Faculté des Sciences Appliquées

«N»

NOM : «Nom»
PRENOM : «Prénom»

Mécanique Rationnelle
2e candidature

Examen de mécanique rationnelle
1ère session 12/01/2006 (8h-12h)
Année académique 2005-2006

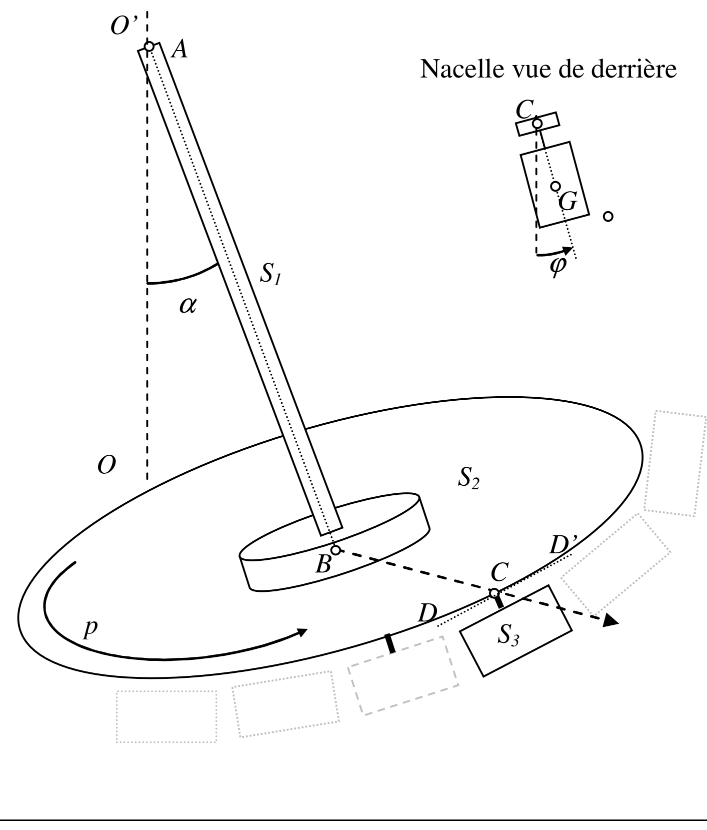
Répondre sur le questionnaire et **ne dégrafer que** les brouillons

Cinématique : $\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BA}$ $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon}\times\overline{BA} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{BA}\right)$ Cinétique : $\overline{R} = m\overline{v}_G$ $\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB}\times\overline{R}$ $\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + m\overline{AG}\times\overline{v}_A$ $T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$	Inertie : $I^{\alpha\beta} = \int_{système}\left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta\right)dm$ $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$ Moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de révolution : $I_z = \frac{MR^2}{2}$ Moment d'inertie d'un cercle par rapport à son axe de révolution : $I_z = MR^2$	$tg\,2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$ $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)$

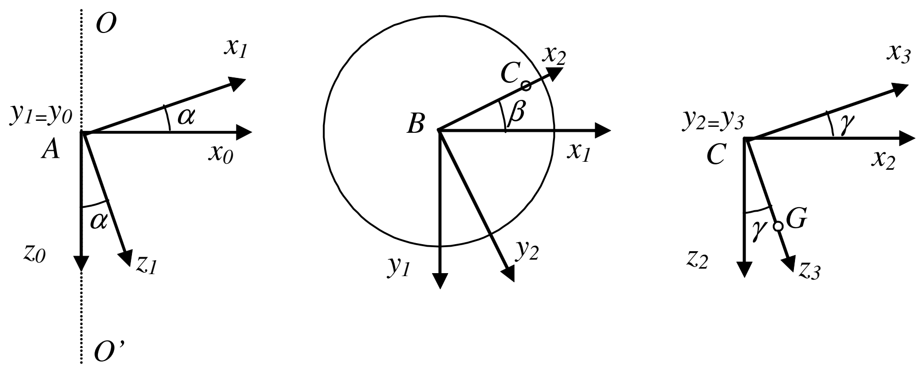
Question 1 : (4 points)

Le manège représenté ci-dessous sans le support extérieur est composé de :

- un bras S_1 pouvant osciller dans un plan vertical et dont la rotation est caractérisée par l'angle α.
- un rotor S_2 fixé au bout du bras S_1 et tournant avec une vitesse angulaire p constante. Ce rotor entraine dans son mouvement un disque de rayon R.
- N nacelles (du type S_3) fixées au bord du disque. Ces nacelles peuvent osciller autour de l'axe DD'. L'angle caractérisant cette rotation est donné par φ, l'angle entre la verticale et l'axe CG de la nacelle.



