\underset{\substack{\text{quand}\\Q=P}}{=}\left(\dot x+R\dot\varphi\right)\overline{1}_{x_1}+x\dot\theta\overline{1}_{y_1}\end{cases}$$

$$=>\boxed{L=T-V}\underset{\dot x=-R\dot\varphi}{=}\frac{1}{2}m\left(\left(\dot x-R\dot\theta\right)^2+x^2\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta-\frac{\dot x}{R}\right)^2+mg\left(x\cos\theta-R\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases}x: m\left(\ddot x-R\ddot\theta\right)-\dfrac{mR}{2}\left(\ddot\theta-\dfrac{\ddot x}{R}\right)-mx\dot\theta^2=mg\cos\theta => \dfrac{3}{2}\ddot x-\dfrac{3}{2}R\ddot\theta-x\dot\theta^2=g\cos\theta\;\left(=\text{th }\overline{R}\Big|_x+\text{th }\overline{M}_G\Big|_x\right)\\ \theta: m\left(x^2\ddot\theta+2x\dot x\dot\theta-R\left(\ddot x-R\ddot\theta\right)\right)+\dfrac{mR^2}{2}\left(\ddot\theta-\dfrac{\ddot x}{R}\right)=-mgx\sin\theta-mgR\cos\theta => x\ddot\theta+2\dot x\dot\theta-R\dot\theta^2=-g\sin\theta\\ \left(=\text{th }\overline{R}\Big|_y\right)\end{cases}$$

Condition initiale **pour que la corde reste verticale :**

$\theta(0)=0$ et $\dot\theta(0)=0$ => $\ddot x=\dfrac{2}{3}g$

---

4. Les axes centraux principaux : // à Aξηζ en G. Les produits d'inertie sont tous nuls.

$$I_{\zeta G}=\frac{mR^2}{2};\; I_{\xi G}=I_{\eta G}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}\;\text{ et }\;\overline{\omega}=\dot\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{1}_{\xi G}+\overline{1}_{\zeta G}\right);\;\; v_G{}^2=\dot z^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot\theta^2$$

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot z^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\frac{1}{2}\dot\theta^2+\left(\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}\right)\frac{1}{2}\dot\theta^2\right)\quad\text{et}\quad V=mgz+C$$

a) A fixe : $T=\dfrac{ml^2}{2}\dot\theta^2$ avec l constante => on a une rotation uniforme $\theta=\theta_0+\dot\theta_0 t$

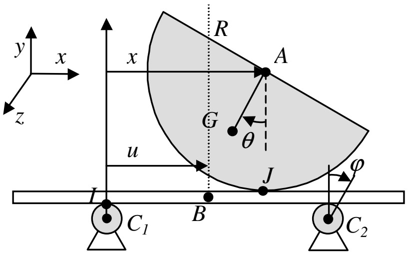
b) A mobile $\boxed{L=T-V}=\dfrac{m}{2}\dot z^2+m\dfrac{l^2}{2}\dot\theta^2-mgz$ (2 degrés de liberté)

z : $\ddot z+g=0 => z=-g\dfrac{t^2}{2}+\dot z_0 t+z_0$ et θ : $\ddot\theta=0$

$=> \dot\theta=\dot\theta_0 t+\theta_0$ $\left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0 => \dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}=\text{constante => intégrale première}\right)$

$T+V=E_o$ est une deuxième intégrale première.

5.



Coordonnées généralisées :

u : détermine la position du centre de masse de la planche (S_3) (suivant x)

φ : détermine la rotation des deux rouleaux (S_1 et S_2)

il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et la planche donc on peut écrire φ en fonction de u.

$\overline{v}_{I\in C_1}=r\dot\varphi\overline{1}_x=\overline{v}_{I\in P}=\dot u\overline{1}_x => \dot\varphi=\dot u/r$

θ : détermine la rotation du demi-disque autour de A. (S_4)
x : détermine la position de A (suivant x)
=> il n'y a pas de glissement entre le demi-disque et la planche donc on peut écrire x en fonction de u.
Degré de liberté = 2 .Les paramètres u et θ détermine entièrement la position du demi-disque.
Calculons les équations du mouvement par Lagrange.
Considérons le système complet = {2 rouleaux (m) + planche (m) + demi-disque (M)}

$$\boxed{T = T_{S_1} + T_{S_2} + T_{S_3} + T_{S_4}}$$

$$T_{S_1} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_1}.\overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{S_1} = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2} \quad (\text{avec } \overline{v}_{C_1} = 0);$$

$$T_{S_2} = T_{S_1} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_2}.\overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega}_{S_2} = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2}; (\text{avec } \overline{v}_{C_2} = 0);$$

$$T_{S_3} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_3}.\overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega}_{S_3} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 \quad (\text{avec } \overline{\omega}_{S_3} = 0)$$

$$T_{S_4} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_4}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_{S_4} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{\omega}_{S_4} = -\dot{\theta}\overline{1}_z \\ I_{zG} = \dfrac{MR^2}{2} - Ma^2 \\ \overline{JG} = (-a\sin\theta)\overline{1}_x + (R - a\cos\theta)\overline{1}_y \\ \overline{v}_G = \overline{v}_J + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{JG} = (\dot{u} + R\dot{\theta} - a\cos\theta\dot{\theta})\overline{1}_x + (a\sin\theta\dot{\theta})\overline{1}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{S_4} = \frac{M}{2}\left(\dot{u}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta R\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{V = V_{S_1} + V_{S_2} + V_{S_3} + V_{S_4}}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{S_1} &= V_{S_2} = 0 \\ V_{S_3} &= rmg \\ V_{S_4} &= (R - a\cos\theta)Mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = C - aMg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V} = \frac{1}{2}(2m + M)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2 + aMg\cos\theta$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 : \; MR\left(\frac{3R}{2} - 2a\cos\theta\right)\ddot{\theta} + M(R - a\cos\theta)\ddot{u} + MRa\sin\theta\dot{\theta}^2 + aMg\sin\theta = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 : \; (2m + M)\ddot{u} + M(R - a\cos\theta)\ddot{\theta} + Ma\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0 \end{aligned}}$$

Intégrales premières :

$$\boxed{\begin{aligned} &\boxed{T + V = E_0} : \; \frac{1}{2}(2m + M)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2 + C - aMg\cos\theta = E_0 \\ &\boxed{\frac{\partial L}{\partial u} = 0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = Const : \; (2m + M)\dot{u} + M(R - a\cos\theta)\dot{\theta} = Const \end{aligned}}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/tps.html