Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2004-2005
Corrigé de la séance 7

1. Après le départ de l'obus : Système {canon + wagon}: $\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{\mathrm{e},x}$ => $M\ddot{x} = -T$ => $\frac{M}{2}\dot{x}_0^{\,2} = TX$

Avant le départ de l'obus Système {canon + wagon + obus} $\frac{d}{dt}R_x = 0$ jusqu'en t=0 : $R_x = 0$

en t=0 : $R_x = 0$ => $M\dot{x}_0 + mv\cos\theta\cos\phi = 0$ => $\mathrm{X} = \frac{m^2v^2\cos^2\theta\cos^2\phi}{2MT}$ avec T = force de frottement (=R dans l'énoncé)

---

2. Par le théorème du moment cinétique : concervation du moment cinétique

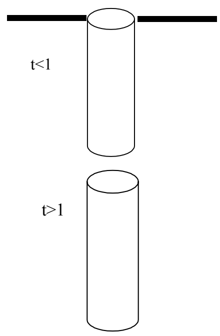
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M}_0 = 0 \;=>\; \overline{M}_0^{\,+} = \overline{M}_0^{\,-} \;=>\; \frac{M_1R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega$$

$$\frac{M_2R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_2+3M_2)R^2}{6}\omega \;=>\; \omega = \frac{\omega_2}{4}$$

Pourcentage de l'énergie cinétique : $\frac{T^+}{T^-} = \dfrac{\frac{M_1R^2}{2}\omega_1^{\,2} + \frac{M_2R^2}{2}\omega_2^{\,2}}{\frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega^2} = 1{,}32\,\%$

---

3. Pour le système {patineur} : $\overline{m_{\mathrm{e},O}} = 0$; $\overline{v_G} = 0$ => $\frac{d}{dt}\overline{M_O} = 0$ où $\overline{M_O} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$



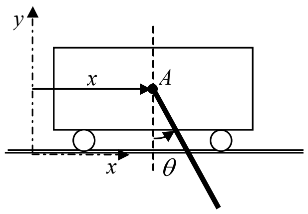
t<0 : $\overline{\omega} = \omega_1\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \frac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\underbrace{\frac{m_2l_2^2}{12}}_{I_{zG(tige)}} + \underbrace{m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2}_{d_{zzG}}\right)$

t>0 : $\overline{\omega} = \omega_2\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \frac{m_3r_3^2}{2}$ => $\overline{M_O} = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2\,\overline{1_z}$

$$\overline{M_{O\,t<0}} = \overline{M_{O\,t>0}} \;=>\; \left[\frac{m_1r_1^2}{2} + 2\left(\frac{m_2l_2^2}{12} + m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2\right)\right]\omega_1 = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2 \;=>\; \omega_2 = 4{,}89\;\; t/s$$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.

4.



Système = {Barre } :

Théorème de la résultante cinétique : $\frac{d\overline{R}}{dt} = \sum F_e$

$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = \dot{x}\overline{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y\right)$

$$m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y = X_A\,\overline{1}_x + \left(-mg + Y_A\right)\overline{1}_y$$

$$=> \begin{cases} X_A = m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad (1) \\ Y_A = m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \quad (2) \end{cases}$$

Pour supprimer la variable x de l'équation, il faut trouver une équation supplémentaire. Nous avons plusieurs possibilités :
Le théorème du moment cinétique en *A* sur la barre
Le théorème de la résultante sur le chariot
Le théorème de la résultante sur l'ensemble
Lagrange (qui sera vu dans les prochain TPs)

Le théorème du moment cinétique en A sur la barre - **Système = {Barre} :**

$$\overline{M}_A = m\overline{AG}\times\overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \left(m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{x} + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\right)\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = m\overline{v}_G\times\overline{v}_A + \overline{m}_{e,A}$$

$$\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\dot{x} + m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{x} + \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\right)\overline{1}_z = -m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\dot{x}\overline{1}_z - \frac{L}{2}\sin\theta mg\overline{1}_z \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2L}{3\cos\theta}\ddot{\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}g \quad (3)$$

=> dans (1) : $X_A = m\left(\left(\frac{L}{2}\cos\theta - \frac{2L}{3\cos\theta}\right)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}g\right)$

Le théorème de la résultante - **Système = {Chariot } :**

$$M\ddot{x}\overline{1}_x = -X_A\overline{1}_x + \left(-Y_A - Mg + 2N\right)\overline{1}_y$$

avec N les récations du sol sur le chariot.

=> $M\ddot{x} = -X_A$ (4) => dans (1) : $X_A = m\left(-\frac{X_A}{M} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

=> $X_A = \frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

Le théorème de la résultante sur l'ensemble - **Système = {Chariot+Barre} :**

$$M\ddot{x}\overline{1}_x + m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y = \left(-\left(m+M\right)g + 2N\right)\overline{1}_y$$

avec N les récations du sol sur le chariot.

