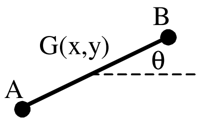
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle II
2e candidature 2005-2006
Corrigé de la séance 9

Update 11/01/2006 : Ex 5 : complément pour le déplacement virtuel
Update 19/04/2006 : Ex 1.b et Ex 4.2

REMARQUE : seul le potentiel variable est précisé. Etant donné que le potentiel va être dérivé dans le théorème de Lagrange, seul les potentiels variables nous intéressent.



3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ)
Dans un plan horizontal (V=0) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide indéformable.**

1.a

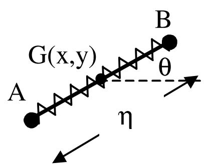
$$L = T = \left(\frac{M}{2} v_G{}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} \right)_{\text{solide}} = \frac{2.m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & I_z(A)+I_z(B) \end{pmatrix}.\overline{\omega}$$

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A) = \underbrace{I_{z'}(A)}_{\substack{=0 \text{ masse} \\ \text{ponctuelle}}} + md^2 = m\frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

$$\begin{cases} x: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 \Rightarrow x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 \Rightarrow y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

1.b 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ, η)
Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points.**



$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2 \right) + \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt}\right)^2 \right)$$

avec $A(x_G - \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G - \frac{\eta}{2}\sin\theta)$ et $B(x_G + \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G + \frac{\eta}{2}\sin\theta)$

$$\overline{v}_A(\dot{x} - \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta + \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} - \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta - \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta}) \text{ et } \overline{v}_B(\dot{x} + \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta - \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} + \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta + \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta})$$

$$L = T - V = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4}\left(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(\eta - l)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \dfrac{m}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\eta^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \eta^2\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{m}{2}\eta^2\dot{\theta} = C = \text{intégrale première} \\ \eta: \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{m}{2}\eta\dot{\theta}^2 + k(\eta - l) = 0 \Rightarrow \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{2C^2}{m\eta^3} + k(\eta - l) = 0 \end{cases}$$

La 4ième équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T + V = E_0$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) + \frac{m}{4}\left(2\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2 + 2\eta^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + k(\eta - l)\dot{\eta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\ddot{\eta} - m\eta 2\left(\frac{C}{m\eta^2}\right)^2 + k(\eta - l) = 0$$

1.c Si on a une tige de longueur l seul le moment d'inertie est différent par rapport au premier cas :

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 \text{ => Mouvement inchangé.}$$

1.d Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien $L=T\text{-}V$

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 - 2mgy \quad \text{avec } y: \ \ddot{y} = -g \ \Rightarrow \ \dot{y} = -gt + \dot{y}_0 \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0$$

---

2. 2 degrés de liberté (x, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.
Axes centrés en A : z = verticale descendante, x = horizontale dirigée de B vers C => vitesse angulaire positive suivant y.

$$T = T_M + T_m \quad \text{avec} \quad T_M = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \underbrace{M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}}_{=0\ (\omega=0)} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad \text{car le triangle ne tourne pas.}$$

$$\text{Pour le point matériel de masse } m: T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{=0\ (\text{point matériel, } \overline{\overline{I}}_G=0)}$$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AP} = \left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x + \ell\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_z \ \Rightarrow \ T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$V = -mg\ell\cos\theta \ \Rightarrow \ L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ : \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = A \text{ est une intégrale première} : M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \ell\cos\theta\dot{\theta}\right) = A$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \ \text{ (ou directement avec } T + V = E_0\text{)}$$

---

3. Système à un seul degré de liberté (θ)=> 1 coordonnée de Lagrange => 1 équation de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel mais avec un couple extérieur => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.

$$\overline{v}_B = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta \,;\, \overline{v}_D = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta \Rightarrow \overline{v}_B = \overline{v}_D = \overline{v}_G \Rightarrow \text{Le solide 2 est en translation curviligne : } \omega_2 = 0$$

$$T = 2.\left(\frac{1}{2}mv_{G_1}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1.\overline{\overline{I}}_{G_1}.\overline{\omega}_1\right) + \left(\frac{M}{2}v_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2\right)$$

$$T = 2.\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{M}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2$$

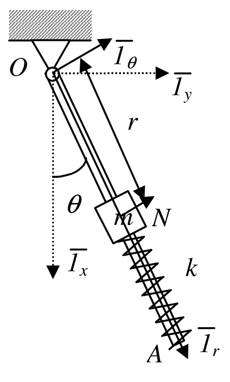
$$V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\cos\theta = -\left(m + M\right)gL\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \left(m + M\right)gL\cos\theta$$

$$\text{Le travail du couple } C : \delta\tau = C\delta\theta = Q^*_\theta\delta\theta \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^*_\theta \ : \ m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} + \left(m + M\right)gL\sin\theta = C$$

$$\text{ou } Q_\theta = C - \frac{\partial V}{\partial \theta} = C - \left(m + M\right)gL\sin\theta \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \ : \ m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} = C - \left(m + M\right)gL\sin\theta$$

4.1



2 degrés de liberté (r, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.

