Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2004-2005
Corrigé de la séance 10

La répartition des TP matlab est affichée aux valves. Veuillez signaler tout problème par rapport à cet horaire.

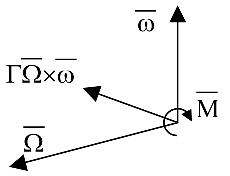
Couple gyroscopique :

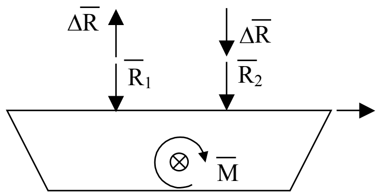
$$\frac{d}{dt}\overline{M}_O = \sum \overline{m}_{e,O} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O = \underbrace{\overline{M}_{O,0}}_{\Sigma\ (\Omega=0)} + \underbrace{\overline{M}_{gyr}}_{Gyrostat}$$

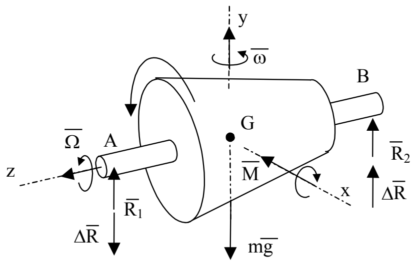
$$\frac{d\overline{M}_{gyr}}{dt} = \Gamma \underbrace{\left.\frac{d\overline{\Omega}}{dt}\right|_{xyz,rel}}_{=0} + \overline{\omega}\times\overline{M}_{gyr} = \sum \overline{m}_{e,O}$$

$$=> \frac{d\overline{M}_{O,0}}{dt} = \sum \overline{m}_{e,O} + \underbrace{\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}}_{\text{couple gyroscopique}}$$

1.

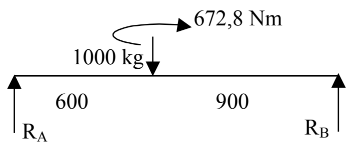






$M = \Gamma\Omega\omega$ où $\Gamma = mR^2 = 40$ kgm²; $\Omega = 523,6\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = \frac{v}{R} = 0,032125\ \mathrm{s}^{-1}$

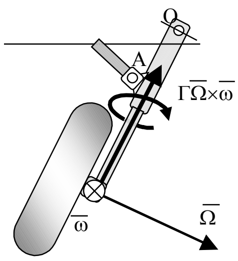
=> $M = 672,8\ Nm$ tend à faire descendre l'avant du bateau.



$$\left.\begin{aligned} &0,6R_A + 672,8 - 0,9R_B = 0 \\ &R_A + R_B = 9810 \end{aligned}\right\} => R_A = 5437 \quad \text{et} \quad R_B = 4372$$

La réaction en B est plus élevée que si le rotor était à l'arrêt.

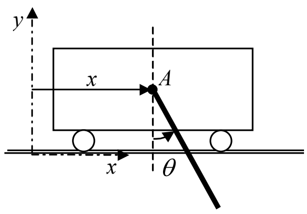
2.



L'axe OA subit un moment de torsion de $\Gamma\Omega\omega$ où Γ=2,97 kgm² ; Ω= 148,15 s^{-1} ; ω= 0,5 s^{-1} => C = 220 Nm

Modélisation sur le site : http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/more.html dans les compléments TP.

3.a



$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = \dot{x}\overline{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y\right)$$

équation du mouvement = Lagrange

$$T = T_{chariot} + T_{Tige}$$

$$T = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot} + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige}$$

$$V = C - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$=> L = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta - C$$

Deux paramètres (indépendants) de position = 2 coordonnées généralisées :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ : \ (M+m)\ddot{x} + \dfrac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = 0 \ (1) = th\ \bar{R}\big|_x \text{ (barre+chariot)} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \left(\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x} - \dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}\right) - \left(-\dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} - mg\dfrac{L}{2}\sin\theta\right) = 0 \ (2) \\ (2) = th\ \bar{M}_A\big|_z \text{ (barre)} \end{cases}$$

$$(1) : \ddot{x} = -\frac{m}{M+m}\left(\frac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right) \quad (3)$$

$$(1) -> (2) : \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{m}{2}L\cos\theta\frac{m}{M+m}\left(\frac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right)\right) + mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

$$=> \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta} - \frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\sin\theta = 0$$

3.b <u>Théorème de la résultante cinétique sur la tige</u> : $\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \sum F_e$

$$\bar{v}_G = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AG} = \dot{x}\bar{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\bar{1}_x + \sin\theta\bar{1}_y\right)$$