1. Déterminer les différents systèmes d'axes que vous aller utiliser pour calculer la vitesse angulaire du solide S_3.



R_1/R_0 :
Repère tournant autour de y_1 : $\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\alpha}\overline{1}_{y_1}$
R_2/R_1 :
Repère suivant la rotation du rotor et donc du disque : $\overline{\omega}_{R_2/R_1} = -\dot{\beta}\overline{1}_{z_2} = -\dot{\beta}\overline{1}_{z_1}$
R_3/R_2 :
Repère attaché à la nacelle suivant son oscillation. $\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\gamma}\overline{1}_{y_3}$

2. Déterminer le vecteur vitesse angulaire du solide S_3.

R_3 = Repère suivant la rotation de la nacelle S_3

$$\overline{\omega}_{S_3} = \overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\alpha}\overline{1}_{y_1} + \dot{\beta}\overline{1}_{z_2} + \dot{\gamma}\overline{1}_{y_3} = \begin{cases} \text{dans } R_2 : -\dot{\alpha}\sin\beta\overline{1}_{x_2} + \left(\dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}\right)\overline{1}_{y_2} - \dot{\beta}\overline{1}_{z_2} \\ \text{dans } R_1 : \dot{\gamma}\sin\beta\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\cos\beta\right)\overline{1}_{y_1} - \dot{\beta}\overline{1}_{z_1} \end{cases}$$

avec $\dot{\beta} = p$

3. Déterminer l'accélération angulaire du S_3.

$$\overline{\varepsilon}_{S_3} = \frac{d\overline{\omega}_{S_3}}{dt} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_3/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\omega}_{S_3} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_3/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\omega}_{R_3/R_1}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}_{S_3} = \left[\ddot{\gamma}\sin\beta + \dot{\gamma}\cos\beta\dot{\beta}\right]\overline{1}_{x_1} + \left[\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}\cos\beta - \dot{\gamma}\sin\beta\dot{\beta}\right]\overline{1}_{y_1} + \dot{\gamma}\sin\beta\dot{\alpha}\overline{1}_{z_1} - \dot{\alpha}\dot{\beta}\overline{1}_{x_1}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}_{S_3} = \left[\ddot{\gamma}\sin\beta + \dot{\gamma}\cos\beta\dot{\beta} - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right]\overline{1}_{x_1} + \left[\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}\cos\beta - \dot{\gamma}\sin\beta\dot{\beta}\right]\overline{1}_{y_1} + \left[\dot{\gamma}\sin\beta\dot{\alpha}\right]\overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{\varepsilon}_{S_3} = \frac{d\overline{\omega}_{S_3}}{dt} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_3/R_2}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{S_3} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_3/R_2}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{R_3/R_2}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}_{S_3} = \left[-\ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\cos\beta\dot{\beta}\right]\overline{1}_{x_2} + \left[\left(\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\sin\beta\dot{\beta} + \ddot{\gamma}\right)\right]\overline{1}_{y_2} + \dot{\alpha}\sin\beta\dot{\gamma}\overline{1}_{z_2} + \dot{\beta}\dot{\gamma}\overline{1}_{x_2}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}_{S_3} = \left[-\ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + \dot{\beta}\dot{\gamma}\right]\overline{1}_{x_2} + \left[\left(\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + \ddot{\gamma}\right)\right]\overline{1}_{y_2} + \left[\dot{\alpha}\sin\beta\dot{\gamma}\right]\overline{1}_{z_2}$$

Question 2 : (4 points)

Énoncer et démontrer la formule de Steiner.

