

UPDATE 30/03/2006 : Ex6 (projection du  $\bar{\mathbf{l}}_x$  en fonction de  $\theta$  et non de  $\phi$ )

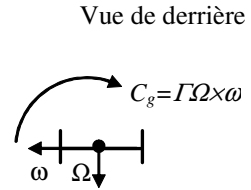
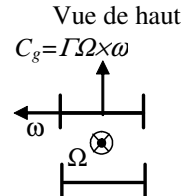
UPDATE 19/04/2006 : Ex3 et Ex4

UPDATE 21/04/2006 : Ex5

UPDATE 09/05/2006 : Ex1 : dessin

1. Gyrostat :  $\Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

Le bus aura tendance à basculer vers la droite.



2.  $\frac{d}{dt} \bar{M}_O = \sum \bar{m}_{e,O} + \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$  avec  $\bar{\omega}$  constant  $\Rightarrow 0 = \sum \bar{m}_{e,O} + \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

1. A l'équilibre ( $\omega=0, \Omega=0$ ) :  $0 = \sum \bar{m}_{e,O} \Rightarrow \sum \bar{m}_{e,O} = \bar{m}_{e,O}(m_A) + \bar{m}_{e,O}(M) = 0,18.m_A g \bar{\mathbf{l}}_x + C_e \bar{\mathbf{l}}_x = 0$

avec  $C_e$  = couple qui équilibre le moment généré par la masse A  $\Rightarrow \bar{C}_e = -0,18.m_A g \bar{\mathbf{l}}_x$

2. Pendant le mouvement :  $0 = \bar{m}_{e,O}(m_A) + \bar{m}_{e,O}(M) + \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

$$0 = b.m_A g \bar{\mathbf{l}}_x - 0,18.m_A g \bar{\mathbf{l}}_x - \left(2,2 \cdot 0,06^2\right) \cdot \left(\frac{1725}{60} \cdot 2\pi\right) \cdot (0,2) \bar{\mathbf{l}}_x$$

$$\Rightarrow b - 0,18 = 0,0364 \Rightarrow b = 0,216 \text{ m}$$

3. Nous avons 3 masses ponctuelles et deux solides (poulies). Soit les positions des masses  $m, 3m, 5m$  et la poulie  $M$  :  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

$$z_1 = u + v ; z_2 = +u - v + C_1 ; z_3 = -u + C_2 ; z_4 = u$$

2 degrés de liberté ( $u, v$ )  $\Rightarrow$  2 coordonnées de Lagrange  $\Rightarrow$  2 équations de mouvement

Toutes les forces dérivent d'un potentiel  $\Rightarrow$  Formule avec le Lagrangien et  $Q_i=0$ .

$$T = \sum_{\text{masses ponctuelles}} \left( \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 \right) + \sum_{\text{solides}} \left( \frac{M_i}{2} v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \cdot \bar{I}_{G_i} \cdot \bar{\omega}_i \right) \text{ avec } I = 2mR^2 \text{ donc } M = 4m \text{ car } I(\text{disque}) = \frac{MR^2}{2}$$

$$T = \left( \frac{m}{2} (\dot{u} + \dot{v})^2 \right)_{m_1} + \left( \frac{3m}{2} (\dot{u} - \dot{v})^2 \right)_{m_2} + \left( \frac{5m}{2} (-\dot{u})^2 \right)_{m_3} + \left( \frac{1}{2} \frac{4M(2R)^2}{2} \omega_1^2 \right)_{S_1(4M)} + \left( \frac{M}{2} (\dot{u})^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega_2^2 \right)_{S_2(M)} \text{ avec } \omega_1 = \frac{\dot{u}}{2R} \text{ et } \omega_2 = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{m}{2} \dot{v}^2 + m\dot{u}\dot{v} + \frac{3m}{2} \dot{u}^2 + \frac{3m}{2} \dot{v}^2 - 3m\dot{u}\dot{v} + \frac{5m}{2} \dot{u}^2 + \frac{8m}{2} \dot{u}^2 + \frac{4m}{2} \dot{u}^2 + \frac{2m}{2} \dot{v}^2$$