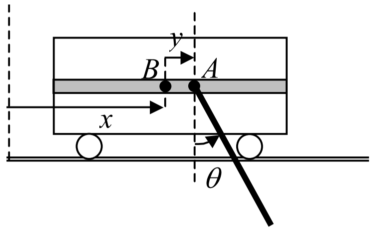
$$m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\bar{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\bar{1}_y = X_A\bar{1}_y + \left(-mg + Y_A\right)\bar{1}_y$$

$$=> \begin{cases} X_A = m\left(\ddot{x} + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad (4) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \quad (5) \end{cases} => (3) -> (4) \begin{cases} X_A = \dfrac{mM}{M+m}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}$$

Le théorème de la résultante cinétique sur le chariot donne directement : $M\ddot{x} = -X_A$ que l'on peut remplacer dans l'équation 4, donc sans utiliser le théorème de Lagrange pour trouver les équations du mouvement.

3.c En ajoutant la coordonnée y, on peut décrire complètement le système.
S'il n'y a pas de frottement, la tige va osciller sur le rail sans entraîner le chariot avec elle.
Les équations de mouvement sont identiques en supprimant le *M* du chariot et en remplaçant la variable *x* donnant le mouvement du chariot, par la variable *y* donnant la position <u>relative</u> de *A*.

3.d.



Le théorème de Lagrange nous donnera une équation supplémentaire. (notation * = valeurs trouvées au 4.a)

$$\bar{v}_G = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AG} = \left(\dot{x} + \dot{y}\right)\bar{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\bar{1}_x + \sin\theta\bar{1}_y\right) = \bar{v}_G * + \dot{y}\bar{1}_x$$

Système={chariot+tige}

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$=> T = T* + \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}L\dot{\theta}\cos\theta\right) \quad \text{et} \quad V = V*$$

Toutes les forces ne dérivent pas d'un potentiel (en particulier la force de frottement X_A) donc nous allons utiliser le 2ième théorème de Lagrange :

La force de frottement ne travaille que pour un déplacement y :

$$\begin{cases} \overline{OA} = (y)\overline{1}_x + (c)\overline{1}_y \Rightarrow \delta\overline{\mathrm{OA}} = (\delta y)\overline{1}_x + (0)\overline{1}_y = \delta y\overline{1}_x = \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y}\delta y \\ \Rightarrow \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y} = \overline{1}_x \; ; \; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_x} = 0 \; ; \; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_\theta} = 0 \\ \text{Force en } A : (-X_A, Y_A, O) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{OG}} = \left(x + y + \dfrac{L}{2}\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(c - \dfrac{L}{2}\cos\theta\right)\overline{1}_y \Rightarrow \delta\overline{\mathrm{OG}} = \left(\delta x + \delta y + \dfrac{L}{2}\cos\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x + \left(\dfrac{L}{2}\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_y \\ \delta\overline{\mathrm{OG}} == \delta x\overline{1}_x + \delta y\overline{1}_x + \left(\dfrac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_x + \dfrac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_y\right)\delta\theta = \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_x}\delta x + \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y}\delta y + \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_\theta}\delta\theta \\ \Rightarrow \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y} = \overline{1}_x \; ; \; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_x} = \overline{1}_x \; ; \; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_\theta} = \dfrac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_x + \dfrac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_y \\ \text{Force en G} : (0, -mg, 0) \end{cases}$$

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$Q_x = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_x} = 0$$

$$Q_y = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y} = \left(-X_A\overline{1}_x\right).\overline{1}_x = -X_A$$

$$T = \left(\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{3mL^2}{2}\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{y} + \frac{m}{2}(\dot{x}+\dot{y})L\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta \; : (1) = th\; \overline{M}_A\Big|_z \text{ (barre)} \\ \dfrac{L^2}{3}m\ddot{\theta} + \dfrac{mL}{2}\cos\theta(\ddot{x}+\ddot{y}) - \dfrac{mL}{2}\sin\theta(\dot{x}+\dot{y}) + \dfrac{mL}{2}\sin\theta(\dot{x}+\dot{y}) = -\dfrac{L}{2}mg\sin\theta \quad (1) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \; : \; (M+m)\ddot{x} + m\ddot{y} + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0 \quad (2) = th\; \overline{R}\Big|_x \text{ (barre+chariot)} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{y}} - \dfrac{\partial T}{\partial y} = Q_y \; : \; m(\ddot{x}+\ddot{y}) + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 = -X_A \quad (3) = th\; \overline{R}\Big|_x \text{ (barre)} \end{cases}$$

$$(2)-(3) : \; M\ddot{x} + \frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} + \frac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 + X_A = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{X_A}{M} \quad (4) \quad = th\; \overline{R}\Big|_x \text{ (chariot)}$$

$$(4) \to (1) : \; \frac{L^2}{3}m\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\cos\theta m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{L}{2}mg\sin\theta$$

$$\text{avec } (2) : \; \frac{L^2}{3}m\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\cos\theta\left(-\frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} + \frac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 - X_A\right) = -\frac{L}{2}mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow X_A = -m\left(g\tan\theta + \frac{2L}{3}\ddot{\theta}\frac{1}{\cos\theta} + \frac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right)$$

