Des applications Matlab des exercices sont disponibles sur le site de méca :
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/more.html

Update 14/12/2005 : Compléments pour l'exercice 2 et 4

1. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G$	$\overline{m}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$	$T = \frac{1}{2} I_d \omega^2$ avec d=axe de rotation
a	$\overline{\mathfrak{R}} = -m\frac{b}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = -m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_y + m\frac{b^2}{6}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{b^2}{12}\omega^2$
b	$\overline{\mathfrak{R}} = m\frac{h}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = m\frac{h^2}{6}\omega\overline{1}_y - m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{h^2}{12}\omega^2$
c	$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{m}{3}\omega\left(-h\overline{1}_y + b\overline{1}_z\right)$	$\overline{m_O} = m\frac{(b^2+h^2)}{6}\omega\overline{1}_x$	$T = m\frac{(b^2+h^2)}{12}\omega^2$
d	$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{m}{3}\omega\frac{h^2-b^2}{\sqrt{h^2+b^2}}\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = \frac{m}{12}\frac{\omega}{\sqrt{b^2+h^2}}\left[h(2h^2-b^2)\overline{1}_y + b(2b^2-h^2)\overline{1}_z\right]$ avec $\overline{\omega}^*$	$T = \frac{m}{12(b^2+h^2)}\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)\omega^2$ avec $I_{z'}^{**}$

$$\underbrace{\overline{\overline{I}}_{O\,xyz}}_{Triangle} = \begin{pmatrix} m\frac{b^2+h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{h^2}{6} & -m\frac{bh}{12} \\ 0 & -m\frac{bh}{12} & m\frac{b^2}{6} \end{pmatrix}$$

Résultante (d) : Distance d'1 point $P_1(x_1, y_1)$ à la droite ax + by + c = 0,:

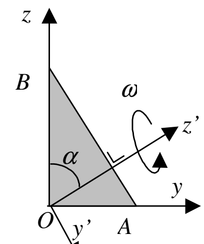
$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Ou utiliser la formule classique de cinématique :

$$\overline{v}_G = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OG}$$

$$\overline{\omega}^* = \omega\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_y + \omega\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_z$$

$$I_{z'}^{**} = \int y'^2 dm = \int(\cos\alpha y - \sin\alpha z)^2 dm$$
$$= \cos^2\alpha I_z + \sin^2\alpha I_y - 2\sin\alpha\cos\alpha P_{yz}$$
$$= \frac{m}{6}\frac{1}{b^2+h^2}.\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)$$



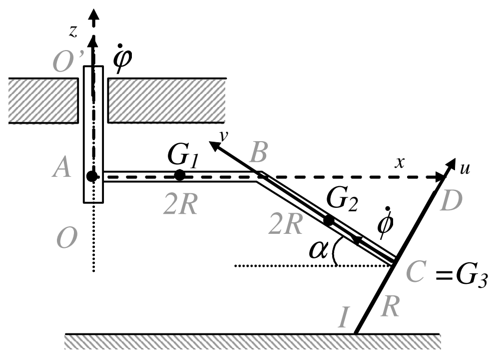
(d)

2. Les rotations subies par les trois solides ne sont pas identiques => calculer le moment cinétique de chaque solide. $\overline{M}_O = \overline{M}_{O(S1)} + \overline{M}_{O(S2)} + \overline{M}_{O(S3)}$

Solide 1 : O appartient à S_1

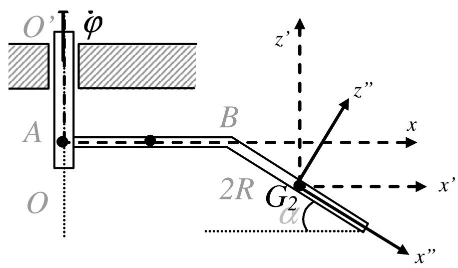
$$\overline{M}_{O(S1)} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_1 \underset{ou}{=} \overline{M}_{G_1} + \overline{OG_1}\times m_1\overline{v}_{G_1}$$

$$\overline{M}_{O(S1)} = \begin{pmatrix} / & / & 0 \\ / & / & 0 \\ & & \frac{\rho 2R.(2R)^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\rho 8R^3}{3}\dot{\varphi}\overline{1}_z$$



