ULB Faculté des Sciences Appliquées

NOM :
PRENOM :

Mécanique Rationnelle
2e candidature

Examen de mécanique rationnelle
1ère session 15/06/2006 (8h-12h)
Année académique 2005-2006

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons
Si vous avez besoin de plus de place, répondez au verso de la page en question (correcteurs différents)

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$$

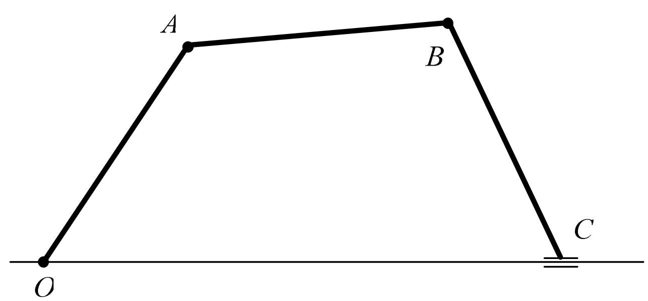
$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A} \quad \text{avec} \quad \overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB} \times \overline{R} \quad \text{ou} \quad \overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h . \overline{v}_h \quad \text{avec} \quad T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A . \left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

$$L = T - V \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

Question 1 : (4 points)

Soit trois barres pesantes, homogènes, identiques, de masse *m* et de longueur *L*. *OA* est fixée en *O* par une rotule, *AB* est articulée à *OA* en *A*, *BC* est articulée à *AB* en *B*. *C* est une glissière.



1. Combien de degré de liberté comporte le système ? Justifiez.

2 degré de liberté :
3 coordonnées / solide = 9 coordonnées
- 3 rotule = 2 équations de liaison
- 1 glissière = 1 équation de liaison
=2 ddl

2. Quelles sont les inconnues (de mouvement et les réactions de liaison) ?

2 ddl : angle θ_1 et θ_2 définis respectivement entre les tiges *OA* et *AB* avec l'horizontale
Réaction de liaison en *O* : X_O et Y_O
Réaction de liaison en *C* : Y_C

Réaction interne en *A* : X_A et Y_A
Réaction interne en *B* : X_B et Y_B

3. Quelles sont les équations permettant d'établir ces inconnues ?

Par les théorèmes généraux :
S1+S2+S3 : Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et Y_C
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , θ_2, , Y_C et Y_O
=>3 équations, 5 inconnues

S1 :
Théorème du moment cinétique en O sur S1 : 1 équation liant θ_1 et X_A et Y_A
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , X_A et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , Y_A et Y_O
=>3 équations, 5 inconnues

S1+S2 :
Théorème du moment cinétique en O sur S1+S2 : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et Y_B
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 θ_2, ,, Y_B et Y_O
=>3 équations, 5 inconnues

9 équations, 9 inconnues

4. Etablir ces équations (sans détailler les calculs mais en montrant clairement comment établir chaque terme et chaque grandeur fondamentale)

Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x :
1 équation liant θ_1 , θ_2, et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y :
1 équation liant θ_1 , θ_2, , Y_C et Y_O

$$\frac{d}{dt}\overline{R}=\overline{F}_{\mathrm{e}} \text{ avec } \begin{cases} \overline{R}=\sum_i \overline{R_i} \\ \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i} \\ \overline{v}_{G_1}=\overline{v}_O+\overline{\omega}_1\times\overline{OG_1}\,;\overline{v}_{G_2}=\overline{v}_A+\overline{\omega}_2\times\overline{AG_2}\,;\overline{v}_{G_3}=\overline{v}_B+\overline{\omega}_3\times\overline{BG_3} \\ \text{et la contrainte : } L\sin\theta_1+L\text{sins}\,\theta_2=L\sin\theta_3 \\ \overline{F}_e=\overline{R}_O+\overline{R}_C-3m\overline{g} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{OG_1}=\frac{L}{2}\left(\cos\theta_1\overline{1}_x+\sin\theta_1\overline{1}_y\right)=>\overline{v}_{G1}=\frac{L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1$$

$$\overline{v}_{G2}=\overline{v}_A+\dot{\theta}_2\overline{1}_z\times\overline{AG_2}=L\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2$$

$$\overline{v}_{G3}=\overline{v}_B-\dot{\theta}_3\overline{1}_z\times\overline{BG_3}=L\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+L\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3$$

$$=>\overline{R}\left(S_1+S_2+S_3\right)=m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]$$

$$\begin{cases} m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]=X_O \\ m\left[\frac{5L}{2}\left(+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_3\right]=Y_O+Y_C-3mg \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 et θ_2 et Y_C