Système={tige}

$$T=\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{m}{2}\dot{y}^2+\frac{3mL^2}{2}\dot{\theta}^2+m\dot{x}\dot{y}+\frac{m}{2}(\dot{x}+\dot{y})L\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\dfrac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta \ : \ (1)=th\ \overline{M}_A\big|_z \text{ (barre)}\\ \qquad \dfrac{L^2}{3}m\ddot{\theta}+\dfrac{mL}{2}\cos\theta(\ddot{x}+\ddot{y})-\dfrac{mL}{2}\sin\theta(\dot{x}+\dot{y})+\dfrac{mL}{2}\sin\theta(\dot{x}+\dot{y})=-\dfrac{L}{2}mg\sin\theta \quad (5)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\dfrac{\partial T}{\partial x}=Q_x \ : \ m\ddot{x}+m\ddot{y}+\dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta}-\dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2=-X_A \quad (6)=th\ \overline{R}\big|_x \text{ (barre)}\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\dfrac{\partial T}{\partial y}=Q_y \ : \ m(\ddot{x}+\ddot{y})+\dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta}-\dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2=-X_A \quad (7)=th\ \overline{R}\big|_x \text{ (barre)}\end{cases}$$

Système={chariot}

$$T=\frac{M}{2}\dot{x}^2;\ V=0\ :\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x \Rightarrow M\ddot{x}=X_A \quad (8)$$

Théorème de la résultante cinétique sur la tige : $\dfrac{d\overline{R}}{dt}=\sum F_e$

$$\left(m\ddot{x}+m\ddot{y}+m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x+\left(m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y=-X_A\overline{1}_y+(-mg+Y_A)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X_A=-m\ddot{x}-m\ddot{y}-m\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta+m\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta=M\ddot{x}\\ Y_A=m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)+mg\end{cases}$$

On peut chercher $\ddot{y}(X_A)$

$$(3)+(4):\ddot{y}=-g\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\frac{2L}{3}\ddot{\theta}-\frac{X_A}{M}$$

et $\ddot{x}(X_A)=\dfrac{X_A}{M}$ à remplacer dans X_A

$$\boxed{\Rightarrow\begin{cases}X_A=m\left(+\left(\dfrac{L}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{2L}{3}\right)\ddot{\theta}-\dfrac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2-g\tan\theta\right)\\ Y_A=m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)+mg\end{cases}}$$

---

4. 2 paramètre de position dépendant : $\pi-\theta=2\varphi$

$$\overline{v}_{G_1}=-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_{G_2}=\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AG_2}=-L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x-L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y+L\cos\varphi\dot{\varphi}\overline{1}_y-L\sin\varphi\dot{\varphi}\overline{1}_x$$

En tenant compte de la condition $\pi-\theta=2\varphi:\underline{\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}}$ et $\dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\theta}}{2}$

$$\Rightarrow\overline{v}_{G_2}=\left(-L\sin\theta\dot{\theta}+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_x+\left(-L\cos\theta\dot{\theta}-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_y$$

$$T=\frac{1}{2}\overline{\omega}\overline{\overline{I}}_O\overline{\omega}+\frac{1}{2}mv_{G_2}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}\overline{\overline{I}}_{G_2}\overline{\omega}$$

$$T=\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}2m\left(L^2\dot{\theta}^2+L^2\frac{\dot{\theta}^2}{2}-L^2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2+L^2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\right)+\underline{\frac{1}{2}\frac{2m4L^2}{12}\left(-\frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2}$$

$$T=ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{\underline{4}}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Par le potentiel :

$$V_{OA} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$V_{AB} = 2mg\left(-L\sin\theta + L\sin\varphi\right) = 2mg\left(-L\sin\theta + L\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Le couple est constant donc il dérive d'un potentiel : $V(\Gamma)$

Comme l'angle φ diminue lorsque le moment Γ travail,

le travail est négatif. $\mathrm{d}\theta = -2\mathrm{d}\varphi \Rightarrow \mathrm{d}V = -\Gamma\frac{d\theta}{2}$

$$dV = -d\tau = -(M(\varphi)d\varphi) = -(-\Gamma d\varphi) = -(\Gamma\frac{d\theta}{2})$$

$$\Rightarrow V = -mgl\left(\frac{5}{2}\sin\theta - 2\cos\frac{\theta}{2}\right) - \Gamma\frac{\theta}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\frac{3}{2}\ddot\theta - 2ml^2\ddot\theta\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2} - \frac{5}{2}mgl\cos\theta - mgl\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\Gamma}{2} = 0$$

Par les Q_i :

Sur base de $\overline{v}_{G_1}$: $\delta\overline{OG_1} = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\overline{1}_y - \frac{L}{2}\cos\theta\overline{1}_y\right)\delta\theta$

Sur base de $\overline{v}_{G_2}$: $\delta\overline{OG_2} = \left(-L\sin\theta + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\overline{1}_x + \left(-L\cos\theta - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\overline{1}_x$

le travail du couple : $\delta\tau = -\Gamma\delta\varphi$ avec $\mathrm{d}\theta = -2\mathrm{d}\varphi \Rightarrow \delta\tau = -\Gamma\delta\varphi = \Gamma\frac{\delta\theta}{2}$

$$Q_\theta = \sum_h \overline{F}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_y} = (-mg).\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\right) + (-2mg).\left(-L\cos\theta - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right) + \Gamma\frac{\delta\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta : ml^2\frac{3}{2}\ddot\theta - 2ml^2\ddot\theta\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{2}mgl\cos\theta + mgl\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\Gamma}{2}$$

Le point C est au niveau de la glissière

<u>R_C (1 composante inconnue)</u> : Th. mom. cinétique en O pour l'ensemble du système

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{O,OA} + \overline{M}_{O,AB}$$

$$\overline{M}_{O,OA} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = -\frac{mL^2}{3}\dot\theta\overline{1}_z \ ;$$

$$\overline{M}_{O,AB} = \overline{M}_{G_2,AB} + \overline{OG_2}\times\overline{R} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12}\dot\varphi - 2m\left(\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(L\cos\theta + L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot\theta \\ -\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot\theta \end{bmatrix}\overline{1}_z$$

$$\left[\frac{mL^2}{12}\dot\varphi + 2m\begin{pmatrix} -\cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ -\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}L^2\dot\theta\right]\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \overline{M}_{O,AB} = \left[-\frac{mL^2}{12}\frac{\dot\theta}{2} + 2m\left(-1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)L^2\dot\theta\right]\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_O = \left[-\frac{9}{24} + 2\left(-1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\right]mL^2\dot\theta\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_O = m\left[-\frac{9}{24}+\left(-1+\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\right]L^2\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_O = 0 \text{ donc } \frac{d\overline{M}_O}{dt}=\overline{m}_{e,O} \;= -\Gamma + LR_c\cos\varphi - \frac{L}{2}\cos\theta mg - \left(L\cos\theta + L\cos\varphi\right)2mg$$

$$m\left[-\frac{33}{24}+\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right]L^2\ddot{\theta} + m\left[\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]L^2\dot{\theta}^2 = -\Gamma + LR_c\cos\varphi - \left(\frac{5}{2}\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}2\right)Lmg$$

=> R_C

Autre possibilité : Th. mom. cinétique en A pour la tige AB seule.

<u>R_O (2 composantes inconnues)</u> : Th. rés. cinétique et connaissant R_C

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\overline{F}_e$$

$$\overline{R} = m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y\right] + 2m\left[\left(-L\sin\theta\dot{\theta} + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_x + \left(-L\cos\theta\dot{\theta} - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\overline{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x + 2m\left(-L\sin\theta\dot{\theta}+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt} = R_{O,x} - R_C\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,x}$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + 2m\left(-L\cos\theta\dot{\theta}-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt} = R_{O,y} - mg - 2mg + R_C\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow R_{O,y}$$

<u>R_A (2 composantes inconnues)</u> : Th. rés. cinétique pour OA seule (avec R_O connue)

