Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2005-2006
Corrigé de la séance 2

Update 12/12/2005 : exercice 4.3. (CIR)
Update 09/12/2005 : exercice 2. (pas de dérivée en instantané) + exercice 3 (complément longueur AC)
Update 29/11/2005 : exercice 5.I.3.+ 5.II.2. ($\dot\theta$ manquant dans la vitesse de C)

1. L'angle θ représente l'inclinaison de l'avion. Le point C se déplace horizontalement (v_C et a_C), le point B subit une rotation autour du point C ($v_{rel\text{-}C}$) et une translation horizontale ($v_{entr}=v_C$). Le point A possède une vitesse d'entraînement (v_{entr}) et une vitesse relative ($v_{rel\text{-}A}$). La vitesse d'entrainement de A peut être calculée par la formule des distributions des vitesses en considérant que A est fixe dans l'avion (dans son repère relatif) et donc la longueur AB est constante.

$\overline{\omega}=\omega\overline{1}_z=\dot\theta\overline{1}_z$, $\overline{\alpha}=\dot\omega\overline{1}_z$; $\overline{r}=x\overline{1}_x$, $\overline{v}_{rel}=\dot x\overline{1}_x$, $\overline{a}_{rel}=\ddot x\overline{1}_x$

$\overline{v}_C=v_C(\cos\theta\overline{1}_x-\sin\theta\overline{1}_y)$ et $\overline{a}_C=a_C(\cos\theta\overline{1}_x-\sin\theta\overline{1}_y)\neq\dfrac{d\overline{v}_c}{dt}$ (où $\overline{v}_c$ est la vitesse instantanée)

$$\overline{v}_B=\overline{v}_C+\overline{\omega}\times\overline{CB}=\overline{v}_C+\omega\overline{1}_z\times h\overline{1}_y=(v_C\cos\theta-\omega h)\overline{1}_x-v_C\sin\theta\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_B=\overline{a}_C+\overline{\varepsilon}\times\overline{CB}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{CB}\right)=\left(a_C\cos\theta-\alpha h\right)\overline{1}_x-\left(a_C\sin\theta+h\omega^2\right)\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_A=\overline{v}_B+\overline{\omega}\times\overline{BA}+\overline{v}_{rel}=(v_C\cos\theta-\omega h+\dot x)\overline{1}_x+\left(\omega L-v_C\sin\theta\right)\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_A=\underbrace{\overline{a}_B+\overline{\varepsilon}\times\overline{BA}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{BA}\right)}_{\overline{a}_{A,entr}}+\underbrace{2\left(\overline{\omega}\times\overline{v}_{rel}\right)}_{\overline{a}_{a,cor}}+\overline{a}_{rel}$$

$$\overline{a}_A=\left(a_C\cos\theta-\alpha h-L\omega^2+\ddot x\right)\overline{1}_x+\left(-a_C\sin\theta-h\omega^2+L\alpha+2\omega\dot x\right)\overline{1}_y$$

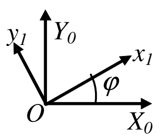
2.1 R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

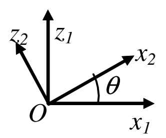
R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Z_0=z_1$ ($\overline{\omega}_{R_1/R_0}=\Omega\overline{1}_{z_1}$)

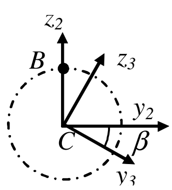
R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ incliné par rapport à R_1 autour de l'axe $y_1=y_2$ ($\overline{\omega}_{R_2/R_0}=\underbrace{\overline{\omega}_{R_2/R_1}}_{\dot\theta=0}+\overline{\omega}_{R_1/R_0}=\overline{\omega}_{R_1/R_0}$)

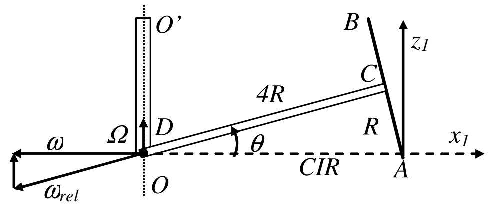
R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $x_2=x_3$