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O}=\overline{m}_{\mathrm{e},O} \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \overline{M_O}=\sum_i \overline{M_{O_i}} \\ \overline{M_{O_i}}=\overline{M_{G_i}}+\overline{OG_i}\times\overline{R_i} \\ \overline{M_{G_i}}=\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i=\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}_i\overline{1}_z \\ \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{m}_{\mathrm{e},O}=\sum_i \overline{OG_i}\times m\overline{g}+\overline{OC}\times\overline{R}_C$$

<u>Question 2</u>: Gyroscope (3 points)

1. **Démontrer** le théorème du moment cinétique d'un solide muni d'un gyroscope.

Théorème du moment cinétique en G : $\frac{d\overline{M_G}}{dt} = \overline{m}_{e,G}$

Système constitué d'un solide S dans lequel un gyroscope (solide de révolution) g^0 est en rotation.

Rotation du solide S : $\overline{\varpi}$; Rotation propre du gyroscope autour de son axe de révolution : $\overline{\Omega}$

=> Le gyroscope subit donc une double rotation : $\overline{\varpi}+\overline{\Omega}$

Vitesse des points appartenant au gyroscope par rapport au solide : $\overline{v}_h{}^0 = \overline{\Omega}\times\overline{G^0P_h^0}$

Résultante cinétique (relative) du gyroscope $\overline{R}^0 = \int \overline{v}_h{}^0 dm^0 = m^0\overline{v}_{G^0} = 0$ (centre de masse du gyroscope fixe dans son repère relatif)

Moment cinétique (relatif) du gyroscope par rapport à son centre de masse :

$$\overline{M_G}^0 = \int \overline{G^0P_h^0}\times\left(\overline{v}_h{}^0dm^0\right) = \int \overline{G^0P_h^0}\times\left(\overline{\Omega}\times\overline{G^0P_h^0}\right)dm^0 = \int \left[\left(\overline{G^0P_h^0}\,.\,\overline{G^0P_h^0}\right)\overline{\Omega} - \left(\overline{G^0P_h^0}\,.\,\overline{\Omega}\right)\overline{G^0P_h^0}\right]dm^0 = \Gamma\overline{\Omega}$$

Γ = moment d'inertie central du gyroscope autour de son axe de révolution.

$$\overline{M_G} = \int \overline{GP_h}\times\left(\overline{v}_h dm\right) + \int \overline{GP_h^0}\times\left(\overline{v}_h{}^0 dm^0\right) = \int \overline{GP_h}\times\left(\overline{v}_h dm\right) + \underbrace{\int \overline{GG^0}\times\left(\overline{v}_h{}^0dm^0\right)}_{\substack{\overline{GG^0}\times\int\left(\overline{v}_h{}^0dm^0\right)\\ =\overline{GG^0}\times\overline{R}^0=0}} + \int \overline{G^0P_h^0}\times\left(\overline{v}_h{}^0dm^0\right) = \overline{M_{G,0}} + \Gamma\overline{\Omega}$$

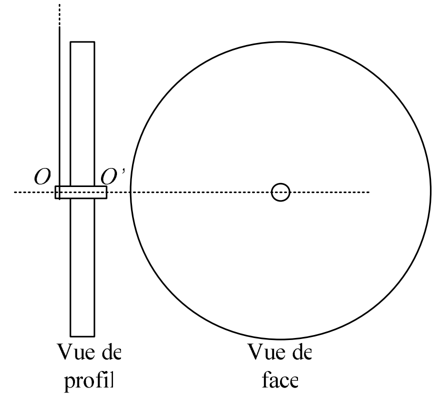
avec $\overline{M_{G,0}}$ représentant le moment cinétique du système $(S+g^0)$ quand le gyroscope est à l'arret.

