1. Identification des différents états du système :

t_1 = avant le lancement de l'obus ($\dot{x}_1 = 0$; $x = 0$) ;

t_2 = Au moment du lancement ($\dot{x}_2$ = vitesse initiale du chariot ; $x = 0$) ;

t_3 = le chariot recul suite à la vitesse acquise lors du lancement de l'obus. ($\dot{x}$; x) ;

t_4 = Le chariot est à l'arrêt après un recul X ($\dot{x}_4 = 0$; $x = X$);

Après le départ de l'obus : Système {canon + wagon} = 1 solide entre le temps 2 et 4.
Rem : l'axe des x est dirigé vers la gauche.

$$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{\mathrm{e},x} \Rightarrow M\ddot{x} = -F_{frot} \Rightarrow \int_{\dot{x}_2^2}^{0} M\frac{d\dot{x}^2}{2} = \int_0^X -F_{frot}dx \Rightarrow \frac{M}{2}\dot{x}_2{}^2 = F_{frot}X$$

Avant le départ de l'obus Système {canon + wagon + obus} Il n'y a pas de forces extérieures suivant l'axe x.
=> il y a conservation de la résultante cinétique suivant l'axe x.

$$\frac{d}{dt}R_x = 0 \text{ jusqu'en } t_2 : R_{x\,t_1} = R_{x\,t_2} \Rightarrow R_{x\,t_1} = 0 \text{ et } R_{x\,t_2} = M\dot{x}_2 + mv\cos\theta\cos\phi \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{m}{M}v\cos\theta\cos\phi$$

en t=0 : $X = \dfrac{M}{2F_{frot}}\dot{x}_2{}^2 = \dfrac{m^2v^2\cos^2\theta\cos^2\phi}{2MF_{frot}}$

---

2. Par le théorème du moment cinétique : concervation du moment cinétique

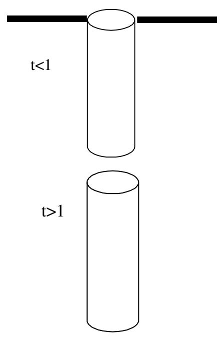
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M}_0 = 0 \Rightarrow \overline{M}_0{}^+ = \overline{M}_0{}^- \Rightarrow \frac{M_1R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega$$

$$\frac{M_2R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_2+3M_2)R^2}{6}\omega \Rightarrow \omega = \frac{\omega_2}{4}$$

Pourcentage de l'énergie cinétique : $\dfrac{T^+}{T^-} = \dfrac{\dfrac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega^2}{\dfrac{M_1R^2}{2}\omega_1{}^2 + \dfrac{M_2R^2}{2}\omega_2{}^2} = \dfrac{1}{19.4} = 1{,}32\,\%$

---

3. Pour le système {patineur} : $\overline{m_{\mathrm{e},O}} = 0$; $\overline{v_G} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\overline{M_O} = 0$ où $\overline{M_O} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$



t<0 : $\overline{\omega} = \omega_1\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \dfrac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\underbrace{\dfrac{m_2l_2^2}{12}}_{I_{zG(tige)}} + \underbrace{m_2\left(\dfrac{l_2}{2}+r_1\right)^2}_{d_{zzG}}\right)$

t>0 : $\overline{\omega} = \omega_2\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \dfrac{m_3r_3^2}{2} \Rightarrow \overline{M_O} = \dfrac{m_3r_3^2}{2}\omega_2\,\overline{1_z}$

$$\overline{M_{O\,t<0}} = \overline{M_{O\,t>0}} \Rightarrow \left[\frac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\frac{m_2l_2^2}{12} + m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2\right)\right]\omega_1 = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 4{,}89\ t/s$$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.

