Faculté des Sciences Appliquées

ERO»

NOM : «Nom»
PRENOM : «Prenom»

Mécanique Rationnelle
2e candidature

Examen de mécanique rationnelle
2ème session 28/08/2005 (14h-18h)
Année académique 2005-2006

Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

Cinématique :	Inertie :
$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BA}$	$I^{\alpha\beta} = \int_{système}\left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta\right)dm$
$\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon}\times\overline{BA} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{BA}\right)$	$I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$
Cinétique :	$tg\,2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$
$\overline{R} = m\overline{v}_G$	$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)$
$\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB}\times\overline{R}$ et $\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + m\overline{AG}\times\overline{v}_A$	
$T = \dfrac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$	

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e \quad ; \quad \frac{d}{dt}\overline{M}_A = m\overline{v}_G\times\overline{v}_A + \overline{m}_{e,A} \quad ; \quad \frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h$$

$$L = T - V \text{ et } \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \text{ avec } Q_i = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

$$\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} \Rightarrow \frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

Question 1 : Le tenseur d'inertie (3 points)

Que représente la formule ci-après $tg\,2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$? Dans quelles condition(s) est-elle applicable ? Décrivez la méthode utilisée pour trouver cette formule (sans faire la démonstration) ?

C'est la formule permettant de déterminer l'angle θ duquel il faut faire pivoter le système d'axe *Oxyz* pour obtenir les axes principaux.

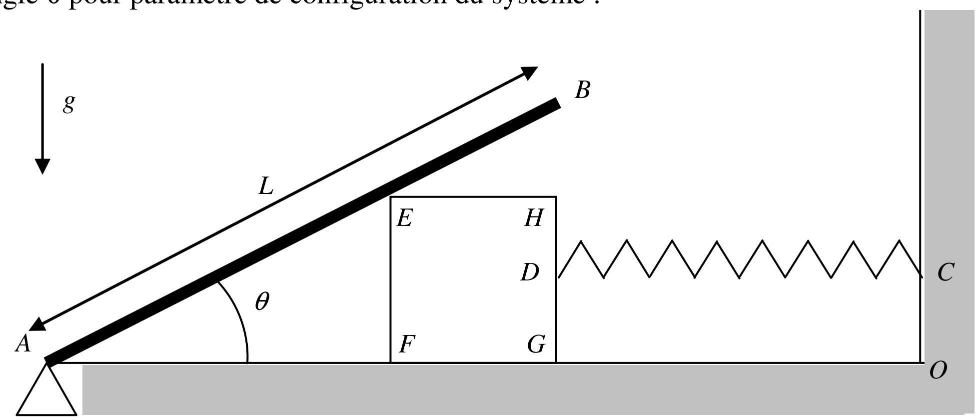
Cet angle caractérise la rotation autour de l'axe z dans le sens positif, et est donc valable pour un solide dans le plan *Oxy*. (z=0 pour tous les points du solide => P_{xz} et P_{yz} comme P_{XZ} et P_{YZ} sont nuls)

Pour retrouver cette formule, on fait une **rotation autour de l'axe z d'un angle θ**. On écrit la **matrice de changement d'axe** [α_{ij}] entre les nouveaux axes (*OXYZ*) en fonction des anciens axes (*Oxyz*). A l'aide de la formule de changement de base, on calcule les moments d'inertie I_X, I_Y ainsi que le produit d'inertie P_{XY} en fonction de I_x, I_y, et P_{xy} dans les anciens axes. Les **axes principaux** sont les axes dans lesquels les **produits d'inerties** sont tous **nuls** => Pour trouver le θ correspondant aux axes principaux, il faut annuler P_{XY}. :

$$P_{XY} = 0 \Rightarrow tg\,2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$$

<u>Question 2</u> : (4 points)

Dans le plan vertical, une plaque carrée de masse M et de côté H peut glisser sans frottement horizontalement. La barre homogène AB, de masse m et de longueur L peut tourner sans perte autour de la liaison rotoïde en A. Le ressort horizontal CD relie le point C du bâti au point D du solide, à une hauteur h (=GD). La rigidité de ce ressort vaut k et sa longueur au repos vaut OA.
En prenant l'angle θ pour paramètre de configuration du système :



1. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la barre en fonction des degrés de liberté du système.

