ULB

Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2005-2006
Corrigé de la séance 7

UPDATE 14/04/2006 : Ex 3 : rapport T+/T-

Formulaire

Théorème de la résultante cinétique $\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$

Théorème du moment cinétique calculé en A : $\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}$

avec $\overline{M_A} = \overline{M_G} + \overline{AG} \times \overline{R}$ ou $\overline{M_A} = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$ si $A \in S$

Théorème de l'énergie cinétique $\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h$ avec $T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

1. Théorème de la résultante cinétique : $\boxed{\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}}$

Avant le départ des obus Système {canon + wagon + obus} $\overline{R}_{t<0} = -(m_1 + 2m_2)v_0\overline{1_x}$

Au moment du départ de l'obus : Système {canon + wagon + obus}: $\overline{R}_{t>0} = -m_1 v\overline{1_x} + 2m_2(v_r - v)\overline{1_x}$

Il n'y a pas de force extérieure suivant l'axe x => $\frac{d}{dt}R_x = 0$ => $R_x = const$:

$\overline{R}_{t>0} = \overline{R}_{t<0}$ => $-m_1 v + 2m_2(v_r - v) = -(m_1 + 2m_2)v_0$

$v = \frac{2m_2 v_r + (m_1 + 2m_2)v_0}{m_1 + 2m_2}$ => $\overline{v} = -24{,}7\ m/s\ \overline{1_x}$

---

2. a) Pour le système {barge A (M_A) + voiture (m)}: Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_e\big|_x = 0$ => $R_x = Const$: $(M_A + m).0 = -M_A v_{A\,x} + mv$ avec $v = \underbrace{50\cos\alpha}_{v_{rel/x}} \underbrace{-v_{A\,x}}_{v_{entr}}$. => $v_{A\,x} = \frac{m50\cos\alpha}{M_A + m}$

Rem : Les forces de frottement de l'eau sont négligées. On considère la variation de résultante cinétique entre l'instant t_1 où le système est immobile et l'instant t_2 où la voiture a atteint la vitesse de 50 km/h (par rapport au bateau = v_{rel}) à la sortie du tremplin.

b) Pour le système {barge B (M_B) + voiture (m)}: Etude du mouvement entre t_3 (avant que la voiture n'arrive sur la barge B) et l'arrêt de la voiture sur la barge B en t_4. Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_e\big|_x = 0$ => $R_x = Const$: $mv + M_B.0 = (M_B + m)v_{B\,x}$ avec $v = 50\cos\alpha - v_{A\,x}$

=> $v_{B\,x} = \frac{m50\cos\alpha\left(1 - \frac{m}{M_A + m}\right)}{(M_B + m)} = \frac{mM\,50\cos\alpha}{(M + m)^2}$ car $M_A = M_B = M$

---

3. Par le théorème du moment cinétique : conservation du moment cinétique

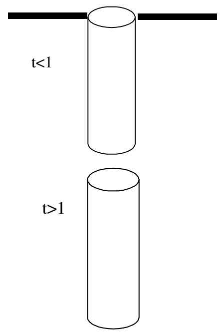
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{M_0} = 0$ => $\overline{M_0^+} = \overline{M_0^-}$ => $\frac{M_1 R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2 R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_1 + M_2)R^2}{2}\omega$

$\frac{M_2 R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2 R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_2 + 3M_2)R^2}{6}\omega$ => $\omega = \frac{\omega_2}{4}$

Pourcentage de l'énergie cinétique initiale présente après la chute : $\boxed{\frac{T^+}{T^-} = \frac{\frac{(M_1 + M_2)R^2}{2}\omega^2}{\frac{M_1 R^2}{2}\omega_1^2 + \frac{M_2 R^2}{2}\omega_2^2} = 1{,}32\,\%}$

---

4. Pour le système {patineur} : $\overline{m_{e,G}} = 0$; $\overline{v_G} = 0$ => $\frac{d}{dt}\overline{M_G} = 0$ où $\overline{M_G} = \overline{\overline{I_G}}.\overline{\omega}$



t<0 : $\overline{\omega} = \omega_1 \overline{1_z}$ et $I_z^{-} = \frac{m_1 r_1^2}{2} + 2\left(\underbrace{\frac{m_2 l_2^2}{12}}_{I_{zG(tige)}} + \underbrace{m_2\left(\frac{l_2}{2} + r_1\right)^2}_{d_{zzG}}\right)$

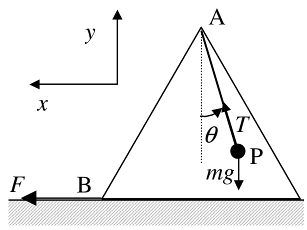
t>0 : $\overline{\omega} = \omega_2 \overline{1_z}$ et $I_z^{+} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ => $\overline{M_O^{+}} = \frac{m_3 r_3^2}{2}\omega_2 \overline{1_z}$

$\overline{M_G^{-}} = \overline{M_G^{+}}$ => $\left[\frac{m_1 r_1^2}{2} + 2\left(\frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2\left(\frac{l_2}{2} + r_1\right)^2\right)\right]\omega_1 = \frac{m_3 r_3^2}{2}\omega_2$ => $\omega_2 = 4,89\ \ t/s$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.

