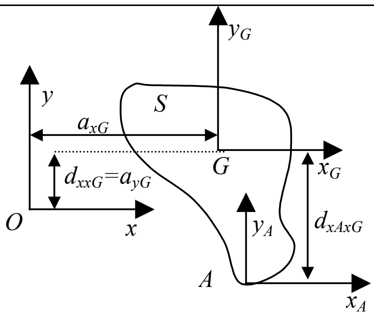
<u>Rappel : Utilisation de la formule de Steiner</u>

Pour calculer le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe x passant par O :

$$I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2$$

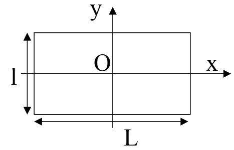
Parfois, il est plus facile de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par G :

$$I_{x_A} = I_{x_G} + m d_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m d_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m\left(d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2\right)$$



1.1

$$I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho \frac{L l^3}{12} = m\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m\frac{L^2}{12}$$



1.2

$$I_x^{(a)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} = \frac{1}{6}\rho a^4 \;;\; I_y^{(a)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(b)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}\rho a^4 \;;\; I_y^{(b)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(c)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)(a)^2\right] = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;\; I_y^{(c)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(d)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2\right]\right) = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;$$

$$I_y^{(d)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\right) = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(e)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4 \;;\; I_y^{(e)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(f)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2\right]\right) = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;\; I_y^{(f)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12}\right) = \frac{1}{6}\rho a^4$$

$$\Rightarrow I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_y^{(a)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)} < I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)}$$

rayons de gyration $\left(m = \rho 2a^2\right)$: $I_x = m r_x^2$

$$I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_y^{(a)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)} = I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)} = I_x^{(c)}$$

$$r_x^{(a)} = r_y^{(f)} = \sqrt{\frac{1}{12}}\,a \;;\; r_x^{(e)} = r_y^{(e)} = r_y^{(a)} = r_x^{(b)} = r_y^{(b)} = \sqrt{\frac{4}{12}}\,a \;;\; r_y^{(d)} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,a \;;\; r_x^{(d)} = r_x^{(f)} = \sqrt{\frac{13}{12}}\,a$$

2.1

cercle : $I_z(\text{cercle}) = \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = M_{Cercle} R^2 = I_x(\text{cercle}) + I_y(\text{cercle})$ en 2D

$I_z(\text{cercle}) = 2 I_x(\text{cercle})$ (par symétrie) $\Rightarrow$ $I_x(\text{cercle}) = \dfrac{M_{Cercle} R^2}{2}$

Par symétrie : $I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle } \cup) + I_x(\text{demi-cercle } \cap)$ $\Rightarrow$ $I_x(\cup) = \dfrac{M_{\mathrm{O}} R^2}{4} = \dfrac{M_{\cup} R^2}{2}$

2.2

Disque : $I_z(\text{Disque O}) = \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r dr d\theta = \rho \dfrac{R^4}{4} 2\pi = \dfrac{M_{Disque} R^2}{2}$

$\underbrace{I_z(\mathrm{O}) =}_{\text{en 2D}} I_x(\mathrm{O}) + I_y(\mathrm{O}) = 2 I_x(\mathrm{O})$ (par symétrie) $\Rightarrow$ $I_x(\mathrm{O}) = \dfrac{M_{\mathrm{O}} R^2}{4}$

Par symétrie : $I_x(\mathrm{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap)$ $\Rightarrow$ $I_x(\cup) = \dfrac{M_{\mathrm{O}} R^2}{8} = \dfrac{M_{\cup} R^2}{4}$

2.3

Sphère : I_z (Sphère O) $= \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm = \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(r\sin\theta\right)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{2}{5} M_{Sphère} R^2$

I_z (Sphère O) $= I_x(\mathrm{O}) + I_y(\mathrm{O}) - 2I_{xy}(\mathrm{O})$

avec $I_{xy}(\mathrm{O}) = \int z^2 dm = \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta\right)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2$

$I_x(\mathrm{O}) = I_y(\mathrm{O})$ (par symétrie) $\Rightarrow I_x(\mathrm{O}) = \frac{I_z(\mathrm{O})}{2} + I_{xy}(\mathrm{O}) = \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2 + \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2 = \frac{2}{5} M_{Sphère} R^2$

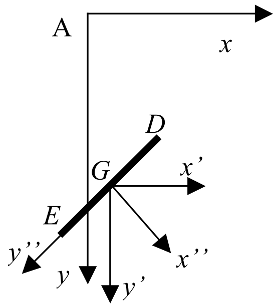
Par symétrie : $I_x(\mathrm{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap) \Rightarrow I_x(\cup) = \frac{M_{Sphère} R^2}{5} = \frac{2M_{\cup} R^2}{5}$

Rappel :

$$P_{xy} = \int xy dm = \int \left(x_G + a_{x_G}\right)\left(y_G + a_{y_G}\right) dm = P_{x_G y_G} + m a_{xx_G} a_{y_G} + a_{x_G} \underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{y_G} \underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

ou $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - M a^x a^y \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + m a_{x_G} a_{y_G}$ avec $x = x_G + a^x$

3.



