

UPDATE 19/04/2006 : Ex3

1. Forces : mg en C, centre du disque

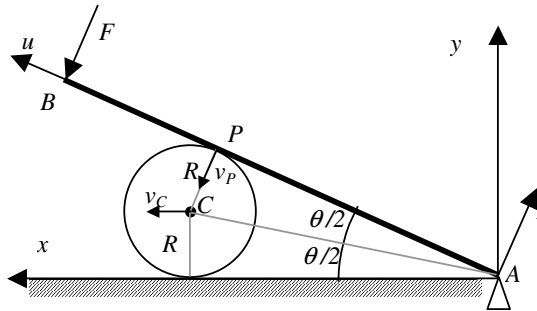
Couples : $\begin{cases} \text{couple dû au poids : } mgh \sin \psi \text{ sortant de la feuille} \\ \text{couple gyroscopique : } \bar{C}_g = \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega} \end{cases}$

Le couple gyroscopique s'oppose au couple dû à la pesanteur \Rightarrow la seule rotation provoquant ce couple est une rotation autour de l'axe z dans le sens négatif.

Le disque précessionne autour de l'axe z, avec une vitesse angulaire égale à

$$\bar{\Omega} = -\omega \bar{l}_z \text{ sur le dessin et } \Gamma = I \Rightarrow \bar{C}_g = \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega} = -mgh \sin \psi \bar{l}_y \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{mgh}{I\omega} \bar{l}_z$$

- 2.1 Considérons le système = {tige (m) + disque (2m)} }



Intégrale première \Rightarrow théorème de Lagrange pour définir une équation de mouvement ou par la conservation de l'énergie.

Calcul de l'énergie cinétique :

$$T_{\text{Tige}} = \left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_t \cdot \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}_t \right)_{\text{Tige}} = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 \text{ avec } \bar{\omega}_t = \dot{\theta} \bar{l}_z \text{ (avec } \dot{\theta} < 0)$$

$$T_{\text{Disque}} = \left(\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_d \cdot \bar{I}_C \cdot \bar{\omega}_d \right)_{\text{Disque}} \text{ avec } \bar{\omega}_d = \dot{\phi} \bar{l}_z \text{ et } \bar{v}_C = \frac{d\bar{OC}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R \cotg \frac{\theta}{2} \right) \bar{l}_x = -\frac{R \dot{\theta}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \bar{l}_x$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_t \cdot \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}_t \right)_{\text{Tige}} + \left(\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_d \cdot \bar{I}_C \cdot \bar{\omega}_d \right)_{\text{Disque}} = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2} \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2} \frac{(2m) R^2}{2} \dot{\phi}^2$$

1 degré de liberté, 2 coordonnées de Lagrange \Rightarrow deux solutions :

- utiliser les deux coordonnées de Lagrange et un multiplicateur de Lagrange
- remplacer une des coordonnées dans l'énergie cinétique pour n'utiliser qu'une coordonnée de Lagrange.

$\dot{\phi}$ dépend de $\dot{\theta} \Rightarrow$ pour déterminer la relation entre $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$, il faut écrire la condition de roulement

sans glissement en P (dans les axes liés à la tige $Auvw$ avec $u \parallel AB$)

$$\bar{v}_{P \in \text{tige}} = \bar{v}_{P \in \text{disque}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{v}_{P \in \text{tige}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_t \times \bar{AP} = R \cotg \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \bar{l}_v \\ \bar{v}_{P \in \text{disque}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d \times \bar{CP} = \left(-\frac{R \dot{\theta}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \theta - \dot{\phi} R \right) \bar{l}_u + \frac{R \dot{\theta}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \theta \bar{l}_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\bar{v}_{P \in \text{disque}} = \bar{v}_{P \in \text{tige}})_{\bar{l}_u} \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{\dot{\theta}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \theta = -\cotg \theta \frac{\sin \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \dot{\theta} = -\cotg \theta \cotg \frac{\theta}{2} \dot{\theta}$$

$$\text{donc } T = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2} \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2} \frac{(2m) R^2}{2} \cotg^2 \theta \cotg^2 \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle : $V = V_{\text{tige}} + V_{\text{disque}}$

L'intégrale première est $T + V = E_0$ car :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\bar{g} \text{ dérive d'un potentiel} \Rightarrow V = mg \frac{L}{2} \sin \theta \\ \bar{F} \text{ dérive d'un potentiel car } \bar{F} = -F \bar{l}_y = -\overline{\text{grad } V} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow V = FL\theta \\ \bar{T}_P : \text{ la force de frottement (sans glissement) en } P \text{ ne travaille pas pour un petit déplacement } \delta\theta : \\ \text{Il n'y a pas de frottement en } Q \text{ donc pas de travail.} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 + m \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{mR^2}{2} \cotg^2 \theta \cotg^2 \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 + mg \frac{L}{2} \sin \theta + FL\theta = E_0$$

2.2 Système = {disque (2m)} : Théorème du moment cinétique en C

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_C = \sum \bar{m}_{e,C}$$

$$\bar{M}_C = \bar{l}_C \cdot \bar{\omega}_d = \frac{(2m)R^2}{2} \dot{\phi} \bar{l}_z = -mR^2 \cotg \theta \cotg \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \bar{l}_z$$

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_C = -mR^2 \cotg \theta \cotg \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} \bar{l}_z + mR^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \cotg \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 \bar{l}_z + mR^2 \cotg \theta \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \dot{\theta}^2 \bar{l}_z$$

$$\bar{m}_{e,C} = RT_P \bar{l}_z \Rightarrow T_P = mR \left(-\cotg \theta \cotg \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} + \frac{\cotg \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{\cotg \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \dot{\theta}^2 \right)$$

