Faculté des Sciences Appliquées

NOM :..

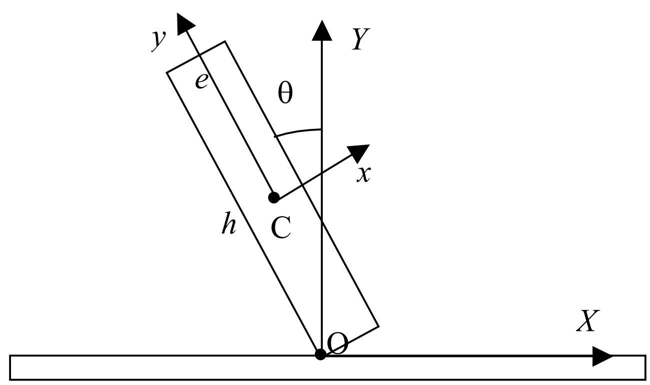
PRENOM :...

Mécanique Rationnelle
2e candidature

Examen de mécanique rationnelle
1ère session 07/06/2005 (8h-12h)
Année académique 2004-2005

<u>Question 1</u> : Chute d'un domino (5 points)

Un domino est déposé sans vitesse initiale sur une table horizontale avec une inclinaison θ_0 par rapport à la verticale. On étudie son mouvement de chute en faisant l'hypothèse d'un mouvement plan. On assimile le domino à un parallélépipède rectangle homogène de masse *m*, de hauteur *h*, de largeur *L* et d'épaisseur *e*.



1. Déterminer **l'équation de mouvement.**

$$\overline{M}_O = \overline{M}_G + \overline{OG}\times\overline{R} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} \quad \text{car O} \in \text{solide}$$

$$\overline{M}_O = \left(m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{12} + m\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\right)\dot{\theta}\overline{1}_z = m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O} : m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{3}\ddot{\theta} = mg\left(\frac{h}{2}\sin\theta - \frac{e}{2}\cos\theta\right)$$

2. Quelle **inclinaison** θ_0 initiale faut-il donner au domino pour qu'il tombe sur la table ?

Condition pour que le domino tombe sur la table :

$$\ddot{\theta}(t=0) > 0 \iff \begin{cases} \dfrac{h}{2}\sin\theta_0 - \dfrac{e}{2}\cos\theta_0 > 0 \\ \tan\theta_0 > \dfrac{e}{h} \Rightarrow \theta_0 > \arctan\left(\dfrac{e}{h}\right) \end{cases}$$

3. Donnez une expression intégrale du **temps** mis par le domino pour tomber sur la table en considérant son inclinaison initiale de θ_0

$$m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{3}\frac{d\dot{\theta}}{dt}=mg\left(\frac{h}{2}\sin\theta-\frac{e}{2}\cos\theta\right)$$

$$\int_0^{\dot{\theta}^2} m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{6}d\dot{\theta}^2=\int_{\theta_0}^{\theta} mg\left(\frac{h}{2}\sin\theta-\frac{e}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

$$m\frac{\left(e^2+h^2\right)}{6}\dot{\theta}^2=mg\left(-\frac{h}{2}\cos\theta-\frac{e}{2}\sin\theta\right)+mg\left(\frac{h}{2}\cos\theta_0+\frac{e}{2}\sin\theta_0\right)$$

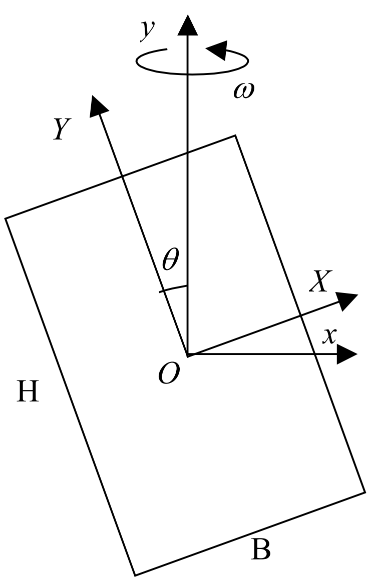
même équation : $T+V=E_0=mg\left(\frac{h}{2}\cos\theta_0+\frac{e}{2}\sin\theta_0\right)$

