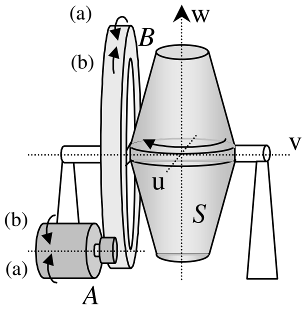
Faculté des Sciences Appliquées

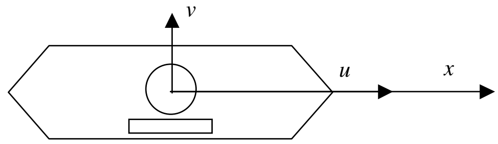
Mécanique rationnelle
2e candidature 2005-2006
Corrigé de la séance 11

UPDATE 09/05/2006 : Ex4.3
UPDATE 19/04/2006 : Ex3.1 et Ex3.2

1.



Vue de haut.



C_e = couple extérieur créé par le roulis ($\bar{C}_e = \pm C_e \bar{1}_x$). => Le couple gyroscopique doit contrer ce roulis.

=> Dans les axes liés au gyroscope, le couple gyroscopique sera suivant l'axe u $\left(\bar{1}_w \times \bar{1}_v\right)$

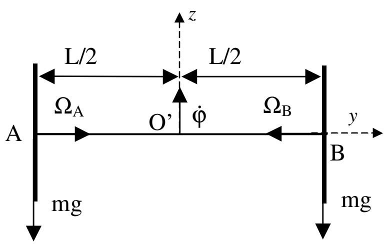
donc on placera le gyroscope tel que son axe u soit parallèle à l'axe longitudial du bateau (x).

$\bar{C}_{gyr}\Big|_a = \Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}_a = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right)\times\bar{1}_v\right) = \Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $-C_e\bar{1}_u$

$\bar{C}_{gyr}\Big|_b = \Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}_b = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right)\times\left(-\bar{1}_v\right)\right) = -\Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $+C_e\bar{1}_u$

Grâce au gyroscope, le bateau sera stabilisé et le couple C_e sera compensé. Il n'y aura plus de rotation du bateau suivant l'axe x, et donc le roulis ne génère pas de couple gyroscopique supplémentaire suivant l'axe v.

2.



$\bar{C}_{gyr} = \Gamma\left(\Omega_A - \Omega_B\right)\dot{\varphi}\ \bar{1}_x$

La somme des moments extérieurs en O' est nulle car O' est le centre de masse du système. Mettre le système en rotation va créer un couple supplémentaire (C_{gyr}).Ce couple vient déséquilibrer le système vers la gauche ou vers la droite en fonction de la différence $\Omega_A - \Omega_B$ (positive ou négative). Si le système était entièrement fixé en O' et que seul la rotation autour de l'axe OO' était possible, la barre AB subirait un moment de flexion qui la ferrait fléchir vers le bas.

3.1 2 degrés de liberté : x (position de A) et θ (rotation du disque)

Théorème de Lagrange en utilisant les **multiplicateurs de Lagrange** : Utiliser un nombre de coordonnées de Lagrange supérieur (x, θ et φ : position de B par rapport à A) au nombre de degrés de liberté du système.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Théorème de Lagrange avec le Lagrangien et Q_i*=0

Benne : $S_1\left(M, I\right)$ R_1=repère lié à la benne

Disque : $S_2\left(m, R, \dot{\theta}\right)$ R_3=repère lié au disque (tournant avec $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = -\dot{\theta}\bar{1}_{y_2}$)

R_2 = repère où z_2 est lié à AB (tournant avec $\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\varphi}\bar{1}_{y_2}$)

$\overline{OB} = x\bar{1}_{x_1} + L\bar{1}_{z_2}$ => $\bar{v}_B = \dot{x}\bar{1}_{x_1} + L\dot{\varphi}\bar{1}_{x_2} = \left(\dot{x} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\bar{1}_{x_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\,\bar{1}_{z_1}$

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = C - Lmg\cos\varphi$$

Contrainte de roulement sans glissement : I = point de contact entre S_1 et S_2

$\bar{v}_{I\in S_1} = \dot{x}\bar{1}_{x_1}$

$\bar{v}_{I\in S_2} = \bar{v}_{B\in S_2} + \bar{\omega}_d \times \overline{BI}$ avec $\bar{\omega}_d = -\dot{\theta}\bar{1}_{y_2}$

ou $\bar{v}_{I\in S_2} = \dfrac{d\overline{OI}}{dt} = \dfrac{d\left(x\bar{1}_{x_1} + L\bar{1}_{z_2} + a\bar{1}_{z_{2'}}\right)}{dt} = \dot{x}\bar{1}_{x_1} + L\dot{\varphi}\bar{1}_{x_2} - a\dot{\theta}\bar{1}_{x_2}$ ==> $L\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0$

ce qui nous donne comme contrainte (ϕ_1) avec λ_1: $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}\delta\varphi + \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta = L\delta\varphi - a\delta\theta$=0