$\overline{OG}\left(a_x;a_y;a_z\right) \Rightarrow x_i = X_i + a_i$ avec X_i les coordonnées du point P dans le système d'axe centré en G

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(x_i\ x_i\ \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha\ x_\beta\right) dm = \int \left(\left(X_i + a_i\right)\left(X_i + a_i\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(X_\alpha + a_\alpha\right)\left(X_\beta + a_\beta\right)\right) dm =$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} + a_i a_i \delta_{\alpha\beta} + 2X_i a_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta - X_\alpha a_\beta - X_\beta a_\alpha - a_\alpha a_\beta\right) dm$$

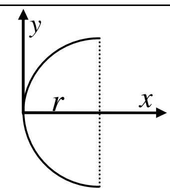
$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta\right) dm + \int \left(a_i a_i \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) dm + 2\int X_i a_i \delta_{\alpha\beta} dm - \int X_\alpha a_\beta dm - \int X_\beta a_\alpha dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + 2a_i\delta_{\alpha\beta}\underbrace{\int X_i dm}_{m\overline{GG_i}} - a_\beta \underbrace{\int X_\alpha dm}_{m\overline{GG_\alpha}} - a_\alpha \underbrace{\int X_\beta dm}_{m\overline{GG_\beta}} \Rightarrow \boxed{I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right)}$$

Par définition du centre de masse $\overline{OG} = \dfrac{\int \overline{OP} dm}{m} \Rightarrow mOG_i = \int OP_i dm \Rightarrow mX_i = \int x_i dm \Rightarrow 0 = \int X_i dm$

Dans les axes aux centre de masse, les coordonnées de ce centre de masse valent $(0,0,0)$

Appliquer cette formule pour calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe y de la figure ci-contre :



cercle : $I_z = M_{Cercle}R^2 \underbrace{=}_{2D} I_x + I_y \underbrace{=}_{sym} 2I_y \Rightarrow I_y = \dfrac{M_{Cercle}R^2}{2}$

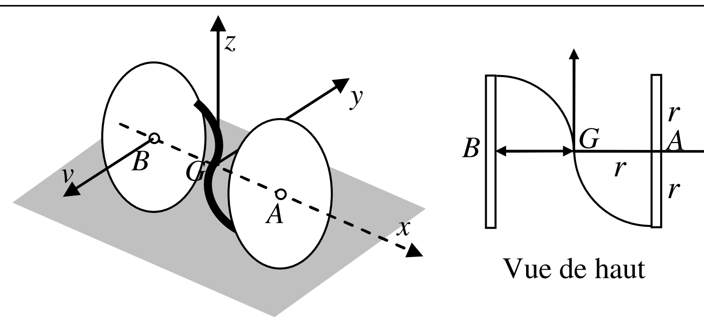
y'=diamètre du cercle : Par symétrie : $I_{y'}(\text{cercle O}) = I_{y'}(\cup) + I_{y'}(\cap) \Rightarrow I_{y'}(\cup) = \dfrac{M_{\text{O}}R^2}{4} = \dfrac{M_{\cup}R^2}{2}$

$$I_{y'} = \frac{mr^2}{2} \Rightarrow I_y = I_{y'} - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + m\left(r - \frac{2r}{\pi}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + m\left(r^2 - 4\frac{r^2}{\pi}\right) = \frac{3mr^2}{2} - 4m\frac{r^2}{\pi}$$

Question 3 : (5 points)

Deux disques circulaires, chacun de masse m_1, sont connectés à l'aide d'une barre circulaire composé de deux quarts de cercle. Cette barre possède une masse m_2.

Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes *Gxyz* du système.