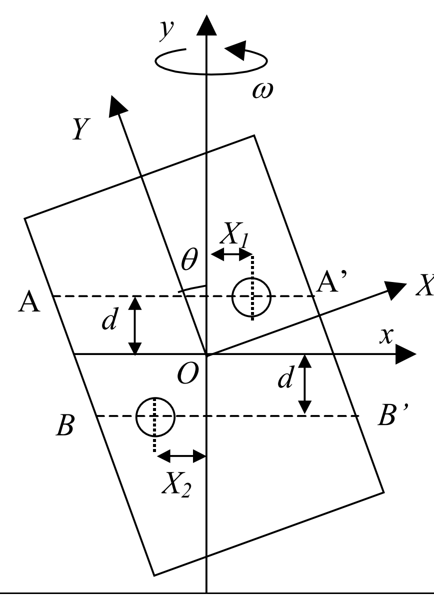
$$\Rightarrow \dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{3}{\left(e^2+h^2\right)}}\sqrt{\left(\frac{2E_0}{m}-g\left(h\cos\theta+e\sin\theta\right)\right)}$$

$$\Rightarrow T_{chute}=\sqrt{\frac{\left(e^2+h^2\right)}{3}}\int_0^t\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{2E_0}{m}-g\left(h\cos\theta+e\sin\theta\right)\right)}}$$

<u>Question 5</u> : Equilibrage de plaque (5 points)

Une plaque rectangulaire de base *B*, de hauteur *H* et de masse *M* tourne à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical *Oy*. Le repère *XYZ* lié à la plaque est centré en *O*, milieu de la plaque. Ses axes *OX* et *OY* sont paralléles aux côtés de la plaque, l'axe *OZ* étant perpendiculaire à la plaque (cf. figure de gauche). L'axe de rotation *Oy* fait un angle θ par rapport à l'axe *OY* , le repére *Oxyz* étant également lié à la plaque (*Oz* est identique *OZ* et *Ox* est perpendiculaire *Oy* et se trouve dans le plan de la plaque).