($\overline{\omega}_{R_3/R_0}=\overline{\omega}_{R_3/R_2}+\overline{\omega}_{R_2/R_0}=-\omega_r\overline{1}_{x_2}+\Omega\overline{1}_{z_1}=\overline{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)









=> $\overline{\omega}=\overline{\Omega}+\overline{\omega}_{rel}=-\omega_{rel}\cos\theta\overline{1}_x+(\Omega-\omega_{rel}\sin\theta)\overline{1}_z$

Nous repérons deux points appartenant au solide qui ont une vitesse nulle : le disque ne glisse pas donc la vitesse du point A est nulle. Il en est de même pour le point D qui est appartient à l'axe fixe OO'. Donc l'axe instantané de rotation passe bien par ses deux points. Le vecteur vitesse angulaire du disque se trouvera sur cet axe.

Condition de roulement sans glissement :

$\overline{v}_A=0=\overline{v}_C+\overline{\omega}_d\times\overline{CA}$ avec $\overline{CA}=-R\overline{1}_{z_2}=R\sin\theta\overline{1}_{x_1}-R\cos\theta\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{v}_C=\underbrace{\overline{v}_O}_{=0}+\overline{\Omega}\times\overline{OC}=\Omega 4R\cos\theta\overline{1}_{y_1}$

$\overline{v}_A=0=\Omega 4R\cos\theta\overline{1}_{y_1}+(\Omega R\sin\theta-\omega_{rel}R)\overline{1}_{y_1}$ => $\Omega 4R\cos\theta+R\Omega\sin\theta-R\omega_{rel}=0$

En simplifiant grâce à : $OA=\sqrt{17}R$ et $\sin\theta=1/\sqrt{17}\,;\cos\theta=4/\sqrt{17}$; on obtient $\omega_{rel}=\Omega\sqrt{17}$

par le dessin on peut aussi directement établir que $\dfrac{\Omega}{\omega}=tg\theta$ et $\omega_{rel}=\dfrac{\omega}{\cos\theta}$

=> $\overline{\omega}=-\Omega\sqrt{17}\cos\theta\overline{1}_{x_1}+\Omega(1-\sqrt{17}\sin\theta)\overline{1}_{z_1}=-4\Omega\overline{1}_{x_1}$

$$\overline{\varepsilon}_{disque}=\left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_1}+\overline{\omega}_{R_1/R_0}\times\overline{\omega}_{disque}=\Omega\overline{1}_{z_1}\times\overline{\omega}_{disque}=-4\Omega^2\overline{1}_{y_1}$$

2.2

$\overline{v}_B=\overline{\omega}\times\overline{AB}=-4\Omega\overline{1}_x\times 2R\left(-\sin\theta\overline{1}_{x_1}+\cos\theta\overline{1}_{z_1}\right)=\dfrac{32\sqrt{17}}{17}\Omega R\overline{1}_{y_1}$ attention $\overline{v}_B\neq\left.\dfrac{d\overline{DB}}{dt}\right|_{abs}$

$$\bar a_C = \underbrace{\bar a_D}_{=0} + \underbrace{\bar\varepsilon\times\overline{DC}}_{=0} + \bar\Omega\times\left(\bar\Omega\times\overline{DC}\right) = -\Omega^2 4R\cos\theta\,\bar 1_{x_1} = -\Omega^2 R\frac{16}{\sqrt{17}}\bar 1_{x_1}$$

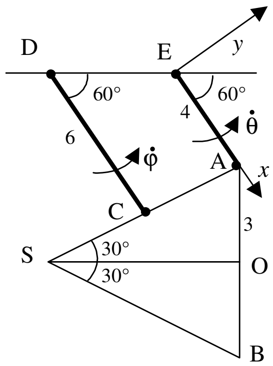
$$\bar a_B = \bar a_C + \bar\varepsilon_d\times\overline{CB} + \bar\omega_d\times\left(\bar\omega_d\times\overline{CB}\right) = -\Omega^2R\frac{16}{\sqrt{17}}\bar 1_{x_1} - 4\Omega^2\bar 1_{y_1}\times R\left(-\sin\theta\,\bar 1_{x_1}+\cos\theta\,\bar 1_{z_1}\right) - 4\Omega\bar 1_{x_1}\times\frac{16}{\sqrt{17}}\Omega R\bar 1_{y_1}$$