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)=\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x}+mL\cos\varphi\ddot{\varphi}-mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2-0=0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right)=\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Rightarrow \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\theta}=-\lambda_1 a \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial \varphi}\right)=\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \Rightarrow mL^2\ddot{\varphi}+mL\ddot{x}\cos\varphi\cancel{-mL\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}}+\cancel{mL\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}+mgL\sin\varphi=\lambda_1 L \\ L\dot{\varphi}-a\dot{\theta}=0 \end{cases}$$

=Système de 4 équations à 4 inconnues

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1=-\frac{ma}{2}\ddot{\theta}=-\frac{mL}{2}\ddot{\varphi}} \Rightarrow \text{2 équations de mouvement} \begin{cases} \dfrac{3mL^2}{2}\ddot{\varphi}+mL\ddot{x}\cos\varphi+mgL\sin\varphi=0 \\ (M+m)\ddot{x}+mL\cos\varphi\ddot{\varphi}-mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2=0 \end{cases}$$

3.2 Réactions de liaison => Théorème généraux.

Théorème de la résultante appliqué à S_2 : $-T_2\overline{1}_{x_2}-N_2\overline{1}_{z_2}$

$$\overline{R}=m\overline{v}_B=m(\dot{x}+L\dot{\varphi}\cos\varphi)\overline{1}_{x_1}-mL\dot{\varphi}\sin\varphi\overline{1}_{y_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{x}+L\ddot{\varphi}\cos\varphi-L\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right)=-N_2\sin\varphi+T_2\cos\varphi \quad (1) \\ m\left(-mL\ddot{\varphi}\sin\varphi-mL\cos\varphi\dot{\varphi}^2\right)=mg-N_2\cos\varphi-T_2\sin\varphi \quad (2) \end{cases}$$

$(1)\sin\varphi+(2)\cos\varphi \;:\; m\ddot{x}\sin\varphi-mL\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi-N_2 \Rightarrow N_2=mg\cos\varphi-m\ddot{x}\sin\varphi+mL\dot{\varphi}^2$

$(1)\cos\varphi-(2)\sin\varphi \;:\; m\ddot{x}\cos\varphi+mL\ddot{\varphi}=T_2-mg\sin\varphi \Rightarrow T_2=-m\ddot{x}\cos\varphi-mL\ddot{\varphi}-mg\sin\varphi$

Ou par le théorème du moment en B :

$$-\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta}=-aT_2 \Rightarrow T_2=\frac{ma}{2}\ddot{\theta}=\frac{mL}{2}\ddot{\varphi}$$

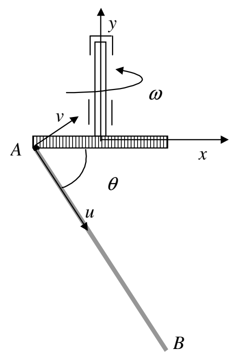
et grâce à la première équation de mouvement : $\left(\dfrac{mL^2}{2}\ddot{\varphi}+mL^2\ddot{\varphi}+mL\ddot{x}\cos\varphi+mgL\sin\varphi=0\right)$

on obtient : $T_2=\dfrac{mL}{2}\ddot{\varphi}=-mL\ddot{\varphi}-m\ddot{x}\cos\varphi-mg\sin\varphi$

4.1 Equation différentielle du mouvement => Théorème de Lagrange.

ω est une donnée du problème.

Axes *Auvw*, tel que *u* est suivant *AB* et *w* // *z*.



$$T=T_{tige}+T_{disque}=\left(\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{tige}}+\left(\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}\right)_{\text{Disque}}$$

- $T_{disque}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m(L/4)^2}{2}\omega^2$
- $T_{tige}=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{L^2}{16}\omega^2+\omega^2\cos^2\theta\dfrac{L^2}{4}-\dfrac{L^2}{4}\omega^2\cos\theta+\dfrac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\right)+\dfrac{1}{2}\dfrac{mL^2}{12}\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\cos^2\theta\right)$

$$\text{avec} \begin{cases} \overline{\omega}=\omega\left(-\sin\theta\overline{1}_u+\cos\theta\overline{1}_v\right)-\dot{\theta}\overline{1}_w \\ \overline{v}_{G_{tige}}=\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AG}=\dfrac{L}{4}\omega\overline{1}_w-\omega\cos\theta\dfrac{L}{2}\overline{1}_w-\dfrac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_v \end{cases}$$

et $V=-mg\dfrac{L}{2}\sin\theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=m\frac{L^2}{4}\ddot{\theta}+\frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}+\frac{L^2}{4}m\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega^2\sin\theta+\frac{L^2}{12}m\omega^2\cos\theta\sin\theta-mg\frac{L}{2}\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}+mL^2\left(\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{1}{8}\right)\omega^2\sin\theta-mg\frac{L}{2}\cos\theta=0$$