$I_x(AB) = 0;\ I_y(AB) = \frac{ma^2}{3}$ et $P_{xy}(AB) = 0$

$I_x(BC) = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4};\ I_y(BC) = 0 + ma^2$ et $P_{xy}(BC) = 0 + m.a.\frac{a}{2}$

$I_x(CD) = 0 + 2ma^2;\ I_y(CD) = \frac{2m\left(2a\right)^2}{12}$ et $P_{xy}(CD) = \rho 2a.0.a = 0$

$I_x(DE) = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{3a}{2}\right)^2;\ I_y(DE) = 0 + ma^2$ et $P_{xy}(DE) = \rho a.\frac{3a}{2}.a$

$$\begin{cases} I_{x''}(Tige_{EF}) = \int_{-a}^{+a} \rho y''^2\, dy = \rho \dfrac{2.a^3}{3} \\ I_{x'}(Tige_{EF}) = \int y'^2\, dm = \int \left(y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} + x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dm = \dfrac{I_{x''}(Tige_{EF})}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}(Tige_{EF})}{2}}_{=0} + \underbrace{P_{x''y''}(Tige_{EF})}_{=0} \\ => I_x(Tige_{EF}) = I_{x'}(Tige_{EF}) + \rho 2a\left(2a + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\left(\dfrac{28}{3}a^3 + 4\sqrt{2}a^3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{y'}(Tige_{EF}) = \int x'^2\, dm = \int \left(x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dm = \dfrac{I_{x''}(Tige_{EF})}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}(Tige_{EF})}{2}}_{=0} - \underbrace{P_{x''y''}(Tige_{EF})}_{=0} = \rho\dfrac{a^3}{3} \\ I_y(Tige_{EF}) = I_{y'}(Tige_{EF}) + \rho 2a\left(a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\dfrac{5.a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{x'y'}(Tige_{EF}) = \int \left(x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)\left(y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} + x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right) dm = \dfrac{P_{x''y''}}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}}{2}}_{=0} - \dfrac{I_{x''}}{2} - \dfrac{P_{x''y''}}{2} = -\dfrac{I_{x''}}{2} = -\rho\dfrac{a^3}{3} \\ P_{xy}(Tige_{EF}) = P_{x'y'}(Tige_{EF}) + \rho 2a.\left(2a + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$I_x(AB) = I_x(BC) + I_y(BC) + I_x(CD) + I_x(DE) = \rho a^3\left(15 + 4\sqrt{2}\right)$$

$$I_y(AB) + I_y(BC) + I_y(CD) + I_y(DE) + I_y(EF) = \rho a^3\,\dfrac{7}{6}$$

$$P_{xy}(AB) + P_{xy}(BC) + P_{xy}(CD) + P_{xy}(DE) + P_{xy}(EF) = \rho a^3\left(\dfrac{5}{3} + 2.\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

---

4. Dans les axes liés au disque, nous avons

$$\bar{\bar{I}}_{GXYZ} = \begin{pmatrix} \dfrac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base vaut :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar{1}_x = (1;0;0) = \left(\alpha_1^1;\alpha_2^1;\alpha_3^1\right)$$

$$\bar{1}_y = (0;\cos\alpha;\sin\alpha) = \left(\alpha_1^2;\alpha_2^2;\alpha_3^2\right)$$

$$\bar{1}_z = (0;-\sin\alpha;\cos\alpha) = \left(\alpha_1^3;\alpha_2^3;\alpha_3^3\right)$$

Donc :

$$I'_x = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I^{ij} = \left(\alpha_1^1\right)^2 I_X + \left(\alpha_2^1\right)^2 I_Y + \left(\alpha_3^1\right)^2 I_Z - 2\alpha_1^1\alpha_2^1 P_{XY} - 2\alpha_1^1\alpha_3^1 P_{XZ} - 2\alpha_2^1\alpha_3^1 P_{YZ}$$

$$I'_x = I_X = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'_y = \alpha_i^2\alpha_j^2 I^{ij} = \cos^2\alpha \frac{mR^2}{4} + \sin^2\alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4}\left(1+\sin^2\alpha\right)$$

$$I'_z = \alpha_i^3\alpha_j^3 I^{ij} = \sin^2\alpha \frac{mR^2}{4} + \cos^2\alpha \frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4}\left(1+\cos^2\alpha\right)$$

$$-P'_{xy} = \alpha_i^1\alpha_j^2 I^{ij} = \left(\alpha_1^1\alpha_1^2 I_X + \alpha_2^1\alpha_2^2 I_Y + \alpha_3^1\alpha_3^2 I_Z - 2\alpha_1^1\alpha_2^2 P_{XY} - 2\alpha_1^1\alpha_3^2 P_{XZ} - 2\alpha_2^1\alpha_3^2 P_{YZ}\right) = 0$$

et $\; -P'_{xz} = \alpha_i^1\alpha_j^3 I^{ij} = 0$

Les axes Ox et OX sont confondu et forme une direction principale. => les produits d'inertie comprenant l'axe x sont nuls.

$$-P'_{yz} = I'^{23} = \alpha_i^2\alpha_j^3 I^{ij} = \alpha_2^2\alpha_2^3 I_Y + \alpha_3^2\alpha_3^3 I_Z = -\sin\alpha\cos\alpha\frac{mR^2}{4} + \sin\alpha\cos\alpha\frac{mR^2}{2} = m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\overline{\overline{I}}_{Gxyz} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}\left(1+\sin^2\alpha\right) & -m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & -m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha & \frac{mR^2}{4}\left(1+\cos^2\alpha\right) \end{pmatrix}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps