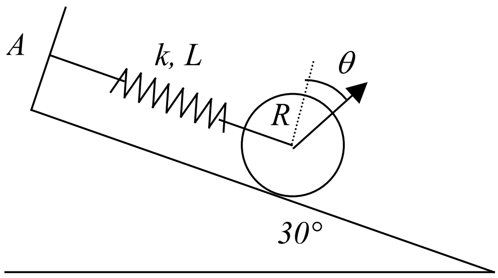
1.



Force en présence

Force du ressort : $\overline{F} = -k\left(x-L\right)\overline{1}_x$

Poids de la roue : $\overline{P} = -mg\left(\sin\alpha\,\overline{1}_x - \cos\alpha\,\overline{1}_z\right)$

Réaction du sol : $\overline{R}_I = -T\,\overline{1}_x + N\,\overline{1}_z$

Système étudié ={masse (m)} :

Théorème de la résultante cinétique :

$\overline{R} = m\dot{x}\,\overline{1}_x$

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_{\overline{1}_x} = \left.\sum\overline{F}_e\right|_{\overline{1}_x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k\left(x-L\right) + mg\sin\alpha - T \quad (1)$$

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_{\overline{1}_z} = \left.\sum\overline{F}_e\right|_{\overline{1}_z} \Rightarrow 0 = -mg\cos\alpha + N \quad (2)$$

Théorème de la résultante cinétique en G :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = m\overline{v_G}\times\overline{v_G} + \sum\overline{m}_{e,G} = \sum\overline{m}_{e,G} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\overline{M_G}\right|_y = \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = RT \quad (3)$$

La condition de roulement sans glissement nous donne :

$$\overline{v}_I = 0 = \overline{v}_G + \overline{\omega}\times\overline{GI} \Rightarrow \dot{x}\,\overline{1}_x + \dot{\theta}\,\overline{1}_y\times\left(-R\,\overline{1}_z\right) \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$(4)\to(3) : \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}}{R} = RT \Rightarrow T = \frac{m}{2}\ddot{x} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} (5)\to(1) : \ & m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{m}{2}\ddot{x} - k\left(x-L\right) \\ & \frac{3m}{2}\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\left(x-L\right) \\ & \ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2g}{3}\sin\alpha + \frac{2k}{3m}L \quad (4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Solution de l'équation différentielle non homogène

$$\text{SP} : x(t) = L + \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

$$\text{SGENH} : x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

A et B seront fixé par les conditions initiales et la pulsation est $\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

Une autre méthode pouvait être utilisée : Le théorème du moment cinétique calculé en I.

Dans ce cas, seules les forces de pesanteur et de rappel vont intervenir. Donc on va bien obtenir directement l'équation de mouvement sans inconnue (réactions de liaison).

$$\frac{d}{dt}\overline{M_I} = \sum\overline{m}_{e,I} \quad \text{où} \quad \overline{M_I} = \overline{\overline{I}}_I.\overline{\omega} = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\dot{\theta}\,\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\overline{M_G}\right|_y = \frac{3MR^2}{2}\ddot{\theta} \underset{\ddot{x}=R\ddot{\theta}}{=} \frac{3MR}{2}\ddot{x} = -Rk\left(x-L\right) + Rmg\sin\alpha \quad (=4)$$

L'énergie cinétique est donnée par : $T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2\underbrace{=}_{\dot{x}=R\dot{\theta}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{m}{4}\dot{x}^2=\frac{3}{4}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle : $V=\frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2-mgx\sin\alpha$ avec le point A comme référence.

La force de frottement ne dérive pas d'un potentiel, mais sa puissance est nulle car il y a roulement sans glissement, la vitesse du point matériel sur lequel s'applique cette force est nulle.

L'énergie s'écrit donc : E=$T+V=\frac{3}{4}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2-mgx\sin\alpha$

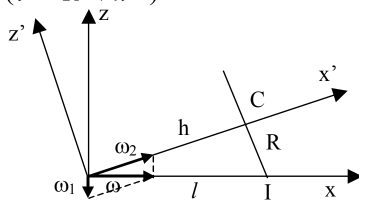
$\dot{E}=\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x}+k\left(x-L\right)\dot{x}-mg\dot{x}\sin\alpha=\left(\frac{3}{2}m\ddot{x}+k\left(x-L\right)-mg\sin\alpha\right)\dot{x}=0$ par la relation (4)

L'énergie mécanique totale est donc conservée.

