1.

$$I_z = \rho\int_0^a x^2dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}dz + \rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}y^2dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}dz = \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right) \;;\; I_y = \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right) \quad \text{avec} \quad m = \rho\frac{abc}{6}$$

$$P_{xy} = \rho\int_0^a xdx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}ydy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}dz = \frac{mab}{20} \Rightarrow P_{xz} = \frac{mac}{20} \;;\; P_{yz} = \frac{mbc}{20}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right) & -\frac{mab}{20} & -\frac{mac}{20} \\ -\frac{mab}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right) & -\frac{mbc}{20} \\ -\frac{mac}{20} & -\frac{mbc}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$$

---

2. z : axe vertical passant par le centre de la tasse, z' : axe vertical passant par le bord de l'anse.

$$I_{z(tasse)} = \rho\pi H\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} - \rho\pi\left(H-2e\right)\frac{\left(\frac{D}{2}-e\right)^4}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rappel : avec l'axe z = axe de révolution} \\ \text{cercle : } I_z\text{(cercle)} = \int\left(x^2+y^2\right)dm = 2I_x - 2I_{xy} \Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} + I_{xy} \\ \text{Par symétrie : } I_x\text{(cercle O)} = I_x\text{(demi-cercle } \cup\text{)} + I_x\text{(demi-cercle } \cap\text{)} \\ \Rightarrow I_x\text{(demi-cercle } \cup\text{)} = \frac{I_x\text{(cercle O)}}{2} \end{array}}$$

$$\text{Dans notre cas : } I_{z'(Anse\,\cup)} = \frac{1}{2}I_{z'(Anse\,O)} \quad \text{avec} \quad I_{z'(Anse\,O)} = \frac{I_{x'(Anse\,O)}}{2} + I_{y'z'(Anse\,O)}$$

$$I_{z'(Anse\,\cup)} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\left(\rho\pi a\frac{(b)^4}{2} - \rho\pi a\frac{(b-a)^4}{2}\right)}{2}}_{\frac{I_{x'(Anse\,O)}}{2}} + \underbrace{\left(\rho\pi a\frac{a^2b^2}{12} - \rho\pi a\frac{a^2(b-a)^2}{12}\right)}_{I_{y'z'(Anse\,O)}}\right]$$

$$I_{z(Anse\,\cup)} = I_{z'(Anse\,\cup)} + \underbrace{\left(\frac{\rho\pi a}{2}\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(-d_G{}^2 + \left(\frac{D}{2}+d_G\right)^2\right)\right)}_{Steiner}$$

où d_G=distance(axe z';cdm de l'anse)

$$I_z = \frac{\rho\pi}{2}\left(H\left(\frac{D}{2}\right)^4 - (H-2e)\left(\frac{D}{2}-e\right)^4\right)$$

$$+\frac{\rho\pi a}{8}\left((b)^4-(b-a)^4\right) + \frac{\rho\pi a^3}{24}\left(b^2-(b-a)^2\right) + \frac{\rho\pi a}{2}\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + Dd_G\right)$$

3.1

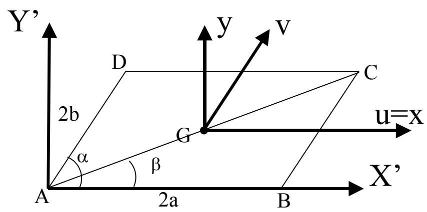
$$I_z = \rho\int_{-a}^{+a}du\int_{-b}^{+b}dv\left(u^2+v^2-2uv\cos(\pi-\alpha)\right)\sin\alpha = m\frac{\left(a^2+b^2\right)}{3} \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)}{3}}$$

$$\text{avec } dm = \rho du.\sin\alpha dv \text{ et } \begin{cases} x = u + v\cos\alpha \\ y = v\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = u^2+v^2+2uv\cos\alpha$$

3.2 $I_x = \rho \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv \left(v\sin\alpha \right)^2 \sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha$;

$I_y = \rho \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv \left(u + v\cos\alpha \right)^2 \sin\alpha = \frac{m}{3}\left(a^2 + b^2\cos^2\alpha \right)$

$P_{xy} = \rho \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv \left(u + v\cos\alpha \right)\left(v\sin\alpha \right)\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha$



L’ellipse centrale d’inertie est un cercle ssi

$I_x X^2 + I_y Y^2 = 1$ => cercle de rayon $R = \frac{1}{\sqrt{I_x}}$ ssi

$I_x = I_y$ et $P_{xy} = 0$ => $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $a = b$

3.3 **Recherche des axes principaux d’inertie en A** :

Calcul des éléments du tenseur d’inertie dans les axes AX’Y’Z’ (// Gxyz)

$I_{x'} = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha + m\left(b\sin\alpha \right)^2$; $I_{y'} = \frac{m}{3}\left(a^2 + b^2\cos^2\alpha \right) + m\left(a + b\cos\alpha \right)^2$

$P_{x'y'} = \rho \int_{0}^{+2a} du \int_{0}^{+2b} dv \left(u + v\cos\alpha \right)\left(v\sin\alpha \right)\sin\alpha = mab\sin\alpha + m\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha$

Les axes principaux en A sont les axes orthogonaux AX’’Y’’Z’’ tel que $I_{x"x"}X"^2 + I_{y"y"}Y"^2 + I_{z"z"}Z"^2 = 1$

Pour se faire, on fait une rotation d’angle θ des axes Ax’ et Ay’ pour avoir $-P_{x"y"} = 0$.

