

**UPDATE : 11/01/2006 (E5.2-Vecteur de Steiner inversé)**

**UPDATE : 21/12/2005 (E4-réponse finale)**

**UPDATE : 20/12/2005 (E4-roue, centre de masse en  $-c/2$ )**

**UPDATE : 12/12/2005 (complément E4-cylindre creux+système complet)**

1.

$$I_z = \rho R^4 \int_0^\alpha \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{3} \rho R^4 (1 - \cos \alpha)(2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)$$

avec  $m = 2\pi \rho R^2 (1 - \cos \alpha) \Rightarrow I_z = \frac{mR^2}{3} (2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = \pi : I_z = \frac{2mR^2}{3}$

2. Axes principaux en A : Axy : yz est un plan de symétrie donc par symétrie du domaine de x, les produits  $P_{xy}$  et  $P_{xz}$  seront nuls. De plus,  $z=0$  pour toute la plaque, donc  $P_{yz}=0$

$$I_{x_1} = I_{x_{G1}} + m \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{mR^2}{4} \Rightarrow I_{x''(S_1)} = I_{x_{G1}} + m \left( \frac{4R}{3\pi} + R \right)^2 = \frac{mR^2}{4} - m \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m \left( \frac{4R}{3\pi} + R \right)^2$$

$$I_{x''(S_1)} = I_{x''(S_2)} = \frac{mR^2}{4} + mR^2 + 2m \frac{4R^2}{3\pi} = \frac{5mR^2}{4} + \frac{8mR^2}{3\pi}$$

$$I_{x''(S_3)} = I_{x''(S_4)} = \frac{mR^2}{4} \Rightarrow I_{x''} = \frac{2mR^2}{4} + \frac{10mR^2}{4} + \frac{16mR^2}{3\pi} = 3mR^2 + \frac{16mR^2}{3\pi}$$

Par symétrie  $I_{x''} = I_{y''}$  et  $P_{x''y''} = 0$

En A :  $\overline{AG}(R, R, 0) : I_{x'} = I_{x''} + 4mR^2 = 7mR^2 + \frac{4mR^2}{3\pi} = I_{y'}$  et  $P_{x'y'} = P_{x''y''} + 4mR^2 = 4mR^2$

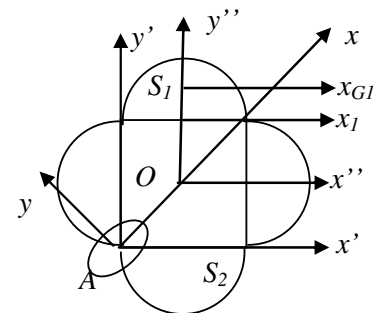
Les axes principaux en A sont orientés de  $\theta$  par rapport aux axes

$$Ax'y' \text{ tel que } \tan 2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \infty$$

$\Rightarrow$  les axes principaux sont inclinés de  $45^\circ$ . On trouve par la formule de rotation :

$$I_x = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} - P_{x'y'} ; I_y = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} + P_{x'y'} ; P_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow I_x = \left( 3 + \frac{16}{3\pi} \right) mR^2 ; I_y = \left( 11 + \frac{16}{3\pi} \right) mR^2$$



3.1

$$I_y = \rho \int_0^b \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} x^2 dx dy = \rho \int_0^b x^2 dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} dy = \rho \frac{hb^3}{12} = \frac{Mb^2}{6} \Rightarrow I_x = \frac{Mh^2}{6}$$

3.2

$$P_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} xy dx dy = \rho \int_0^b x dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} y dy = \rho \frac{h^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{b} \right)^2 = \rho \frac{h^2 b^2}{24} = \frac{Mbh}{12}$$

3.3 si  $b = 4 \text{ cm}$  et  $h = 6 \text{ cm} : I_x = 6M \text{ cm}^2 ; I_y = \frac{8}{3}M \text{ cm}^2 \approx 2.67M \text{ cm}^2 ; P_{xy} = 2M \text{ cm}^2$

Axe principaux d'inertie en O sont les axes  $Ox'y'$  tel que  $\tan 2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = -1.2 \Rightarrow \theta \approx -25.1^\circ$