$$\mu = AE;\ OA = L_0;\ \ x = DC \Rightarrow L_0 - x - H = \lambda\cos\theta \ \text{ et } \ \mu = \frac{H}{\sin\theta} \Rightarrow x = L_0 - H\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)$$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \ \text{ avec } \ \dot{x} = -\dot{\mu}\cos\theta + \mu\sin\theta\dot{\theta} = H\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}(x-L_0)^2 = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

2. En fonction des coordonnées utilisées à la question 1, déterminer **la ou les équations de mouvement** du système

1 coordonnée θ :

$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}MH^2\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\dot{\theta}^2\right] \text{ et } V=\frac{L}{2}mg\sin\theta+\frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$L=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}MH^2\sin^4\theta\dot{\theta}^2\right]-\frac{L}{2}mg\sin\theta-\frac{k}{2}H^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \ :$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}+MH^2\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\ddot{\theta}-4MH^2\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2-\left[-\frac{1}{2}MH^2\dot{\theta}^2\left(-4\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\right)-\frac{L}{2}mg\cos\theta+kH^2\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\right]=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3}+\frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta}-2MH^2\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}mg\cos\theta-\frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)=0$$

2 coordonnée θ et x :

$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \text{ et } V=\frac{L}{2}mg\sin\theta+\frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

avec une contrainte : $\delta x-\frac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta=0$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x-\frac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta=0\right)$

$$\Rightarrow L=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]-\frac{L}{2}mg\sin\theta-\frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial\theta} \ : \ \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}-\left[-\frac{L}{2}mg\cos\theta\right]=-\lambda_1\frac{H}{\sin^2\theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial x} \ : \ M\ddot{x}-\left[-\frac{k}{2}2(x-L_0)\right]=\lambda_1 \\ \dot{x}-\frac{H}{\sin^2\theta}\dot{\theta}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3}+\frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta}-2MH^2\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}mg\cos\theta-\frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)=0$$

3 coordonnée θ , x et μ :

$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \text{ et } V=\frac{L}{2}mg\sin\theta+\frac{k}{2}(x-L_0)^2$$

avec deux contraintes : $\lambda_1\left(\delta x+\delta\mu\cos\theta-\mu\sin\theta\delta\theta=0\right)$ et $\lambda_2\left(\delta\mu\sin\theta+\mu\cos\theta\delta\theta=0\right)$

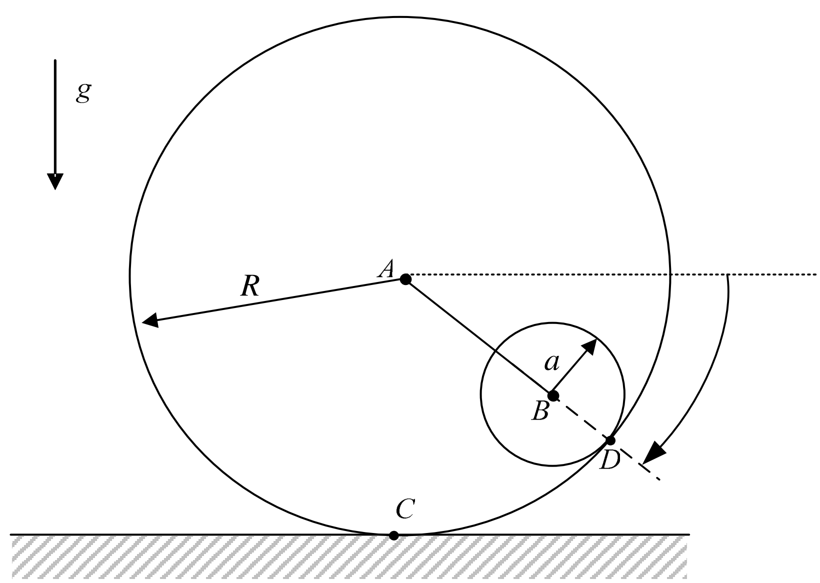
$$=>\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \ : \ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta}-\left[-\dfrac{L}{2}mg\cos\theta\right]=-\lambda_1\mu\sin\theta+\lambda_2\mu\cos\theta\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x} \ : \ M\ddot{x}-\left[-\dfrac{k}{2}2(x-L_0)\right]=\lambda_1\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\mu}}-\dfrac{\partial L}{\partial\mu}=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\mu} \ : \ 0=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta\\ \dot{x}+\dot{\mu}\cos\theta-\mu\sin\theta\dot{\theta}=0\\ \dot{\mu}\sin\theta+\mu\cos\theta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$=>\left(\frac{mL^2}{3}+\frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta}-2MH^2\frac{\text{cotg}\,\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}mg\cos\theta-\frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)=0$$