1. Déterminer la **résultante des forces** qui agissent sur la plaque ainsi que leur **moment** par rapport au pôle O.
$\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = 0$ car $\overline{R} = 0$ $\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt}$ car O est un point fixe $\overline{M}_O = \begin{pmatrix} \frac{mH^2}{12} & 0 & - \\ 0 & \frac{mB^2}{12} & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\overline{1}_X + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\overline{1}_Y$ $\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\frac{d\overline{1}_X}{dt} + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\frac{d\overline{1}_Y}{dt}$ $= \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\left(-\omega\cos\theta\overline{1}_Z\right) + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\left(+\omega\sin\theta\overline{1}_Z\right)$ $= \left(-\frac{mH^2}{6}\omega^2\sin 2\theta + \frac{mB^2}{6}\omega^2\sin 2\theta\right)\overline{1}_Z = \frac{m}{6}\omega^2\sin 2\theta\left(B^2 - H^2\right)\overline{1}_Z = \sum \overline{m}_{e,O}$
2. On veut équilibrer la plaque statiquement et dynamiquement simplement en perçant deux trous circulaire de rayon r (cf. figure de droite). Les deux trous seront percés en deux point P_1 et $P2$:   - Le point P_1 sera placé quelque part sur la ligne *AA'*, qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et située à une distance d de l'axe *Ox*.   - Le point P_2 sera placé quelque part sur la ligne *BB'*, située symétriquement à la ligne *AA'* par rapport à l'axe *Ox*.   Si les coordonnées des deux points P_1 et P_2 dans le repère *Oxy* sont $(X_1; d)$ pour P_1 et $(X_2; d)$ pour P_2, **déterminer** X_1 et X_2 pour que la plaque soit parfaitement **équilibrée**.
$\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt}$ car O est un point fixe $\begin{cases} \overline{1}_x = \cos\theta\overline{1}_X - \sin\theta\overline{1}_Y \\ \overline{1}_y = \sin\theta\overline{1}_X + \cos\theta\overline{1}_Y \end{cases}$ avec $I_X = \frac{mH^2}{12}$ et $I_Y = \frac{mB^2}{12}$ $\begin{cases} I_{x,plaque} = \cos^2\theta I_X + \sin^2\theta I_Y + 2\sin\theta\cos\theta P_{XY} = \cos^2\theta\frac{mH^2}{12} + \sin^2\theta\frac{mB^2}{12} \\ I_{y,plaque} = \sin^2\theta I_X + \cos^2\theta I_Y - 2\sin\theta\cos\theta P_{XY} = \sin^2\theta\frac{mH^2}{12} + \cos^2\theta\frac{mB^2}{12} \\ I_{z,plaque} = I_x + I_y = \frac{mH^2}{12} + \frac{mB^2}{12} \text{ car le solide est plan (2D)} \\ P_{xy,plaque} = \sin\theta\cos\theta\left(I_Y - I_X\right) = \left(\frac{mB^2}{12} - \frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} I_x = I_{x,plaque} - I_{x,r1} - I_{x,r2} = \cos^2\theta \dfrac{mH^2}{12} + \sin^2\theta \dfrac{mB^2}{12} - \left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 d^2\right) - \left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 d^2\right) \\ I_y = I_{y,plaque} - I_{y,r1} - I_{y,r2} = \sin^2\theta \dfrac{mH^2}{12} + \cos^2\theta \dfrac{mB^2}{12} - \left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 X_1^2\right) - \left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4} + \rho\pi r^2 X_2^2\right) \\ P_{xy} = P_{xy,plaque} - P_{xy,r1} - P_{xy,r2} = \left(\dfrac{mB^2}{12} - \dfrac{mH^2}{12}\right)\dfrac{\sin 2\theta}{2} - \left(0 + \rho\pi r^2 X_1 d\right) - \left(0 - \rho\pi r^2 X_2 d\right) \end{cases}$$

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} - & -P_{xy} & - \\ - & I_y & - \\ - & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 - X_2\right)d\right)\omega\overline{1}_x$$

$$+\left(\frac{m}{12}\left(H^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right) - \rho\pi r^2\left(\frac{r^2}{2} + X_1^2 + X_2^2\right)\right)\omega\overline{1}_y$$

A l'équilibre statique et dynamique :

$$\sum \overline{m}_{e,Oz} = -\left(-\rho\pi r^2 g X_1\right) - \left(-\rho\pi r^2 g X_2\right) = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2$$

De plus, $\sum \overline{m}_{e,O} = \dfrac{d\overline{M}_O}{dt} = 0 = \left(-\dfrac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 - X_2\right)d\right)\omega\dfrac{d\overline{1}_x}{dt}$

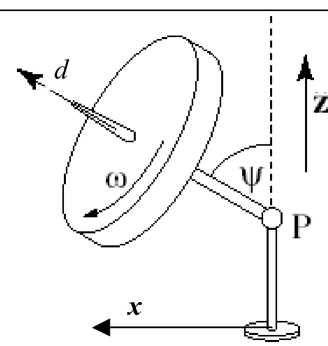
$$\Rightarrow -\left(-\frac{m}{24}\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta + \rho\pi r^2\left(X_1 - X_2\right)d\right)\omega^2\overline{1}_z = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{m}{48}\frac{\left(B^2 - H^2\right)\sin 2\theta}{\rho\pi r^2 d}$$

<u>Question 3</u> : (2 points)

Un disque possède un moment d'inertie I par rapport à son axe de révolution et tourne avec une vitesse angulaire ω dans le sens indiqué ci-dessous. La distance entre le pivot P et le centre de masse du disque est h.

