Faculté des Sciences Appliquées
Mécanique Rationnelle 2

Année académique 2006-2007
2e année de bachelier

NOM, PRENOM : ....
NUMERO°: ....

Examen de mécanique rationnelle
2ième session 24/08/2007 (8h-12h)

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB}\times\overline{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

<u>Question 1</u> : (3 points)

Énoncer et démontrer la formule de Steiner.

$\overline{OG}\left(a_x;a_y;a_z\right) \Rightarrow x_i = X_i + a_i$ avec X_i les coordonnées du point P dans le système d'axe centré en G

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(x_i\, x_i\, \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha\, x_\beta\right) dm = \int \left(\left(X_i + a_i\right)\left(X_i + a_i\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(X_\alpha + a_\alpha\right)\left(X_\beta + a_\beta\right)\right) dm =$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_iX_i\delta_{\alpha\beta} + a_ia_i\delta_{\alpha\beta} + 2X_ia_i\delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta - X_\alpha a_\beta - X_\beta a_\alpha - a_\alpha a_\beta\right) dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_iX_i\delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta\right) dm + \int \left(a_ia_i\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) dm + 2\int X_ia_i\delta_{\alpha\beta}dm - \int X_\alpha a_\beta dm - \int X_\beta a_\alpha dm$$

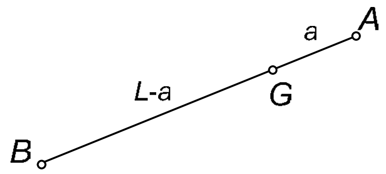
$$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + 2a_i\delta_{\alpha\beta}\underbrace{\int X_i dm}_{m\overline{GG}_i} - a_\beta\underbrace{\int X_\alpha dm}_{m\overline{GG}_\alpha} - a_\alpha\underbrace{\int X_\beta dm}_{m\overline{GG}_\beta} \Rightarrow \boxed{I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right)}$$

Par définition du centre de masse $\overline{OG} = \frac{\int \overline{OP}dm}{m} \Rightarrow mOG_i = \int OP_i dm \Rightarrow mX_i = \int x_i dm \Rightarrow 0 = \int X_i dm$

Dans les axes aux centre de masse, les coordonnées de ce centre de masse valent $(0,0,0)$

Question 2 : Planimètre à Hachette de Prytz (3 points)

Considérons un solide plan de masse *m*, modélisé par une barre rectiligne *AB*, pouvant se déplacer dans son plan horizontal *x*, *y* de manière telle que la vitesse en *A* soit constamment parallèle au vecteur *AB*.



En considérant que *k* est le rayon de giration du solide par rapport à son axe central perpendiculaire au plan *xy*, déterminer les équations de mouvement de ce solide.

Le solide est représenté par ces 3 coordonnées (x, y, θ)

$\overline{v_A} = \lambda \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - a\sin\theta\dot{\theta} = \lambda L\cos\theta \\ \dot{y} + a\cos\theta\dot{\theta} = \lambda L\sin\theta \end{cases}$ => Contrainte non holonome : $\boxed{\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta - a\dot{\theta} = 0}$

Résolution par Lagrange : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i{}^* + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}$

Réactions : $\begin{cases} \overline{R_A} \perp \overline{AB} \quad \text{et} \quad \delta\overline{OA} // \overline{AB} \Rightarrow \delta\tau = 0 \\ m\overline{g} \perp \delta\overline{OG} \Rightarrow \delta\tau = 0 \end{cases} \Rightarrow Q_i = 0 \quad (V = 0)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}$

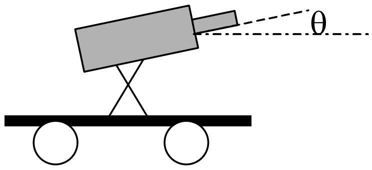
$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2} m k^2 \dot{\theta}^2$

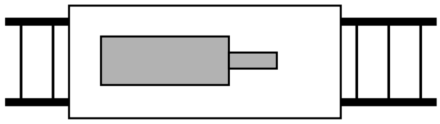
Contrainte : $\delta x\sin\theta - \delta y\cos\theta - a\delta\theta = 0$

=> 4 équations, 4 inconnues $\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda\sin\theta \\ m\ddot{y} = -\lambda\cos\theta \\ mk^2\ddot{\theta} = -\lambda a \\ \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta - a\dot{\theta} = 0 \end{cases}$ => 3 équations de mouvement $\begin{cases} m\ddot{x}\cos\theta + m\ddot{y}\sin\theta = 0 \\ mk^2\ddot{\theta}\sin\theta + m\ddot{x}a = 0 \\ \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta - a\dot{\theta} = 0 \end{cases}$

Question 3 : Canon (4 points)

Un canon lié rigidement à un wagon au repos sur une voie ferrée tire un obus de masse m à la vitesse v dans la direction indiquée sur les schémas. La masse totale (wagon + canon sans obus) est M.