<u>Question 3</u> : Le disque dans un anneau (5 points)

Le problème est plan (2-D). Le système, soumis à l'effet de la gravité, est composé de :
- Un anneau de masse M, de rayon *R* et de centre *A*, qui roule sans glisser sur un sol plat.
- Un disque de rayon *a,* de centre *B*, et de masse homogène *m*.
- Une barre AB, de masse négligeable, articulée en A et autour de laquelle le disque peut tourner librement

En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser sur la piste de forme circulaire formée par l'intérieur de l'anneau.



1. Déterminer **la ou les équations de mouvement** en utilisant les multiplicateurs de Lagrange**.**
Pour ce faire, procéder aux différentes étapes :

a) Déterminer le(s) degré(s) de liberté du système ainsi que les coordonnées généralisées.

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 3 coordonnées $\{\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1} = \dot{\alpha}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2} = \dot{\beta}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\overline{1}_z$

$$\begin{cases} \bullet \text{ Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol} \\ \overline{v}_{I\in Sol} = \overline{v}_{I\in S_1} \Rightarrow 0 = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AI} = \dot{x}\overline{1}_x - R\dot{\alpha}\overline{1}_x \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\alpha} \end{cases}$$

OU

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 4 coordonnées $\{x,\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1} = \dot{\alpha}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2} = \dot{\beta}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\overline{1}_z$

b) Déterminer la/les contraintes éventuelles

$$\begin{cases} \text{Condition de roulement sans glissement en } D \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et } S_2 \\ \overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_{D\in S_2} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AD} = \dot{x}\overline{1}_x + R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2} \\ \overline{v}_{D\in S_2} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_2 \times \overline{BD} = \dot{x}\overline{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2} \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_1\left((R-a)\delta\theta + a\delta\beta - R\delta\alpha = 0\right) \end{cases}$$

OU

$$\begin{cases} \text{Condition de roulement sans glissement en } D \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et } S_2 \\ \overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_{D\in S_2} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AD} = \dot{x}\overline{1}_x + R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2} \\ \overline{v}_{D\in S_2} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_2 \times \overline{BD} = \dot{x}\overline{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2} \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_1\left((R-a)\delta\theta + a\delta\beta - R\delta\alpha = 0\right) \\ \text{Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol} \\ \overline{v}_{I\in Sol} = \overline{v}_{I\in S_1} \Rightarrow 0 = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AI} = \dot{x}\overline{1}_x - R\dot{\alpha}\overline{1}_x \Rightarrow \lambda_2\left(\delta x - R\delta\alpha = 0\right) \end{cases}$$

c) Déterminer l'énergie cinétique du système

$$T = \left[MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\alpha}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

avec $\overline{v}_{G_2} = \overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AD} \times \overline{AD} \Rightarrow \overline{v}_B = \dot{x}\overline{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} = \dot{x}\overline{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\overline{1}_x + \cos\theta\overline{1}_y\right)$

OU

$$T = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

d) Déterminer l'énergie potentielle du système

$V = mg\left(R-(R-a)\sin\theta\right) = -mg\left(R-a\right)\sin\theta + C <$

e) Déterminer la/les équation(s) de mouvement en fonction du/des degré(s) de liberté déterminé(s) à la question 1.

$$L = \left[MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\alpha}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right] + mg\left(R-a\right)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \ : \ (2M+m)R^2\ddot{\alpha} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\theta} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = -\lambda_1 R \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \beta} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \ : \ \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\beta} = \lambda_1 a \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \ : \\ m(R-a)^2\ddot{\theta} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha} + mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta - mg\left(R-a\right)\cos\theta = \lambda_1\left(R-a\right) \\ + \text{ contrainte : } (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} - R\dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

