Faculté des Sciences Appliquées

NOM :

PRENOM :

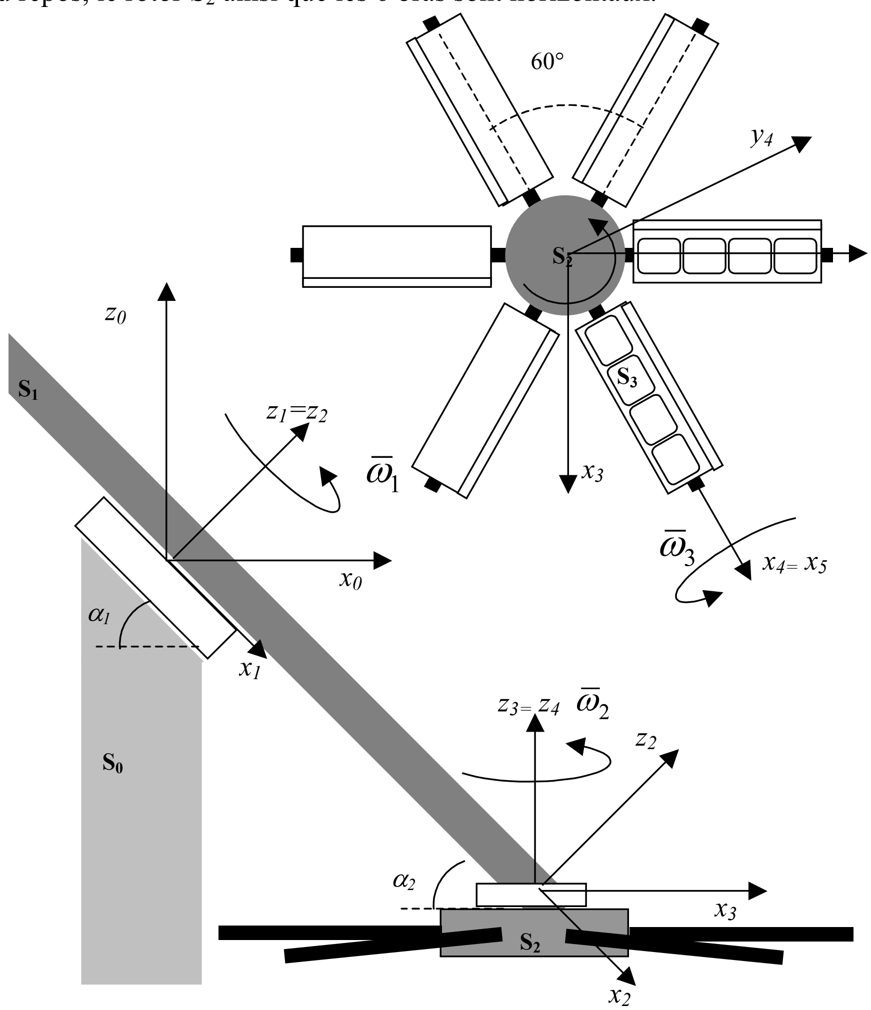
Mécanique Rationnelle
2e candidature

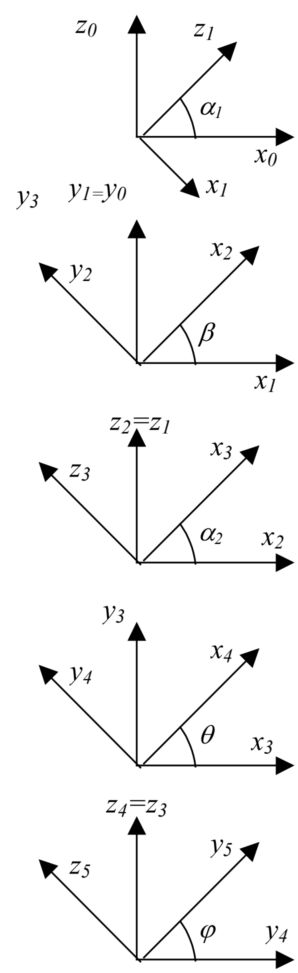
Examen de mécanique rationnelle
1ère session 12/01/2005 (8h-12h)
Année académique 2004-2005

Question 1 : Manège (5 points)

Le manège représenté ci-dessous est composé de :
- un bras fixe vertical muni d'un rotor incliné à α_1 constant°
- un bras S_1 fixé sur ce rotor tournant avec une vitesse angulaire ω_1 constante.
- un rotor S_2 fixé au bout du bras S_1 (incliné de α_2 constant par rapport à ce dernier) et tournant avec une vitesse angulaire ω_2 constante.
- 6 bras (du type S_3) répartis tous les 60° sur le rotor S_2 et tournant avec une vitesse angulaire $\omega_3(t)$ dans le plan du rotor S_2.