Sachant que la force de frottement entre la voie et le wagon est constante et vaut R, déterminer le recul X du wagon.

Identification des différents états du système :

t_1 = avant le lancement de l'obus ($\dot{x}_1 = 0$; $x = 0$) ;

t_2 = Au moment du lancement ($\dot{x}_2$ = vitesse initiale du chariot ; $x = 0$) ;

t_3 = le chariot recul suite à la vitesse acquise lors du lancement de l'obus. ($\dot{x}$; x) ;

t_4 = Le chariot est à l'arrêt après un recul X ($\dot{x}_4 = 0$; $x = X$);

Après le départ de l'obus : Système {canon + wagon} = 1 solide entre le temps 2 et 4.

Rem : l'axe des x est dirigé vers la gauche.

$$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x} \;\Rightarrow\; M\ddot{x} = -F_{frot} \;\Rightarrow\; \int_{\dot{x}_2^2}^{0} M\frac{d\dot{x}^2}{2} = \int_0^X -F_{frot}\,dx \;\Rightarrow\; \frac{M}{2}\dot{x}_2{}^2 = F_{frot}X$$

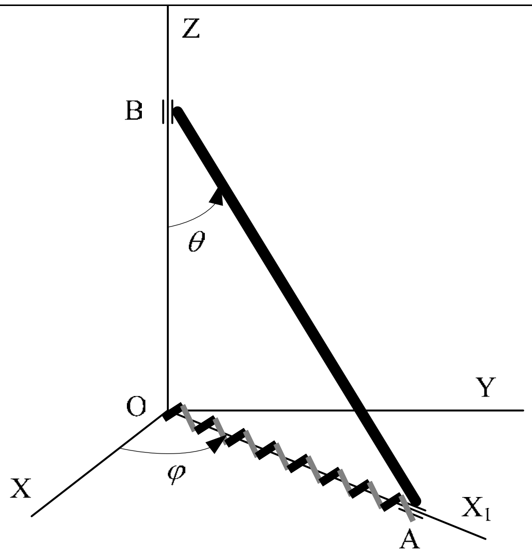
Avant le départ de l'obus Système {canon + wagon + obus} Il n'y a pas de forces extérieures suivant l'axe x. => il y a conservation de la résultante cinétique suivant l'axe x.

$$\frac{d}{dt}R_x = 0 \text{ jusqu'en } t_2 : R_{x\,t_1} = R_{x\,t_2} \Rightarrow R_{x\,t_1} = 0 \text{ et } R_{x\,t_2} = M\dot{x}_2 + mv\cos\theta \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{m}{M}v\cos\theta$$

en t=0 : $X = \dfrac{M}{2F_{frot}}\dot{x}_2{}^2 = \dfrac{m^2v^2\cos^2\theta}{2MF_{frot}}$

Question 4 : (6 points)

Une tige pesante de longueur L et de masse m, infiniment mince, peut glisser sur les axes OZ et OX_1. OX_1 reste constamment dans le plan horizontal OXY et peut tourner autour de OZ. L'extrémité A de la tige est reliée au point O par un ressort linéaire de rigidité k et de longueur libre L_0. Ce ressort est enroulé autour de OX_1. On néglige tout frottement.



Déterminer la vitesse angulaire de la barre AB.

$\overline{\omega}_{tige} = \dot{\varphi}\overline{1}_Z - \dot{\theta}\overline{1}_{y_1}$ et $\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\varphi}\overline{1}_z$

Déterminer l'accélération angulaire de la barre AB.

$\overline{\omega}_{tige} = \dot{\varphi}\overline{1}_{z_1} - \dot{\theta}\overline{1}_{y_1}$ et $\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}$

$\overline{\varepsilon}_{tige} = \ddot{\varphi}\overline{1}_{z_1} - \ddot{\theta}\overline{1}_{y_1} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1}$

Déterminer l'accélération du centre de masse de la barre AB.