$$\bar a_B = -\frac{16}{\sqrt{17}}R\Omega^2\bar 1_{x_1} - \frac{4}{\sqrt{17}}\Omega^2R\bar 1_{z_1} - \frac{16}{\sqrt{17}}\Omega^2R\bar 1_{x_1} - \frac{64}{\sqrt{17}}\Omega^2R\bar 1_{z_1} = -\frac{32}{\sqrt{17}}\Omega^2R\bar 1_{x_1} - \frac{68}{\sqrt{17}}\Omega^2R\bar 1_{z_1}$$

!!! $\bar a_A \neq 0 \Rightarrow \bar a_A = \bar a_C + \bar\varepsilon\times\overline{CA} + \bar\omega\times\left(\bar\omega\times\overline{CA}\right) = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\bar 1_{z_1}$

---

3. 1. OS Horizontal : (AS est parallèle à l'axe y)



$DE.\sin 60 - EA.\sin 60 = CA.\sin 30 \Rightarrow 6.\frac{\sqrt3}{2} - 4.\frac{\sqrt3}{2} = \sqrt3 = CA.\frac12 \Rightarrow AC = 2\sqrt3$ m

2. Vitesse angulaire de la barre DC : $\dot\theta = 3$ rad/s $\bar 1_z$ *et* $\dot\varphi$?

$\bar v_A = \underbrace{\bar v_E}_{0} + \dot\theta\bar 1_z\times\overline{EA} = 4\dot\theta\bar 1_y$ et $\bar v_C = \underbrace{\bar v_D}_{0} + \bar\omega_{DC}\times\overline{DC} = 6\dot\varphi$ m/s $\bar 1_y \Rightarrow \bar v_C \,//\, \bar v_A$

$\Rightarrow \bar v_C = \bar v_A$ (solide indéformable) => le triangle est en translation instantanée

$\Rightarrow \bar\omega_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \dot\varphi = 2$ rad/s $\bar 1_z$

3. Vitesse et accélération du point S

$\bar v_S = \bar v_C = \bar v_A = 12$ m/s $\bar 1_y$ et $\bar a_S = \bar a_A + \bar\varepsilon_{SA}\times\overline{AS} + \bar\omega_{SA}\times\left(\bar\omega_{SA}\times\overline{AS}\right) = \bar a_A + \bar\varepsilon_{SA}\times\overline{AS}$

$$\bar a_A = \bar a_E + \bar\varepsilon_{AE}\times\overline{EA} + \bar\omega_{EA}\times\left(\bar\omega_{EA}\times\overline{EA}\right) = \bar\omega_{EA}\times\left(\bar\omega_{EA}\times\overline{EA}\right) = -\omega_{EA}{}^2\overline{EA} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot\theta^2\bar 1_x = -4\dot\theta^2\bar 1_x$$

$$\begin{cases} \bar a_{C(C\in AC)} = \bar a_A + \bar\varepsilon_{AC}\times\overline{AC} + \underbrace{\bar\omega_{AC}\times\left(\bar\omega_{AC}\times\overline{AC}\right)}_{=0} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot\theta^2\bar 1_x + \left\|\overline{AC}\right\|\varepsilon_{AC}\bar 1_x \\ \bar a_{C(C\in AD)} = \underbrace{\bar a_D}_{=0} + \bar\varepsilon_{DC}\times\overline{DC} + \bar\omega_{DC}\times\left(\bar\omega_{DC}\times\overline{DC}\right) = \left\|\overline{DC}\right\|\varepsilon_{DC}\bar 1_y - \left\|\overline{DC}\right\|\dot\varphi^2\bar 1_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar\varepsilon_{DC} = 0 \text{ et } -\left\|\overline{EA}\right\|\dot\theta^2 + \varepsilon_{AC}\left\|\overline{AC}\right\| = -\left\|\overline{DC}\right\|\dot\varphi^2 \quad \Rightarrow \varepsilon_{AC} = \frac{\left\|\overline{EA}\right\|\dot\theta^2 - \left\|\overline{DC}\right\|\dot\varphi^2}{\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{4.3^2-6.2^2}{2\sqrt3} = 2\sqrt3 \text{ m/s}^2\bar 1_z$$