4.2 Réactions de liaison => Théorème généraux.

Système {tige} : Théorème de la résultante cinétique dans les axes *Oxyz*

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\sum \overline{F}_e \ : \overline{R}=m\overline{v}_G=-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\overline{1}_x-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\overline{1}_y+m\frac{L}{2}\omega\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)\overline{1}_z$$

$$\begin{cases}-m\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2+m\frac{L}{2}\omega^2\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)=X_A\\ -m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}+m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2=Y_A-mg\\ m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta}+m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta}=Z_A\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X_A=m\frac{L}{2}\left(\omega^2\sin^2\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\omega^2\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)-\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\dot{\theta}^2\right)\\ Y_A=-m\frac{L}{2}\cos\theta\left(-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta\right)+m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta+mg\\ Z_A=mL\omega\sin\theta\end{cases}$$

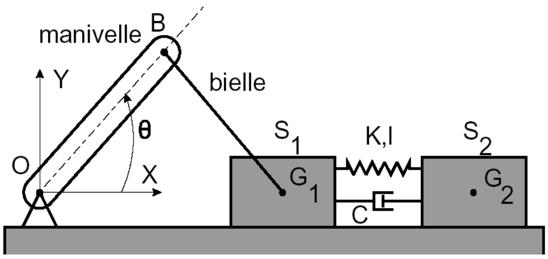
4.3 AN :

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2=\left(\omega^2\cos^2\theta-\frac{3}{4}\omega^2\cos\theta+3\frac{g}{L}\sin\theta\right)-\left(\omega^2\frac{\cos^2 60}{2}-\frac{3}{4}\omega^2\cos 60+3\frac{g}{L}\sin 60\right)=-\frac{5}{8}\omega^2+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{L}$$

$$X_A=\frac{mL}{16}\omega^2 \ ; \ Y_A=\frac{mL}{16}\omega^2+\frac{mg}{2}\left(5-3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ ; \ Z_A=mL\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{8}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{3g}{L}}$$

5.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OG_1}=2L\cos\theta\overline{1}_x \ \Rightarrow \ \overline{v}_{G_1}=-2L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x\\ \overline{OG_2}=x\overline{1}_x \ \Rightarrow \ \overline{v}_{G_2}=\dot{x}\overline{1}_x\end{array}\right\}$$

$$T=T_{tige}+T_{S_1}+T_{S_2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Force de pesanteur

$$\left\{F_g=-mg\overline{1}_y \ : \ V_{OB}=mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad Q_{\theta(mg)}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}=-mg\frac{L}{2}\cos\theta\right.$$

Force d'amortissement proportionnel à la vitesse

$$\begin{cases}\overline{F}_A=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x \ ; \ \overline{G_1G_2}=\left(x-2L\cos\theta\right)\overline{1}_x \ \Rightarrow \delta\,\overline{G_1G_2}=\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}\delta\theta=\left(\delta x+2L\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x\\ Q^*_\theta=\overline{F}_A.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)2L\sin\theta \ \text{ et } \ Q^*_x=\overline{F}_A.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\end{cases}$$

Force de rappel

$$\begin{cases}\overline{F}_R=-k\left(x-2L\cos\theta-L\right)\overline{1}_x \ : \ V_{S_1}=\frac{k}{2}\left(x-2L\cos\theta-L\right)^2\\ \text{et} \quad Q_\theta=-\frac{\partial V}{\partial\theta}=-k\left(x-2L\cos\theta-L\right)2L\sin\theta \ \text{ et } \ Q_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-k\left(x-2L\cos\theta-L\right)\\ \text{ou} \quad \delta\,\overline{G_1G_2}=\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}\delta\theta=\left(\delta x+2L\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x\\ \Rightarrow Q_x=\overline{F}_R.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}=-k\left(x-2L\cos\theta-L\right) \ \text{ et } \ Q_\theta=\overline{F}_R.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}=-k\left(x-2L\cos\theta-L\right).2L\sin\theta\end{cases}$$

Méthode avec T et Q :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + 4L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \\ m \dfrac{L^2}{3} \ddot{\theta} + m4L^2 \sin\theta \left(\sin\theta \ddot{\theta} + \cos\theta \dot{\theta}^2 \right) = -mg \dfrac{L}{2} \cos\theta - \left(k \left(x - 2L\cos\theta - L \right) + c \left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta} \right) \right) 2L\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \ : \ m\ddot{x} = -k \left(x - 2L\cos\theta - L \right) - c \left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta} \right) \end{cases}$$

OU

Méthode avec L et Q^* :

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + 4L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 \right) - mg \frac{L}{2} \sin\theta - \frac{k}{2} \left(x - 2L\cos\theta - L \right)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^* = -c \left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta} \right) 2L\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = Q_x^* = -c \left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta} \right) \end{cases}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html