Au repos, le rotor S_2 ainsi que les 6 bras sont horizontaux.





Rem : Pour plus de compréhension, les dessins ont été représentés dans une situation instantanée particulière. Tenez bien compte de toutes les rotations représentées.

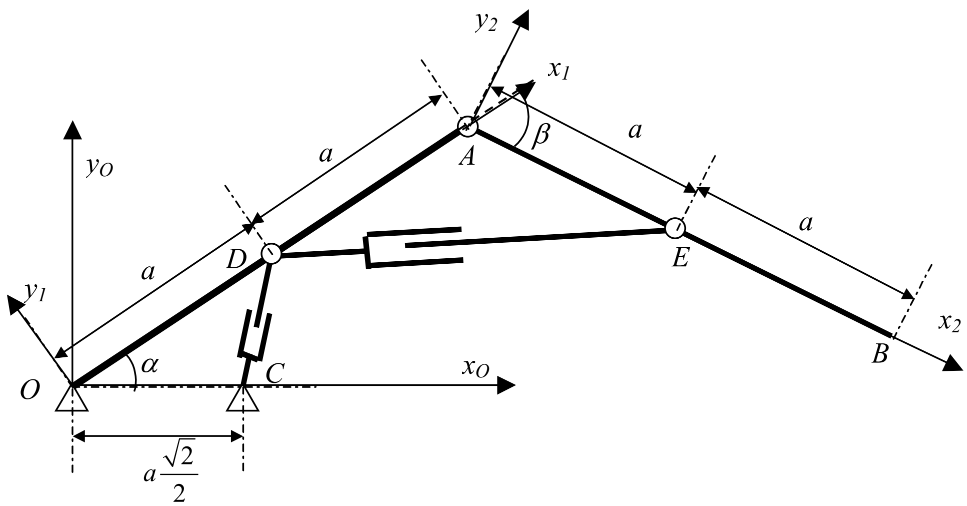
- Déterminer les différents systèmes d'axes que vous aller utiliser pour calculer la vitesse angulaire du solide S_3.
R_1/R_0 : Repère incliné sur le rotor 1. $\bar{\omega}_{R_1/R_0} = 0$ **R_2/R_1 :** Repère suivant la rotation du rotor. x_2 fixé sur le bras S_1 $\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\beta}\bar{1}_{z_2}$ **R_3/R_2 :** Repère incliné sur le rotor 2. $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\beta}\bar{1}_{z_2}$ **R_4/R_3 :** Repère suivant la rotation du rotor 2. x_4 fixé sur le bras S_3 $\bar{\omega}_{R_4/R_0} = \dot{\beta}\bar{1}_{z_2} + \dot{\theta}\bar{1}_{z_3}$ **R_2/R_4 :** Repère suivant la rotation de la nacelle S_3 $\bar{\omega}_{R_5/R_0} = \dot{\beta}\bar{1}_{z_2} + \dot{\theta}\bar{1}_{z_3} + \dot{\varphi}\bar{1}_{x_4}$ avec $\omega_1 = \dot{\beta}; \omega_2 = \dot{\theta}; \omega_3 = \dot{\varphi}$ avec $\theta = \omega_2 t$
- Déterminer le vecteur vitesse angulaire du solide S_3.
$\bar{\omega}_{S_3} = \bar{\omega}_{R_5/R_0} = \omega_1\bar{1}_{z_2} + \omega_2\bar{1}_{z_3} + \omega_3\bar{1}_{x_4}$ $\bar{1}_{z_2} = \sin\alpha_2\bar{1}_{x_3} + \cos\alpha_2\bar{1}_{z_3}$ et $\bar{1}_{x_4} = \cos(\omega_2 t)\bar{1}_{x_3} + \sin(\omega_2 t)\bar{1}_{y_3}$ $\Rightarrow \bar{\omega}_{S_3} = \left(\sin\alpha_2\omega_1 + \cos(\omega_2 t)\omega_3\right)\bar{1}_{x_3} + \sin(\omega_2 t)\omega_3\bar{1}_{y_3} + \left(\cos\alpha_2\omega_1 + \omega_2\right)\bar{1}_{z_3}$
- Déterminer l'accélération angulaire du S_3.
$\bar{\varepsilon}_{S_3} = \frac{d\bar{\omega}_{S_3}}{dt} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S_3}}{dt}\right\|_{R_3} + \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{S_3}$ avec $\bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{S_3} = \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \left(\bar{\omega}_{R_5/R_3} + \bar{\omega}_{R_3/R_0}\right) = \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{R_5/R_3} =$ $= -\cos\alpha_2\sin(\omega_2 t)\omega_1\omega_3\bar{1}_{x_3} + \omega_1\left(\cos\alpha_2\cos(\omega_2 t)\omega_3 - \sin\alpha_2\omega_2\right)\bar{1}_{y_3} + \sin\alpha_2\sin(\omega_2 t)\omega_1\omega_3\bar{1}_{z_3}$ $\bar{\varepsilon}_{S_3} = \left(\cos(\omega_2 t)\dot{\omega}_3 - \sin(\omega_2 t)\omega_2\omega_3 - \cos\alpha_2\sin(\omega_2 t)\omega_1\omega_3\right)\bar{1}_{x_3}$ $+ \left(\cos(\omega_2 t)\omega_2\omega_3 + \sin(\omega_2 t)\dot{\omega}_3 + \cos\alpha_2\cos(\omega_2 t)\omega_1\omega_3 - \sin\alpha_2\omega_1\omega_2\right)\bar{1}_{y_3}$ $+ \left(\sin\alpha_2\sin(\omega_2 t)\omega_1\omega_3\right)\bar{1}_{z_3}$