La formule suivante permet de déterminer cet angle.

$$tg2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \frac{2\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha \right)}{\frac{4}{3}b^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \right) + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha}$$

3.4 La quadrique d’inertie en A dans les axes AX’Y’Z’ : $I'_{x'x'}X'^2 - 2P'_{x'y'}X'Y' + I'_{y'y'}Y'^2 = 1$

$$\frac{4}{3}mb^2\sin^2\alpha X'^2 - 2m\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha \right)X'Y' + m\left(\frac{4}{3}b^2\cos^2\alpha + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha \right)Y'^2 = 1$$

L’ellipse d’inertie en A dans les axes AX’’Y’’Z’’ : $I"_{x"x"}X"^2 + I"_{y"y"}Y"^2 = 1$

avec

$$I"_{x"} = \cos^2\theta . I'_{x'} + \sin^2\theta . I'_{y'} + 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'} \right)$$

$$I"_{y"} = \sin^2\theta . I'_{x'} + \cos^2\theta . I'_{y'} - 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'} \right)$$

3.5 Par la formule du changement de base, on écrit le tenseur dans le nouveau système d’axe ayant l’axe AC comme premier vecteur unitaire.

$I_{AC} = \alpha_i^1\alpha_j^1 I^{ij} = I_x\mu_x^{1\,2} + I_y\mu_y^{1\,2} - 2P_{xy}\mu_x^1\mu_y^1$

$où$ $\mu_x^1 = \frac{a + b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$; $\mu_y^1 = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$ et $\mu_z^1 = 0$

4.1

$$I_z(Cube) = \int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(x^2 + y^2 \right)dx \right)dy \right)dz = \frac{M\left(2R \right)^2}{6} = \frac{\rho 2^5 R^5}{6}$$

$$I_z(sphère) = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{8\rho\pi R^5}{15} \quad => \quad I_z(\frac{1}{2}sphère \cup) = \frac{2}{5}M_{\cup}R^2 = \frac{4\rho\pi R^5}{15}$$

$$=> I_z = I_z(Cube) - I_z(Demi - Sphère) = \frac{\rho 16 R^5}{3} - \rho\frac{4\pi}{15}R^5$$

Axes $O''x''y''z''$: au centre de la face supérieure du cube

$$\text{Sphère : } I_{x''y''}(\cup) = \int z''^2\, dm = \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} (r\cos\theta)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{5} M_{\cup} R^2$$

$$I_{x''}(\cup) = \frac{I_{z''}(\cup)}{2} + I_{x''y''}(\cup) = \frac{1}{5} M_{\cup} R^2 + \frac{1}{5} M_{\cup} R^2 = \frac{2}{5} M_{\cup} R^2$$

$$I_x(\cup) = \underbrace{I_{x''}(\cup) - M_{\cup}\left(\frac{3}{8}R\right)^2}_{I_{xG}(\cup)=\frac{83}{320}M_{\cup}R^2} + M_{\cup}\left(\frac{5}{8}R\right)^2 = \frac{13 M_{\cup} R^2}{20} = \frac{13\rho\pi R^5}{30}$$

Solide complet :

$$I_x = I_x(\text{Cube}) - I_x(\cup) = \frac{16\rho R^5}{3} - \frac{13\rho\pi R^5}{30} = \frac{\rho R^5}{30}(160 - 13\pi) \text{ et } I_z = \frac{\rho R^5}{30}(160 - 8\pi)$$

$$I_y = I_x < I_z$$

4.2 Pour que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, il faut trouver un point P tel que :

$I_{x_P} x^2 + I_{y_P} y^2 + I_{z_P} z^2 = 1$ où $I_{x_P} = I_{y_P} = I_{z_P}$

On recherche un point P de l'axe z, donc l'axe $z = z_P$

=> $\underbrace{I_x - (m_{Cube} - m_{\cup}) z_G^2}_{I_{xG_{total}}} + (m_{Cube} - m_{\cup}) d^2 = I_z$ où d est la distance du point P recherché à G_{total}

4.3 $P_{x'y'} = P_{x'y'}(Cube) - P_{x'y'}(1/2\ Sphère)$

$$\begin{cases} x' = x + R \\ y' = y + R \\ z' = z + R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{x'y'}(Cube) = P_{xy}(Cube) + m_{Cube}.R.R \\ P_{x'y'}(1/2\ Sphère) = P_{xy}(1/2\ Sphère) + m_{1/2\ Sphère}.R.R \end{cases}$$

