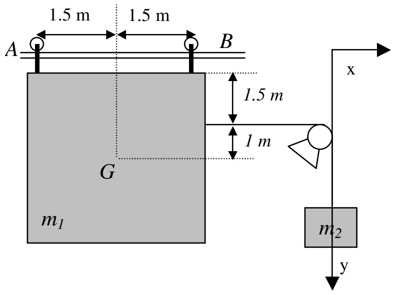
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2005-2006
Corrigé de la séance 8

Update 14/04/2006 : Ex 3 (-rN) et Ex 4 (accolade sous les Pxy et Pxz)
Update 19/04/2006 : Ex 5.2 et Ex 3.2 (complément)

1.



<u>Système {Porte (m_1)}</u> : *Théorème de la résultante cinétique* suivant x : $\frac{d}{dt}\bar{R}\Big|_x = \sum \bar{F}_e\Big|_x$ => $m_1\ddot{x} = F$ (1)

<u>Système {Contrepoids (m_2)}</u> : *Théorème de la résultante cinétique* suivant y : $\frac{d}{dt}\bar{R}\Big|_y = \sum \bar{F}_e\Big|_y$ => $m_2\ddot{y} = -F + m_2 g$ (2)

(1) + (2) => $(m_1 + m_2)a = m_2 g$ avec $\ddot{x} = \ddot{y} = a$

<u>Système {Porte (m_1)}</u> :

Théorème de la résultante cinétique suivant y : $\frac{d}{dt}\bar{R}\Big|_y = \sum \bar{F}_e\Big|_y$ => $0 = -R_A - R_B + m_1 g$ (3)

Théorème du moment cinétique en *G* : (en un autre point P, le terme $m\bar{v}_G \times \bar{v}_P$ ne sera pas nul)

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = m\bar{v}_G \times \bar{v}_G + \sum \bar{m}_{e,G} \Rightarrow 0 = R_A.1,5 - R_B.1,5 + F.1 \quad \text{car } \bar{\omega} = 0 \quad (4)$$

(3) + (4) : $R_B = \frac{m_1 g}{2} + \frac{F}{3} = m_1 g\left(\frac{8}{15}\right) = 2354,4\ N$ et $R_A = 2060,1\ N$

---

2. *P* l'intersection de la barre uniforme avec l'axe *AB* : *Px'y'z'* = repère lié à la barre avec *x'* suivant la barre.

$$\boxed{\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \bar{m}_{e,O} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O = \overline{M}_P + \overline{OP} \times \bar{R}}$$

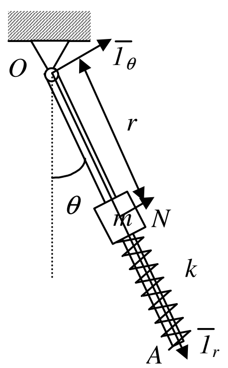
$\overline{M}_P = -P_{x'z'}.\omega\bar{1}_{z'} - P_{y'z'}.\omega\bar{1}_{z'} + I_{z'}.\omega\bar{1}_{z'}$ avec $\bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{1}_z$ et $P_{x'z'}$=$P_{y'z'}$=0 car $z' = 0$

$$\Rightarrow \overline{M}_P = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\bar{1}_{z'} \quad \text{et} \quad \bar{R} = m\frac{d\overline{OG}}{dt} = m\frac{L}{2}\dot{\theta}\bar{1}_{y'}\ ; \quad \overline{OP} = -b\bar{1}_{z'} \Rightarrow \overline{M}_O = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\bar{1}_z + mb\frac{L}{2}\dot{\theta}\bar{1}_{x'}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \bar{m}_{e,O} : \ m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\bar{1}_{y'} = cR_{Bx}\bar{1}_y - cR_{By}\bar{1}_x \Rightarrow m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\bar{1}_y - \sin\theta\bar{1}_x\right) = cR_{Bx}\bar{1}_y - cR_{By}\bar{1}_x$$

$$\Rightarrow R_{Bx} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\cos\theta \quad \text{et} \quad R_{By} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\sin\theta \Rightarrow \bar{R}_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\bar{1}_x + \sin\theta\bar{1}_y\right) \text{ avec } R_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2$$