$\frac{d\overline{M_G}}{dt} = \frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} + \frac{d\Gamma\overline{\Omega}}{dt} = \frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} + \overline{\varpi}\times\Gamma\overline{\Omega} = \overline{m}_{e,G}$ en effet, Γ et Ω sont constants. Seul la direction de $\overline{\Omega}$ change avec ω

=> $\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \overline{m}_{e,G} - \overline{\varpi}\times\Gamma\overline{\Omega} = \overline{m}_{e,G} + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$ avec le couple gyroscopique : $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$

2. Appliquer ce théorème à la roue de vélo représentée ci-contre : cette roue verticale, attachée par un fil en O à son axe (OO'), est mise en rotation autour de cet axe.

La roue est modélisée par un cercle de masse M et de rayon R.
L'attache en O est à une distance d du centre C de la roue.
Précisez chacun des termes du théorème et décrivez le phénomène



$$\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

$$\begin{cases} OO' = \text{axe } x \\ \text{ficelle} = \text{axe z} \end{cases}$$

$\overline{M_{G,0}}$ moment cinétique du système (roue) quand la roue ne tourne pas avec la rotation propre $\overline{\Omega}$

=> Si le système se met en rotation autour de l'axe z (axe fixe), $\overline{M_{G,0}}$ est constant

$\overline{m}_{e,G}$ Somme des couples extérieurs : seul la gravité agit comme couple extérieur = $Mgd\,\overline{1}_y$

$\Gamma\overline{\Omega}$ moment cinétique du gyroscope avec $\begin{cases} \Gamma = \text{Moment d'inertie central} = MR^2 \\ \overline{\Omega} = \text{rotation propre de la roue suivant } +x \end{cases}$

$\overline{\varpi}$ = rotation constante du système autour de l'axe z

Pour conserver le moment cinétique du système, le couple gyroscopique va équilibrer le couple extérieur en s'opposant à ce dernier.

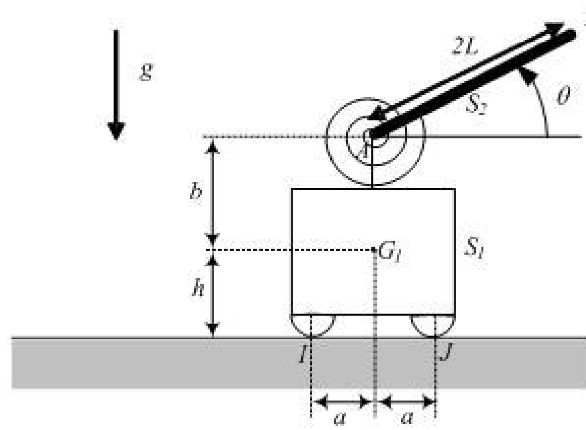
Il va créer un ω pour que le couple gyroscopique équivalant soit égal à $-Mgd\,\overline{1}_y$

=> $MR^2\Omega\overline{1}_x\times\overline{\varpi} = -Mgd\,\overline{1}_y$ => $\overline{\varpi}$ est bien suivant $\overline{1}_z$ et vaut : $MR^2\Omega\overline{1}_x\times\omega\overline{1}_z = -Mgd\,\overline{1}_y$ => $\omega = -\dfrac{Mgd}{MR^2\Omega}$

Question 3 : Chariot avec pendule de torsion (5 points)

Considérons le mouvement d'un système matériel constitué de deux solides reliés par un ressort de torsion. Le mouvement est plan.

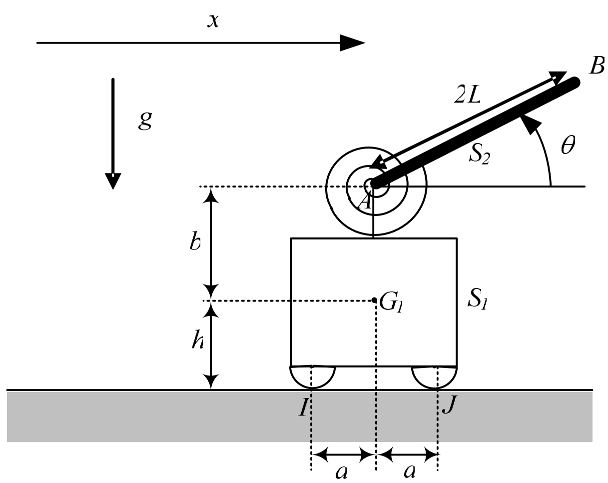
Le solide S_1 de masse m_1 peut se déplacer horizontalement (G_1 est situé à une hauteur h constante). Le solide S_1 est en contact avec le sol à l'aide de deux appuis I et J. Le coefficient de frottement entre le solide S_1 et le sol vaut f.