$\overline{OA} = x\overline{1}_{x_1}$ => $\overline{v}_A = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + x\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} = L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + L\sin\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1}$ et $\overline{AG} = -\frac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_{x_1} + \frac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_z$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = \left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1} + \left(x\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\right)\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z = \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$=> \overline{a}_G = \frac{d\overline{v}_G}{\mathrm{dt}} = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1} + \left(\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\overline{1}_{y_1} + \left(-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}\right)\overline{1}_z$$

$$+ \underbrace{\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2\overline{1}_{x_1}}_{\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{v}_G}$$

$$\overline{a}_G = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2\right)\overline{1}_{x_1} + \left(L\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\overline{1}_{y_1} + \left(-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}\right)\overline{1}_z$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AG} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{AG} \right) =$$

$$\left(-L\sin\theta\dot{\theta}^2 + L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\varphi}^2 \right)\overline{1}_{x_1} + \left(\cancel{L\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}} + L\sin\theta\ddot{\varphi} + L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \right)\overline{1}_{y_1}$$

$$-\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}\,\overline{1}_{x_1} + \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\varphi} - \cancel{\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}} \right)\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$$

$$+\left(\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2 \right)\overline{1}_{x_1} + \left(-\cancel{\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}} \right)\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2\,\overline{1}_{z_1}$$

$$\Rightarrow \overline{a}_G = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2 \right)\overline{1}_{x_1} + \left(L\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\varphi} \right)\overline{1}_{y_1} + \left(-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} \right)\overline{1}_z$$

Déterminer les équations de mouvement.

$$\overline{\omega}_{tige} = \dot{\varphi}\overline{1}_Z - \dot{\theta}\overline{1}_{y_1} \quad \text{et} \quad \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\varphi}\overline{1}_z$$

$$x = L\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = L\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\overline{OA} = x\overline{1}_{x_1} \Rightarrow \overline{v}_A = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + x\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} = L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + L\sin\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} \quad \text{et} \quad \overline{AG} = -\frac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_{x_1} + \frac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AG} = \left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \right)\overline{1}_{x_1} + \left(x\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi} \right)\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z = \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{y_1} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \right)^2 + \left(x\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{4}\sin\theta^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}\left(I_{y_2}\dot{\theta}^2 + I_{z_2}\dot{\varphi}^2\sin^2 \right)\theta$$

$$T(\theta,\varphi,x) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x} + x^2\dot{\varphi}^2 - L\sin\theta x\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{12}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \right)$$

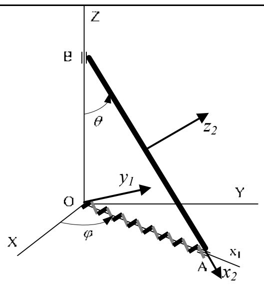
$$T(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{4}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right) \Rightarrow \boxed{T(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right)}$$

$$V = \frac{L}{2}mg\cos\theta + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = \frac{L}{2}mg\cos\theta + \frac{k}{2}\left(x - \frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow \boxed{V(\theta,\varphi) = \frac{L}{2}mg\cos\theta + \frac{k}{2}(L\sin\theta - x_0)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right) - \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{k}{2}(L\sin\theta - x_0)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} \right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta} \right) = \cancel{Q_x^*} + \cancel{\lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}} : \\ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \dfrac{mL^2}{3}2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \dfrac{L}{2}mg\sin\theta + k(L\sin\theta - x_0)L\cos\theta = 0 \\ \Rightarrow \boxed{\dfrac{mL^2}{3}\left(\ddot{\theta} - \sin 2\theta\dot{\varphi}^2 \right) - \dfrac{L}{2}mg\sin\theta + k(L\sin\theta - x_0)L\cos\theta = 0} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} \right) - \cancel{\left(\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} \right)} = \cancel{Q_\theta^*} + \cancel{\lambda_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta}} : \dfrac{mL^2}{3}\left(\sin^2\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{mL^2}{3}\left(\sin^2\theta\ddot{\varphi} + \sin 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \right) = 0} \end{cases}$$

Déterminer le moment cinétique de la barre au point A ainsi que sa dérivée.