3.1



<u>Système {masse (m)}</u> : *Théorème de la résultante cinétique* suivant $\bar{1}_r$:

$$\frac{d}{dt}\bar{R} = \sum \bar{F}_e\Big|_{\bar{1}_r} \Rightarrow m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \underbrace{-k\left(r - r_0\right)}_{-k((L-r)-(L-r_0))(-\bar{1}_r)} + mg\cos\theta \quad (1)$$

<u>Système {Tige (M) + masse (m)}</u> : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G} \times \underbrace{\overline{v_O}}_{=0} + \sum \bar{m}_{e,O} \quad \text{où} \quad \overline{M_O} = \overline{M_{O(m)}} + \overline{M_{O(M)}}$$

$$\overline{M_{O(M)}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}\,\bar{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{M_{O(m)}} = \underbrace{\overline{M_G}}_{\text{=0 masse ponctuelle}} + \overline{OG} \times m\overline{v_G} = mr^2\dot{\theta}\,\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ML^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - mgr\sin\theta \quad (2)$$

3.2 <u>Système {Tige (M)}</u> : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G}\times\underbrace{\overline{v_O}}_{=0} + \sum \overline{m}_{e,O} \Rightarrow \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - rN \quad (3)$$

$$\Rightarrow N = -ML\frac{\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{g}{2}\sin\theta}{r}$$

OU

<u>Système {masse (m)}</u> : *Théorème de la résultante cinétique* suivant 1_θ :

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e \Big|_{\overline{1}_r} \Rightarrow m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = N - mg\sin\theta \Rightarrow N = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) + mg\sin\theta$$

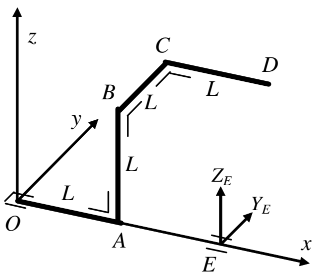
avec l'équation de mouvement 2 : $\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta Mg = -mr\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) - mgr\sin\theta$

$$N = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) + mg\sin\theta = -\frac{\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta Mg}{r}$$

Application sur Matlab sur le site http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ => Notes : compléments TPs

---

4.



<u>Système {système complet (4m)}</u> : *Théorème du moment cinétique* en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G}\times\overline{v_O} + \sum \overline{m}_{e,O} \text{ où } \overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{1}_x \text{ et } \overline{M_O} = I_x\dot{\theta}\,\overline{1}_x - P_{xy}\dot{\theta}\,\overline{1}_y - P_{xz}\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\sum \overline{m}_{e,O} = \overline{\mathrm{OE}}\times(\overline{Y}_E + \overline{Z}_E) + \overline{\mathrm{OG}_1}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_2}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_3}\times m\overline{g} + \overline{\mathrm{OG}_4}\times m\overline{g}$$

Dans le système d'axe $Oxyz$ lié au solide :

$$\overline{\mathrm{OG}_1}\left(\frac{L}{2},0,0\right); \overline{\mathrm{OG}_2}\left(L,0,\frac{L}{2}\right); \overline{\mathrm{OG}_3}\left(L,\frac{L}{2},L\right); \overline{\mathrm{OG}_4}\left(L+\frac{L}{2},L,L\right);$$

$$m\overline{g} = -mg\,\overline{1}_Z = -mg\left(\sin\theta\,\overline{1}_y + \cos\theta\,\overline{1}_z\right)$$

$$I_x = \underbrace{0}_{OA} + \underbrace{\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{AB} + \underbrace{\frac{mL^2}{12} + m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2\right]}_{BC} + \underbrace{0 + m\left[L^2 + L^2\right]}_{CD} = \frac{11}{3}mL^2$$

$$P_{xy} = \underbrace{m.L.0}_{OA} + \underbrace{m.L.0}_{AB} + \underbrace{m.\frac{L}{2}.L}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 2mL^2 \quad \text{et} \quad P_{xz} = \underbrace{m.L.0}_{OA} + \underbrace{m.L.\frac{L}{2}}_{AB} + \underbrace{m.L.L}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 3mL^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}mL^2\ddot{\theta} = \frac{5}{2}mLg\sin\theta - \frac{3}{2}mLg\cos\theta & (1) \\ -2mL^2\ddot{\theta} + 3mL^2\dot{\theta}^2 = -2LZ_E + 4mLg\cos\theta & (2) \\ -3mL^2\ddot{\theta} - 2mL^2\dot{\theta}^2 = 2LY_E - 4mLg\sin\theta & (3) \end{cases}$$

$$(1) : \dot{\theta}^2 = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(5\left(-\cos\theta + 1\right) - 3\left(\sin\theta - 0\right)\right) = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(-3\sin\theta - 5\cos\theta + 5\right) \quad (4)$$

$$(1)+(2)+(4) : Z_E = \frac{mg}{22}\left(42\sin\theta + 80\cos\theta - 45\right)$$

$$(1)+(3)+(4) : Y_E = \frac{mg}{44}\left(79\sin\theta + 87\cos\theta - 60\right)$$