---

5. Pour le système {Triangle+pendule=M+m} :



$\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F_e}\right)_x$ => $(M+m)\ddot{x} = F$ (1)

Pour le système {pendule=m} :

$\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F_e}\right)_x$ => $m\ddot{x} = T\sin\theta$ et $0 = mg - T\cos\theta$ => $\ddot{x} = g\ tg\theta$ (2)

(1) + (2) => $\theta = arctg\,\frac{F}{g\left(M+m\right)}$

On peu aussi utiliser le théorème du moment cinétique pour calculer la deuxième équation :

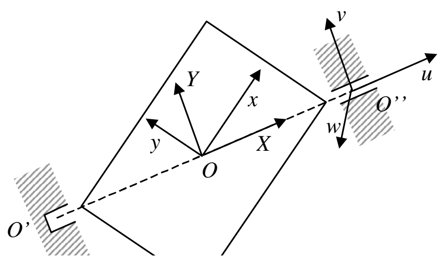
$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}}$ où $\overline{v_G} \,//\, \overline{v_A}$

$\overline{M_A} = \overline{M_G} + m\overline{AG}\times\overline{v_G} = ml\cos\theta\dot{x}\,\overline{1_z}$ où $\overline{M_G} = 0$ car m est une masse ponctuelle.

$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = ml\cos\theta\ddot{x}\,\overline{1_z} = \overline{m}_{e,A} = \overline{AG}\times m\overline{g} = lmg\sin\theta\,\overline{1_z}$ => $\ddot{x} = g\ \mathrm{tg}\theta$

---

6. Les réactions sont définies dans les axes tournant avec la plaque :
$F_{O'} = (U_{O'}, V_{O'}, W_{O'})$ et $F_{O''} = (0, V_{O''}, W_{O''})$



Axes $O''uvw$ fixe,
Axes $OXYZ$ lié à la plaque, $\overline{\omega} = \omega\,\overline{1_X}$

$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = m\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=0}\times\overline{v_{O'}} + \overline{m_{e,O'}}}$

$\overline{m_{e,O'}} = \overline{O'O}\times m\overline{g} + \overline{O'O''}\times\overline{R_{O''}} = \frac{L}{2}mg\overline{1_v} - LW_{O''}\overline{1_v} + LV_{O''}\overline{1_w}$

$\overline{M_{O'}} = \overline{M_O} + m\overline{O'O}\times\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=v_O=0} = I_X\omega\overline{1_X} - P_{XY}\omega\overline{1_Y}$

$\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = I_X\dot{\omega}\overline{1_X} - P_{XY}\dot{\omega}\overline{1_Y} - P_{XY}\omega^2\overline{1_Z}$

$$\begin{cases} \overline{1_X} = \overline{1_u} \\ \overline{1_Y} = \cos\omega t\overline{1_v} + \sin\omega t\overline{1_w} \\ \overline{1_Z} = -\sin\omega t\overline{1_v} + \cos\omega t\overline{1_w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0 \\ \overline{1_v} : -P_{XY}\dot{\omega}\cos\omega t + P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''} \\ \overline{1_w} : -P_{XY}\dot{\omega}\sin\omega t - P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''} \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ constant} : \begin{cases} \overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0 \\ \overline{1_v} : P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''} \quad (1) \\ \overline{1_w} : -P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F_e} \quad \text{où} \quad \overline{v_G} = 0}$$

$$\begin{cases} \overline{1_u} : U_{O'} = 0 \\ \overline{1_v} : V_{O'} + V_{O''} = 0 \\ \overline{1_w} : W_{O'} + W_{O''} - mg = 0 \end{cases} \qquad (2) \qquad (1)+(2) \Rightarrow \begin{cases} U_{O'} = 0 \\ V_{O'} = \dfrac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t \\ W_{O'} = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_{O''} = -\dfrac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t \\ W_{O''} = \dfrac{mg}{2} - \dfrac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t \end{cases}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html