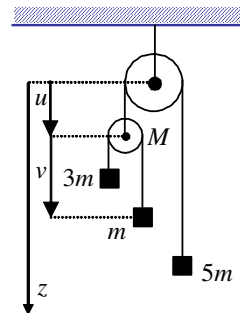
$$T = \frac{21m}{2} \dot{u}^2 + \frac{6m}{2} \dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v}$$

$$V = -mgz_1 - 3mgz_2 - 5mgz_3 - Mgu = -3mgu + 2mgv + C \Rightarrow L = \frac{21m}{2} \dot{u}^2 + \frac{6m}{2} \dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v} + 3mgu - 2mgv$$

$$\begin{cases} u: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0: 21m\ddot{u} - 2m\ddot{v} - 3mg = 0 \\ v: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0: 6m\ddot{v} - 2m\ddot{u} + 2mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{v} = -\frac{18g}{61} \text{ et } \ddot{u} = \frac{7g}{61}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_1 = -\frac{18g}{61} + \frac{7g}{61} = -\frac{11g}{61} \text{ (}\uparrow\text{)}; \ddot{z}_2 = \frac{7g}{61} + \frac{18g}{61} = \frac{25g}{61} \text{ (}\downarrow\text{)}; \ddot{z}_3 = -\frac{7g}{61} \text{ (}\uparrow\text{)}; \ddot{z}_4 = \frac{7g}{61} \text{ (}\downarrow\text{)}$$



4. 1 degré de liberté ( $\theta$ )  $\Rightarrow$  2 coordonnées de Lagrange  $\Rightarrow$  2 équations de mouvement avec un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_1$ .

Toutes les forces dérivent d'un potentiel  $\Rightarrow$  Formule avec le Lagrangien et  $Q_i=0$ .

relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  ( $x = AC = 2L \sin \theta$ ) :  $\dot{x} = r\dot{\alpha} = 2L \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow \lambda_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha = 2L \cos \theta \delta \theta - r \delta \alpha = 0 \right)$

$$\overline{OG_2} = \frac{3L}{2} \sin \theta \bar{1}_x + \frac{L}{2} \cos \theta \bar{1}_y \Rightarrow \bar{v}_{G_2} = \frac{3L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \bar{1}_x - \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \bar{1}_y$$

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right]_{AB} + \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{9L^2}{4} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 \right]_{BC} + \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \dot{\alpha}^2 \right]_{\text{Roue } (\dot{x}=r\dot{\alpha})}$$

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right] + \left[ \frac{m}{2} 2L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 \right] + \frac{3mr^2}{4} \dot{\alpha}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{8mL^2}{12} \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4} \dot{\alpha}^2$$

$$V = -2 \cdot \left( mg \frac{L}{2} \cos \theta \right) \Rightarrow L = \frac{1}{2} \frac{8mL^2}{12} \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4} \dot{\alpha}^2 + mgL \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \Rightarrow \frac{3}{2} mr^2 \ddot{\alpha} = -\lambda_1 r \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2} mr \ddot{\alpha} = -\frac{3}{2} m (-2L \sin \theta \dot{\theta}^2 + 2L \cos \theta \ddot{\theta}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{8mL^2}{12} \ddot{\theta} + 2mL^2 \cos^2 \theta \ddot{\theta} - 4mL^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + 2mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + mgL \sin \theta = \lambda_1 2L \cos \theta \\ r\dot{\alpha} - 2L \cos \theta \dot{\theta} = 0 \end{array} \right.$$

Système de 3 équations à 3 inconnues  $\Rightarrow \left( \frac{2}{3} + 2 \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} - \sin 2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{g}{L} \sin \theta = (3 \sin 2\theta \dot{\theta}^2 - 6 \cos^2 \theta \ddot{\theta})$

$$\Rightarrow \left( \frac{2}{3} + 8 \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} - 4 \sin 2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

OU

Possibilité de résoudre avec 3 coordonnées de Lagrange et donc 2 multiplicateurs de Lagrange :

relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  ( $x = 2L \sin \theta$ ) :  $x - 2L \sin \theta = 0 \Rightarrow \lambda_1 : \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha = 2L \cos \theta \delta \theta - r \delta \alpha = 0$

relation entre  $x$  et  $\alpha$  :  $\dot{x} = r\dot{\alpha} \Rightarrow \lambda_2 : \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \delta \alpha = \delta x - r \delta \alpha = 0$

$$T = \left[ \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right]_{AB} + \left[ \frac{m}{2} 2L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \right]_{BC} + \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \dot{\alpha}^2 \right]_{\text{Roue } (\dot{x}=r\dot{\alpha})}$$

