Faculté des Sciences Appliquées

NOM :
PRENOM :

Mécanique Rationnelle
2e candidature

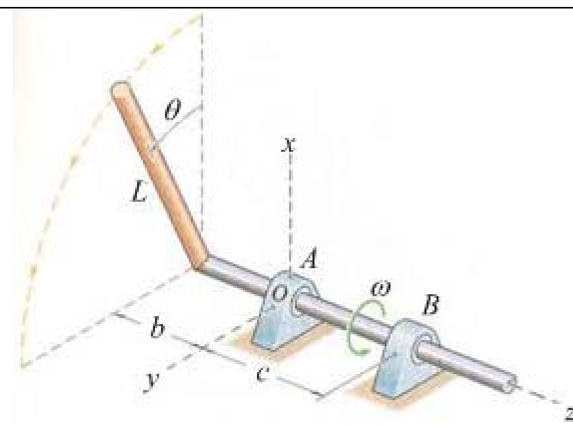
Examen de mécanique rationnelle
1ère session 07/06/2005 (8h-12h)
Année académique 2004-2005

Répondre sur le questionnaire et **ne dégraffer que** les brouillons

Cinématique :	Cinétique :
$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BA}$ $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BA} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{BA}\right)$	$\overline{R} = m\overline{v}_G \Rightarrow \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{F}_e$ $\left.\begin{array}{l}\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{R} \\ \overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + m\overline{AG} \times \overline{v}_A\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\overline{M}_A}{dt} = \overline{m}_{e,A} + m\overline{v}_G \times \overline{v}_A$
Inertie : $I^{\alpha\beta} = \int_{système}\left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta\right)dm$ $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$ $tg2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$ $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)$	$T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h.\overline{v}_h$ Lagrange : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_j}$

Question 1 : Rotation d'une barre (3 points)

Une barre uniforme de longueur L et de masse m, est soudée à un axe. Cet axe est en rotation dans les support A et B avec une vitesse angulaire constante ω.
Rem : on suppose que B ne supporte pas de force suivant l'axe.



Rem : le poids de la tige est négligeable.

Déterminer l'expression de la force supportée par l'appui en B en fonction de θ.

$R1(x'y'z')$ lié à la barre avec x' suivant la barre : $\boxed{\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O} \text{ avec } \overline{M}_O = \overline{M}_P + \overline{OP} \times \overline{R}}$

$\overline{OG} = \left(\frac{L}{2}\overline{1}_{x'} - b\overline{1}_z\right)$; $\overline{R} = m\frac{d\overline{OG}}{dt} = m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{y'}$; $\overline{OP} = -b\overline{1}_z$

$\overline{M}_P = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z$ car tous les produits d'inertie contenant du z sont nuls

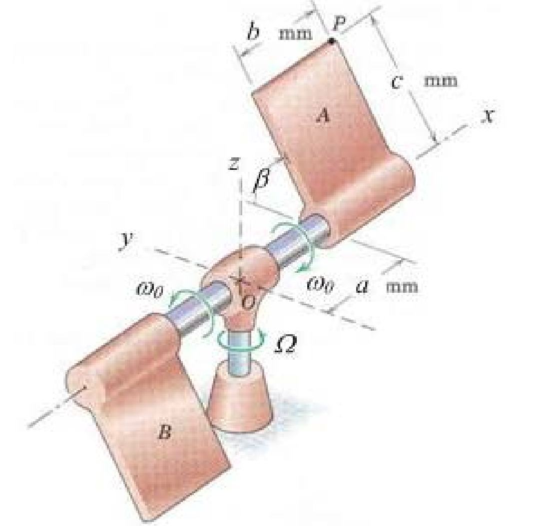
$\overline{M}_O = \overline{M}_P + \overline{OP} \times \overline{R} = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z + m\left(-b\overline{1}_z\right) \times m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{y'} = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z + mb\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{x'}$

$=> \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O}$: $m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\overline{1}_{y'} = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x => m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_y - \sin\theta\overline{1}_x\right) = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x$

$=> R_{Bx} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\cos\theta$ et $R_{By} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\sin\theta => \overline{R}_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right)$ avec $R_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2$

<u>Question 2</u> : Panneaux en rotation (4 points)

Un ensemble de panneaux attaché à un système d'axe *xyz* tourne avec une vitesse angulaire Ω autour de l'axe vertical *z*. Simultanément, les panneaux tournes autour de l'axe *x* dans des sens opposés avec une vitesse angulaire constante ω.