3.4 En utilisant les formules de rotation d'une angle  $\theta$  autour de l'axe z, nous obtenons les Moment principaux d'inertie en O :  $I_{x'} \approx 6.94M \text{ cm}^2 ; I_{y'} \approx 1.73M \text{ cm}^2$

$$I_{y'} < I_y < I_x < I_{x'}$$

Vecteur unitaire nécessaire pour faire la rotation du système d'axes  $Ax'y'z'$  ( $//Oxyz$ ) vers  $Ax''y''z''$ :

$$\bar{1}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1; +1; +1) = (\alpha_1^1; \alpha_2^1; \alpha_3^1) \Rightarrow I_{AC} \text{ dépend seulement des cosinus directeurs de } \bar{1}_{AC}$$

$$I_{AC} = I_{x''} = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I^{ij} = (\alpha_1^1)^2 I_{x'} + (\alpha_2^1)^2 I_{y'} + (\alpha_3^1)^2 I_{z'} - 2\alpha_1^1 \alpha_2^1 P_{x'y'} - 2\alpha_1^1 \alpha_3^1 P_{x'z'} - 2\alpha_2^1 \alpha_3^1 P_{y'z'}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{3} I_{z'} + \frac{2}{3} P_{x'y'} + \frac{2}{3} \underbrace{P_{x'z'}}_{0(z'=0)} - \frac{2}{3} \underbrace{P_{y'z'}}_{0(z'=0)}$$

**3.5** Calcul des composantes du tenseur dans le repère  $Ax'y'z'$  ( $//Oxyz$ ): utilisez Steiner en passant par

le repère au centre de masse  $Gx_Gy_G$  de la plaque triangulaire :  $\overline{OG}\left(\frac{b}{3}, \frac{b}{3}, 0\right)$  et  $\overline{AG}\left(-\frac{2b}{3}, \frac{b}{3}, 0\right)$

$$I_x = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \text{ et } I_{x'} = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 \Rightarrow I_{x'} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6};$$

$$I_y = I_{y_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \text{ et } I_{y'} = I_{x_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = I_y - md_{yy_G} + md_{y_G y'} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{2};$$

$$I_{z'} = I_{x'} + I_{y'} = \frac{2Mb^2}{3} \text{ (en 2D car } z=0 \text{ pour la plaque);}$$

$$P_{xy} = P_{x_G y_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{Mbb}{12} \text{ et } P_{x'y'} = P_{x_G y_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow P_{x'y'} = \left[\frac{Mb^2}{12} - M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\right] + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = -\frac{Mb^2}{4}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3} \frac{Mb^2}{6} + \frac{1}{3} \frac{Mb^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{2Mb^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{Mb^2}{4} = \frac{5}{18} Mb^2$$

**4.**

$$\text{Parallélogramme } abc : \bar{I}_G = \frac{\rho abc}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Parallélogramme  $\frac{a}{2}bc$  :

$$\bar{I}_G = \frac{\rho \left(\frac{a}{2}\right) bc}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\rho \left(\frac{a}{2}\right) bc \begin{pmatrix} c^2 & 0 & -(-cd) \\ 0 & d^2 + c^2 & 0 \\ -(-cd) & 0 & d^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG_2} = (-d, 0, c)}$$

$$\text{Cylindre : } I_x = \frac{mR^2}{2} = I_{xy} + I_{xz} \text{ par symétrie } I_{xy} = I_{xz} = \frac{mR^2}{4}; I_y = I_{xy} + I_{yz} \text{ avec } I_{xz} = \frac{mL^2}{12}$$

Cylindre creux de rayon extérieur  $R_e$  et de rayon intérieur  $R_i$  :

$$I_x = \frac{\rho \pi h (R_e^4 - R_i^4)}{2} = \frac{M (R_e^2 + R_i^2)}{2}; I_y = \frac{M (R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{mL^2}{12} = I_z$$