1. Déterminer les **forces et les couples** qui agissent sur le système.
2. Sans donner les équations de mouvement, expliquez précisément le **mouvement**.



Forces : mg en C, centre du disque

Couples : $\begin{cases} \text{couple dû au poids : } mgh\sin\psi \text{ sortant de la feuille} \\ \text{couple gyroscopique : } \overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} \end{cases}$

Le couple gyroscopique s'oppose au couple dû à la pesanteur => la seule rotation provoquant ce couple est une rotation autour de l'axe z dans le sens négatif.
Le disque précessione autour de l'axe z, avec une vitesse angulaire égale à
$\overline{\Omega} = -\omega \overline{1}_d$ sur le dessin

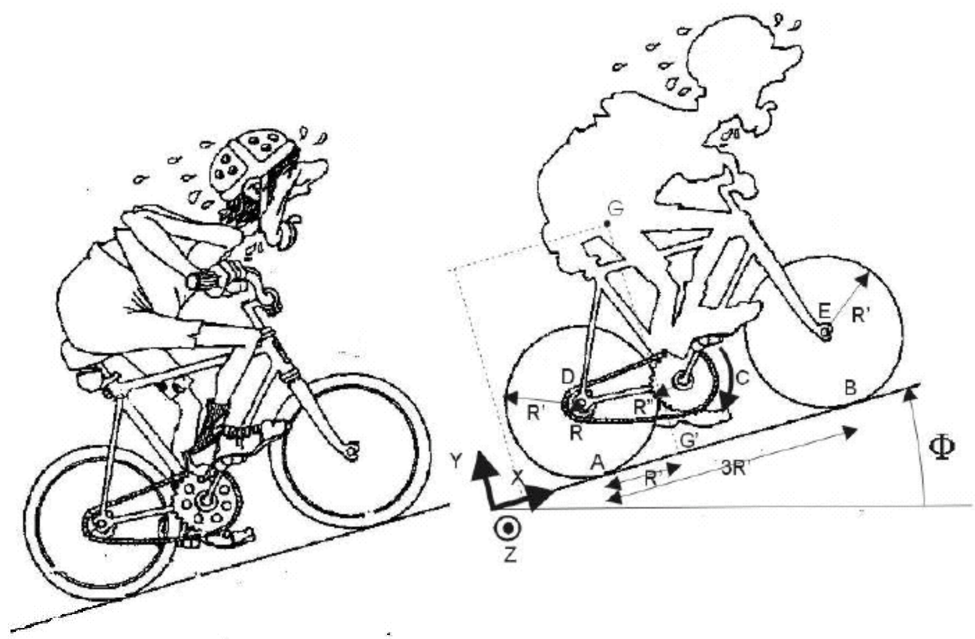
$\Gamma = I$

$\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} = -mgh\sin\psi\,\overline{1}_y$ => $\overline{\omega} = -\dfrac{mgh}{I\omega}\overline{1}_z$

<u>Question 4</u> : Cycliste en côte (3 points)

Un cycliste grimpe une pente d'angle θ. L'ensemble constitué par le cadre du vélo et le cycliste est considéré comme un solide indéformable *S*, de masse *M* et de centre de gravité *G*. La roue arrière a une masse *M'*, un rayon *R'*, et son centre de gravité est en *D* sur l'axe de rotation de la roue arrière par rapport au cadre; idem pour la roue avant (*M'*, *R'*) autour de *E* (seule la contribution de la masse circonfèrencielle des roues est prise en compte pour leurs propriétés d'inertie).
Le plateau du pédalier *S''* sur lequel le cycliste exerce un couple *C* a un rayon *R''*; ce plateau tourne par rapport au cadre autour du point *O* (la masse du plateau est considérée comme négligeable). La roue arrière est entraînée par l'intermédiaire d'une chaîne (supposée inextensible et sans poids) reliant le plateau du pédalier *S''* avec le pignon de la roue arrière, de centre *D* et de rayon *R* (ce pignon de masse négligeable est solidaire de la roue arrière).
Autres données (pas toutes nécessairement utiles...) :

- La distance entre les points *A* et *B* de contact des roues vaut *3R'*. Le point *G*, centre de gravité de S se trouve à une hauteur du sol égale à *H*, *AG'* étant égal à *R'* (*G'* est la projection de *G* sur le sol);
- Toutes les liaisons sont sans perte.