Système = {tige (m)} : Théorème du moment cinétique en A

$$\frac{d}{dt} \bar{M}_A = \sum \bar{m}_{e,A}$$

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} = -R \cotg \frac{\theta}{2} N_P - LF - \frac{L}{2} \cos \theta m g \Rightarrow N_P = -\frac{mL^2}{3R} \text{tg} \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} - \frac{LF}{R} \text{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{Lmg}{2R} \cos \theta \text{tg} \frac{\theta}{2}$$

3. Equation de mouvement \Rightarrow Théorème de Lagrange sur le système complet = {Bogie + Ensemble T (cabine + axe CE)} :

1. Energie cinétique : $T = T_{\text{Bogie}} + T_{\text{Cabine}}$

$$T_{\text{Bogie}} = \left(\frac{1}{2} m v_C^2 \right)_{\text{Bogie}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T_T = \left(\frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega} \right)_{\text{Cabine}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{z_G} \dot{\theta}^2$$

$$\text{avec } \bar{v}_G = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \overline{CG} = (\dot{x} + d \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}) \bar{l}_x + (d \sin(\theta - \alpha) \dot{\theta}) \bar{l}_y \text{ et } I_E = I_{z_G} + Ma^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + d^2 \dot{\theta}^2 + 2d \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta} \dot{x}) + \frac{1}{2} (I_E - Ma^2) \dot{\theta}^2$$

2. Energie potentielle :

• Bogie

$$V_{\text{Bogie}} = mgx \sin \alpha \Rightarrow Q_{x(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg \sin \alpha \text{ et } Q_{\theta(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$(y_C = x \sin \alpha ; \delta y_C = \sin \alpha \delta x \text{ et } F_y = -mg \Rightarrow Q_{x(mg)} \delta x = -mg \sin \alpha \delta x)$$

• Ensemble T

$$V_T = Mg(x \sin \alpha - d \cos \theta) \Rightarrow Q_{x(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Mg \sin \alpha \text{ et } Q_{\theta(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -Mgd \sin \theta$$

$$(y_G = x \sin \alpha - d \cos \theta ; \delta y_G = \sin \alpha \delta x + d \sin \theta \delta \theta \text{ et } F_y = -Mg \Rightarrow Q_{x(Mg)} \delta x = -Mg \sin \alpha \delta x$$

$$\text{et } Q_{\theta(Mg)} \delta \theta = -Mgd \sin \theta \delta \theta)$$

3. Forces extérieures = Couple moteur

$$Q_{x(C_M)} = \frac{C_M}{r} \quad \text{car} \quad \delta\tau = Q_x \delta x = C_M \delta\alpha = C_M \frac{\delta x}{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x = Q_{x(mg)} + Q_{x(Mg)} + Q_{x(C_M)} \\ \Rightarrow (m+M)\ddot{x} + Md \cos(\theta - \alpha)\ddot{\theta} - Md \sin(\theta - \alpha)\dot{\theta}^2 = -(m+M)g \sin \alpha + \frac{C_M}{r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = Q_{\theta(mg)} + Q_{\theta(Mg)} + Q_{\theta(C_M)} \\ \Rightarrow Md^2\ddot{\theta} + Md \cos(\theta - \alpha)\ddot{x} + (I_E - Ma^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta \end{cases}$$

4. Equation de mouvement \Rightarrow Théorème de Lagrange avec comme coordonnée généralisée $x = 1$ degré de liberté

Solides :

$$\begin{cases} S(M) \text{ pour le cycliste} \\ S_1'(M', R', G_1', \omega_1') \text{ pour la roue arrière} \\ S_2'(M', R', G_2', \omega_2') \text{ pour la roue avant} \\ S''(0, R'', \omega'') \text{ pour le pédalier} \end{cases}$$

Energie cinétique : $T = \underbrace{\frac{M\dot{x}^2}{2}}_{\text{cycliste}} + 0 + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_1'^2}_{\text{roue arrière}} + \underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}M'R'^2\omega_2'^2}_{\text{roue avant}}$

Energie potentielle :

$$V = Mg(x \sin \theta + H \cos \theta) + M'g((x - R') \sin \theta + R' \cos \theta) + M'g((x + 2R') \sin \theta + R' \cos \theta)$$

$$\Rightarrow V = (M + 2M')gx \sin \theta + \text{const}$$

Contrainte de roulement sans glissement :

$$\bar{v}_{I_1} = \bar{v}_{G_1} + \bar{\omega}_1 \times \overline{G_1 I_1} \Rightarrow \omega_1' = \frac{\dot{x}}{R'} \quad \text{et} \quad \bar{v}_{I_2} = \bar{v}_{G_2} + \bar{\omega}_2 \times \overline{G_2 I_2} \Rightarrow \omega_2' = \frac{\dot{x}}{R'} \Rightarrow \delta\alpha' = \frac{\delta x}{R'}$$

$$\text{Avec le rapport de rayons : } R''\omega'' = R\omega' \Rightarrow R''\delta\alpha'' = R\delta\alpha'$$

Travail du couple : $\delta\tau = C\delta\alpha'' = C \frac{R}{R''}\delta\alpha' = C \frac{R}{R'' \cdot R'}\delta x$

Lagrangien : $L = \frac{1}{2}(M + 4M')\dot{x}^2 - (M + 2M')gx \sin \theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = Q_x^* : \boxed{(M + 4M')\ddot{x} + (M + 2M')g \sin \theta = C \frac{R}{R'' \cdot R'}}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

Corrigés disponible sur <http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html>