$$\begin{aligned}
\text{Canon : } \bar{\bar{I}}_G &= \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r_e^2 + r_i^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{I}}_{Gr} \text{ au centre du canon}} \\
&+ \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \underbrace{\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c \\ 0 & c^2 + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c & 0 & \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG}_{\text{canon}} = \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d, 0, c\right)} \\
4 \text{ roues : } \bar{\bar{I}}_G &= 4 \times \underbrace{\rho\pi R^2 \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{I}}_{Gr} \text{ au centre de chq roue}} + \rho\pi R^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 4\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & 4\left[e^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & 4\left[e^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Steiner pour les 4 roues} \\ \text{xyz = axes principaux pour le solide composé des 4 roues}}} \\
\overline{GG}_{r1} &= \left(e, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r2} = \left(e, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r3} = \left(-e, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); \quad \overline{GG}_{r4} = \left(-e, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \\
\bar{\bar{I}}_G &= \frac{\rho abc}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{12}(3b^2 + 15c^2) & 0 & cd \\ 0 & \left(\frac{9a^2}{24} + \frac{15c^2}{12} + d^2\right) & 0 \\ cd & 0 & \left(\frac{9a^2}{24} + \frac{3b^2}{12} + d^2\right) \end{pmatrix}}_{2 \text{ Parallélogramme}} \\
&+ \rho\pi(r_e^2 - r_i^2)L \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r_e^2 + r_i^2}{2} + c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c \\ 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} + c^2 + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)c & 0 & \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} + \frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{4} - d\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Canon}} \\
&+ \rho\pi R^2 \underbrace{\begin{pmatrix} b^2 + c^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4e^2 + c^2 + 2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4e^2 + b^2 + R^2 \end{pmatrix}}_{4 \text{ roues}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  la symétrie du domaine d'intégration en y nous donnait directement que  $P_{xy}$  et  $P_{yz}$  étaient nuls pour chacun des solides du système.

5.1 S1: grâce à la symétrie du domaine d'intégration suivant l'axe y :  $D_1 = F_1 = 0$

S2: le mat est suivant  $z_2 \Rightarrow$  le domaine d'intégration unidimensionnel est suivant cet axe  $(0,0,z_2)$

$\Rightarrow C_2 = D_2 = E_2 = F_2 = 0$  ;  $A_2 = B_2$

S3: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe  $y_3$  (pas d'épaisseur)

Pb en 2D  $\Rightarrow B_3 = A_3 + C_3$  ;  $D_3 = F_3 = 0$

S4: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe  $y_3$  (pas d'épaisseur)

Pb en 2D  $\Rightarrow B_4 = A_4 + C_4$  ;  $D_4 = F_4 = 0$

5.2  $\overline{G_1 G_2} = (a_2 - a_1, 0, c_2 - c_1)$

$$\overline{\overline{I}}_{G_1(S_2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} (c_2 - c_1)^2 & 0 & -(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \\ 0 & (a_2 - a_1)^2 + (c_2 - c_1)^2 & 0 \\ -(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) & 0 & (a_2 - a_1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{G_2 G_3} = (a_3 - a_2, 0, c_3 - c_2) \text{ et } \overline{G_1 G_3} = (0, 0, c_3 - c_1)$$

$$\overline{\overline{I}}_{G_3(S_3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & A_3 + C_3 & 0 \\ -E_3 & 0 & C_3 \end{pmatrix} - m_3 \begin{pmatrix} (c_3 - c_2)^2 & 0 & -(a_3 - a_2)(c_3 - c_2) \\ 0 & (a_3 - a_2)^2 + (c_3 - c_2)^2 & 0 \\ -(a_3 - a_2)(c_3 - c_2) & 0 & (a_3 - a_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_{G_1(S_3)} = \overline{\overline{I}}_{G_3(S_3)} + m_3 \begin{pmatrix} (c_3 - c_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (c_3 - c_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = [A_1] + [A_2 + m_2 (c_2 - c_1)^2] + [A_3 - m_3 (c_3 - c_2)^2 + m_3 (c_3 - c_1)^2] \\ B = [B_1] + [A_2 + m_2 ((a_2 - a_1)^2 + (c_2 - c_1)^2)] + [(A_3 + C_3) - m_3 ((a_3 - a_2)^2 + (c_3 - c_2)^2) + m_3 (c_3 - c_1)^2] \\ C = [C_1] + [0 + m_2 (a_2 - a_1)^2] + [C_3 - m_3 (a_3 - a_2)^2] \\ D = [0] + [0 + 0] + [0 + 0] = 0 \\ E = [E_1] + [0 + m_2 (a_2 - a_1)(c_2 - c_1)] + [E_3 - m_3 (a_3 - a_2)(c_3 - c_2)] \\ F = [0] + [0 + 0] + [0 + 0] = 0 \end{cases}$$

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

<http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html>

Pour toute question, veuillez contacter par email :

- [Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be](mailto:Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be) pour les problèmes relatifs aux **Tps et aux laboratoires** ;
- [CFAO.Matlab@ulb.ac.be](mailto:CFAO.Matlab@ulb.ac.be) pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**

Des permanences seront organisées un mercredi sur deux à 12h dans la salle de réunion UB3.

Jeudi 17/11 ; Jeudi 01/12 ; Jeudi 15/12