1. Déterminer **l'accélération angulaire** de la plaque A.

$R1(xyz)$ repère lié à l'axe : $\overline{\omega}_{R1/R0} = \Omega \overline{1}_z$

$R2(x_2 y_2 z_2)$ repère lié au panneau A : $\overline{\omega}_{R2/R1} = \omega_0 \overline{1}_x \Rightarrow \overline{\omega}_{R2/R0} = \Omega \overline{1}_z + \omega_0 \overline{1}_x$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon} = \underbrace{\left.\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right|_{R1}}_{=0} + \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{\omega} = \omega_0 \Omega \overline{1}_y$$

2. Déterminer la **vitesse du point *P***

$\overline{\omega}_{R1/R0} = \Omega \overline{1}_z = \overline{\omega}_1$

$\overline{\omega}_{R2/R0} = \Omega \overline{1}_z + \omega_0 \overline{1}_x = \overline{\omega}_2 \Rightarrow \overline{\varepsilon}_2 = \omega_0 \Omega \overline{1}_y$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{Q(a+b,0,0)} + \overline{\omega}_2 \times \overline{QP} = \Omega(a+b)\overline{1}_y + \Omega c\left(-\cos\beta \overline{1}_x\right) + \omega_0 c\left(\cos\beta \overline{1}_z - \sin\beta \overline{1}_y\right)$$

$$\Rightarrow \overline{v}_P = -\Omega c \cos\beta \overline{1}_x + \left(\Omega(a+b) - \omega_0 c \sin\beta\right)\overline{1}_y + \omega_0 c \cos\beta \overline{1}_z$$

$$\text{avec } \begin{cases} \overline{v}_{Q(a+b,0,0)} = \overline{v}_O + \overline{\omega}_1 \times \overline{OQ} = \Omega(a+b)\overline{1}_y \\ \overline{QP} = c\overline{1}_{y_2} = c\left(\cos\beta \overline{1}_y + \sin\beta \overline{1}_z\right) \end{cases}$$

3. Déterminer **l'accélération du point *P*** quand $\beta = 90°$

$$\overline{a}_P = \left.\frac{d\overline{v}_P}{dt}\right|_{R1} + \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{v}_P = \left[\Omega c \sin\beta\omega_0 \overline{1}_x - \omega_0^2 c\cos\beta\overline{1}_y - \omega_0^2 c\sin\beta\overline{1}_z\right] - \Omega\Omega c\cos\beta\overline{1}_y - \Omega\left(\Omega\left(a+b\right) - \omega_0 c\sin\beta\right)\overline{1}_x$$

$$=> \overline{a}_P = \left[2\Omega c\sin\beta\omega_0 - \Omega^2\left(a+b\right)\right]\overline{1}_x - \left[\omega_0^2 c\cos\beta + \Omega^2 c\cos\beta\right]\overline{1}_y - \omega_0^2 c\sin\beta\overline{1}_z$$

ou

$$\overline{a}_P = \overline{a}_Q + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{QP} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_2 \times \overline{QP}$$