=> $0 = \left(m+M\right)\ddot{x} + m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta$ =Conservation de la résultante cinétique suivant x

$\ddot{x} = \frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)$ => dans (4) : $X_A = \frac{mM}{m+M}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

=> dans (1) : $X_A = m\left(\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = \frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

Par Lagrange, on verra que cela revient à ceci - **Système = {Chariot+Barre} ::**

A exprimer en fonction de θ, θ et $\ddot{\theta}$. Cherchons la relation $\ddot{x} = f\left(\theta,\theta,\ddot{\theta}\right)$ = équation du mouvement

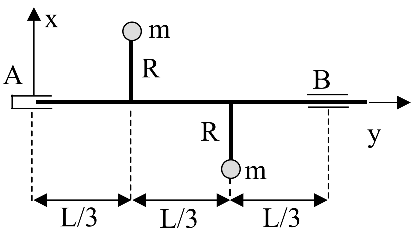
$$T = T_{chariot} + T_{Tige} = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot} + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige} \quad \text{et} \quad V = C - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

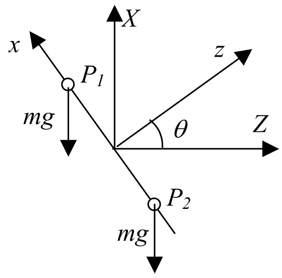
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;:\; \left(M+m\right)\ddot{x} + \frac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\frac{m}{M+m}\left(\frac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;:\; \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x}\right) + mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta} - \frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} X_A = \frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}}$$

5.





Dans les axes $Axyz$ liés au système, réactions extérieures : $\overline{R}_A(R_{A,x}(t),R_{A,y}(t),R_{A,z}(t))+\ \overline{R}_B(R_{B,x}(t),0,R_{B,z}(t))$

$+\,mg(-\cos\theta,0,-sin\theta)$ en $P_1(R,\frac{L}{3},0)+\,mg(-\cos\theta,0,-sin\theta)$ en $P_2(-R,\frac{2L}{3},0)$

Recherche des réactions en B :

$$\overline{M}_A=m\overline{AG}\times\overline{v}_A+\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\underset{A\text{ fixe}}{=}\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}=\begin{pmatrix} & -P_{xy} & \\ & I_y & \\ & -P_{yz} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{pmatrix}=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y-P_{yz}\omega\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt}=m\overline{v}_G\times\overline{v}_A+\overline{m}_{e,A}\underset{A\text{ fixe}}{=}\overline{m}_{e,A}$$

$$\overline{m}_{e,A}=-LR_{B,x}\overline{1}_z+LR_{B,z}\overline{1}_x+mgR\sin\theta\overline{1}_y+mg\frac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z-mg\frac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x$$

$$-mgR\sin\theta\overline{1}_y+mg\frac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z-mg\frac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x=\left(LR_{B,z}-mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x+\left(mgL\cos\theta-LR_{B,x}\right)\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt}=-P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt}-P_{yz}\omega\frac{d\overline{1}_z}{dt}=P_{xy}\omega^2\overline{1}_z-P_{yz}\omega^2\overline{1}_x=-m\frac{LR}{3}\omega^2\overline{1}_z$$

$$P_{xy}=\underbrace{0+mR\frac{L}{3}}_{P_{xy,P_1}}+\underbrace{0+m\left(-R\right)\frac{2L}{3}}_{P_{xy,P_2}}=-m\frac{LR}{3}\quad;\quad P_{yz}=0\text{ car }z=0\text{ pour tout le système}$$

$$=>\begin{cases}LR_{B,z}-mgL\sin\theta=0=>R_{B,z}=mg\sin\theta\\ mgL\cos\theta-LR_{B,x}=-m\frac{LR}{3}\omega^2\quad\text{avec }=>R_{B,x}=m\left(g\cos\theta+\frac{R}{3}\omega^2\right)\end{cases}$$

Recherche des réactions en A :

$$\overline{M}_B\underset{B\text{ fixe}}{=}\overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega}=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y-P_{yz}\omega\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt}\underset{B\text{ fixe}}{=}\overline{m}_{e,B}$$

$$\overline{m}_{e,B}=-LR_{A,z}\overline{1}_x+LR_{A,x}\overline{1}_z+mgR\sin\theta\overline{1}_y-mg\frac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z+mg\frac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x$$

$$-mgR\sin\theta\overline{1}_y-mg\frac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z+mg\frac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x=\left(-LR_{A,z}+mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x+\left(-mgL\cos\theta+LR_{A,x}\right)\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt}=-P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt}-P_{yz}\omega\frac{d\overline{1}_z}{dt}=P_{xy}\omega^2\overline{1}_z-P_{yz}\omega^2\overline{1}_x=-m\frac{1}{3}LR\omega^2\overline{1}_z$$

$$P_{xy}=\underbrace{0+mR\left(-\frac{2L}{3}\right)}_{P_{xy,P_1}}+\underbrace{0+m\left(-R\right)\left(-\frac{L}{3}\right)}_{P_{xy,P_2}}=-m\frac{1}{3}LR\quad;\quad P_{yz}=0\text{ car }z=0\text{ pour tout le système}$$

$$=>\begin{cases}-LR_{A,z}+mgL\sin\theta=0=>R_{A,z}=mg\sin\theta\\ -mgL\cos\theta+LR_{A,x}=-m\frac{LR}{3}\omega^2\quad\text{avec }=>R_{A,x}=m\left(g\cos\theta-\frac{R}{3}\omega^2\right)\end{cases}$$

Dans la position indiquée :

$$\theta=0=>R_{A,z}=0\ \text{ et }\ R_{A,x}=m\left(g-\frac{R}{3}\omega^2\right)$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html