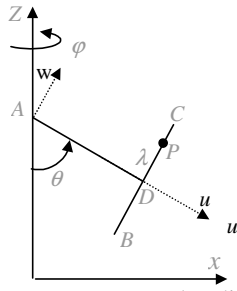
$$\text{et } V = -2 \cdot \left( mg \frac{L}{2} \cos \theta \right) \Rightarrow L = \frac{1}{2} \frac{2mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \dot{\alpha}^2 + mgL \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 2L \cos \theta \dot{\theta} - r \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} - r \dot{\alpha} = 0 \end{array} \right.$$

On obtient le même résultat en résolvant ce système de 5 équations à 5 inconnues ( $\lambda_1, \lambda_2, x, \alpha, \theta$ )

## 5.1 3 degrés de liberté ( $\theta, \varphi, \lambda$ ) $\Rightarrow$ 3 coordonnées de Lagrange $\Rightarrow$ 3 équations de mouvement.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel  $\Rightarrow$  Formule avec le Lagrangien et  $Q_i=0$ .



$\lambda$  = distance entre le point  $P$  et le centre du T ( $D$ ).  $AD$  et  $BC$  sont perpendiculaires.

$$T = T_{AD} + T_{BC} + T_P$$

$$\text{axes principaux } uvw: \begin{cases} T_{AD} = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \bar{v}_A \cdot (\bar{\omega} \times \overline{AG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_A \cdot \bar{\omega} \\ \bar{\omega} = -\dot{\theta} \bar{I}_y + \dot{\phi} \bar{I}_z = -\dot{\phi} \cos \theta \bar{I}_u - \dot{\theta} \bar{I}_v + \dot{\phi} \sin \theta \bar{I}_w \\ \Rightarrow T_{AD} = \frac{1}{2} (I_w \omega_w^2 + I_v \omega_v^2) = \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{3} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \end{cases}$$

On remarque que les différentes parties de l'énergie cinétique peuvent être calculée indépendamment dans le repère le plus simple (Axes principaux pour le terme avec le tenseur,  $uvw$ )

$$\begin{cases} T_{BC} = \frac{1}{2} M v_D^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_D \cdot \bar{\omega} \text{ où } \bar{\omega}_{BC} = \bar{\omega}_{AD} = -\dot{\phi} \cos \theta \bar{I}_u - \dot{\theta} \bar{I}_v + \dot{\phi} \sin \theta \bar{I}_w \\ \bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AD} = -\ell \sin \theta \dot{\phi} \bar{I}_v - \ell \dot{\theta} \bar{I}_w \Rightarrow v_D^2 = \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \\ \Rightarrow T_{BC} = \frac{m \ell^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) \\ T_P = \frac{1}{2} M v_P^2 + M \bar{v}_P \cdot (\bar{\omega} \times \overline{PP}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_P \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} M v_P^2 \\ \quad \quad \quad \bar{I}_P = 0 : \text{masse ponctuelle} \\ \bar{v}_P = \frac{d \overline{AP}}{dt} = \frac{d(\ell \bar{I}_u + \lambda \bar{I}_w)}{dt} = \ell \bar{\omega} \times \bar{I}_u + \lambda \bar{\omega} \times \bar{I}_w = \ell \dot{\theta} \bar{I}_w + \ell \dot{\phi} \sin \theta \bar{I}_v + \lambda \dot{\theta} \bar{I}_w - \lambda \dot{\phi} \cos \theta \bar{I}_v \\ \Rightarrow T_P = \frac{1}{2} M (\lambda^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2 \ell \dot{\theta} \dot{\lambda} + (\ell \dot{\phi} \sin \theta + \lambda \dot{\phi} \cos \theta)^2) \end{cases}$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$T = \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} (17 \dot{\theta}^2 + 16 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} M (\lambda^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2 \ell \dot{\theta} \dot{\lambda} + (\ell \dot{\phi} \sin \theta + \lambda \dot{\phi} \cos \theta)^2)$$

$$V = \underbrace{-mg \frac{\ell}{2} \cos \theta}_{V_{AD}} - \underbrace{mg \ell \cos \theta}_{V_{BC}} + \underbrace{Mg (-\ell \cos \theta + \lambda \sin \theta)}_{V_P} = -\frac{3\ell}{2} mg \cos \theta + Mg (\lambda \sin \theta - \ell \cos \theta)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \right] = 0 \Rightarrow \left( \frac{17m\ell^2}{12} + M(\lambda^2 + \ell^2) \right) \ddot{\theta} + M \ell \ddot{\lambda} + M 2\lambda \dot{\lambda} \dot{\theta}$$

$$- \left( M \ell \lambda \cos 2\theta + \left( M \frac{(\ell^2 - \lambda^2)}{2} + \frac{5m\ell^2}{8} \right) \sin 2\theta \right) \dot{\phi}^2 + \frac{3\ell}{2} mg \sin \theta + Mg (\ell \sin \theta + \lambda \cos \theta) = 0$$