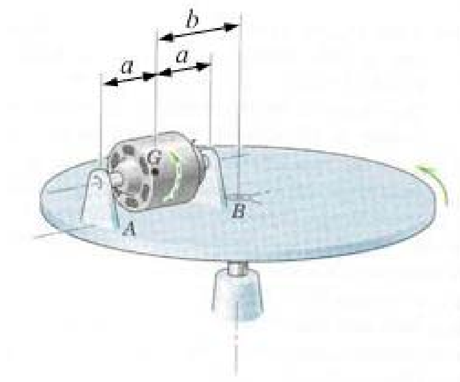
$$\overline{a}_P = \left[-\Omega^2\left(a+b\right)\overline{1}_x\right] + \left[\omega_0\Omega c\sin\beta\overline{1}_x\right] + \left[-\Omega^2 c\cos\beta\overline{1}_y + \left(\Omega\left(\omega_0 c\sin\beta\right)\overline{1}_x + \omega_0\left(-\omega_0 c\sin\beta\right)\overline{1}_z\right) - \omega_0{}^2 c\cos\beta\overline{1}_y\right]$$

$$=> \overline{a}_P = \left[2\omega_0\Omega c\sin\beta - \Omega^2\left(a+b\right)\right]\overline{1}_x - \left[\Omega^2 c\cos\beta + \omega_0{}^2 c\cos\beta\right]\overline{1}_y - \left[\omega_0{}^2 c\sin\beta\right]\overline{1}_z$$

avec $\overline{a}_Q = \overline{a}_O + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OQ} + \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_1 \times \overline{OQ} = -\Omega^2\left(a+b\right)\overline{1}_x$ où $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{a}_O = 0$

$$=> \left.\overline{a}_P\right|_{\beta=90°} = \left[2\omega_0\Omega c - \Omega^2\left(a+b\right)\right]\overline{1}_x - \omega_0{}^2 c\overline{1}_z$$

<u>Question 3</u> : (3 points)



Le moteur électrique a une masse totale de 10 kg et est supporté par deux appuis en *A* et *B* attachés au disque en rotation. (a=120mm, b=180mm)
L'armature du moteur a une masse de 2,5 kg et un rayon de giration de 35 mm. Ce moteur tourne avec une vitesse de 1725 tours par minute dans le sens précisé sur le dessin. Le disque sur lequel le moteur est fixé tourne avec une vitesse constante de 48 tours par minute dans la direction montrée.
Déterminer la composante verticale des forces de réaction sur les appuis A et B.

<u>Rem</u> : Simplifier au maximum l'expression.

1. $$\begin{cases} \bar{\omega} \text{ et } \bar{\Omega} \text{ constant : } \dfrac{d\overline{M}_G}{dt} = 0 = \bar{m}_{e,G} + \bar{C}_g \\ \text{avec } C_g = \left\| \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega} \right\| \text{ avec } m = 2,5kg \;;\; r_g = 0,035m \;;\; \Omega = \dfrac{1725.2.\pi}{60} \;;\omega = \dfrac{48.2.\pi}{60} \\ C_g = 2,5kg.\left(0,035mm\right)^2.\dfrac{1725.2.\pi}{60}.\dfrac{48.2.\pi}{60} = \dfrac{230}{1000^2}.35^2.\pi^2 \\ \Rightarrow 0 = aR_A - aR_B + mr_g^2\Omega\omega \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \left.\dfrac{d\bar{R}}{dt}\right|_z = 0 = R_A + R_B - Mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\left(Mg - R_B\right) - aR_B + mr_g^2\Omega\omega = 0$$