OU

$$L = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right] + mg\left(R-a\right)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} \ : \ (M+m)\ddot{x} - m(R-a)\sin\theta\ddot{\theta} - m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = \lambda_2 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \ : MR^2\ddot{\alpha} = -\lambda_1 R - \lambda_2 R \Rightarrow \lambda_2 = -MR\ddot{\alpha} - \lambda_1 = -MR\ddot{\alpha} - \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \beta} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \beta} + \lambda_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \ : \ \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\beta} = \lambda_1 a \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{ma}{2}\ddot{\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \ : \\ m(R-a)^2\ddot{\theta} - mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha} - mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha} + mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta - mg\left(R-a\right)\cos\theta = \lambda_1\left(R-a\right) \\ + \text{ contraintes :} \\ (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} - R\dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} - R\dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

en fonction des coordonnées α et θ $\left(\dot{\beta} = \dfrac{R\dot{\alpha} - (R-a)\dot{\theta}}{a};\ \ddot{\beta} = \dfrac{R\ddot{\alpha} - (R-a)\ddot{\theta}}{a}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\Rightarrow \begin{cases} \left(2M + \dfrac{3m}{2}\right)R\ddot{\alpha} - m(R-a)\left(\dfrac{1}{2} + \sin\theta\right)\ddot{\theta} - m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2 = 0 \\ \dfrac{3m}{2}(R-a)^2\ddot{\theta} - m(R-a)R\left(\dfrac{1}{2} + \sin\theta\right)\ddot{\alpha} - mg\left(R-a\right)\cos\theta = 0 \end{cases}}$$

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 3 coordonnées $\{\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1}=\dot{\alpha}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2}=\dot{\beta}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB}=\dot{\theta}\overline{1}_z$

$$T=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

$$V=mg\left(R-(R-a)\sin\theta\right)=-mg(R-a)\sin\theta+C$$

$$\text{avec}\begin{cases}\bullet\ \overline{v}_{G_2}=\overline{v}_B=\overline{v}_A+\overline{\omega}_{AD}\times\overline{AD}\Rightarrow\overline{v}_B=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)\\ \bullet\ \text{Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol}\\ \overline{v}_{I\in Sol}=\overline{v}_{I\in S_1}\Rightarrow 0=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AI}=\dot{x}\overline{1}_x-R\dot{\alpha}\overline{1}_x\Rightarrow\dot{x}-R\dot{\alpha}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=\left[MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\alpha}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2R\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]+mg(R-a)\sin\theta$$

$$\text{avec une contrainte : }\begin{cases}\text{Condition de roulement sans glissement en } D \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et } S_2\\ \overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_{D\in S_2}\Rightarrow\begin{cases}\overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AD}=\dot{x}\overline{1}_x+R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2}\\ \overline{v}_{D\in S_2}=\overline{v}_B+\overline{\omega}_2\times\overline{BD}=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}+a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2}\end{cases}\\ \Rightarrow\lambda_1\left((R-a)\delta\theta+a\delta\beta-R\delta\alpha=0\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}\ :\ (2M+m)R^2\ddot{\alpha}-mR(R-a)\sin\theta\ddot{\theta}-mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2=-\lambda_1 R\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial L}{\partial\beta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\beta}\ :\ \frac{ma^2}{2}\ddot{\beta}=\lambda_1 a\Rightarrow\lambda_1=\frac{ma}{2}\ddot{\beta}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\ :\\ m(R-a)^2\ddot{\theta}-mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha}-mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha}+mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta-mg(R-a)\cos\theta=\lambda_1(R-a)\\ +\text{ contrainte : }(R-a)\dot{\theta}+a\dot{\beta}-R\dot{\alpha}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(2M+m)R^2\ddot{\alpha}-mR(R-a)\sin\theta\ddot{\theta}-mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2=-\frac{ma}{2}R\ddot{\beta}\\ m(R-a)^2\ddot{\theta}-mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha}-mg(R-a)\cos\theta=\frac{ma}{2}(R-a)\ddot{\beta}\\ \dot{\theta}=\frac{R\dot{\alpha}-a\dot{\beta}}{(R-a)};\ \ddot{\theta}=\frac{R\ddot{\alpha}-a\ddot{\beta}}{(R-a)}\Rightarrow\text{C'est compliqué de remplacer }\theta\end{cases}$$