Axes $G_2x'y'z'$ avec $x'y'z'$ parallèle à $Oxyz$.
Axes $G_2x''y''z''$ = rotation du repère $Ox'y'z'$ d'un angle α tel que x'' est suivant G_2C.

$$\boxed{\overline{M}_{O(S2)} = \overline{M}_{G_2} + \overline{OG_2}\times m_2\overline{v}_{G_2}}$$ avec $O \notin S_2$



$\overline{OG_2} = (2R + R\cos\alpha)\bar{1}_x - (R\sin\alpha)\bar{1}_z$ et $\overline{v_{G_2}} = (2R + R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_y$

$I_{z''} = I_{y''} = \dfrac{mL^2}{12} = \dfrac{mR^2}{3}$ et $I_{x''} = P_{x''z''} = P_{x''y''} = P_{y''z''} = 0$ et $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 = \dot{\varphi}\bar{1}_z$

$$\overline{M_{G_2}} = \bar{\bar{I}}_{G_2}.\bar{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & / & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & / & \dfrac{m_2R^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\alpha \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{m_2R^2}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_{z''} = \frac{m_2R^2}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\left(\sin\alpha\bar{1}_{x'} + \cos\alpha\bar{1}_{z'}\right)$$

$$\overline{M_{G_2}} \underbrace{=}_{\alpha=30°} \rho R^3\dot{\varphi}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\bar{1}_{x'} + \frac{1}{2}\bar{1}_{z'}\right)$$

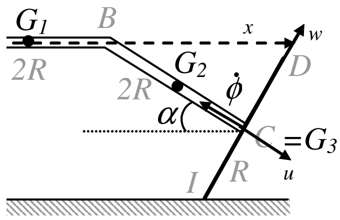
on peut aussi travailler directement dans les axes $G_2x'y'z'$ en calculant les éléments du tenseurs avec les changements d'axes : $P_{x'z'} = -\cos\alpha\sin\alpha I_{z''} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3$ et $I_{z'} = \cos^2\alpha I_{z''} = \dfrac{\rho R^3}{2}$

$$\overline{M_{G_2}} = -P_{x'z'}\omega_{z'}\bar{1}_{x'} - \underbrace{P_{y'z'}}_{=0}\omega_{z'}\bar{1}_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}\bar{1}_{z'} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \frac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{M_{O\,tige\,2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \dfrac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'} + \rho 2R\left((2R + R\cos\alpha)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z + (R\sin\alpha)(2R + R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_x\right) \\ \overline{M_{O\,tige\,2}} = \rho\dot{\varphi}R^3\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2\right)\bar{1}_{x'} + \rho R^3\dot{\varphi}\left(10 + 4\sqrt{3}\right)\bar{1}_{z'} \end{cases}$$

Axes *Cuvw* avec *C*=G_3 ; *u* suivant *BC*, *v//y* et *w* suivant *CD*.

$\boxed{\overline{M_{O(S3)}} = \overline{M_{G_3}} + \overline{OG_3} \times m_3\overline{v_{G_3}}}$ avec $O \notin S_3$



$\overline{OG_3} = (2R + 2R\cos\alpha)\bar{1}_x - (2R\sin\alpha)\bar{1}_z$ et $\overline{v_{G_3}} = \dfrac{d\overline{OG_3}}{dt} = (2R + 2R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_y$

ou par la formule de cinématique de distribution des vitesses avec $\overline{\omega_{S_3}} = \left(-\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w$

$$\overline{v_{G_3}} = \underbrace{\bar{\omega}_{S_1} \times \overline{AC}}_{\bar{v}_{C\in tige}} = 2R(1 + \cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_{y'} = \underbrace{\bar{\omega}_{S_3} \times \overline{IC}}_{\bar{v}_{C\in disque}} = R\left(\dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\phi}\right)\bar{1}_y$$

ce qui nous donne le lien entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\phi}$ (en égalant la vitesse de *C* appartenant à la tige et la vitesse de *C* appartenant au disque) avec $\Rightarrow \dot{\phi} = \left(2(1 + \cos\alpha) - \sin\alpha\right)\dot{\varphi} \underbrace{=}_{\alpha=30°} \left(\dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}$