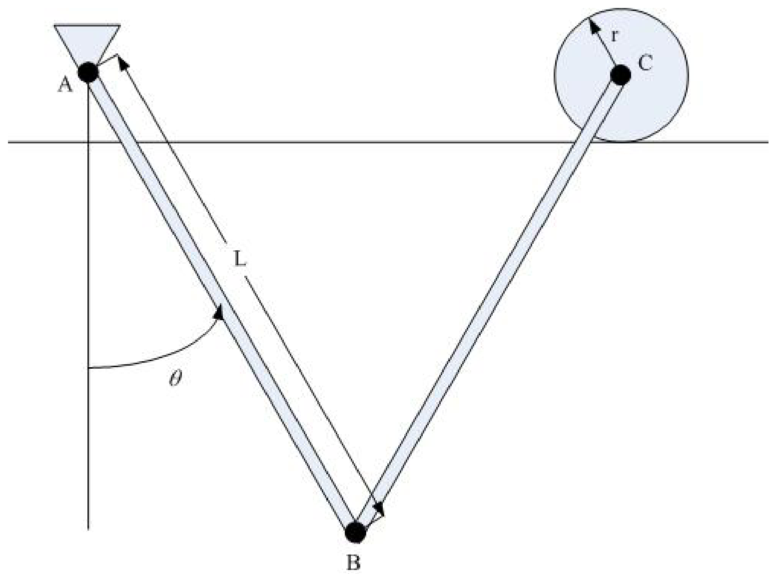
$$\Rightarrow \begin{cases} R_B = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{mr_g^2\Omega\omega}{2a} = 5.9,81 + \dfrac{35^2.\pi^2}{1000}.\dfrac{23}{24} = 5.9,81 + \dfrac{49.23.\pi^2}{40.24} \\ R_A = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{mr_g^2\Omega\omega}{2a} = 5.9,81 - \dfrac{35^2.\pi^2}{1000}.\dfrac{23}{24} = 5.9,81 - \dfrac{49.23.\pi^2}{40.24} \end{cases}$$

<u>Question 4</u> : Système bielle-manivelle + disque soumis à la gravité (4 points)

Le système comporte deux barres AB et BC homogènes identiques de masse m et longueur L et un disque homogène de masse m et de rayon r. Les barres sont articulées en A, B et C grâce à des liaisons rotoïdes parfaites. Le coefficient de frottement entre le sol horizontal et le disque est supposé suffisant pour éviter tout glissement. θ représente l'angle que fait la direction verticale avec la barre AB. α est l'angle caractérisant la rotation du disque.

On demande :

1. de déterminer sur le dessin le CIR de la barre BC.



2. d'établir l'(les) équation(s) du mouvement (en fonction des paramètres de l'énoncé) par le théorème de Lagrange en prenant comme coordonnées généralisées α et θ.

relation entre θ et α $\left(x = \mathrm{AC} = 2L\sin\theta\right)$: $\dot{x} = r\dot{\alpha} = 2L\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_1\left(2L\cos\theta\delta\theta - r\delta\alpha = 0\right)$

$$\overline{OG_2} = \frac{3L}{2}\sin\theta\,\overline{1}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\,\overline{1}_y$$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{m}{2}\left(\frac{9L^2}{4}\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{\dot{x}=r\dot{\alpha}}$$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{m}{2}2L^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right] + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2$$

$$V = -2.\left(mg\frac{L}{2}\cos\theta\right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mL^2\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2 + mgL\cos\theta$$

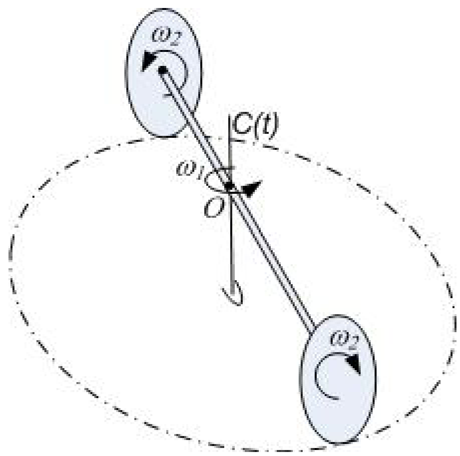
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial\alpha} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_\alpha}{\partial\alpha} \Rightarrow \dfrac{3}{2}mr^2\ddot{\alpha} = -\lambda_1 r \Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{3}{2}mr\ddot{\alpha} = -\dfrac{3}{2}m\left(-2L\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2L\cos\theta\ddot{\theta}\right) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda_1\dfrac{\partial\phi_\theta}{\partial\theta} \Rightarrow \dfrac{8mL^2}{12}\ddot{\theta} + 2mL^2\cos^2\theta\ddot{\theta} - 4mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + mgL\sin\theta = \lambda_1 2L\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \sin 2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta = \left(3\sin 2\theta\dot{\theta}^2 - 6\cos^2\theta\ddot{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{2}{3} + 8\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - 4\sin 2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