$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A}}$$

• $\overline{M_A} = \overline{M_G} + \overline{AG}\times\overline{R}$

avec

$$\overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&I_{y_2}&0\\0&0&I_{z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\cos\theta\\-\dot{\theta}\\\dot{\varphi}\sin\theta\end{pmatrix} = -I_{y_2}\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} + I_{z_2}\dot{\varphi}\sin\theta\overline{1}_{z_2} = -\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} + \frac{mL^2}{12}\dot{\varphi}\sin\theta\left(\cos\theta\overline{1}_{x_1} + \sin\theta\overline{1}_{z_1}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{M_G} = \frac{mL^2}{12}\left(\dot{\varphi}\frac{\sin 2\theta}{2}\overline{1}_{x_1} - \dot{\theta}\overline{1}_{y_1} + \sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}\right)$$

$$\overline{AG}\times\overline{R} = \left(-\frac{mL^2}{4}(\cos\theta\sin\theta)\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \frac{mL^2}{4}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - \frac{mL^2}{4}\left(\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z\right)$$

$$= \frac{mL^2}{4}\left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \cos 2\theta\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - \sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_z\right)$$

$$\overline{M_A} = -\frac{mL^2}{6}\cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \left(\frac{mL^2}{4}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \frac{mL^2}{12}\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - \frac{mL^2}{6}\sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{M_A} = \frac{mL^2}{12}\left(-\sin 2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \underbrace{\left(3\underbrace{\cos 2\theta}_{2\cos^2\theta-1} - 1\right)}_{6\cos^2\theta-4}\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - 2\sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}\right)$$

• $\overline{M_A} = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + m\overline{AG}\times\overline{v}_A$

avec

$$\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \frac{mL^2}{3}\left(\dot{\varphi}\frac{\sin 2\theta}{2}\overline{1}_{x_1} - \dot{\theta}\overline{1}_{y_1} + \sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}\right)$$

$$m\overline{AG}\times\overline{v}_A = \frac{mL^2}{2}\left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \cos^2\theta\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - \sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_z\right)$$

$$\boxed{\overline{M_A} = \frac{mL^2}{6}\left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1} + \left(3\cos^2\theta - 2\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - \sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}\right)}$$

$$\overline{1}_{x_1} : \frac{mL^2}{6}\frac{d\left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}\right)}{dt} - \frac{mL^2}{6}\left(3\cos^2\theta - 2\right)\dot{\theta}\dot{\varphi} = \frac{mL^2}{6}\left(-\cos 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} - \frac{\sin 2\theta}{2}\ddot{\varphi}\right) - \frac{mL^2}{6}\left(3\cos^2\theta - 2\right)\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\overline{1}_{y_1} : \frac{mL^2}{6}\frac{d\left(\left(3\cos^2\theta - 2\right)\dot{\theta}\right)}{dt} - \frac{mL^2}{12}\sin 2\theta\dot{\varphi}^2 = \frac{mL^2}{6}\left(\left(3\sin 2\theta\right)\dot{\theta} + \left(3\cos^2\theta - 2\right)\ddot{\theta}\right) - \frac{mL^2}{12}\sin 2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$\overline{1}_{z_1} : \frac{mL^2}{6}\frac{d\left(-\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)}{dt} = \frac{mL^2}{6}\left(-\sin 2\theta\dot{\varphi} - \sin^2\theta\ddot{\varphi}\right)$$

Déterminer l'ensemble des équations scalaires permettant de trouver les réactions en *A* et *B*. (Ne pas résoudre le système d'équation)

$$\overline{R}_A\left(0,Y_A,Z_A\right),\overline{R}_B\left(X_B,Y_B,0\right),\overline{R}_G\left(0,0,m\overline{g}\right),\overline{F}_R\left(-k\left(L\sin\theta-x_0\right),0,0\right)$$

$$\overline{R}=m\overline{v}_G=m\left(\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1}+m\left(\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\right)\overline{1}_{y_1}-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R}=\overline{F}_{\mathrm{e}}} \Rightarrow \begin{cases} m\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2\right)=\boxed{X_B}-k\left(L\sin\theta-x_0\right) \quad (1)\\ m\left(L\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}+\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\varphi}\right)=\boxed{Y_A}+\boxed{Y_B} \quad (2)\\ m\left(-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2-\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}\right)=\boxed{Z_A}-mg \quad (3)\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A}=\overline{m}_{\mathrm{e},A}+m\overline{v}_G\times\overline{v}_A}$$