Au point A appartenant au solide S_1 se trouve une rotule sur laquelle est fixé une tige AB (S_2) de longueur $2L$ et de masse m_2. Un ressort de torsion (R), de masse et d'inertie négligeable, est placé entre les solides S_1 et S_2 de telle sorte que l'action du ressort sur S2 est caractérisée un couple en A proportionnel à la raideur de torsion du ressort, C, et à l'angle d'ouverture.

1. Déterminer le(s) degré(s) de liberté du système ainsi que les coordonnées généralisées que vous utiliseriez pour représenter la dynamique du système..

Deux degrés de liberté $\{x,\theta\}$ et deux coordonnées généralisées $\{x,\theta\}$



2. Déterminer la résultante cinétique du système.

$$\overline{R} = m_1\overline{v}_{G_1} + m_2\left(\overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG_2}\right) = m_1\dot{x}\,\overline{1}_x + m_2\left(\dot{x}\,\overline{1}_x + L\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_1}\right) = \left(\left(m_1+m_2\right)\dot{x} - m_2L\dot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_x + m_2L\dot{\theta}\cos\theta\,\overline{1}_y$$

3. Déterminer le moment cinétique en A du système.

$$\overline{M_A} = \left[m_1\overline{AG_1}\times\overline{v}_A\right] + \left[m_2\overline{AG_2}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right] = m_1b\dot{x}\,\overline{1}_z - m_2L\sin\theta\,\dot{x}\,\overline{1}_z + \frac{m_2 4L^2}{3}\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

4. Déterminer l'ensemble des forces et couples agissant sur la tige.

$$\overline{R}_I = -T_1\overline{1}_x + N_1\overline{1}_y;\ \overline{R}_J = -T_2\overline{1}_x + N_2\overline{1}_y;\ \overline{R}_A = X_A\overline{1}_x + Y_A\overline{1}_y;\ \overline{F}_{G_1} = -m_1g\,\overline{1}_y;\ \overline{F}_{G_2} = -m_2g\,\overline{1}_y;\ \overline{C}_A = -C\theta\,\overline{1}_z$$

5. Déterminer l'ensemble des équations qui permettront de déterminer les réactions en *I, J* et *A* en fonction des coordonnées définies à la question 1.

6 inconnues de réactions + 2 degrés de libertée => 8 équations pour tout identifier

Th. résultante cinétique sur $\{S_1+S_2\}$: $\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-T_1-T_2 \quad (1)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=N_1+N_2-(m_1+m_2)g \quad (2)\end{cases}$

Th. résultante cinétique sur $\{S_2\}$: $\begin{cases}m_2\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=X_A \quad (3)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=Y_A-m_2g \quad (4)\end{cases}$

ou $\left[\text{Th. résultante cinétique sur } \{S_1\} : \begin{cases}m_1\ddot{x}=-X_A-T_1-T_2 \quad (5) = (3)-(1)\\ 0=N_1+N_2-Y_A-m_1g \quad (6) = (4)-(2)\end{cases}\right]$

Th. moment cinétique en *A* sur $\{S_1\}$: $m_1b\ddot{x}=-aN_1+aN_2+C\theta-(b+h)(T_1+T_2)$ (7)

Th. moment cinétique en *A* sur $\{S_2\}$: $\frac{d}{dt}\overline{M_A}=m\overline{v_G}\times\overline{v_A}+\overline{m}_{e,A}$

$$=> -m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)$$

ou $\left[\begin{array}{l}\text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_1+S_2\} : \frac{d}{dt}\overline{M_A}=m\overline{v_G}\times\overline{v_A}+\overline{m}_{e,A}\\ => m_1b\ddot{x}-m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}\\ \quad =-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-L\cos\theta m_2g-aN_1+aN_2-(b+h)(T_1+T_2) \quad (9)=(7)+(8)\end{array}\right]$