Vue de haut

S1=Disque 1 ; S2=Tige ; S3=Disque 2

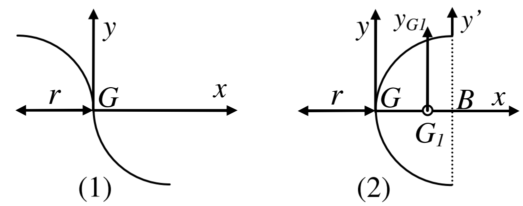
Disques : Par symétrie : $I_{x(S_1)} = I_{x(S_3)} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$

Par symétrie : $I_{y(S_1)} = I_{y(S_3)} = I_{z(S_1)} = I_{z(S_3)} = I_{x_{G1}} + m_1 r^2 = \dfrac{m_1 r^2}{4} + m_1 r^2 = \dfrac{5m_1 r^2}{4}$ car $I_{x(S_1)} = I_{y(S_1)} + I_{z(S_1)} = 2I_{y(S_1)}$

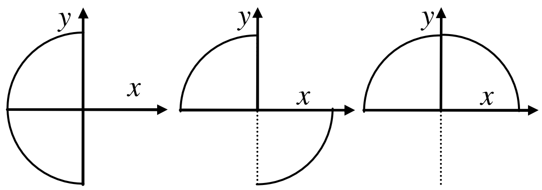
Tige : par symétrie, $I_x(1)=I_x(2)$ car on a bien la même répartition de masse par rapport à l'axe x. Nous pouvons tenir le même raisonnement pour l'axe y. La symétrie orthogonale ne modifie pas les moments d'inertie. => $I_y(1)=I_y(2)$

En utilisant la formule démontrée à la question précédente :

$$I_y(2)=\frac{3m_2r^2}{2}-4m_2\frac{r^2}{\pi} \Rightarrow I_{y(S_2)}=\frac{3m_2r^2}{2}-4m_2\frac{r^2}{\pi}$$



(1) (2)



(3) (4) (5)

Dans le cas du demi-cercle, si on fait deux symétries orthogonales, on passe de la configuration (3) à (5). Or ces symétries ne modifient en rien la disposition des masses par rapport aux axes. On voit donc que dans les trois cas, on a : $I_x=I_y \Rightarrow I_x(2)=I_{y'}(2)=\dfrac{m_2r^2}{2} \Rightarrow I_{x(S_2)}=\dfrac{m_2r^2}{2}$

Pour le système complet :

$$I_x=2.\left(\frac{m_1r^2}{2}\right)+\frac{m_2r^2}{2}$$

$$I_y=2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right)+\frac{3m_2r^2}{2}-4m_2\frac{r^2}{\pi}$$

$$I_z=2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right)+\left[\underbrace{\frac{m_2r^2}{2}}_{I_{x(S2)}}+\underbrace{\frac{3m_2r^2}{2}-4m_2\frac{r^2}{\pi}}_{I_{y(S2)}}\right]=\frac{5m_1r^2}{2}+2m_2r^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

Que pouvez-vous dire sur chacun des produits d'inertie ? Justifiez.

Grâce à la symétrie des deux disques par rapport aux plans yz, xy et xz, nous pouvons dire que tous les produits d'inertie sont nuls pour le système constitué des deux disques.

Pour la tige constituée des deux quarts de cercle, nous pouvons dire que $P_{xz}=P_{yz}=0$ car tous les points de la tige possèdent une coordonnée z nulle. Quant à P_{xy} il n'y a aucune symétrie, donc rien ne nous permet d'annuler ce terme. Il sera différent de zéro.

$$P_{xy(barre)}=P_{xy(\frac{1}{2}barreA)}+P_{xy(\frac{1}{2}barreB)} \Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreA)}=P_{xy_A}+\frac{m_2}{2}\left(\underbrace{-a.(r-a)}_{GG_1(r-a,-a,0)}-\underbrace{a^2}_{AG_1(-a,-a,0)}\right)=\frac{\rho r^3}{2}-\frac{m_2}{2}ra$$

$$\Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreB)}=P_{xy_B}+\frac{m_2}{2}\left(\underbrace{a.(-r+a)}_{GG_2(-r+a,a,0)}-\underbrace{a^2}_{BG_2(a,a,0)}\right)=\frac{\rho r^3}{2}-\frac{m_2}{2}ra \Rightarrow P_{xy(barre)}=\frac{m_2r^2}{\pi}-m_2ra$$

$$P_{xy(barre)}=\frac{m_2r^2}{\pi}-\frac{m_2r2r}{\pi}=-\frac{m_2r^2}{\pi}$$

Si les disques roulent sans glisser sur un plan horizontal avec une vitesse constante v, déterminer l'énergie cinétique du système.