Question 2 : Bras manipulateur (4 points)

Un bras manipulateur d'atelier flexible, chargé de transporter des pièces d'un poste de travail à l'autre est composé de :

- un bras OA, de longueur *2a*, lié au bâti par une liaison pivot en O.
- un bras AB, de longueur *2a*, lié au bras OA par une liaison pivot en A.
- un vérin d'épaule CD lié au bâti par une liaison pivot en C ainsi qu'au bras OA par la liaison pivot en D (situé à la moitié de *OA*)
- un vérin d'épaule DE lié au bras OA par une liaison pivot en A ainsi qu'au bras AB par la liaison pivot en E (situé à la moitié de AB)

On considère les vitesses de sortie des vérins constantes et égale à V=1 mm/s. $OC = a.\frac{\sqrt{2}}{2}$



Déterminer la vitesse de B en fonction des paramètre α, β et V.

$\overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{OA} \times \overline{OA} = 2a\dot{\alpha}\,\overline{1}_{y_1}$ avec $\overline{\omega}_{OA} = \dot{\alpha}\,\overline{1}_z$

$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} = 2a\dot{\alpha}\,\overline{1}_{y_1} + 2a\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_2}$ avec $\overline{\omega}_{AB} = \left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\overline{1}_z$

$\overline{v}_B = 2a\dot{\alpha}\,\overline{1}_{y_1} + 2a\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\left(\sin\beta\,\overline{1}_{x_1} + \cos\beta\,\overline{1}_{y_1}\right) = 2a\sin\beta\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\overline{1}_{x_1} + 2a\left(\dot{\alpha} + \cos\beta\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\right)\overline{1}_{y_1}$

Vérification :

$\overline{\mathrm{OB}} = 2a\,\overline{1}_{x_1} + 2a\left(\cos\beta\,\overline{1}_{x_1} - \sin\beta\,\overline{1}_{y_1}\right) \Rightarrow$

$\overline{v}_B = \underbrace{2a\left(-\sin\beta\dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} - \cos\beta\dot{\beta}\,\overline{1}_{y_1}\right)}_{\left.\frac{d\overline{\mathrm{OB}}}{\mathrm{dt}}\right|_{R_1}} + \underbrace{2a\left(1 + \cos\beta\right)\dot{\alpha}\,\overline{1}_{y_1} + 2a\sin\beta\dot{\alpha}\,\overline{1}_{x_1}}_{\overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\mathrm{OB}}}$

$$\left\|\overline{CD}\right\|^2 = a^2 + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2aa\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \frac{3}{2}a^2 - \sqrt{2}a^2\cos\alpha$$

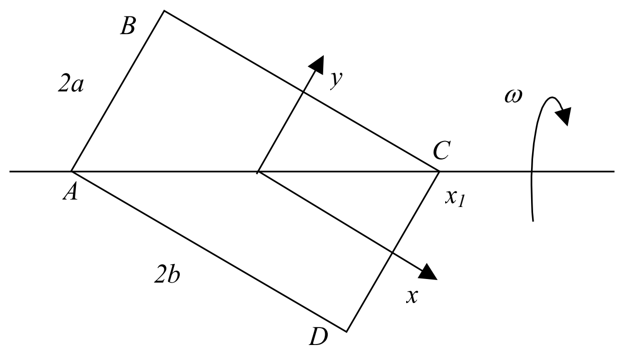
$$\Rightarrow 2\left\|\overline{CD}\right\|\frac{\mathrm{d}\left\|\overline{CD}\right\|}{\mathrm{dt}} = \sqrt{2}a^2\sin\alpha\dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{V\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}}{a\sin\alpha}$$