=> 6 équations indépendantes (1,2,3,4,7,8) + équations de Coulomb $(T_1=fN_1 \ (10))$ et $(T_2=fN_2 \ (11))$

6. Dans le cas où le frottement est nul, déterminer la/les équation(s) de mouvement.

2 équations de mouvement : l'équation (8) ainsi que la résolution de l'équation (1) et (2) avec la (10) et (11)

$$=>\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-f\left(m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2+(m_1+m_2)g\right) \quad (12)\end{cases}$$

=>Dans le cas d'un frottement nul :

$$\boxed{\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=0 \quad (12)\end{cases}}$$

7. Appliquer le théorème de Lagrange pour trouver la/les équations de mouvement par le théorème de Lagrange :

$$T=\left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2+L^2\dot{\theta}^2-2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{m_2 4L^2}{12}\dot{\theta}^2\right] \text{ et } V=m_2 gL\sin\theta \;=>\; L=T-V$$

Couple du ressort de torsion : $\overline{C}=-C\theta\overline{1}_z$ opposé à l'accroissement $\delta\theta => Q_\theta=-C\theta$

$$=>\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=Q_x \;:\; m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-L\sin\theta\ddot{\theta}-L\cos\theta\dot{\theta}^2\right)=0\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=Q_\theta \;:\; m_2\left(\left(\dfrac{4L^2}{12}+L\right)\ddot{\theta}-L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)-\left[-m_2 gL\cos\theta-m_2L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}\right]=-C\theta\\ => m_2\left(\dfrac{4L^2}{3}\ddot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)+m_2 gL\cos\theta=-C\theta\end{cases}$$

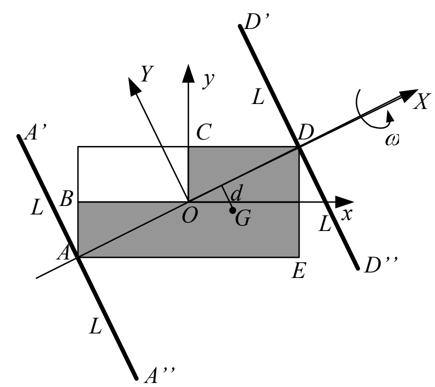
<u>Question 4</u> : Équilibrage de plaque (4 points)

Un solide S est constitué par :

- une plaque homogène *ABOCDEA*, de masse *M*. Il s'agit pratiquement d'un rectangle de longueur *2H* et de largeur *H* auquel on aurait enlevé le quart supérieur gauche.
- deux tiges homogènes *A'A''* et *D'D''*, chacune de masse *m* et de longueur *2L*, soudées perpendiculairement à la diagonale *AD* de la plaque, de telle façon que le centre de la tige *A'A''* coïncide avec le sommet *A* de la plaque, tandis que le centre de la tige *D'D''* coïncide avec le sommet *D*.

Le solide *S* tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe *AD*.

G = le centre de gravité de la plaque seule ;
d= la distance entre le centre de gravité et l'axe *AD*.



1. Déterminer la somme des forces extérieures agissant sur le système ainsi que le moment total de ces forces au point *O*.

$\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt}}$ et $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \text{ car } O \text{ est fixe}}$

Changement d'axes : $\begin{cases} \overline{1}_X = \cos\theta \overline{1}_x + \sin\theta \overline{1}_y \\ \overline{1}_Y = -\sin\theta \overline{1}_x + \cos\theta \overline{1}_y \end{cases}$ où $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

<u>En travaillant dans les axes Oxyz</u> tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\left(\cos\theta \overline{1}_x + \sin\theta \overline{1}_y\right)$

$\overline{R} = -Md\omega\overline{1}_z$ => $\overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{R} = -Md\omega^2\left(-\sin\theta \overline{1}_x + \cos\theta \overline{1}_y\right)$

$$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O . \overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & - \\ -P_{xy} & I_y & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{M}_O = -\left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\omega\sin\theta\overline{1}_z + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\omega\cos\theta\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \left[\cos\theta\sin\theta\left(I_y - I_x\right) + P_{xy}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right]\omega^2\overline{1}_z \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = \left[\frac{2}{5}\left(I_y - I_x\right) - \frac{3}{5}P_{xy}\right]\omega^2\overline{1}_z}$$