$T=2T_{(S1)}+T_{(S2)}$ avec $T_{(Si)}=\dfrac{mv_G^2}{2}+\dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}$ et $\overline{v}_G=\overline{\omega}\times\overline{IG}=\omega\overline{1}_x\times r\overline{1}_z=-v\overline{1}_y \Rightarrow \overline{\omega}=\dfrac{v}{r}\overline{1}_x$

$$T=2\left[\left(\frac{m_1v^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m_1r^2}{2}\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2\right]+\left[\frac{m_2v^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{m_2r^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2\right]$$

<u>Question 4</u> : (2 points)

Démontrer la formule donnant le moment cinétique en un point appartenant au solide.

$\overline{M_A} = \int \overline{AP}\times\overline{v}_P\, dm$ avec $P, A \in$ Solide => $\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AP}$

$$\overline{M_A} = \int \overline{AP}\times\left(\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AP}\right)dm = \overline{M_A} = \int \overline{AP}\times\overline{v}_A\, dm + \int \overline{AP}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{AP}\right) dm =$$

$$\overline{M_A} = \left(\int \overline{AP}\,dm\right)\times\overline{v}_A + \int \overline{AP}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{AP}\right)dm = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \int \left(\overline{AP}.\overline{AP}\right)\overline{\omega}\,dm - \int \left(\overline{AP}.\overline{\omega}\right)\overline{AP}\,dm$$

or par définition :

$$\left[\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]_\alpha = I_A^{\alpha\beta}\omega_\beta = \left(\int \left(AP_i\,AP_i\,\delta_{\alpha\beta} - AP_\alpha\,AP_\beta\right)dm\right)\omega_\beta = \int \left(AP_i\,AP_i\,\delta_{\alpha\beta}\,\omega_\beta - AP_\alpha\,AP_\beta\,\omega_\beta\right)dm$$

$$\left[\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]_\alpha = \int \left(AP_i\,AP_i\,\omega_\alpha - AP_\alpha\,AP_\beta\,\omega_\beta\right)dm = \int \left(AP^2\,\omega_\alpha - \overline{AP}.\overline{\omega}\,AP_\alpha\right)dm$$

=> $\boxed{\overline{M_A} = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}}$

Rem :

$$\left[\overline{AP}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{AP}\right)\right]_i = \delta_{ijk}AP_j\left(\overline{\omega}\times\overline{AP}\right)_k = \delta_{ijk}AP_j\left(\delta_{klm}\omega_l AP_m\right) = \delta_{kij}\delta_{klm}AP_j\left(\omega_l AP_m\right) = \left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)AP_j\left(\omega_l AP_m\right)$$

$$= \delta_{jm}AP_j\omega_i AP_m - \delta_{jl}AP_j\omega_l AP_i = AP_jAP_j\omega_i - AP_jAP_i\omega_j = AP^2\omega_i - \overline{AP}.\overline{\omega}\,AP_i$$

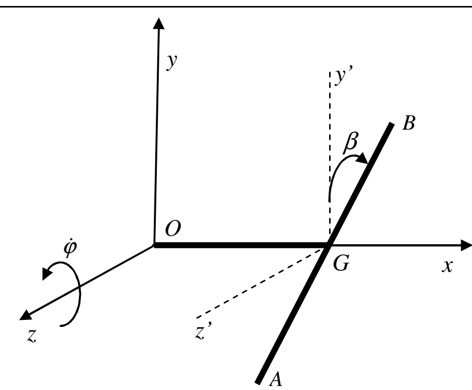
<u>Question 5</u> : (3 points)

Une barre en acier (OG) de longueur L_1 et de masse m_1 est fixée en O et peut tourner librement autour de l'axe z avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

Au bout de cette barre, en G, est fixée par une rotule une autre barre en acier (AB) de longueur L_2 et de masse m_2. Cette dernière peut tourner autour de son centre de masse, G, dans un plan ($Gy'z'$) perpendiculaire à la barre OG.

Ces deux barres sont modélisées par des tiges minces homogènes.