en fonction des coordonnées α et θ $\left(\dot{\beta}=\frac{R\dot{\alpha}-(R-a)\dot{\theta}}{a};\ \ddot{\beta}=\frac{R\ddot{\alpha}-(R-a)\ddot{\theta}}{a}\right)$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\left(2M+\frac{3m}{2}\right)R\ddot{\alpha}-m(R-a)\left(\frac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\theta}-m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2=0\\ \frac{3m}{2}(R-a)^2\ddot{\theta}-m(R-a)R\left(\frac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\alpha}-mg(R-a)\cos\theta=0\end{cases}}$$

2 degré de liberté $\{\alpha,\theta\}$, 4 coordonnées $\{x,\alpha,\beta,\theta\}$ avec $\overline{\omega}_{cercle\ S1}=\dot{\alpha}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{disque\ S2}=\dot{\beta}\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{AB}=\dot{\theta}\overline{1}_z$

$$T=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]$$

$$V=mg\left(R-(R-a)\sin\theta\right)=-mg(R-a)\sin\theta+C$$

avec $\overline{v}_{G_2}=\overline{v}_B=\overline{v}_A+\overline{\omega}_{AD}\times\overline{AD}\Rightarrow\overline{v}_B=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)$

$$\Rightarrow L=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]+mg(R-a)\sin\theta$$

avec 2 contraintes :
$$\begin{cases}\text{Condition de roulement sans glissement en } D \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et } S_2\\ \overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_{D\in S_2}\Rightarrow\begin{cases}\overline{v}_{D\in S_1}=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AD}=\dot{x}\overline{1}_x+R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2}\\ \overline{v}_{D\in S_2}=\overline{v}_B+\overline{\omega}_2\times\overline{BD}=\dot{x}\overline{1}_x+(R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}+a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2}\end{cases}\\ \Rightarrow\lambda_1\left((R-a)\delta\theta+a\delta\beta-R\delta\alpha=0\right)\\ \text{Condition de roulement sans glissement en } I \text{ point de contact entre } S_1 \text{ et le sol}\\ \overline{v}_{I\in Sol}=\overline{v}_{I\in S_1}\Rightarrow 0=\overline{v}_A+\overline{\omega}_1\times\overline{AI}=\dot{x}\overline{1}_x-R\dot{\alpha}\overline{1}_x\Rightarrow\lambda_2\left(\delta x-R\delta\alpha=0\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+(R-a)^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}(R-a)\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\beta}^2\right]+mg(R-a)\sin\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\ :\ (M+m)\ddot{x}-m(R-a)\sin\theta\ddot{\theta}-m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2=\lambda_2\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha}\ :MR^2\ddot{\alpha}=-\lambda_1R-\lambda_2R\Rightarrow\lambda_2=-MR\ddot{\alpha}-\lambda_1=-MR\ddot{\alpha}-\frac{ma}{2}\ddot{\beta}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial L}{\partial\beta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\beta}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\beta}\ :\ \frac{ma^2}{2}\ddot{\beta}=\lambda_1a\Rightarrow\lambda_1=\frac{ma}{2}\ddot{\beta}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\ :\\ m(R-a)^2\ddot{\theta}-mR(R-a)\sin\theta\ddot{\alpha}-mR(R-a)\cos\theta\dot{\theta}\dot{\alpha}+mR\dot{\alpha}(R-a)\dot{\theta}\cos\theta-mg(R-a)\cos\theta=\lambda_1(R-a)\\ +\text{ contraintes :}\\ (R-a)\dot{\theta}+a\dot{\beta}-R\dot{\alpha}=0\\ \dot{x}-R\dot{\alpha}=0\end{cases}$$

en fonction des coordonnées α et θ $\left(\dot{\beta}=\frac{R\dot{\alpha}-(R-a)\dot{\theta}}{a};\ \ddot{\beta}=\frac{R\ddot{\alpha}-(R-a)\ddot{\theta}}{a}\right)$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\left(2M+\frac{3m}{2}\right)R\ddot{\alpha}-m(R-a)\left(\frac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\theta}-m(R-a)\cos\theta\dot{\theta}^2=0\\ \frac{3m}{2}(R-a)^2\ddot{\theta}-m(R-a)R\left(\frac{1}{2}+\sin\theta\right)\ddot{\alpha}-mg(R-a)\cos\theta=0\end{cases}}$$

2. En fonction des degrés de liberté définis à la question 1, déterminer les composantes de la force de contact exercée par l'anneau sur le disque S_2 au point D.