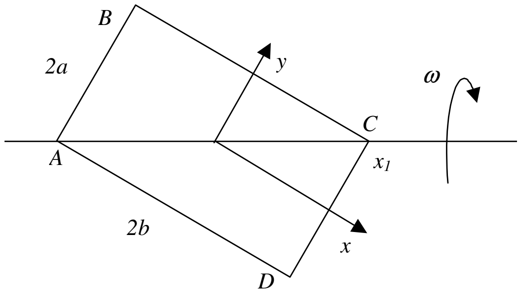
$I_v = I_w = \dfrac{mR^2}{4}$ et $I_u = \dfrac{mR^2}{2}$; $P_{uw} = P_{vw} = P_{uv} = 0$

$$\overline{M_{G_3}} = \bar{\bar{I}}_{G_3}.\bar{\omega}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{m_3R^2}{2} & / & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & / & \dfrac{m_3R^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = I_u\omega_u\bar{1}_u + I_w\omega_w\bar{1}_w$$

$$\Rightarrow \overline{M_{G_3}} = -\frac{\rho\pi R^4}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\rho\pi R^4}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w = -\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi} + 2\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_w$$

$$=>\begin{cases}\overline{M_{O\,tige\,3}}=-\dfrac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot\varphi+2\dot\phi\right)\bar 1_u+\dfrac{\sqrt3}{8}\rho\pi R^4\dot\varphi\bar 1_w+\rho\pi R^4\left(2+\sqrt3\right)^2\dot\varphi\bar 1_z+\rho\pi R^4\left(2+\sqrt3\right)\dot\varphi\bar 1_x\\ => \overline{M_{O\,tige\,3}}=\rho\pi R^4\left(\dot\varphi\left(2+\dfrac{15}{16}\sqrt3\right)-\dfrac{\sqrt3}{4}\dot\phi\right)\bar 1_x+\rho\pi R^4\left(\dot\varphi\left(\dfrac{117}{16}+4\sqrt3\right)+\dfrac{1}{4}\dot\phi\right)\bar 1_z\end{cases}$$

3.



$\bar\omega=\omega\bar 1_{x_1}=\omega\cos\alpha\bar 1_x+\omega\sin\alpha\bar 1_y$

où $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Les produits d'inertie sont nuls car nous travaillons dans les axes principaux. En effet, l'intégration des puissances impaire (x et y) sur le domaine symétrique est nulle. Et la coordonnée z est nulle pour toute la plaque.

$$\bar M_G=\bar{\bar I}.\bar\omega=\begin{pmatrix}I_x & 0 & -\\ 0 & I_y & -\\ 0 & 0 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\cos\alpha\\ \omega\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}=I_x\cos\alpha\omega\bar 1_x+I_y\sin\alpha\omega\bar 1_y$$

$$\bar M_G=\frac{(\rho 2a2b)(2a)^2}{12}\omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\bar 1_x+\frac{(\rho 2a2b)(2b)^2}{12}\omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\bar 1_y=\frac{\rho 4}{3}\frac{a^2b^2\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\bar 1_x+b\bar 1_y\right)$$

4.1 Masse spécifique non homogène => ne peut sortir de l'intégrale.

$$M=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_h^{2h}zdz\int_0^{\frac{R}{h}z}rdr=\frac{15}{4}k\pi R^2h^2$$

$$I_z=\frac{7}{5}MR^2;\quad I_x=I_y=\frac{I_z}{2}+I_{xy}=\frac{7}{10}MR^2+\frac{14}{5}Mh^2;\quad P_{xy}=P_{yz}=P_{zx}=0$$

$$\overline{OG}=\frac{1}{m}\int_h^{2h}kz.\pi\frac{R^2z^2}{h^2}zdz=\frac{\dfrac{\pi R^2}{h^2}k}{\dfrac{15}{4}k\pi R^2h^2}\left(\frac{(2h)^5}{5}-\frac{(h)^5}{5}\right)=\frac{124}{75}h\bar 1_z\quad\text{avec } M=\frac{15}{4}k\pi R^2h^2$$

