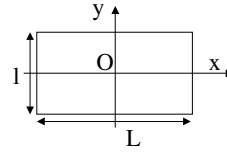


**UPDATE : 04/01/2006 (ex5, le moins devant -Pyz doit être supprimé)**

$$1.1 \quad I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dy = \rho \frac{Ll^3}{12} = m \frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m \frac{L^2}{12}$$



$$1.2 \quad I_y^{(a)} = \rho \frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[ \rho \frac{(3a)(2a)^3}{12} \right] = \frac{58}{3} \rho a^4 = I_y^{(b)} = I_y^{(c)} \Rightarrow r_y^{(a)} = r_y^{(b)} = r_y^{(c)} = \sqrt{\frac{29}{15}} a$$

$$I_x^{(a)} = \rho \frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[ \rho \frac{(2a)(3a)^3}{12} + \rho(3a)(2a) \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{46}{3} \rho a^4 \Rightarrow r_x^{(a)} = \sqrt{\frac{23}{15}} a$$

$$I_x^{(b)} = \rho \frac{(4a)(4a)^3}{12} - 2 \left[ \rho \frac{(2a)(\frac{3a}{2})^3}{12} + \rho(\frac{3a}{2})(2a) \left( \frac{5a}{4} \right)^2 \right] = \frac{65}{6} \rho a^4 \Rightarrow r_x^{(b)} = \sqrt{\frac{13}{12}} a$$

$$I_x^{(c)} = \rho \frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[ \rho \frac{(2a)(3a)^3}{12} \right] = \frac{101}{6} \rho a^4 \Rightarrow r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{101}{60}} a$$

$$2. \quad I_x^{(a)} = \int_0^a \rho y^2 dx = 0; \quad I_y^{(a)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho x^2 dx = \rho \frac{a^3}{12} \Rightarrow \boxed{I_y^{(a)} = \frac{ma^2}{12}} \quad \text{et } P_{xy}^{(a)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho xy dx = 0 \quad \text{car } y=0$$

$$I_x^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho y^2 dx \underset{y=a}{=} \rho a^3 = \underbrace{I_{x_G}^{(b)}}_{=0} + ma^2 = ma^2; \quad I_y^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho x^2 dx = \frac{ma^2}{12} = I_{y_G}^{(b)} \quad \text{et}$$

$$P_{xy}^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho xy dx \underset{y=a}{=} 0 = P_{x_G y_G} + m \cdot 0 \cdot a$$

$$I_x^{(c)} = 0 + ma^2; \quad I_y^{(c)} = \frac{ma^2}{12} + m(a)^2 = \frac{13ma^2}{12}; \quad P_{xy}^{(c)} = 0 + m(a) \cdot (-a) = -ma^2$$

$$I_x^{(d)} = 0 + m(2a)^2; \quad I_y^{(d)} = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{7ma^2}{3}; \quad P_{xy}^{(d)} = 0 + m\left(\frac{3a}{2}\right) \cdot (2a) = 3ma^2$$

$$I_x^{(e)} = I_y^{(e)} \quad \text{Par symétrie} \quad I_x^{(e)} = \int y^2 dm = I_{x'}^{(e)} + m \left( \frac{a}{2} \cdot \sin 45^\circ \right)^2$$

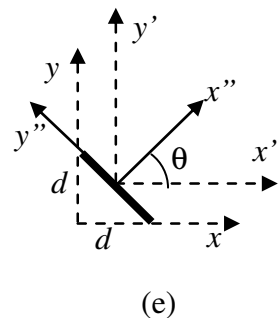
$$I_{x'}^{(e)} = \int (\sin \theta x'' + \cos \theta y'')^2 dm = \rho \int (\cos^2 \theta y''^2 + \sin^2 \theta x''^2 + 2 \cos \theta \sin \theta x'' y'') dy'$$

$$I_{x'}^{(e)} \underset{x''=0}{=} \rho \cos^2 \theta \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y''^2 dy' = \cos^2 \theta \cdot I_{x''}^{(e)} = \cos^2 \theta \frac{ma^2}{12} = \frac{ma^2}{24} \quad \text{avec } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I_x^{(e)} = \frac{ma^2}{24} + m \left( \frac{a}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{ma^2}{6}$$

$$P_{x'}^{(e)} = \int (\cos \theta x'' - \sin \theta y'') (\sin \theta x'' + \cos \theta y'') dm \underset{x''=0}{=} -\sin \theta \cos \theta \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y''^2 dm$$

$$= -\sin \theta \cos \theta \cdot I_{x''}^{(e)} = -\frac{1}{2} \frac{ma^2}{12} \Rightarrow P_x^{(e)} = P_{x'}^{(e)} + m \left( \frac{a}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{a}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{ma^2}{12}$$



3. Soient 1=AB, 2=DE, 3=BCD

$$I_{x1} = \frac{m_1 l_1^2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \rho \text{ cm}^3 \text{ et } I_{y1} = \frac{m_1 l_1^2}{12} \cdot \frac{1}{2} + m_1 \left( \frac{l_1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right)^2 = \rho \left( \frac{33}{2} + 9\sqrt{2} \right) \text{ cm}^3;$$

$$I_{x2} = \frac{m_2 l_2^2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho \text{ cm}^3 \text{ et } I_{y2} = \frac{m_2 l_2^2}{12} \cdot \frac{1}{4} + m_2 \left( \frac{l_1}{2} \frac{1}{2} + 2 \right)^2 = \rho \left( \frac{27}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 6 \right) \text{ cm}^3;$$

$$I_{x3} = \frac{m_3 R^2}{2} - m_3 \left( \frac{2R}{\pi} \right)^2 + m_3 \left( \frac{2R}{\pi} + 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \rho (13\pi + 24\sqrt{2}) \text{ cm}^3 \text{ et } I_{y3} = \frac{m_3 R^2}{2} = 4\pi \rho \text{ cm}^3;$$

$$I_x = \rho \left[ \frac{9}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) + 13\pi + 24\sqrt{2} \right] \text{ cm}^3 \approx 82,956 \rho \text{ cm}^3$$

$$I_x = \rho \left[ \frac{45}{2} + 9\sqrt{2} + \frac{27}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 4\pi \right] \text{ cm}^3 \approx 58,817 \rho \text{ cm}^3$$