$$\Rightarrow \bar a_S = \bar a_A + \bar\varepsilon_{SA}\times\overline{AS} = \left(-4\dot\theta^2 + 2\sqrt3.\frac{3}{\sin 30}\right)\bar 1_x = 12\left(-3+\sqrt3\right)\bar 1_x$$

4.1 $\bar\omega = \dot\varphi\bar 1_z + \dot\theta\bar 1_y = -\dot\theta\sin\varphi\bar 1_X + \dot\theta\cos\varphi\bar 1_Y + \dot\varphi\bar 1_Z$

4.2

$$\bar v_H = \frac{d\overline{OH}}{dt} = \frac{d\left(L\sin\theta\bar 1_Z\right)}{dt} = L\cos\theta\dot\theta\bar 1_Z$$

$$\bar v_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\bar 1_x - \frac{L}{2}\bar 1_y\right) = -L\sin\theta\dot\theta\bar 1_x + \dot\varphi\bar 1_Z\times\overline{OA} = \left(-L\sin\theta\dot\theta + \frac{L}{2}\dot\varphi\right)\bar 1_x + L\dot\varphi\cos\theta\bar 1_y$$

$$\bar v_B = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\bar 1_x + \frac{L}{2}\bar 1_y\right) = \left(-L\sin\theta\dot\theta - \frac{L}{2}\dot\varphi\right)\bar 1_x + L\dot\varphi\cos\theta\bar 1_y$$

$$\bar v_E = -L\sin\theta\dot\theta\bar 1_x + L\dot\varphi\cos\theta\bar 1_y$$

4.3 invariant $\bar v.\bar\omega = L\cos\theta\dot\theta\dot\varphi$

1. $\dot\theta = \dot\varphi = 0$ Solide immobile

2. $\dot\theta = 0;\ \dot\varphi \neq 0$ Rotation continue uniforme $\bar\omega = \dot\varphi\bar 1_Z$

3. $\dot\theta \neq 0;\ \dot\varphi = 0$ Rotation instantanée CIR=(x=Lcosθ;z=Lsinθ)

3. $\dot\theta \neq 0;\ \dot\varphi \neq 0$ Mvt hélicoidal instantané $\bar\omega = \dot\varphi\bar 1_Z + \dot\theta\bar 1_y$

Axe hélicoidal : droite de point P tq $\bar v_P \,//\, \bar\omega$

$$\bar v_P = \left(\frac{\bar\omega.\bar v_H}{\bar\omega.\bar\omega}\right).\bar\omega = \frac{L\cos\theta\dot\theta\dot\varphi}{\dot\theta^2+\dot\varphi^2}\left(\dot\theta\bar 1_y + \dot\varphi\bar 1_z\right) \quad \text{et} \quad \overline{HP} = \frac{\bar\omega\times\bar v_H}{\bar\omega.\bar\omega} + \lambda\bar\omega = \frac{L\cos\theta\dot\theta^2}{\dot\theta^2+\dot\varphi^2}\bar 1_x + \lambda\left(\dot\theta\bar 1_y + \dot\varphi\bar 1_z\right)$$

Animation sur : http://www.ulb.ac.be/polytech/smana/Seance02CinematiqueHelicoidal.htm

---

5.