Déterminer la (ou les) **équation(s) différentielle**(s) du mouvement.

coordonnées généralisées : x

$S(M)$ pour le cycliste

$S_1'(M',R',G_1',\omega_1')$ pour la roue arrière

$S_2'(M',R',G_2',\omega_2')$ pour la roue avant

$S''(0,R'',\omega'')$ pour le pédalier

Par Lagrange :

$$T=\underbrace{\frac{M\dot{x}^2}{2}+0}_{cycliste}+\underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2}+\frac{1}{2}M'R'^2\,\omega_1'^2}_{roue\ arrière}+\underbrace{\frac{M'\dot{x}^2}{2}+\frac{1}{2}M'R'^2\,\omega_2'^2}_{roue\ avant}$$

$$V=Mg\left(x\sin\theta+H\cos\theta\right)+M'g\left(\left(x-R'\right)\sin\theta+R'\cos\theta\right)+M'g\left(\left(x+2R'\right)\sin\theta+R'\cos\theta\right)$$

$$=> V=\left(M+2M'\right)gx\sin\theta+const$$

Contrainte de roulement sans glissement :

$$\overline{v}_{I_1}=\overline{v}_{G_1}+\overline{\omega}_1'\times\overline{G_1I_1} => \omega_1'=\frac{\dot{x}}{R'} \quad \text{et} \quad \overline{v}_{I_2}=\overline{v}_{G_2}+\overline{\omega}_2'\times\overline{G_2I_2} => \omega_2'=\frac{\dot{x}}{R'} => \delta\alpha'=\frac{\delta x}{R'}$$

Rapport de rayon : $R''\omega''=R\omega' => R''\delta\alpha''=R\delta\alpha'$

Travail du couple : $\delta\tau=C\delta\alpha''=C\dfrac{R}{R''}\delta\alpha'=C\dfrac{R}{R''.R'}\delta x$

$$L=\frac{1}{2}\left(M+4M'\right)\dot{x}^2-\left(M+2M'\right)gx\sin\theta$$

$$=>\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=Q_x : \boxed{\left(M+4M'\right)\ddot{x}+\left(M+2M'\right)g\sin\theta=C\frac{R}{R''.R'}}$$

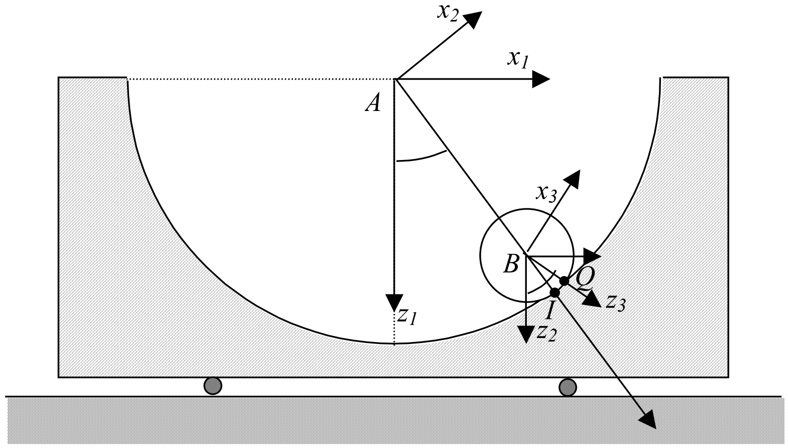
<u>Question 5</u> : Disque dans une benne (5 points)

Le problème est plan (2-D). Le système, constitué de deux corps, est soumis à l'effet de la gravité suivant 3 :
(a) <u>corps *n1*</u> : benne supportée par deux rouleaux. Les rouleaux, de masse et d'inertie négligeables, permettent à la benne de “glisser” horizontalement sans frotter sur un sol plat. Le profil de la partie interne de la benne est circulaire de centre A

- masse M., inertie I
- distance $AB = L$

(b) <u>corps *n2*</u> : disque de rayon a et de centre B. En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser à l'intérieur de la benne

- disque de masse homogène m
- disque de rayon a.