---

2. Considérons les axes Ox'y'z' attaché au centre du disque tournant autour de l'axe z.

($l^2=R^2+h^2$)



Théorème de la résultante cinétique :

Les forces extérieures :

Réaction en I du sol sur le disque : $R_I\left(R_{Ix},R_{Iy},R_{Iz}\right)$

Réaction en O du sol sur la tige : $R_O\left(R_{Ox},R_{Oy},R_{Oz}\right)$

$\bar{R}=-mh\cos\alpha\omega_1\bar{1}_{y'}$

$\left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z$ => $0=R_{Oz}+R_{Iz}-mg$

Le théorème du moment cinétique en O :

$\left(\frac{d}{dt}\bar{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},O}\right)_y$ => $\left(\frac{d}{dt}\bar{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}\right)_y=mg\frac{h^2}{l}-lR_{Iz}$

$$\bar{M}_O=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{x'}\\0\\-\omega_{z'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\omega\cos\alpha\\0\\-B\omega\sin\alpha\end{pmatrix}=\frac{mR^2}{2}\omega\cos\alpha\bar{1}_{x'}+\left(\frac{mR^2}{4}+mh^2\right)\left(-\omega\sin\alpha\right)\bar{1}_{z'}$$

$$où\ A=\frac{MR^2}{2};\ B=\underbrace{I_{tige}}_{=0(m=0)}+\underbrace{I_{disque}}_{=I_{diamètre}+M\left\|\overline{OC}\right\|^2}=m\frac{R^2}{4}+mh^2$$

Rem : le vecteur de Darboux à utiliser pour dériver les axes du repère : $-\omega_1\ 1_z$

$$\left(\frac{d\bar{M}_O}{dt}\right)=M_{Ox'}.\left(-\omega_1\bar{1}_z\times\bar{1}_{x'}\right)+M_{Oz'}.\left(-\omega_1\bar{1}_z\times\bar{1}_{z'}\right)=\omega_1\sin\alpha M_{Oz'}-\omega_1\cos\alpha M_{Ox'}\quad\text{avec}\quad tg\alpha=\frac{\omega_1}{\omega}$$

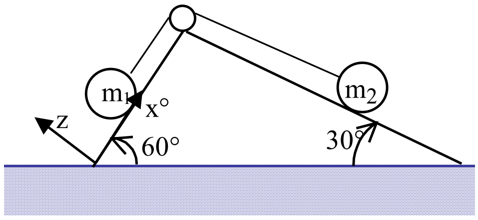
$$\left(\frac{d\bar{M}_O}{dt}\right)=\omega\sin\alpha\left(tg\alpha M_{Oz'}-M_{Ox'}\right)=-m\omega^2\frac{R^3}{hl^2}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)$$

$$R_{Iz}=mg\frac{h^2}{l^2}-m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)\quad\text{et}\quad R_{Oz}=mg-\left(mg\frac{h^2}{l^2}-m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}R_{Iz}=mg\frac{h^2}{l^2}-m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)>0\quad\text{pas de décollement en I}\\ =>R_{Oz}=mg\left(1-\frac{h^2}{l^2}\right)+m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)\geq0\quad\text{pour garder le contact en O}\end{array}\right\}$$

$$=>\ \omega^2{}_{\lim}=g\frac{lh}{R\left(\frac{3}{2}h^2+\frac{R^2}{4}\right)}$$

3.



dans les axes liés à la pente inclinée à 60 °
(x vers la poulie et z perpendiculaire à la pente)

<u>Le corps m_1, Variable (φ,x)</u>

$$\begin{cases}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_1(F_1,0,0)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_1 g\sin 60, 0, -m_1 g\cos 60)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I1}\left(-T_1,0,N_1\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1 g}{2}\sqrt{3}+F_1-T_1 \quad (1)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_1 g}{2}+N_1 \quad (2)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}_1=RT_1 \quad (3)\end{cases}$$

<u>Le corps m_2, Variable (φ,z)</u>

$$\begin{cases}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de la corde : } \bar{F}_2(0,0,F_2)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-m_2 g\cos 30, 0, -m_2 g\sin 30)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{I2}\left(N_2,0,T_2\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow -m_2\ddot{z}=-\dfrac{m_2 g}{2}+F_2+T_2 \quad (4)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}\sqrt{3}+N_2 \quad (5)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}_2=RT_2 \quad (6)\end{cases}$$

<u>Le corps m , Variable (θ)</u>

$$\begin{cases}\text{Les forces extérieures :}\\ \quad \text{Tension de les cordes : } \bar{F}(-F_1,0,-F_2)\\ \quad \text{Poids : } \bar{P}(-mg\cos 30, 0, -mg\sin 30)\\ \quad \text{Contact : } \bar{R}_{C}\left(X,0,Z\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_x=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_x \Rightarrow 0=-\dfrac{mg}{2}\underline{\sqrt{3}}+X-F_1 \quad (7)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{R}\right)_z=\left(\bar{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}\right)_z \Rightarrow 0=-\dfrac{m_2 g}{2}+Z-F_2 \quad (8)\\ \left(\dfrac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y=\left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \dfrac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=r\left(F_2-F_1\right) \quad (9)\end{cases}$$

Condition de roulement sans glissement : $\dot{x}=R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z}=R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x}=r\dot{\theta}=\dot{z}$ (10)