I.1 $\bar{v}_C = \dfrac{d}{dt}\overline{OC}\Big|_{abs} = \dfrac{d}{dt}\overline{OC}\Big|_{rel} + \bar{\omega}_{XYZ/xyz} \times \overline{OC}$

$$\overline{OC} = \frac{3L}{2}\cos\theta\,\bar{1}_X + \frac{3L}{2}\sin\theta\,\bar{1}_Z \;\; ; \;\; \bar{\omega}_{XYZ/xyz} = -\dot{\phi}\,\bar{1}_Y$$

$$\bar{v}_C = \left(-\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\,\bar{1}_X + \frac{3L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\,\bar{1}_Z\right) + \left(\dot{\phi}\frac{3L}{2}\cos\theta\,\bar{1}_Z - \dot{\phi}\frac{3L}{2}\sin\theta\,\bar{1}_X\right) = \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\left(-\sin\theta\,\bar{1}_X + \cos\theta\,\bar{1}_Y\right)$$

$$\bar{a}_C = \frac{d}{dt}\bar{v}_C\Big|_{abs} = \frac{d}{dt}\bar{v}_C\Big|_{rel} + \bar{\omega}_{XYZ/xyz} \times \bar{v}_C$$

$$\bar{a}_C = \frac{3L}{2}\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right)\left(-\sin\theta\,\bar{1}_X + \cos\theta\,\bar{1}_Z\right) + \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\bar{1}_X - \sin\theta\,\bar{1}_Z\right) + \frac{3L}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\dot{\phi}\left(-\cos\theta\,\bar{1}_X - \sin\theta\,\bar{1}_Z\right)$$

$$\bar{a}_C = -\frac{3L}{2}\left(\sin\theta\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right) + \cos\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2\right)\bar{1}_X + \frac{3L}{2}\left(\cos\theta\left(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right) - \sin\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2\right)\bar{1}_Z$$

I.2 $\bar{v}_C = \bar{v}_{Arel} + \bar{v}_{Aentr} + \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_Y \times \overline{AC}$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{Arel} + \bar{a}_{Aentr} + \bar{a}_{Acor} + \left(\ddot{\theta}-\ddot{\phi}\right)\bar{1}_Y \times \overline{AC} - \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)^2\overline{AC}$$

I.3 *C* décrit un cercle de rayon *3L/2* à la vitesse angulaire $-\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\bar{1}_Y$

II.1 Rotation instantanée, vitesse angulaire $\dot{\theta}\bar{1}_Y$ autour de I_1Y, où I_1 est le sommet du rectangle $AOBI_1$.

II.2 a) Si $\dot{\theta} \neq \dot{\phi}$: rotation instantanée de vitesse angulaire $\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_Y$ autour de *IY* où I est tel que

$$\overline{CI} = \frac{\bar{\omega}_{AB} \times \bar{v}_C}{\omega_{AB}^2} = \frac{3L}{2}\frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\left(\cos\theta\,\bar{1}_X + \sin\theta\,\bar{1}_Z\right) = \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\overline{CI_1}$$

$$\begin{cases} \text{si } \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} > 1 \;:\; \text{I est au delà de } I_1 \;\;;\;\; \text{si } 0 < \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 1 \;:\; \text{I est entre } C \text{ et } I_1 \;\;; \\ \text{si } -1 < \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 0 \;:\; \text{I est entre } O \text{ et } C \;\;;\;\; \text{si } \dfrac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < -1 \;:\; \text{I est au delà de } C \;\;;\;\; \text{si } \dot{\theta} = -\dot{\phi} \;:\; \text{I est en } C \;\;; \\ \text{si } \dot{\phi} = 0 \;:\; \text{I est en } I_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AN : \overline{CI} = \frac{7}{3}\overline{CI_1}$$

b) si $\dot{\theta} = \dot{\phi}$: translation instantanée de vitesse instantanée $\bar{v}_C = \bar{v}_A = 3L\underline{\underline{\dot{\theta}}}\left(-\sin\theta\,\bar{1}_X + \cos\theta\,\bar{1}_Z\right)$

Les énoncés et les corrigés sont accessibles et mis à jour sont sur le site de méca :

http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html

Pour toute question, veuillez contacter par email :

- Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be pour les problèmes relatifs aux **Tps et aux laboratoires** ;
- CFAO.Matlab@ulb.ac.be pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**

Des permanences seront organisées un mercredi sur deux à 12h dans la salle de réunion UB3.

Jeudi 17/11 ; Jeudi 01/12 ; Jeudi 15/12