(ou directement avec  $T + V = E_0$ )

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} \right] = 0 : \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = A \text{ est une intégrale première :}$$

$$\left( m \ell^2 \left( \frac{4}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{12} \cos^2 \theta \right) + M (\ell \sin \theta + \lambda \cos \theta)^2 \right) \dot{\phi} = A$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right] = 0 : \ddot{\lambda} + \ell \ddot{\theta} - \lambda \dot{\theta}^2 - (\ell \sin \theta + \lambda \cos \theta) \dot{\phi}^2 \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

5.2

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \text{Identique}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = C \Rightarrow \frac{d \left( m \ell^2 \left( \frac{15}{12} \sin^2 \theta + \frac{1}{12} \right) + M (\ell \sin \theta + \lambda \cos \theta)^2 \right) \dot{\phi}}{dt} = C$$

$$\Rightarrow \left( m \ell^2 \frac{15}{6} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + 2M \left( \left( (\ell^2 - \lambda^2) \sin \theta \cos \theta + \lambda \ell (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) \dot{\theta} + (\lambda \cos^2 \theta + \ell \sin \theta \cos \theta) \dot{\lambda} \right) \right) = \frac{C}{\dot{\phi}_0}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \text{Identique}$$

Seule l'équation en  $\phi$  est modifiée. Les intégrales premières ne sont pas conservées.

6. 2 degrés de liberté  $(\theta, \phi) \Rightarrow$  2 coordonnées de Lagrange  $\Rightarrow$  2 équations de mouvement.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel  $\Rightarrow$  Formule avec le Lagrangien et  $Q_i=0$ .

Système d'axe  $Ox'y'z'$  lié à la tige  $OG$ . ( $z = OB$ ;  $z' = OG$ ;  $x$  et  $x'$  dans le même plan que  $z$  et  $z'$ ) Système d'axe principaux  $Gx''y''z''$  lié au cube

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega} \quad \text{où} \quad I_{x'_G} = I_{y'_G} = I_{z'_G} = \frac{m d^2}{6} = A \quad (\text{par symétrie})$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{1}_{z'} + \dot{\phi} \cos \alpha \bar{1}_{z'} - \dot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{x'} = \dot{\theta} \bar{1}_{z'} + \dot{\phi} \cos \alpha \bar{1}_{z'} - \dot{\phi} \sin \alpha (\cos \theta \bar{1}_{x''} - \sin \theta \bar{1}_{y''})$$

$$\text{et} \quad \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega} = A (\omega_{x''}^2 + \omega_{y''}^2 + \omega_{z''}^2) = A (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \alpha + \dot{\phi}^2 \cos^2 \alpha + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega} = (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \alpha) \frac{m d^2}{6}$$

$$\overline{OG} = \ell \bar{1}_{z'}; \quad \bar{v}_G = \ell (\dot{\phi} \bar{1}_z \times \bar{1}_{z'}) = \ell \dot{\phi} \sin \alpha \bar{1}_{y'} \Rightarrow v_G^2 = \ell^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2$$

$$T = \frac{m}{2} \ell^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \alpha) \frac{m d^2}{6} \quad \text{et} \quad V = 0 \Rightarrow L = T$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 : \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = A_1 \text{ est une intégrale première : } m \ell^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\theta} \cos \alpha) \frac{m d^2}{6} = A_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 : \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A_2 \text{ est une intégrale première : } (\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \alpha) \frac{m d^2}{6} = A_2$$

$$\Rightarrow \text{on obtient immédiatement : } \begin{cases} \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = \text{const} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \phi_0 + \dot{\phi}_0 t \\ \theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t \end{cases}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be)

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez [CFAO.Matlab@ulb.ac.be](mailto:CFAO.Matlab@ulb.ac.be)

Corrigés disponible sur <http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html>