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\overline{F}_e \text{ avec } \overline{R} = m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_x - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x\right)}{dt} = R_{O,x}+R_{A,x} \Rightarrow R_{A,x} \quad \text{et} \quad \frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)}{dt} = R_{O,y}+R_{A,y}-mg \Rightarrow R_{A,y}$$

ex4seance11.zip

---

5. Coordonnée de Lagrange : θ_1,θ_2 liées par la condition (avec u suivant BC et v perpendiculaire à BC)

$$\overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BC} = \lambda\overline{BC} = L\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\overline{1}_u + \left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + L\dot{\theta}_2\right)\overline{1}_v$$

$$\Rightarrow L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + L\dot{\theta}_2 = 0 \text{ ou } \delta\theta_2 + \cos(\theta_2-\theta_1)\delta\theta_1 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta_1} = Q_{\theta_1} + \lambda\cos(\theta_2-\theta_1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta_2} = Q_{\theta_2} + \lambda \\ L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + L\dot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

$$T=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^{2}+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}\right)$$

$$T=\left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\left(\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_2^{\,2}+L^2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_2^{\,2}\right)$$

$$=> T=\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}_2^{\,2}+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\left.\overline{OG_1}\right|_y=\frac{L}{2}\cos\theta_1 => \left.\delta\overline{OG_1}\right|_y=-\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 \text{ et } \overline{F}_{G_1}=mg\overline{1}_y$$

$$\left.\overline{OG_2}\right|_y=L\cos\theta_1+\frac{L}{2}\cos\theta_2 => \left.\delta\overline{OG_2}\right|_y=-L\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2 \text{ et } \overline{F}_{G_2}=mg\overline{1}_y$$

En tenant compte du couple M appliqué à la barre AB, le travail virtuel du couple pour un déplacement virtuel $\delta\theta_1$ vaut $M\delta\theta_1$

$$=> \begin{cases} Q_{\theta_1}=mg\overline{1}_y.\left(-\frac{L}{2}\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+mg\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\overline{1}_y\right)=-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M \\ Q_{\theta_2}=mg\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\overline{1}_y\right)=-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$=> T=\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}_2^{\,2}+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$=> T=\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}_2^{\,2}+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4mL^2}{3}\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_2-\frac{mL^2}{2}\underline{\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)}\dot{\theta}_2\right)-\left(+\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \\ \qquad =-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M+\lambda\cos\left(\theta_2-\theta_1\right) \quad (1) \\ \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_1-\frac{mL^2}{2}\underline{\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)}\dot{\theta}_1\right)-\left(-\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \\ \qquad =-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2+\lambda \quad (2) \\ L\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0 \text{ (3)} \;=>\; \cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_1=\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

Nous obtenons un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(2):\left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\frac{L}{2}mg\sin\theta_2=+\lambda$$

$(2)->(1)$:

$$\frac{mL^2}{2}\left(\left(\frac{8}{3}-\cos^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\right)\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\ddot{\theta}_2-\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\dot{\theta}_2^{\,2}+\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\dot{\theta}_1^{\,2}\right)\right)$$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)-3\sin\theta_1\right) \quad (1)$$

et avec (3) :

$$\left[\frac{mL^2}{3}\left(4-\cos^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\right)\right]\ddot{\theta}_1-\left[\frac{mL^2}{3}\frac{\sin 2\left(\theta_2-\theta_1\right)}{2}\left(1+\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)\right)\right]\dot{\theta}_1^{\,2}$$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)-3\sin\theta_1\right)$$

5.2. $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_{\theta_2} \end{cases}$$

$$\delta\overline{OG_1}\Big|_y = -\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 \text{ et } \overline{F}_{G_1} = mg\,\overline{1}_y$$

$$\delta\overline{OG_2}\Big|_y = -L\sin\theta_1\delta\theta_1 - \frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2 \text{ et } \overline{F}_{G_2} = mg\,\overline{1}_y$$

$$L\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\overline{1}_u + \left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + L\dot{\theta}_2\right)\overline{1}_v \Rightarrow \delta\overline{OC}\Big|_{v\perp BC} = L\cos(\theta_2-\theta_1)\delta\theta_1 + L\delta\theta_2 \text{ et } \overline{F}_C = F\,\overline{1}_\perp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{\theta_1} = mg\,\overline{1}_y.\left(-\dfrac{L}{2}\sin\theta_1\,\overline{1}_y\right) + mg\,\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\,\overline{1}_y\right) + F\,\overline{1}_\perp.\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\right) \\ \quad = -\dfrac{3L}{2}mg\sin\theta_1 + FL\cos(\theta_2-\theta_1) \\ Q_{\theta_2} = mg\,\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\,\overline{1}_y\right) + F\,\overline{1}_\perp.(+L) = -\dfrac{L}{2}mg\sin\theta_2 + FL \end{cases}$$

Nous retrouvons les mêmes équations qu'au point (5.1) où λ est remplacé par *FL*.

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html