4.1 cercle :  $I_z(\text{cercle}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = M_{\text{Cercle}} R^2 = I_x(\text{cercle}) + I_y(\text{cercle})$  en 2D

$$I_z(\text{cercle}) = 2I_x(\text{cercle}) \text{ (par symétrie)} \Rightarrow I_x(\text{cercle}) = \frac{M_{\text{Cercle}} R^2}{2}$$

$$\text{Par symétrie : } I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle } \cup) + I_x(\text{demi-cercle } \cap) \Rightarrow I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_{\cup} R^2}{2}$$

4.2 Disque :  $I_z(\text{Disque O}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r dr d\theta = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{M_{\text{Disque}} R^2}{2}$

$$\boxed{I_z(\text{O}) \underset{\text{en 2D}}{=} I_x(\text{O}) + I_y(\text{O}) \underset{\text{symétrie}}{=} 2I_x(\text{O})} \Rightarrow I_x(\text{O}) = \frac{M_O R^2}{4}$$

$$\text{Par symétrie : } I_x(\text{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap) \Rightarrow I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{8} = \frac{M_{\cup} R^2}{4}$$

4.3 Sphère :  $I_z(\text{Sphère O}) = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int_0^R \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (r \sin \theta)^2 \rho r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{2}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$

$$\boxed{I_z(\text{Sphère O}) = I_x(\text{O}) + I_y(\text{O}) - 2I_{xy}(\text{O})}$$

$$\text{avec } \boxed{I_{xy}(\text{O}) = \int z^2 dm} = \int_0^R \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (r \cos \theta)^2 \rho r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$$

$$I_x(\text{O}) = I_y(\text{O}) \text{ (par symétrie)} \Rightarrow I_x(\text{O}) = \frac{I_z(\text{O})}{2} + I_{xy}(\text{O}) = \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2 + \frac{1}{5} M_{\text{Sphère}} R^2 = \frac{2}{5} M_{\text{Sphère}} R^2$$

On pouvait évidemment trouver directement  $I_x = I_y = I_z$  par symétrie.

$$\text{Par symétrie : } I_x(\text{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap) \Rightarrow I_x(\cup) = \frac{M_{\text{Sphère}} R^2}{5} = \frac{2M_{\cup} R^2}{5}$$

5. Dans les axes liés au disque, nous avons

$$\bar{I}_{GXYZ} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base vaut :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar{l}_x = (1; 0; 0) = (\alpha_1^1; \alpha_2^1; \alpha_3^1)$$

$$\bar{l}_y = (0; \cos \alpha; \sin \alpha) = (\alpha_1^2; \alpha_2^2; \alpha_3^2)$$

$$\bar{l}_z = (0; -\sin \alpha; \cos \alpha) = (\alpha_1^3; \alpha_2^3; \alpha_3^3)$$

Donc :

$$I'_{xx} = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I^{ij} = (\alpha_1^1)^2 I_X + (\alpha_2^1)^2 I_Y + (\alpha_3^1)^2 I_Z - 2\alpha_1^1 \alpha_2^1 P_{XY} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^1 P_{XZ} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^1 P_{YZ}$$

$$I'_{xx} = I_X = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'_{yy} = \alpha_i^2 \alpha_j^2 I^{ij} = \cos^2 \alpha \frac{mR^2}{4} + \sin^2 \alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$I'_{zz} = \alpha_i^3 \alpha_j^3 I^{ij} = \sin^2 \alpha \frac{mR^2}{4} + \cos^2 \alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4} (1 + \cos^2 \alpha)$$

$$-P'_{xy} = \alpha_i^1 \alpha_j^2 I^{ij} = (\alpha_1^1 \alpha_2^2 I_X + \alpha_2^1 \alpha_2^2 I_Y + \alpha_3^1 \alpha_3^2 I_Z - 2\alpha_1^1 \alpha_2^2 P_{XY} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^2 P_{XZ} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^2 P_{YZ}) = 0$$

$$\text{et } -P'_{xz} = \alpha_i^1 \alpha_j^3 I^{ij} = 0$$

Les axes  $Ox$  et  $OY$  sont confondu et forme une direction principale.  $\Rightarrow$  les produits d'inertie comprenant l'axe  $x$  sont nuls.

$$-P'_{yz} = I'^{23} = \alpha_i^2 \alpha_j^3 I^{ij} = \alpha_2^2 \alpha_2^3 I_Y + \alpha_3^2 \alpha_3^3 I_Z = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{mR^2}{4} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{mR^2}{2} = m \frac{R^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\bar{\bar{I}}_{Gxyz} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \alpha) & m \frac{R^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & m \frac{R^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha & \frac{mR^2}{4} (1 + \cos^2 \alpha) \end{pmatrix}$$

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html>

Pour toute question, veuillez contacter par email :

- [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be) pour les problèmes relatifs aux **Tps et aux laboratoires** ;
- [CFAO.Matlab@ulb.ac.be](mailto:CFAO.Matlab@ulb.ac.be) pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**

Des permanences seront organisées un mercredi sur deux à 12h dans la salle de réunion UB3.

Jeudi 17/11 ; Jeudi 01/12 ; Jeudi 15/12