Système {Tige (M) + masse (m)} : *Théorème de Lagrange*

$$T = T_m + T_M \quad \text{où} \quad T_M = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_O^2 + M\overline{v}_O.\left(\overline{\omega}\times\overline{OG}\right)}_{O \text{ fixe}} + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + M\overline{v}_G.\left(\overline{\omega}\times\overline{GG}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{I_G=0\ (\text{masse ponctuelle, } \overline{\overline{I}}_G=0)} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$\Rightarrow L=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot\theta^2+Mg\frac{L}{2}\cos\theta+mgr\cos\theta-\frac{k}{2}\left(r-r_0\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r}-\frac{\partial L}{\partial r}=0\ :\ m\ddot r-mr\dot\theta^2-mg\cos\theta+k\left(r-r_0\right)=0\quad(1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\ :\ mr^2\ddot\theta+m2r\dot r\dot\theta+\frac{ML^2}{3}\ddot\theta+Mg\frac{L}{2}\sin\theta+mgr\sin\theta=0\quad(2)$$

4.2 Système {Tige (M)} : (m est au point P) *Théorème de Lagrange*

$$T=\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot\theta^2\quad\text{et}\quad\boxed{Q_\theta=\bar N.\frac{\partial\bar\varphi_P}{\partial\theta}+M\bar g.\frac{\partial\bar\varphi_G}{\partial\theta}}=-rN-Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\text{où}\begin{cases}\bar N=-N\bar 1_\theta\ \text{et}\ \overline{OP}=r\bar 1_r;\ \delta\overline{OP}=\frac{\partial\bar\varphi_P}{\partial r}\delta r+\frac{\partial\bar\varphi_P}{\partial\theta}\delta\theta=\delta r\bar 1_r+r\delta\theta\bar 1_\theta\ \Rightarrow\ \frac{\partial\bar\varphi_P}{\partial r}=\bar 1_r\ \text{et}\ \frac{\partial\bar\varphi_P}{\partial\theta}=r\bar 1_\theta\\ M\bar g=Mg\bar 1_x\ \text{et}\ \overline{OG}=\frac{L}{2}\left(\cos\theta\bar 1_x+\sin\theta\bar 1_y\right);\ \delta\overline{OG}=\frac{\partial\bar\varphi_G}{\partial r}\delta r+\frac{\partial\bar\varphi_G}{\partial\theta}\delta\theta=\frac{L}{2}\left(-\sin\theta\bar 1_x+\cos\theta\bar 1_y\right)\delta\theta\\ \Rightarrow\ \frac{\partial\bar\varphi_G}{\partial r}=0\ \text{et}\ \frac{\partial\bar\varphi_G}{\partial\theta}=\frac{L}{2}\left(-\sin\theta\bar 1_x+\cos\theta\bar 1_y\right)\end{cases}$$

L'équation de Lagrange $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta}\ \Rightarrow\ \frac{ML^2}{3}\ddot\theta=-rN-\frac{L}{2}\sin\theta Mg\ \Rightarrow\ N=-ML\frac{\frac{L}{3}\ddot\theta+\frac{g}{2}\sin\theta}{r}$

OU en utilisant directement ce qui a été calculé précédemment :

$$L=\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot\theta^2+Mg\frac{L}{2}\cos\theta\Rightarrow\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta^*}\ \Rightarrow\ \frac{ML^2}{3}\ddot\theta+\frac{L}{2}\sin\theta Mg=-rN$$

Il est préférable d'utiliser les théorèmes généraux pour trouver les réactions de liaison (voir TP 8)

---

5. 1 degré de liberté (θ) => 1 coordonnées de Lagrange => 1 équations de mouvement
Il y a une force extérieure ne dérivant pas d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.
Axes : $Axyz$ avec x dans le sens de F et z est la verticale ascendante. $\bar\omega=\omega\bar 1_z$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta^*}$$

Il y a roulement sans glissement en O : $\bar v_G=\dot x\bar 1_x=\bar\omega\times\overline{OG}=-r\dot\theta\bar 1_x\Rightarrow\dot x=-r\dot\theta$

$$L=T-V\quad\text{avec}\quad V=Const\quad\text{et}\quad T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\bar\omega.\bar{\bar I}_G.\bar\omega=\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}\dot\theta^2m\,i_z^{\,2}$$

Avec O' l'origine du repère $O'xy$

$Q_\theta^*=\frac{\partial\bar\varphi_A}{\partial\theta}.\bar F$: pour un petit déplacement $\delta\theta$, on a $\overline{O'A}=x\bar 1_x-R\bar 1_{y'}\Rightarrow\delta\overline{OA}=\delta x\bar 1_x-R\delta\bar 1_{y'}=\delta x\bar 1_x+R\delta\theta\bar 1_x$

Or on a vu que $\dot x=-r\dot\theta$ donc $\delta x=-r\delta\theta\Rightarrow\delta\overline{O'A}=\left(R-r\right)\delta\theta\bar 1_x=\frac{\partial\bar\varphi_A}{\partial\theta}\delta\theta\ \Rightarrow\ Q_\theta=\left(R-r\right)F$

le déplacement peut aussi se calculer à partir de O qui a une vitesse nulle : $\overline{OA}=-\left(R-r\right)\bar 1_y\Rightarrow\delta\overline{OA}=\left(R-r\right)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta^*\ :\ m\left(r^2+i_z^{\,2}\right)\ddot\theta=\left(R-r\right)F\ \Rightarrow\ \ddot\theta=\frac{F\left(R-r\right)}{m\left(r^2+i_z^{\,2}\right)}$$

La poulie va reculer avec une accélération : $\ddot x=-\frac{Fr\left(R-r\right)}{m\left(r^2+i_z^{\,2}\right)}$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html