Réaction $\overline{R}_D = -N\,\overline{1}_{x_2} - T\,\overline{1}_{y_2}$

Théorème du moment cinétique sur S_2 en D :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_{G_2}} = \overline{m}_{e,G_2} \Rightarrow \frac{ma^2}{2}\ddot{\beta} = -aT \Rightarrow T = -\frac{ma}{2}\ddot{\beta} \Rightarrow \boxed{T = \frac{m}{2}\left((R-a)\ddot{\theta} - R\ddot{\alpha}\right)} \quad (1)$$

Théorème de la résultante cinétique sur S_2 :

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \overline{F}_e \Rightarrow \overline{R} = m\dot{x}\overline{1}_x + m(R-a)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} = m\dot{x}\cos\theta\overline{1}_{x_2} + m\left((R-a)\dot{\theta} - \dot{x}\sin\theta\right)\overline{1}_{y_2}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}\cos\theta - m\dot{x}\sin\theta\dot{\theta} - m\left((R-a)\dot{\theta} - \dot{x}\sin\theta\right)\dot{\theta} = mg\sin\theta - N \quad (2) \\ -m\ddot{x}\sin\theta - m\dot{x}\cos\theta\dot{\theta} + m(R-a)\ddot{\theta} + m\dot{x}\cos\theta\dot{\theta} = mg\cos\theta - T \quad (3) \end{cases}$$

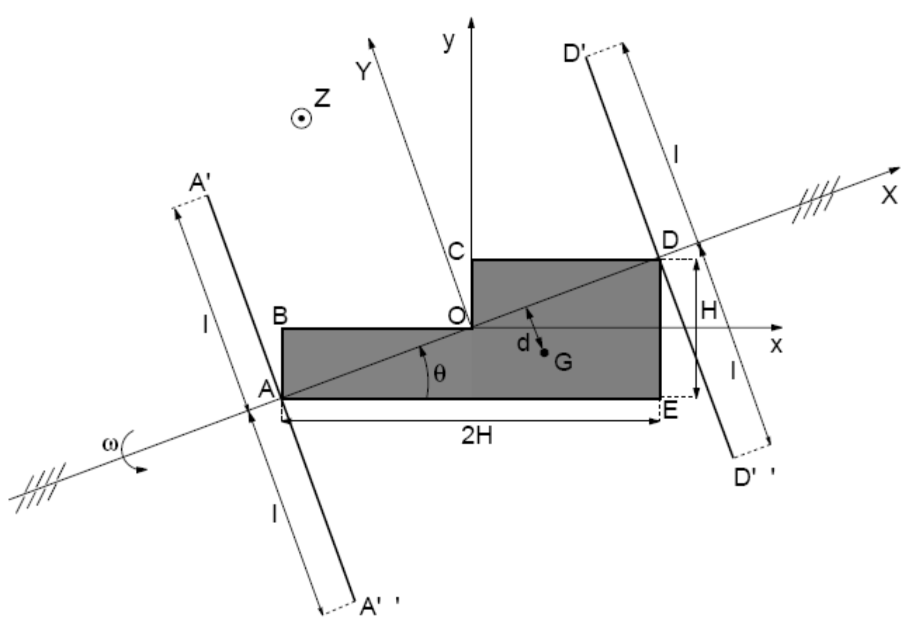
$$\Rightarrow mR\ddot{\alpha}\cos\theta - m(R-a)\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - N \Rightarrow \boxed{N = -mR\ddot{\alpha}\cos\theta + m(R-a)\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta}$$

Question 4 : Plaque (5 points)

Un solide S est constitué par :

- une plaque homogène *ABOCDEA*, de masse *M*. Il s'agit pratiquement d'un rectangle de longueur *2H* et de largeur *H* auquel on aurait enlevé le quart supérieur gauche.
- deux tiges homogènes *A'A''* et *D'D''*, chacune de masse *m* et de longueur *2L*, soudées perpendiculairement à la diagonale *AD* de la plaque, de telle façon que le centre de la tige *A'A''* coïncide avec le sommet *A* de la plaque, tandis que le centre de la tige *D'D''* coïncide avec le sommet *D*.