$$\begin{cases} \bullet\ \overline{M_A}=\frac{mL^2}{12}\left(-\sin 2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1}+\left(3\cos 2\theta-1\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}-2\sin^2\theta\dot{\varphi}\overline{1}_{z_1}\right)\\ \bullet\ \overline{m}_{\mathrm{e},A}=-mg\frac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_{y_1}-L\cos\theta Y_B\overline{1}_{x_1}+X_BL\cos\theta\overline{1}_{y_1}-Y_BL\sin\theta\overline{1}_{z_1}\\ \bullet\ m\overline{v}_G\times\overline{v}_A=+m\frac{L^2}{2}\sin^2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\overline{1}_{x_1}-m\frac{L^2}{2}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2\overline{1}_{y_1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \overline{1}_{x_1}:\frac{mL^2}{6}\left(-\cos 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}-\frac{\sin 2\theta}{2}\ddot{\varphi}\right)-\frac{mL^2}{6}\left(3\cos^2\theta-2\right)\dot{\theta}\dot{\varphi}=-L\cos\theta\boxed{Y_B}+m\frac{L^2}{2}\sin^2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad (4)\\ \overline{1}_{y_1}:\frac{mL^2}{6}\left(\left(3\sin 2\theta\right)\dot{\theta}+\left(3\cos^2\theta-2\right)\ddot{\theta}\right)-\frac{mL^2}{12}\sin 2\theta\dot{\varphi}^2=-mg\frac{L}{2}\sin\theta+\boxed{X_B}L\cos\theta-m\frac{L^2}{2}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 \quad (5)\\ \overline{1}_{z_1}:\frac{mL^2}{6}\left(-\sin 2\theta\dot{\varphi}-\sin^2\theta\ddot{\varphi}\right)=-\boxed{Y_B}L\sin\theta \quad (6)\end{cases}$$

Les équations 4 et 5 sont redondantes => à utiliser pour vérifier les équations de mouvement

$$\boxed{\frac{d\overline{M_G}}{dt}=\overline{m}_{e,G}}$$

$$\begin{cases} \frac{mL^2}{12}\left(\cos 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{\sin 2\theta}{2}\ddot{\varphi}+\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)=\frac{L}{2}\cos\theta Y_A-\frac{L}{2}\cos\theta Y_B\\ \frac{mL^2}{12}\left(-\ddot{\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}^2\right)=-\frac{L}{2}\sin\theta Z_A+\frac{L}{2}\cos\theta X_B-\frac{L}{2}\cos\theta k\left(L\sin\theta-x_0\right)\\ \frac{mL^2}{12}\left(\sin^2\theta\ddot{\varphi}+\sin 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)=\frac{L}{2}\sin\theta Y_A-\frac{L}{2}\sin\theta Y_B\end{cases}$$

$$(4)\sin\theta-(6)\cos\theta=(7)\ :\ \left(\cos 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{\sin 2\theta}{2}\ddot{\varphi}+\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\sin\theta=\left(\sin^2\theta\ddot{\varphi}+\sin 2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\cos\theta$$

$$(1)\cos\theta-(5)=(8):\frac{mL^2}{12}\left(-\ddot{\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}^2\right)=-\frac{L}{2}\sin\theta\boxed{Z_A}+\frac{L}{2}\cos\theta\left(m\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2\right)\right)$$

=> (8) − (3) = (9)

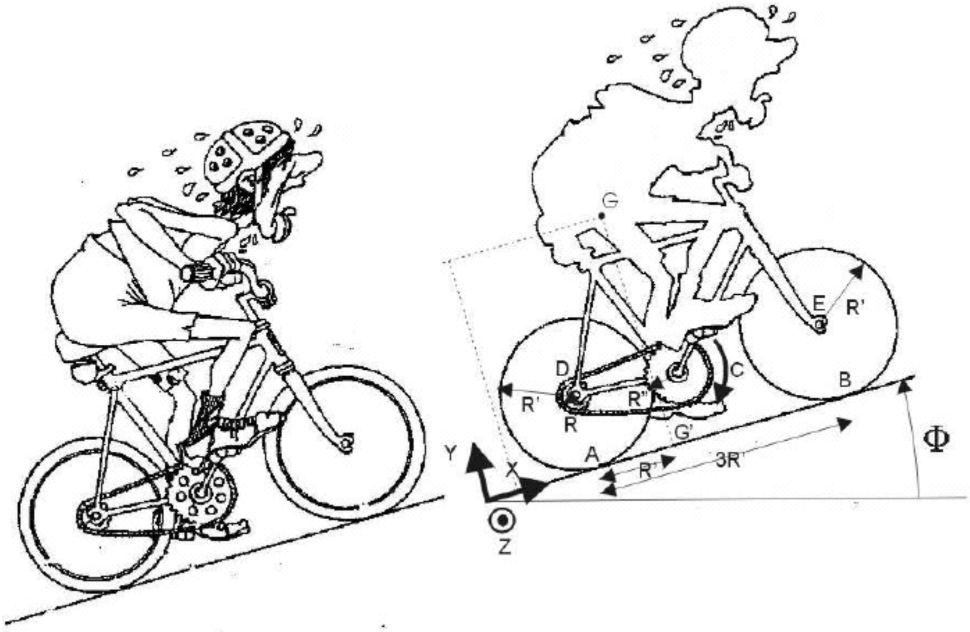
$$:\frac{mL^2}{12}\left(-\ddot{\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\varphi}^2\right)=-\frac{L}{2}\sin\theta m\left(-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2-\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}+g\right)+\frac{L}{2}\cos\theta\left(m\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\varphi}^2\right)\right)$$