Déterminer le moment cinétique du système constitué de ces deux barres.



dans les axes principaux $Gy"z"$ lié à la tige : $\overline{\omega} = -\dot{\beta}\overline{1}_x + \dot{\varphi}\overline{1}_z = -\dot{\beta}\overline{1}_{x"} + \dot{\varphi}\cos\beta\,\overline{1}_{z"} - \dot{\varphi}\sin\beta\,\overline{1}_{y"}$

<u>1. Dans les axes Oxyz</u>

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O(S1+S2)}} = \overline{\overline{I}}_{O(S1+S2)}.\overline{\omega} = \left[\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & / & 0 \\ 0 & & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & & 0 \\ 0 & / & \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos\beta\sin\beta \\ 0 & & \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & / & 0 \\ 0 & & m_2.L_1^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

=> $\boxed{\overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_y + \left(\left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2\right) + \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2\beta\right)\dot{\varphi}\overline{1}_z}$

2. Dans les axes Oxyz tournant avec les 2 tiges. (S=S1+S2)

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,(S1+S2)}} = \overline{\overline{I}}_{O(S1+S2)}.\overline{\omega}$$

$$\overline{M_O} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1.L_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2.L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2.L_1^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ -\dot{\varphi}\sin\beta \\ \dot{\varphi}\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_{x''} - \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\sin\beta\overline{1}_{y''} + \left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + \frac{m_2.L_2^2}{12} + m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{z''}}$$

3. en considérant séparément les deux solides.

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,(S1)}} + \overline{M_{O\,(S2)}}$$

$$\overline{M_{O\,(S1)}} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} / & / & 0 \\ & & 0 \\ & & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{m_1.L_1^2}{3}\dot{\varphi}\overline{1}_z$$

$$\overline{M_{O\,(S2)}} = \overline{M_G} + \overline{OG}\times\overline{R} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2 + m_2\left(L_1\overline{1}_x\right)\times L_1\dot{\varphi}\overline{1}_y$$

$$\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ -\dot{\varphi}\sin\beta \\ \dot{\varphi}\cos\beta \end{pmatrix} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_{x'} + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{z'}$$

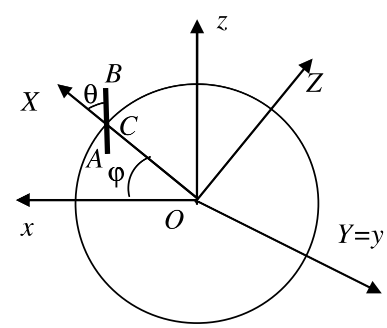
$$=> \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2 = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\sin\beta\overline{1}_y + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\cos\beta\overline{1}_z$$

$$\overline{M_{O\,(S2)}} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24}\dot{\varphi}\sin 2\beta\overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos^2\beta + m_2L_1^2\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z$$

$$=> \overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24}\dot{\varphi}\sin 2\beta\overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos^2\beta + m_2L_1^2\dot{\varphi} + \frac{m_1.L_1^2}{3}\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z$$

Question 6 : (2 points)

Une tige *AB* de longueur *2L* se déplace de manière telle que son milieu *C* parcourt à vitesse angulaire constante $\dot{\varphi}$ un cercle de rayon *R* et de centre *O*, situé dans le plan *Oxz*. La barre tourne de plus à vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$ autour de *C*, dans le plan *OXY*.



1. Déterminer la vitesse angulaire de la barre *AB*.
$\overline{\omega} = -\dot{\varphi}\overline{1}_y + \dot{\theta}\overline{1}_Z = -\dot{\varphi}\overline{1}_Y + \dot{\theta}\overline{1}_Z$
2. Déterminer la vitesse de *B*.
$\overline{v}_B = \overline{v}_C + \overline{\omega}\times\overline{CB} = R\dot{\varphi}\overline{1}_Z + \left(-\dot{\varphi}\overline{1}_Y + \dot{\theta}\overline{1}_Z\right)\times\left(L\cos\theta\overline{1}_X + L\sin\theta\overline{1}_Y\right) = -L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_X + L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_Y + \left(R\dot{\varphi} + L\cos\theta\dot{\varphi}\right)\overline{1}_Z$

«N» - «Prénom» «Nom»

BROUILLON

«N» - «Prénom» «Nom»

BROUILLON