Le solide *S* tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe *AD*.



G = le centre de gravité de la plaque seule ;
D = la distance entre le centre de gravité et l'axe *AD*.

1. Déterminer le **tenseur d'inertie** dans les axes *Oxyz* du système *S*. **(2 points)**

En considérant M =Rectangle complet ($\square\ \rho 2H^2$) - petit rectangle ($\square\ \dfrac{\rho H^2}{2}$)=$\rho 2H^2 - \dfrac{\rho H^2}{2} = \dfrac{\rho 3H^2}{2}$

$$I_x = I_{x(M)} + I_{x(AA')} + I_{x(DD')}$$

$$I_x = \left[\underbrace{\left(\rho 2H^2 . \frac{H^2}{12}\right)_{\square\, \rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2} . \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2} . \left(\frac{H}{4}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2} . \frac{H^2}{12}} \right)_{\square\, \frac{\rho H^2}{2}}}_{M\frac{H^2}{12}} \right] + \left[\frac{m(2L)^2}{12}\right] + \left[\frac{m(2L)^2}{12}\right] = \frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3}$$

$I_y = I_{y(M)} + I_{y(AA')} + I_{y(DD')}$ avec $\overline{OA} = \left(-\sqrt{H^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}, 0, 0 \right)$ et $\overline{OD} = \left(\sqrt{H^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}, 0, 0 \right)$

$$I_y = \left[\underbrace{\left(\rho 2H^2 . \frac{(2H)^2}{12}\right)_{\square\, \rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2} . \frac{H^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2} . \left(\frac{H}{2}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2} . \frac{H^2}{3}} \right)_{\square\, \frac{\rho H^2}{2}}}_{M\frac{H^2}{3}} \right] + \left[0 + mH^2 \frac{5}{4}\right] + \left[0 + mH^2 \frac{5}{4}\right] = \frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2}$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3} + \frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2} = \frac{5MH^2}{12} + m\left(\frac{5H^2}{2} + \frac{2L^2}{3}\right)$$

$P_{xy} = \left[(0)_{\square\, \rho 2H^2} - \left(0 + \frac{\rho H^2}{2} . \left(\frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{4}\right)\right)_{\square\, \frac{\rho H^2}{2}} \right] + 0 + 0 = \dfrac{MH^2}{24}$ avec $\overline{\mathrm{OG}}(-\dfrac{H}{2}, \dfrac{H}{4}, 0)$

2. Déterminer le **tenseur d'inertie** dans les axes *OXYZ* du système *S*. **(2 points)**

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_X & -P_{XY} & 0 \\ -P_{XY} & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \overline{1}_X = \cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y \\ \overline{1}_Y = -\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y \end{cases} \text{ où } \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$I_X = \sin^2\theta I_y + \cos^2\theta I_x - 2\sin\theta\cos\theta P_{xy} = \frac{2}{5}I_y + \frac{4}{5}I_x - \frac{4}{5}P_{xy}$$

$$\Rightarrow I_X = \frac{2}{5}\left(\frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3}\right) - \frac{4}{5}\frac{MH^2}{24} = \frac{MH^2}{6} + \frac{2m}{5}\left(\frac{5H^2}{2} + \frac{4L^2}{3}\right)$$

$$I_Y = \cos^2\theta I_y + \sin^2\theta I_x + 2\sin\theta\cos\theta P_{xy} = \frac{4}{5}I_y + \frac{2}{5}I_x + \frac{4}{5}P_{xy}$$

$$\Rightarrow I_Y = \frac{4}{5}\left(\frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3}\right) + \frac{4}{5}\frac{MH^2}{24} = \frac{MH^2}{3} + \frac{2m}{5}\left(5H^2 + \frac{2L^2}{3}\right)$$

$$I_Z = I_X + I_Y = \frac{2}{5}I_y + \frac{4}{5}I_x - \frac{4}{5}P_{xy} + \frac{4}{5}I_y + \frac{2}{5}I_x + \frac{4}{5}P_{xy} = \frac{6}{5}I_y + \frac{6}{5}I_x$$