OU <u>En travaillant directement dans les axes OXYZ</u> tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_X$

$\overline{R} = -Md\omega\overline{1}_Z$ => $\overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{R} = Md\omega^2\overline{1}_Y$

$$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O . \overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_X & - & - \\ -P_{XY} & - & - \\ 0 & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_X\omega\overline{1}_X - P_{XY}\omega\overline{1}_Y \Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{M}_O = -P_{XY}\omega^2\overline{1}_Z$$

où $P_{XY} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_y + I_x\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy} \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = -\left(\frac{2}{5}\left(-I_y + I_x\right) + \frac{3}{5}P_{xy}\right)\omega^2\overline{1}_Z}$

En considérant M =Rectangle complet ($\square_{\rho 2H^2}$) - petit rectangle ($\square_{\frac{\rho H^2}{2}}$)$=\rho 2H^2-\frac{\rho H^2}{2}=\frac{\rho 3H^2}{2}$

$$I_x = I_{x(M)} + I_{x(AA')} + I_{x(DD')}$$

$$I_x = \left[\underbrace{\left(\rho 2H^2.\frac{H^2}{12}\right)_{\square_{\rho 2H^2}} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{12}+\frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{4}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12}}\right)_{\square_{\frac{\rho H^2}{2}}}}_{M\frac{H^2}{12}}\right]+\left[\frac{m(2L)^2}{12}\right]+\left[\frac{m(2L)^2}{12}\right]=\frac{MH^2}{12}+\frac{m2L^2}{3}$$

$I_y = I_{y(M)} + I_{y(AA')} + I_{y(DD')}$ avec $\overline{OA}=\left(-\sqrt{H^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2},0,0\right)=\left(-\frac{\sqrt{5}H}{2},0,0\right)$ et $\overline{OD}=\left(\frac{\sqrt{5}H}{2},0,0\right)$

$$I_y = \left[\underbrace{\left(\rho 2H^2.\frac{(2H)^2}{12}\right)_{\square_{\rho 2H^2}} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12}+\frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{2}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{3}}\right)_{\square_{\frac{\rho H^2}{2}}}}_{M\frac{H^2}{3}}\right]+\left[0+mH^2\frac{5}{4}\right]+\left[0+mH^2\frac{5}{4}\right]=\frac{MH^2}{3}+\frac{5mH^2}{2}$$

$$P_{xy}=\left[(0)_{\square_{\rho 2H^2}}-\left(0+\frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{4}\right)\right)_{\square_{\frac{\rho H^2}{2}}}\right]+0+0=\frac{MH^2}{24} \quad \text{avec } \overline{OG}=\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{4},0\right)$$

Dans OXYZ => $P_{XY}=\frac{2}{5}\left(-\frac{MH^2}{3}-\frac{5mH^2}{2}+\frac{MH^2}{12}+\frac{m2L^2}{3}\right)+\frac{3}{5}\frac{MH^2}{24}=-\frac{3}{8}\frac{MH^2}{5}+\frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3}-\frac{5H^2}{2}\right)$

=> $\boxed{\overline{F}_e = Md\omega^2\,\overline{1}_Y = Md\omega^2\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x+\cos\theta\,\overline{1}_y\right)}$ et $\boxed{\overline{m}_{e,O}=-P_{XY}\omega^2\,\overline{1}_Z=-\left[-\frac{3MH^2}{40}+\frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3}-\frac{5H^2}{2}\right)\right]\omega^2\,\overline{1}_Z}$

2. Si on veut que le solide soit **équilibré dynamiquement**, déterminer les masses $m_{A'}$ et $m_{D'}$ qu'il faudrait placer respectivement aux points *A'* et *D'*