5.1 Dans les axes *OXYZ* liés à la plaque

$$\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = 0 \text{ car } \overline{R} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \quad \text{car } O \text{ est un point fixe}}$$

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} \frac{mH^2}{12} & 0 & - \\ 0 & \frac{mB^2}{12} & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mH^2}{12}\omega \sin\theta \overline{1}_X + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta \overline{1}_Y$$

$$\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\frac{d\overline{1}_X}{dt} + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\frac{d\overline{1}_Y}{dt}$$

$$= \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\left(-\omega\cos\theta\overline{1}_Z\right) + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\left(+\omega\sin\theta\overline{1}_Z\right)$$

$$= \left(-\frac{mH^2}{24}\omega^2\sin 2\theta + \frac{mB^2}{24}\omega^2\sin 2\theta\right)\overline{1}_Z = \frac{m}{24}\omega^2\sin 2\theta\left(B^2 - H^2\right)\overline{1}_Z = \sum \overline{m}_{e,O}$$

Ou directement dans les Oxyz tournant avec la plaque :

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} - & -P_{xy} & - \\ - & I_y & - \\ - & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overline{1}_x = \cos\theta\overline{1}_X - \sin\theta\overline{1}_Y \\ \overline{1}_y = \sin\theta\overline{1}_X + \cos\theta\overline{1}_Y \end{cases} \; ; \; I_X = \frac{mH^2}{12} \; ; \; I_Y = \frac{mB^2}{12}$$

$$\begin{cases} I_{y,plaque} = \sin^2\theta I_X + \cos^2\theta I_Y - 2\sin\theta\cos\theta P_{XY} = \sin^2\theta\frac{mH^2}{12} + \cos^2\theta\frac{mB^2}{12} \\ P_{xy,plaque} = \sin\theta\cos\theta\left(I_Y - I_X\right) = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$\overline{M}_O = -\left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega\overline{1}_x + \left(\sin^2\theta\frac{mH^2}{12} + \cos^2\theta\frac{mB^2}{12}\right)\omega\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega^2\overline{1}_z = \sum \overline{m}_{e,O}$$

5.2 Dans les axes *Oxyz*.

$$\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \text{ car } O \text{ est un point fixe}} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y$$

$$P1(X_1, d); P2(-X_2, d)$$

$$\begin{cases} I_y = I_{y,plaque} - I_{y,r1} - I_{y,r2} = \sin^2\theta \frac{mH^2}{12} + \cos^2\theta \frac{mB^2}{12} - \left(\frac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 X_1^2\right) - \left(\frac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 X_2^2\right) \\ P_{xy} = P_{xy,plaque} - P_{xy,r1} - P_{xy,r2} = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2} - \left(0 + \rho\pi r^2 X_1 d\right) - \left(0 + \rho\pi r^2 X_2 d\right) \end{cases}$$

$$\overline{M}_O = \left(-\frac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 + X_2\right)d\right)\omega\overline{1}_x + \left(\frac{m}{12}\left(H^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right) - \rho\pi r^2\left(\frac{r^2}{2} + X_1^2 + X_2^2\right)\right)\omega\overline{1}_y$$

A l'équilibre statique et dynamique :

$$\boxed{\sum \overline{m}_{e,Oz} = 0} \Rightarrow -\left(-\rho\pi r^2 g X_1\right) - \left(\rho\pi r^2 g X_2\right) = 0 \Rightarrow X_1 = X_2$$

De plus, $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = 0} = \left(-\frac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 + X_2\right)d\right)\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt}$

$$\Rightarrow -\left(-\frac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 + X_2\right)d\right)\omega^2\overline{1}_z = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{m}{48}\frac{\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta}{\rho\pi r^2 d}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html