$$\Rightarrow I_Z = \frac{6}{5}\left(\frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2}\right) + \frac{6}{5}\left(\frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3}\right) = \frac{MH^2}{2} + \frac{6m}{5}\left(\frac{5H^2}{2} + \frac{2L^2}{3}\right)$$

$$P_{XY} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_y + I_x\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy} = \frac{2}{5}\left(-I_y + I_x\right) + \frac{3}{5}P_{xy}$$

$$\Rightarrow P_{XY} = \frac{2}{5}\left(-\left(\frac{MH^2}{3} + \frac{5mH^2}{2}\right) + \left(\frac{MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3}\right)\right) + \frac{3}{5}\frac{MH^2}{24} = -\frac{3MH^2}{40} + \frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3} - \frac{5H^2}{2}\right)$$

3. Déterminer la dérivée du moment cinétique en O du système S. **(1 point)**

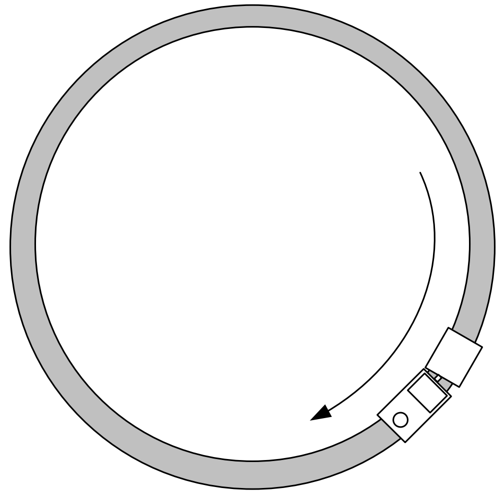
O est fixe => $\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_X & - & - \\ -P_{XY} & - & - \\ 0 & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_X\omega\overline{1}_X - P_{XY}\omega\overline{1}_Y$ => $\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{M}_O = -P_{XY}\omega^2\,\overline{1}_Z$

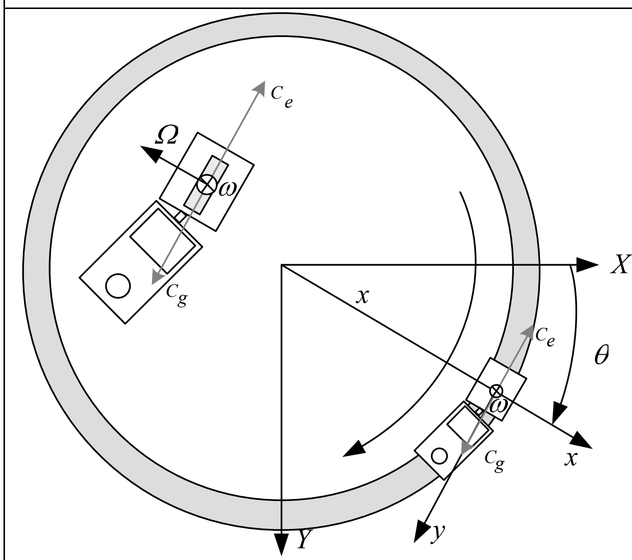
seul le produit d'inertie est nécessaire :

$$\frac{d\overline{M}_O}{dt} = -\left[-\frac{3MH^2}{40} + \frac{2m}{5}\left(\frac{2L^2}{3} - \frac{5H^2}{2}\right)\right]\omega^2\,\overline{1}_Z$$

<u>Question 5</u> : Gyroscope (3 points)

On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.





Le train tourne à vitesse constante => conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

$\overline{\omega} = \omega \overline{1}_z$ avec ω constant

le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,G} = -C_e \overline{1}_y$

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit etre

$\overline{C}_g = C_g \overline{1}_y = \Gamma\overline{\Omega} \times \omega \overline{1}_z$

=> Le moment cinétique du gyroscope ($\Gamma\overline{\Omega}$) doit etre suivant l'axe $-\overline{1}_x$ => $\overline{M}_{G,gyr} = -\Gamma\Omega\overline{1}_x$

Donc on va placer une roue sur le wagon de manière à avoir son axe de révolution suivant l'axe x. On la ferra tourner de manière à avoir le vecteur de rotation propre de la roue vers le centre des rails.

BROUILLON

BROUILLON