Question 5 : Essieu (3 points)

On considère le système matériel constitué d'une tige rigide horizontale, de longueur 2*L* et de masse *m*, à répartition de masse uniforme, équipée, à chacune de ses extrémités (et orthogonal à la tige), d'une roue cylindrique verticale, de masse *M* et de rayon *R*, libre de tourner autour de son axe coïncidant avec la tige (voir la figure). Les roues sont modélisées comme des disques, c.-à-d. des figures planes.
Les roues parcourent une circonférence de rayon 2*L*, ce qui signifie que le point milieu de la tige est fixe ; de plus, les 2 roues roulent sans glisser sur le sol. On exerce sur la tige un couple pur de valeur *C*(*t*), d'axe vertical. La fonction *C(t)* est donc supposée connue.



Choisissez les **coordonnées généralisées**. Y a-t-il une relation liant ces coordonnées et leur dérivée ? Déduisez-en le nombre de **degrés de liberté** du système.

Angle caractérisant la rotation de la tige
Angle caractérisant la rotation des roues

Vitesse de C_1 (centre du cercle) $\left.\begin{aligned} \overline{v}_{C1\in \text{tige}} &= L\omega_1(\theta)\overline{1}_\theta \\ \overline{v}_{C1\in \text{roue}} &= R\omega_2(\varphi)\overline{1}_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{L}{R}\omega_1}$

=> 1 ddl.

Déterminer la (ou les) **équation(s) différentielle(s)** décrivant l'évolution du système.

$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_{C1\in \text{tige}} &= L\dot{\theta}\overline{1}_{\theta} \\ \overline{v}_{C1\in \text{roue}} &= R\dot{\varphi}\overline{1}_{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{R}\dot{\theta}}$$

$$\begin{cases} R1 \text{ lié à l'axe avec z vertical.} \Rightarrow \overline{\omega}_{R1/R0} = \overline{\omega}_1 = \dot{\theta}\overline{1}_z \\ R2 \text{ lié à la roue 1} \Rightarrow \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_2 = \dot{\theta}\overline{1}_z + \dot{\varphi}\overline{1}_x \\ R3 \text{ lié à la roue 2} \Rightarrow \overline{\omega}_{R3/R0} = \overline{\omega}_3 = \dot{\theta}\overline{1}_z - \dot{\varphi}\overline{1}_x \end{cases}$$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{m(2L)^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{axe} + 2\left[\frac{ML^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2\right)\right]_{roue1\left(\dot{\varphi}=\frac{L}{R}\dot{\theta}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}L^2 + 3ML^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$V = 0$ (potentiel constant)

$L = T$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta} : \left(\frac{m}{3}L^2 + 3ML^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\ddot{\theta} = C(t)$$

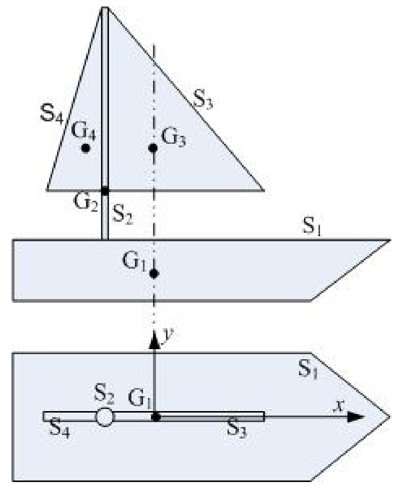
<u>Question 6</u> : Bateau (3 points)

Un bateau est modélisé sur la figure ci-contre.
En supposant que chaque solide S_i est caractérisé par sa masse m_i, la position de son centre de masse G_i ainsi que d'une matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_{G_i}$, déterminer tout ce que vous pouvez déduire du système sans faire de calculs pour identifier les éléments d'inertie.