A l'équilibre dynamique :

$$\boxed{\sum \bar{F}_e = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{R} = R\omega\bar{1}_Y = 0} \Rightarrow \bar{R} = \left(-Md + m_1 L - m_2 L\right)\omega\bar{1}_z = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = \frac{Md}{L}$$

$$\boxed{\sum \bar{m}_{e,O} = \frac{d\bar{M}_O}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{M}_O = -P_{XY}\omega^2\bar{1}_Z = 0} \Rightarrow P_{XY,O} = 0$$

$$P_{XY,O} = \left[-\frac{3MH^2}{40} + \frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3} - \frac{5H^2}{2}\right)\right]_S + \left[-m_1\frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_1} + \left[-m_2\frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_2} \quad \text{avec } \overline{OA'} = \left(-\frac{\sqrt{5}H}{2}, L, 0\right);\ \overline{OD'} = \left(\frac{\sqrt{5}H}{2}, -L, 0\right)$$

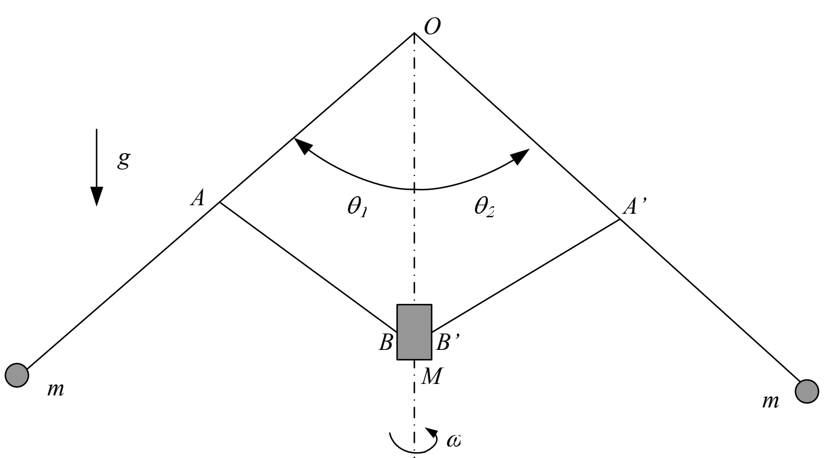
$$\begin{cases} (m_1 + m_2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}HL}\left[-\dfrac{3MH^2}{40} + \dfrac{2m}{5}\left(\dfrac{2L^2}{3} - \dfrac{5H^2}{2}\right)\right] \\ m_2 = m_1 - \dfrac{Md}{L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[-\frac{3MH^2}{40} + \frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3} - \frac{5H^2}{2}\right)\right] + \frac{Md}{2L} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[-\frac{3MH^2}{40} + \frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3} - \frac{5H^2}{2}\right)\right] - \frac{Md}{2L}$$

<u>Question 5</u> : Le régulateur de Watt (4 points)

Il s'agit d'un dispositif ancien et ingénieux permettant à un moteur de tourner à vitesse constante malgré les variations de charge. Référez vous à la figure. La tringlerie tourne à une vitesse proportionnelle à celle du moteur. Les masselottes (m_1 et m_2) commandent le moteur : en montant elles diminuent l'admission de carburant, ce qui tend à diminuer la vitesse du moteur. Une accélération du moteur fait monter les masselottes ce qui tire le manchon vers le haut, avec, comme conséquence, une diminution de l'admission.

<u>Caractérisation du système</u> :
– Vitesse de rotation constante, notée ω
– Les barres $Om1$ et $Om2$ sont rigides, sans masse, de longueur L
– Les articulations en A, A', B, B' sont des articulations rotoïdes
– Les articulations A et A' sont à une distance a de O
– Les barres AB et $A'B'$ sont rigides, sans masse, de longueur b
– Les deux masselottes sont modélisées comme des masses ponctuelles, de valeur m
– Le manchon est modélisé comme une masse ponctuelle de valeur M pouvant coulisser le long de l'axe.



Par malheur il y a eu une erreur au montage : l'articulation A' a été mal placée sur la barre, si bien que le montage n'est plus symétrique ! Vous devez donc considérer 2 longueurs différentes, notées a_1 et a_2 pour les segments OA et OA' ! De ce fait, les angles formés par les 2 barres avec l'axe de rotation ne sont donc pas égaux.