Déterminer la (ou les) équation(s) décrivant le mouvement par la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**.

Benne : $S_1(M, I)$ R_1=repère lié à la benne

Disque : $S_2(m, R, \dot{\theta})$ R_3=repère lié au disque

R_2 = repère où z_3 est lié à AB

$$\overline{OB} = x\overline{1}_{x_1} + L\overline{1}_{z_2} \Rightarrow \overline{v}_B = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} = (\dot{x} + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\overline{1}_{x_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\overline{1}_{y_1}$$

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$V = C - Lmg\cos\varphi$$

Contrainte de roulement sans glissement : I = point de contact entre S_1 et S_2

$$\overline{v}_{I\in S_2} = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + (L\dot{\varphi} + a\dot{\theta})\overline{1}_{x_2} = \overline{v}_{I\in S_1} = \dot{x}\overline{1}_{x_1} \Rightarrow L\dot{\varphi} + a\dot{\theta} = 0$$

ce qui nous donne comme contrainte (ϕ_1) avec λ_1: $L\delta\varphi$+a$\delta\theta$=0

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - 0 = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = \lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = \lambda_1 a \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) = \lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \Rightarrow mL^2\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi \cancel{-mL\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}} + \cancel{mL\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi} + mgL\sin\varphi = \lambda_1 L \\ L\dot{\varphi} + a\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

=Système de 4 équations à 4 inconnues

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{ma}{2}\ddot{\theta} = -\frac{mL}{2}\ddot{\varphi}} \Rightarrow \text{Equations de mouvement} \begin{cases} \frac{3mL^2}{2}\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$$

Déterminer la (ou les) **réaction(s) de laison** entre le disque et la benne.

$$\begin{cases} \dfrac{3mL^2}{2}\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$$

Théorème de la résultante appliqué à S_2 : $-T_2\overline{1}_{x_2} - N_2\overline{1}_{z_2}$

$\overline{R} = m\overline{v}_B = m(\dot{x} + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\overline{1}_{x_1} - mL\dot{\varphi}\sin\varphi\overline{1}_{y_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{x} + L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) = -N_2\sin\varphi + T_2\cos\varphi \quad (1) \\ m\left(-mL\ddot{\varphi}\sin\varphi - mL\cos\varphi\dot{\varphi}^2\right) = mg - N_2\cos\varphi - T_2\sin\varphi \quad (2) \end{cases}$$

$(1)\sin\varphi + (2)\cos\varphi \quad : \quad m\ddot{x}\sin\varphi - mL\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - N_2 \Rightarrow N_2 = mg\cos\varphi - m\ddot{x}\sin\varphi + mL\dot{\varphi}^2$

$(1)\cos\varphi - (2)\sin\varphi \quad : \quad m\ddot{x}\cos\varphi + mL\ddot{\varphi} = T_2 - mg\sin\varphi \Rightarrow T_2 = -m\ddot{x}\cos\varphi - mL\ddot{\varphi} - mg\sin\varphi$

Ou par le théorème du moment en G :

$\dfrac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = aT_2 \Rightarrow T_2 = \dfrac{ma}{2}\ddot{\theta} = -\dfrac{mL}{2}\ddot{\varphi}$ et grâce à la première équation de mouvement :

$T_2 = -\dfrac{mL}{2}\ddot{\varphi} = mL\ddot{\varphi} + m\ddot{x}\cos\varphi + mg\sin\varphi$