4.2 Ellipsoïde d'inertie dans les axes principaux : $I_xX^2+I_yY^2+I_zZ^2=1$ => Pour tout système d'axe *Px'y'z'* parallèle à *Oxyz* avec *z'=z* les produits d'inertie sont nuls car le plan de symétrie *xz* permet la symétrie du domaine d'intégration suivant *y* (annulant P_{xy} et P_{yz}) et le plan de symétrie *yz* et la symétrie du domaine d'intégration suivant *x* (annulant P_{xy} et P_{xz})
Pour que l'éllipsoïde soit une sphère, il faut que tous les moments d'inertie soit égaux : $I_x=I_y=I_z$.
=>Trouvons les points P appartenant à l'axe *z* où les moments d'inertie ($I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$) sont égaux dans le repère *Px''y''z''* en passant par le centre de masse pour Steiner.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{14}{5}Mh^2+\frac{7}{10}MR^2}_{I_x}-M\underbrace{\left(\frac{124}{75}\right)^2h^2}_{d(\text{axe }x,\text{axe }x_G)}+M\underbrace{d^2}_{d(\text{axe }x_G,\text{axe }x')^2}}_{I_{x''}}=\underbrace{\frac{7}{5}MR^2}_{I_{z''}}\quad\text{où } d=PG,\ P=\text{point cherché}$$

$$=> \text{2 racines réelles } d=\pm\sqrt{\frac{7}{10}R^2-\frac{14}{5}h^2+\left(\frac{124}{75}\right)^2h^2}\quad\text{à condition que }\frac{h}{R}<\sqrt{\frac{7}{28-10\left(\frac{124}{75}\right)^2}}$$

4.3

$$I_{z'}=I_z\cos^2\alpha+I_x\sin^2\alpha\quad\text{où }\cos^2\alpha=\frac{h^2}{h^2+R^2}\quad\text{et}\quad\sin^2\alpha=\frac{R^2}{h^2+R^2}$$

$$=> I_{z'}=\frac{7M}{5}\frac{R^2}{h^2+R^2}\left(\frac{R^2}{2}+3h^2\right)$$

4.4 $\overline{v_G} = \dfrac{d\overline{OG}}{dt} = \dfrac{124}{75}\dfrac{hR}{\sqrt{h^2+R^2}}\omega\overline{1}_x$ avec $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_{z'} = \dfrac{\omega}{\sqrt{h^2+R^2}}\left(R\overline{1}_y + h\overline{1}_z\right)$

$$\overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{\omega R}{\sqrt{h^2+R^2}}\left[\left(\frac{7}{10}MR^2 + \frac{14}{5}Mh^2 - M\left(\frac{124}{75}\right)^2 h^2\right)\overline{1}_y + \frac{7}{5}MRh\overline{1}_z\right]$$

$$\overline{M_O} = \overline{M_G} + \overline{OG}\times\overline{\Re} = \frac{\omega R}{\sqrt{h^2+R^2}}\left[\left(\frac{7}{10}MR^2 + \frac{14}{5}Mh^2\right)\overline{1}_y + \frac{5}{7}Mh^2\overline{1}_z\right]$$

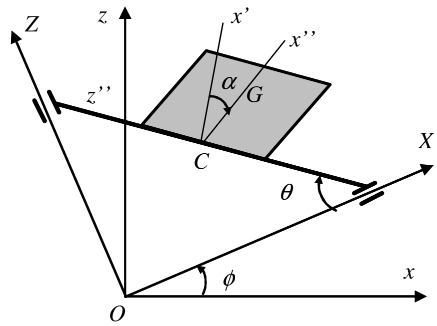
=> $\overline{M_O} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$ Le point O peut être vu comme un point appartenant au solide et subissant le même mouvement. En effet, la rotation s'effectue autour de l'axe z' passant par O. il est normal que tous les points appartenant à l'axe de rotation soit fixe. Tous les points de l'axe peuvent être considérés comme appartenant au solide.