1. Déterminer les degrés de liberté ainsi que les coordonnées que vous utiliserez pour résoudre le problème..

1 degré de liberté , 3 coordonnées $\{z, \theta_1, \theta_2\}$

2. Déterminer la(les) équations permettant de trouver **la ou les équations de mouvement**.

$$T=\left[\frac{1}{2}M\dot{z}^2\right]+\left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1\omega^2+\dot{\theta}_1^2\right)\right]+\left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_2\omega^2+\dot{\theta}_2^2\right)\right]\ \text{et}\ V=-Mgz-mgL\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$$

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{v}_{m1}=\overline{\omega}_1\times\overline{OM_1}\ \text{et}\ \overline{\omega}_1=\omega\overline{1}_z-\dot{\theta}_1\overline{1}_x\Rightarrow\overline{v}_{m1}=-L\cos\theta_1\overline{1}_y+L\sin\theta_1\dot{\theta}_1\overline{1}_z+L\sin\theta_1\omega\overline{1}_x\\ \overline{v}_{m2}=\overline{\omega}_2\times\overline{OM_2}\ \text{et}\ \overline{\omega}_2=\omega\overline{1}_z+\dot{\theta}_2\overline{1}_x\Rightarrow\overline{v}_{m2}=-L\cos\theta_2\overline{1}_y+L\sin\theta_2\dot{\theta}_2\overline{1}_z-L\sin\theta_2\omega\overline{1}_x\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\right)\omega^2+\frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)+Mgz+mgL\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$$

$$\text{Deux contraintes :}\begin{cases}b^2=z^2+a_1^2-2a_1z\cos\theta_1\Rightarrow\lambda_1\left(z\delta z-a_1\delta z\cos\theta_1+a_1z\sin\theta_1\delta\theta_1=0\right)\\ b^2=z^2+a_2^2-2a_2z\cos\theta_2\Rightarrow\lambda_2\left(z\delta z-a_2\delta z\cos\theta_2+a_2z\sin\theta_2\delta\theta_2=0\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\ :M\ddot{z}-Mg=\lambda_1\left(z-a_1\cos\theta_1\right)+\lambda_2\left(z-a_2\cos\theta_2\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta_1}\ :\ mL^2\ddot{\theta}_1-mL^2\omega^2\sin\theta_1\cos\theta_1+mgL\sin\theta_1=\lambda_1a_1z\sin\theta_1\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta_2}\ :\ mL^2\ddot{\theta}_2-mL^2\omega^2\sin\theta_2\cos\theta_2+mgL\sin\theta_2=\lambda_2a_2z\sin\theta_2\\ z\dot{z}-a_1\cos\theta_1\dot{z}+a_1z\sin\theta_1\dot{\theta}_1=0\\ z\dot{z}-a_2\cos\theta_2\dot{z}+a_2z\sin\theta_2\dot{\theta}_2=0\end{cases}$$

3. Déterminer cette/ces équation(s) de mouvement dans le cas où le système est rééquilibré et que a_1=a_2=b

Dans ce cas, nous n'avons plus qu'un degré de liberté : 2 équations de Lagrange avec 1 multiplicateur.

$$\begin{cases}a_1=a_2=b\Rightarrow\theta_1=\theta_2\ \text{et}\ \lambda_1=\lambda_2\\ z\dot{z}-b\cos\theta\dot{z}+bz\sin\theta\dot{\theta}=0\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\ :M\ddot{z}-Mg=2\lambda_1\left(z-b\cos\theta\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}\ :\ mL^2\ddot{\theta}-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mgL\sin\theta=\lambda_1bz\sin\theta\end{cases}$$

$$z=2b\cos\theta\ ;\ \dot{z}=-2b\sin\theta\dot{\theta};\ddot{z}=-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta}-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mgL\sin\theta=\frac{M\ddot{z}-Mg}{2\left(z-b\cos\theta\right)}bz\sin\theta$$

$$=\frac{M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}\right)-Mg}{2\left(2b\cos\theta-b\cos\theta\right)}b2b\cos\theta\sin\theta=\left(M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}\right)-Mg\right)b\sin\theta$$

$$\Rightarrow\left(mL^2+2Mb^2\sin^2\theta\right)\ddot{\theta}+\left(2Mb^2\cos\theta\sin\theta\right)\dot{\theta}^2-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+\left(mL+Mb\right)g\sin\theta=0$$