4.1 $\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt}}$ et $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \quad \text{car } O \text{ est fixe}}$

Changement d'axes : $\begin{cases} \overline{1}_X = \cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y \\ \overline{1}_Y = -\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y \end{cases}$ où $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

<u>En travaillant dans les axes Oxyz</u> (R2) tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\left(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y\right) = \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_{R1/R0}$

$\overline{R} = -Md\omega\overline{1}_z$ => $\boxed{\overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt}} = \overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{R} = -Md\omega^2\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right)$

$$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & / \\ -P_{xy} & I_y & / \\ 0 & 0 & / \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\overline{1}_y$$

=> $\boxed{\overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt}} = \overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{M}_O = -\left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\omega\sin\theta\,\overline{1}_z + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\omega\cos\theta\,\overline{1}_z$

=>$\overline{m}_{e,O} = \left[\cos\theta\sin\theta\left(I_y - I_x\right) + P_{xy}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right]\omega^2\,\overline{1}_z$ => $\boxed{\overline{m}_{e,O} = \left[\frac{2}{5}\left(I_y - I_x\right) - \frac{3}{5}P_{xy}\right]\omega^2\,\overline{1}_z}$

OU <u>En travaillant directement dans les axes OXYZ</u> (R1) tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_X$

$\overline{R} = -Md\omega\overline{1}_Z$ => $\overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{R} = Md\omega^2\,\overline{1}_Y$

$$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_X & - & - \\ -P_{XY} & - & - \\ 0 & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_X\omega\overline{1}_X - P_{XY}\omega\overline{1}_Y \Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{M}_O \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = -P_{XY}\omega^2\,\overline{1}_Z}$$

où $P_{XY} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_y + I_x\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy}$=> $\boxed{\overline{m}_{e,O} = -\left(\frac{2}{5}\left(-I_y + I_x\right) + \frac{3}{5}P_{xy}\right)\omega^2\,\overline{1}_Z}$

P_{XY} a été calculé à la séance 5. => $P_{XY} = \frac{2}{5}\left(-M\frac{H^2}{3} + M\frac{H^2}{12}\right) + \frac{3}{5}M\frac{H^2}{24} = \frac{-3MH^2}{40}$

=> $\boxed{\overline{F}_e = Md\omega^2\,\overline{1}_Y = Md\omega^2\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right)}$ et $\boxed{\overline{m}_{e,O} = -P_{XY}\omega^2\,\overline{1}_Z = \frac{3MH^2}{40}\omega^2\,\overline{1}_Z}$

4.2 <u>A l'équilibre dynamique :</u>

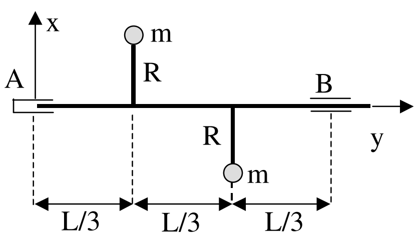
$\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{R} = R\omega\overline{1}_Y = 0}$ => $\overline{R} = \left(-Md + m_1L - m_2L\right)\omega\overline{1}_z = 0$ => $m_1 - m_2 = \frac{Md}{L}$

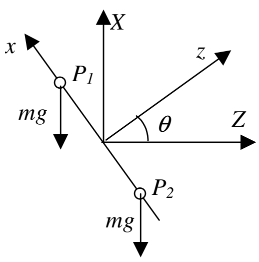
$\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{M}_O = -P_{XY}\omega^2\,\overline{1}_Z = 0}$ => $P_{XY,O}$=0

$P_{XY,O} = \left[\frac{-3MH^2}{40}\right]_S + \left[-m_1\frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_1} + \left[-m_2\frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_2}$ avec $\overline{OA'} = \left(-\frac{\sqrt{5}H}{2}, L, 0\right)$; $\overline{OD'} = \left(\frac{\sqrt{5}H}{2}, -L, 0\right)$

$\begin{cases} \left(m_1 + m_2\right) = \frac{2}{\sqrt{5}HL}\left[\frac{-3MH^2}{40}\right] \\ m_2 = m_1 - \frac{Md}{L} \end{cases}$ => $m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[\frac{-3MH^2}{40}\right] + \frac{Md}{2L}$ et $m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[\frac{-3MH^2}{40}\right] - \frac{Md}{2L}$

5.