---

5. $T = T_{Tige} + T_{carré}$

Dans les axes principaux $(Cx_1y_1z_1)$ lié au centre de masse de la tige :

$$T_{Tige} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2 + v_{C_z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2\right)$$



avec
$$\begin{cases} \overline{OC} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_z\right) \\ \overline{v}_C = \dfrac{d\overline{OC}}{dt} = \dfrac{3a}{2}\left(-\sin\theta\left(\dot\theta+\dot\phi\right)\overline{1}_x + \cos\theta\left(\dot\theta+\dot\phi\right)\overline{1}_z\right) \\ I_{Cy} = \dfrac{mL^2}{12} = \dfrac{\rho 9a^2}{4} \quad \text{et } \overline{\omega} = \left(\dot\theta - \dot\phi\right)\overline{1}_y \end{cases}$$

$$=> T_{Tige} = \rho\frac{9a^3}{8}\left(3\left(\dot\theta+\dot\phi\right)^2 + \left(\dot\theta-\dot\phi\right)^2\right)$$

Dans les axes principaux $Gx''y''z''$ lié au centre de masse du carré.

$$T_{Carré} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 + v_{Gz}^2\right) + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$$

avec
$$\begin{cases} \overline{OG} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_z\right) + \dfrac{a}{2}\overline{1}_{x''} = \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\overline{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\sin\alpha\overline{1}_{y'} - \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\overline{1}_{z'} \\ \overline{v}_G = \left(3a\cos 2\theta\dot\theta - \dfrac{a}{2}\sin\alpha\dot\alpha + \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\left(\dot\phi - \dot\theta\right)\right)\overline{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\dot\alpha\overline{1}_{y'} \\ \qquad + \left(3a\sin 2\theta\dot\theta + \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\left(\dot\phi - \dot\theta\right)\right)\overline{1}_{z'} = v_{Gx}\overline{1}_{x''} + v_{Gy}\overline{1}_{y''} + v_{Gz}\overline{1}_{z''} \\ \overline{\omega} = \left(\dot\theta - \dot\phi\right)\overline{1}_{y'} + \dot\alpha\overline{1}_{z'} = \left(\dot\theta - \dot\phi\right)\sin\theta\overline{1}_{x''} + \left(\dot\theta - \dot\phi\right)\cos\theta\overline{1}_{y''} + \dot\alpha\overline{1}_{z''} = p\overline{1}_{x''} + q\overline{1}_{y''} + r\overline{1}_{z''} \\ A = C = I_{x''G} = \dfrac{ml^2}{12} = \dfrac{\rho a^4}{12} \quad \text{et} \quad B = I_{y''G} = \dfrac{ml^2}{6} = \dfrac{\rho a^4}{6} \end{cases}$$

Pour les moments cinétiques :

$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,tige}} + \overline{M_{O\,carré}}$$

$$\overline{M_{O\,tige}} = \overline{M_C} + \overline{OC}\times\overline{\Re} = \overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega} + \overline{OC}\times m\overline{v}_C$$

$$\overline{M_{O\,carré}} = \overline{M_G} + \overline{OG}\times\overline{\Re} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} + \overline{OG}\times m\overline{v}_G = Ap\overline{1}_{x''} + Bq\overline{1}_{y''} + Cr\overline{1}_{z''} + \overline{OG}\times m\overline{v}_G$$

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html
Pour toute question, veuillez contacter par email :
Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be pour les problèmes relatifs aux **Tps et aux laboratoires** ;
CFAO.Matlab@ulb.ac.be pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**

Des permanences seront organisées un mercredi sur deux à 12h dans la salle de réunion UB3.
Jeudi 17/11 ; Jeudi 01/12 ; Jeudi 23/12