(10)–>(3) : $T_1=\dfrac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1=\dfrac{m_1}{2}\ddot{x}$; +(1) : $m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1g}{2}\sqrt{3}+F_1-\dfrac{m_1}{2}\ddot{x} \Rightarrow \dfrac{3}{2}m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1g}{2}\sqrt{3}+F_1$ (11)

(10)–>(6) : $T_2=\dfrac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2=\dfrac{m_2}{2}\ddot{z}$; +(4) : $-m_2\ddot{z}=-\dfrac{m_2g}{2}+F_2+\dfrac{m_2}{2}\ddot{z} \Rightarrow \dfrac{3}{2}m_2\ddot{z}=\dfrac{m_2g}{2}-F_2$ (12)

$(11)-(12)$ et $(\ddot{x}=\ddot{z})$: $\dfrac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\dfrac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)+\left(F_1-F_2\right)$ (13)

$\left(F_2-F_1\right)\underset{(9)}{=}\dfrac{mr}{2}\ddot{\theta}\underset{(10)}{=}\dfrac{m}{2}\ddot{x}$ dans (13) => $\dfrac{3}{2}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}=\dfrac{g}{2}\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)-\dfrac{m}{2}\ddot{x}$

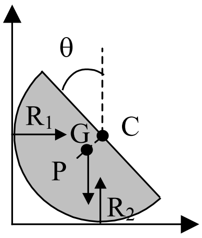
=> Equation du mouvment : $\ddot{x}=\dfrac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$

On trouve donc les tensions dans la corde :

$$F_1=\frac{m_1g}{2}\sqrt{3}+m_1\ddot{x}+T_1\underbrace{=}_{T_1=\frac{m_1}{2}\ddot{x}}\frac{m_1g}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}m_1\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

$$F_2=\frac{m_2g}{2}-m_2\ddot{z}-T_2\underbrace{=}_{T_2=\frac{m_2}{2}\ddot{z}}\frac{m_2g}{2}-\frac{3}{2}m_2\frac{\left(m_2-m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

4.



1ere phase du mouvement : rotation autour de C :

$$\bar{v}_G = \underbrace{\bar{v}_C}_{=0} + \bar{\omega} \times \overline{CG} = \dot{\theta}\bar{1}_z \times \frac{3}{8}R\left(-\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y\right) = \frac{3}{8}R\left(\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x - \cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right)$$

Th. de la résultante cinétique

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\right|_x : m\ddot{x}_G = R_1 \Rightarrow \dfrac{3}{8}mR\left(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right) = R_1 \quad (1) \\ \left.\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\right|_y : m\ddot{y}_G = R_2 - mg \Rightarrow \dfrac{3}{8}mR\left(\sin\theta\dot{\theta}^2 - \cos\theta\ddot{\theta}\right) = R_2 - mg \end{cases}$$

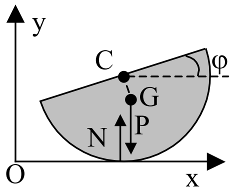
Th du moment cinétique en C

$$\left.\frac{d\bar{M}_C}{dt} = m\bar{v}_G \times \underbrace{\bar{v}_C}_{=0} + \bar{m}_{e,C} = \bar{m}_{e,C}\right|_z : \frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta} = \overline{CG} \times mg = \frac{3}{8}mgR\cos\theta$$

avec $I_{C,z} = \frac{2}{5}mR^2$ (formule de la sphère entière avec la masse de la demi sphère, voir S4E2)

$\Rightarrow$ avec $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$: $\frac{1}{5}mR^2 d\dot{\theta}^2 = \frac{3}{8}mgR\cos\theta d\theta \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{15}{8}\frac{g}{R}\sin\theta$ (2)

(2) –> (1) => $R_1 = \frac{135}{128}mgR\sin\theta\cos\theta$ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ d'où $v_G(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{15gR}{2}}$



2eme phase du mouvement :

Th. résultante cinétique

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\right|_x : m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \dot{x}_G = Const \Rightarrow \dot{x}_G = \dfrac{3}{16}\sqrt{\dfrac{15gR}{2}} \quad (1) \\ \left.\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\right|_y : m\ddot{y}_G = R_2 - mg \end{cases}$$

Conservation de l'énergie

T+V=E$_0$ => $I_G = \frac{2}{5}MR^2 - M\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{320}MR^2$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}^2$$

$V = mgy_G = -mg\frac{3}{8}R\cos\varphi$ avec C comme référence

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}^2 - mg\frac{3}{8}R\cos\varphi = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{G0}^2 + \dot{y}_{G0}^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}_0^2 - mg\frac{3}{8}R$$

avec $\dot{y}_G = \frac{3}{8}R\sin\varphi\dot{\varphi}$; $\dot{y}_{G0} = 0$; $\varphi_0 = 0$; $\dot{\varphi}_0^2 = \frac{15}{8}\frac{g}{R} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = 0$ pour $\cos\varphi = \frac{45}{128}$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux **projets Matlab**, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés disponible sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/teaching/meca2/tps.html