$\overline{OG_i} = \left(a_i, b_i, c_i\right)$

$$\overline{\overline{I}}_{G_1(S1)} = \begin{pmatrix} A_1 & -D_1 & -E_1 \\ -D_1 & B_1 & -F_1 \\ -E_1 & -F_1 & C_1 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\overline{I}}_{G_2(S2)} = \begin{pmatrix} A_2 & -D_2 & -E_2 \\ -D_2 & B_2 & -F_2 \\ -E_2 & -F_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{I}}_{G_2(S3)} = \begin{pmatrix} A_3 & -D_3 & -E_3 \\ -D_3 & B_3 & -F_3 \\ -E_3 & -F_3 & C_3 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\overline{I}}_{G_2(S_4)} = \begin{pmatrix} A_4 & -D_4 & -E_4 \\ -D_4 & B_4 & -F_4 \\ -E_4 & -F_4 & C_4 \end{pmatrix}$$



(mat=tige ; voiles=triangles)

$S1$: grâce à la symétrie du domaine d'intégration suivant l'axe y : $D_1 = F_1 = 0$

$S2$: le mat est suivant z_2 => le domaine d'intégration unidimensionnel est suivant cet axe $(0, 0, z_2)$

=> $C_2 = D_2 = E_2 = F_2 = 0$; $A_2 = B_2$

S3: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe y_3 (pas d'épaisseur)

Pb en 2D => $B_3 = A_3 + C_3$; $D_3 = F_3 = 0$

$S4$: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe y_3 (pas d'épaisseur)

Pb en 2D => $B_4 = A_4 + C_4$; $D_4 = F_4 = 0$

Déterminer chacun des éléments de **la matrice d'inertie** du système complet évalué en **G1**.

$$\overline{G_2G_1} = (a_1 - a_2, 0, c_1 - c_2)$$

$$\overline{\overline{I}}_{G1(S2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} (c_1-c_2)^2 & 0 & -(a_1-a_2)(c_1-c_2) \\ 0 & (a_1-a_2)^2+(c_1-c_2)^2 & 0 \\ -(a_1-a_2)(c_1-c_2) & 0 & (a_1-a_2)^2 \end{pmatrix}$$

$\overline{G_3G_2} = (a_2 - a_3, 0, c_2 - c_3)$ et $\overline{G_3G_1} = (0, 0, c_1 - c_3)$

$$\overline{\overline{I}}_{G_3(S3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & A_3+C_3 & 0 \\ -E_3 & 0 & C_3 \end{pmatrix} - m_3 \begin{pmatrix} (c_2-c_3)^2 & 0 & -(a_2-a_3)(c_2-c_3) \\ 0 & (a_2-a_3)^2+(c_2-c_3)^2 & 0 \\ -(a_2-a_3)(c_2-c_3) & 0 & (a_2-a_3)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_{G_1(S3)} = \overline{\overline{I}}_{G_3(S3)} + m_3 \begin{pmatrix} (c_1-c_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (c_1-c_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = [A_1] + \left[A_2 + m_2(c_1-c_2)^2\right] + \left[A_3 - m_3(c_3-c_2)^2 + m_3(c_3-c_1)^2\right] \\ B = [B_1] + \left[A_2 + m_2\left((a_1-a_2)^2+(c_1-c_2)^2\right)\right] + \left[(A_3+C_3) - m_3\left((a_2-a_3)^2+(c_2-c_3)^2\right) + m_3(c_1-c_3)^2\right] \\ C = [C_1] + \left[0 + m_2(a_1-a_2)^2\right] + \left[C_3 - m_3(a_2-a_3)^2\right] \\ D = [0] + [0+0] + [0+0] = 0 \\ E = [E_1] + \left[0 + m_2(a_1-a_2)(c_1-c_2)\right] + \left[E_3 - m_3(a_2-a_3)(c_2-c_3)\right] \\ F = [0] + [0+0] + [0+0] = 0 \end{cases}$$

BROUILLON

BROUILLON