En effet, pour la demi sphère, on a $\begin{cases} x' = x_G + R \text{ et } x = x_G \\ y' = y_G + R \text{ et } y = y_G \\ z' = z_G + \left(R + \frac{5}{8}R\right) \text{ et } z = z_G - \frac{5}{8}R \end{cases}$

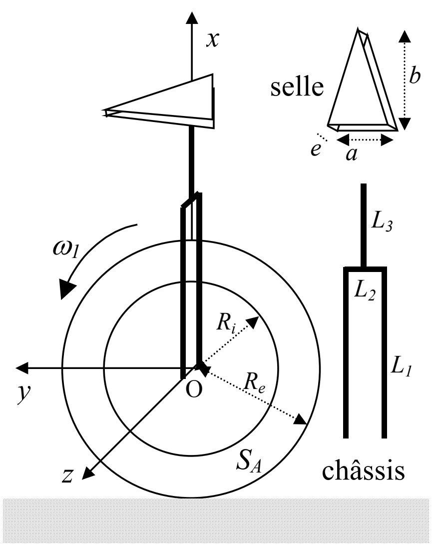
Pour le produit d'inertie suivant les axes x' et y', le décallage en z ne nous intéresse pas.

$P_{xy}(Cube) = 0$ car les axes xyz sont des axes principaux

$P_{xy}(1/2\ Sphère) = 0$ car les axes x et y sont intégrés sur un domaine symétrique

=> $P_{x'y'} = m_{Carré} R^2 - m_{\cup} R^2 = \rho\left(8 - \frac{2}{3}\pi\right) R^5$

5.



Formulaire :

Pour une tige homogène de longueur L (axes en G)

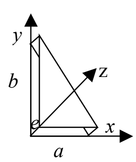
Moment d'inertie par rapport à l'axe y : I_y=ML²/12

Pour un triangle rectangle de côté a, b et d'épaisseur e. (axes sur la base de l'angle droit)

Moment d'inertie par rapport au plan xy : I_{xy}= Me²/3
Moment d'inertie par rapport au plan yz : I_{yz}= Ma²/6
Moment d'inertie par rapport au plan zx : I_{zx}= Mb²/6

Pour un disque plein de rayon R (G : centre de masse du disque)

Moment d'inertie par rapport à l'axe z_G : I_z=MR²/2



m la masse de la roue

$$I_{x(roue)} = I_{y(roue)} = \frac{I_{z(roue)}}{2}$$

$$I_{z(roue)} = \frac{m\left(R_e^2 + R_i^2\right)}{2}$$

m_1 la masse de la tige L_1

$$I_{x(L_1)} = m_1\left(\frac{L_2}{2}\right)^2$$

$$I_{z(L_1)} = \frac{m_1 L_1^2}{12} + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

$$I_{y(L_1)} = \frac{m_1 L_1^2}{12} + m_1\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

m_2 la masse de la tige L_2

$$I_{x(L_2)} = \frac{m_2 L_2^2}{12}$$

$$I_{y(L_2)} = \frac{m_2 L_2^2}{12} + m_2 L_1^2$$

$$I_{z(L_2)} = m_2 L_1^2$$

m_3 la masse de la tige L_3

$$I_{x(L_3)} = 0$$

$$I_{y(L_3)} = \frac{m_3 L_3^2}{12} + m_3\left(L_1 + \frac{L_3}{2}\right)^2$$

$$I_{z(L_3)} = \frac{m_3 L_3^2}{12} + m_3\left(L_1 + \frac{L_3}{2}\right)^2$$

m_4 la masse du corps

$$I_{y(corps)} = 0$$

$$I_{y(corps)} = I_{z(corps)} = m_4 r^2$$

M la masse de la selle

$$I_{z(selle)} = I_{xz} + I_{yz}$$

$$I_{x(selle)} = \frac{M\left(\frac{a}{2}\right)^2}{6} + \frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$I_{y(selle)} = \frac{Me^2}{3} + \frac{M\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\underline{6}} + M\left(L_1 + L_3 + \frac{e}{2}\right)^2 - M\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$I_{z(selle)} = \frac{Me^2}{3} + \frac{Mb^2}{6} + M\left(L_1 + L_3 + \frac{e}{2}\right)^2 - M\left(\frac{b}{3}\right)^2 - M\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

Tous les $P_{x_i x_j} = 0$

La roue :composante z=0 + symétrie suivant par rapport au plan xz et yz
Le châssis :composante y=0 + symétrie suivant par rapport au plan xy
La selle : au centre de masse : symétrie suivant l'axe z_G et l'axe x_G
les distances de décalage des axes : $x=x_G + d_x$; $y=y_G$; $z=z_G$ où d_y et d_z sont nuls.
Le corps : au centre de masse : les produits d'inertie sont nuls (énoncé)
les distances de décalage des axes : $x=x_G + d_x$; $y=y_G$; $z=z_G$ où d_y et d_z sont nuls.

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
Corrigés en ligne sur http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps.
Dans l'onglet mécaII>More, vous trouverez aussi plusieurs simulations MATLAB qui illustrent les corrigés.