NOM, PRENOM : ....NUMERO°: ....

Question 5 : Cycliste en côte (4 points)

Un cycliste grimpe une pente d'angle θ. L'ensemble constitué par le cadre du vélo et le cycliste est considéré comme un solide indéformable S, de masse M et de centre de gravité G. La roue arrière a une masse M', un rayon R', et son centre de gravité est en D sur l'axe de rotation de la roue arrière par rapport au cadre; idem pour la roue avant (M', R') autour de E (seule la contribution de la masse circonfèrencielle des roues est prise en compte pour leurs propriétés d'inertie).
Le plateau du pédalier S'' sur lequel le cycliste exerce un couple C a un rayon R''; ce plateau tourne par rapport au cadre autour du point O (la masse du plateau est considérée comme négligeable). La roue arrière est entraînée par l'intermédiaire d'une chaîne (supposée inextensible et sans poids) reliant le plateau du pédalier S'' avec le pignon de la roue arrière, de centre D et de rayon R (ce pignon de masse négligeable est solidaire de la roue arrière).
Autres données (pas toutes nécessairement utiles...) :

- La distance entre les points A et B de contact des roues vaut $3R'$. Le point G, centre de gravité de S se trouve à une hauteur du sol égale à H, AG' étant égal à R' (G' est la projection de G sur le sol);
- Toutes les liaisons sont sans perte.



Déterminer la (ou les) **équation(s) différentielle**(s) du mouvement.

coordonnées généralisées : x

$S(M)$ pour le cycliste

$S_1'(M', R', G_1', \omega_1')$ pour la roue arrière

$S_2'(M', R', G_2', \omega_2')$ pour la roue avant

$S"(0, R", \omega")$ pour le pédalier

Par Lagrange :

$$T = \underbrace{\frac{M\dot{x}^2}{2} + 0}_{cycliste} + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_1'^2}_{roue\ arrière} + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_2'^2}_{roue\ avant}$$

$$V = Mg\left(x\sin\theta + H\cos\theta\right) + M'g\left(\left(x - R'\right)\sin\theta + R'\cos\theta\right) + M'g\left(\left(x + 2R'\right)\sin\theta + R'\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow V = \left(M + 2M'\right)gx\sin\theta + const$$

Contrainte de roulement sans glissement :

$$\overline{v}_{I_1} = \overline{v}_{G_1} + \overline{\omega}_1' \times \overline{G_1 I_1} \Rightarrow \omega_1' = \frac{\dot{x}}{R'} \text{ et } \overline{v}_{I_2} = \overline{v}_{G_2} + \overline{\omega}_2' \times \overline{G_2 I_2} \Rightarrow \omega_2' = \frac{\dot{x}}{R'} \Rightarrow \delta\alpha' = \frac{\delta x}{R'}$$

Rapport de rayon : $R"\omega" = R\omega' \Rightarrow R"\delta\alpha" = R\delta\alpha'$

Travail du couple : $\delta\tau = C\delta\alpha" = C\frac{R}{R"}\delta\alpha' = C\frac{R}{R".R'}\delta x$

$$L = \frac{1}{2}\left(M + 4M'\right)\dot{x}^2 - \left(M + 2M'\right)gx\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = Q_x : \boxed{\left(M + 4M'\right)\ddot{x} + \left(M + 2M'\right)g\sin\theta = C\frac{R}{R".R'}}$$

BROUILLONS

BROUILLONS