Dans les axes $Axyz$ liés au système, réactions extérieures :

$$\begin{cases} \overline{R}_A(R_{A,x}(t),R_{A,y}(t),R_{A,z}(t)) \\ \overline{R}_B(R_{B,x}(t),0,R_{B,z}(t)) \\ mg(-\cos\theta,0,-sin\theta) \text{ en } P_1(R,\dfrac{L}{3},0) \\ mg(-\cos\theta,0,-sin\theta) \text{ en } P_2(-R,\dfrac{2L}{3},0) \end{cases}$$

<u>Recherche des réactions en B :</u>

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = m\overline{v}_G \times \overline{v}_A + \overline{m}_{e,A} \underset{A \text{ fixe}}{=>} \frac{d\overline{M}_A}{dt} = \overline{m}_{e,A}$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2\overline{1}_z \text{ avec } \left| \begin{array}{l} \overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} \underset{A\text{ fixe}}{=} \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \left(\begin{array}{c} -P_{xy} \\ I_y \\ 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{xy}\omega^2\overline{1}_z = \overline{m}_{e,A}} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\dfrac{L}{3}\right) + \left(0 + m(-R)\dfrac{2L}{3}\right) = -m\dfrac{LR}{3} \\ \overline{m}_{e,A} = -LR_{B,x}\overline{1}_z + LR_{B,z}\overline{1}_x + mgR\sin\theta\overline{1}_y + mg\dfrac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z - mg\dfrac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ \qquad -mgR\sin\theta\overline{1}_y + mg\dfrac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z - mg\dfrac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ => \overline{m}_{e,A} = \left(LR_{B,z} - mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(mgL\cos\theta - LR_{B,x}\right)\overline{1}_z \end{array} \right.$$

$$=> \begin{cases} x: LR_{B,z} - mgL\sin\theta = 0 => R_{B,z} = mg\sin\theta \\ z: mgL\cos\theta - LR_{B,x} = -m\dfrac{LR}{3}\omega^2 \text{ avec } => R_{B,x} = m\left(g\cos\theta + \dfrac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

<u>Recherche des réactions en A :</u>

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt} \underset{B\text{ fixe}}{=} \overline{m}_{e,B}$$

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2\overline{1}_z \text{ avec } \left| \begin{array}{l} \overline{M}_B \underset{B\text{ fixe}}{=} \overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{xy}\omega^2\overline{1}_z = \overline{m}_{e,B}} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\left(-\dfrac{2L}{3}\right)\right) + \left(0 + m(-R)\left(-\dfrac{L}{3}\right)\right) = -m\dfrac{1}{3}LR \\ \overline{m}_{e,B} = -LR_{A,z}\overline{1}_x + LR_{A,x}\overline{1}_z + mgR\sin\theta\overline{1}_y - mg\dfrac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z + mg\dfrac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ \qquad -mgR\sin\theta\overline{1}_y - mg\dfrac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z + mg\dfrac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ => \overline{m}_{e,B} = \left(-LR_{A,z} + mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(-mgL\cos\theta + LR_{A,x}\right)\overline{1}_z \end{array} \right.$$

$$=> \begin{cases} -LR_{A,z} + mgL\sin\theta = 0 => R_{A,z} = mg\sin\theta \\ -mgL\cos\theta + LR_{A,x} = -m\dfrac{LR}{3}\omega^2 \text{ avec } => R_{A,x} = m\left(g\cos\theta - \dfrac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

Dans la position indiquée : $\theta = 0 => R_{A,z} = 0$ et $R_{A,x} = m\left(g - \dfrac{R}{3}\omega^2\right)$