$$\left\|\overline{DE}\right\| = 2a\cos\frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left\|\overline{DE}\right\|}{\mathrm{dt}} = V = -2a\sin\frac{\beta}{2}\dot{\beta} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{-V}{2a\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{v}_B = 2V\left(\frac{\sin\beta\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}}{\sin\alpha} + \cos\frac{\beta}{2}\right)\overline{1}_{x_1} + 2V\left(\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}}{\sin\alpha}(1+\cos\beta) + \frac{\cos\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\right)\overline{1}_{y_1}$$

Question 3 : Plaque en rotation (3 points)

Déterminer le moment cinétique au centre G de la plaque rectangulaire homogène ABCD tournant autour de la diagonale AC.



$\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}.\overline{\omega}$ avec $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_{x_1} = \omega\cos\alpha\,\overline{1}_x + \omega\sin\alpha\,\overline{1}_y$ où $\cos\alpha = \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}$

$$\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & - \\ 0 & I_y & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = I_x\cos\alpha\omega\overline{1}_x + I_y\sin\alpha\omega\overline{1}_y$$

$$\overline{M}_G = \frac{(\rho 2a2b)(2a)^2}{12}\omega\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\overline{1}_x + \frac{(\rho 2a2b)(2b)^2}{12}\omega\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\overline{1}_y = \frac{\rho 4}{3}\frac{a^2b^2\omega}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\left(a\overline{1}_x + b\overline{1}_y\right)$$

Les produits d'inertie sont nuls car nous travaillons dans les axes principaux. En effet, l'intégration des puissances impaire (x et y) sur le domaine symétrique est nulle. Et la coordonnée z est nulle pour toute la plaque.

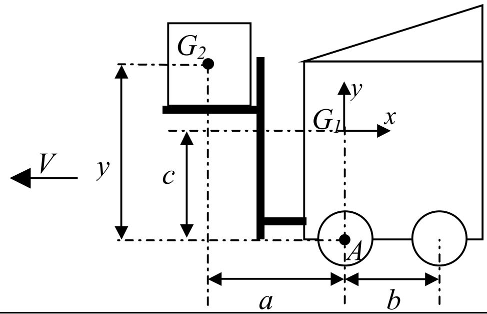
Question 4 : Chariot élévateur (3 points)

Un chariot élévateur se déplaçant, sans glisser, à une vitesse V est représenté ci-dessous.
Il s'agit d'un système de six solides :

- La partie convoyeur (automobile) de masse M
- La partie élévateur, (porte palette +palette de masse négligeable) soutenant une masse m, assimilée à une masse ponctuelle située au centre de masse G_2. Sa position est repérée par les variables x et y.
- Quatre roues identiques de rayon R et de masse m_R.

Le tenseur d'inertie de la partie automobile est donné dans les axes $Oxyz$ principaux en G_1.

$$\overline{\overline{I}}_{G_1} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$



Déterminer l'énergie cinétique du chariot élévateur représenté ci-dessous.

$T = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = \frac{1}{2} M v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \overline{\overline{I}}_{G_1} \overline{\omega} = \frac{1}{2} M V^2$ avec $\overline{\omega} = 0$ pour la partie convoyeur

$T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \overline{\overline{I}}_{G_2} \overline{\omega} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ avec $\overline{\omega} = 0$ pour la partie élevateur $(\dot{x} = V)$

$T_3 = 4\left(\frac{1}{2} m_R v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \overline{\overline{I}}_{G_i} \overline{\omega} \right) = 4\left(\frac{1}{2} m_R V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_R R^2}{2} \omega^2 \right)$

où $\overline{v}_I = 0 = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AI} = V \overline{1}_x + \omega R \overline{1}_x$ => $\omega = -\frac{V}{R}$

=> $T = \frac{1}{2}\left(M + m + 6m_R \right) V^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

Déterminer le moment cinétique du chariot élévateur en A

$\overline{M}_A = \overline{M}_{A,1} + \overline{M}_{A,2} + \overline{M}_{A,3}$

$\overline{M}_{A,1} = \overline{M}_{G_1,1} + \overline{R}_1 \times \overline{AG_1} = MVc\overline{1}_z - MV\frac{d}{2}\overline{1}_y$ avec $\overline{\omega} = 0$ et $\overline{AG}_1(0, c, \frac{d}{2})$

$\overline{M}_{A,2} = \overline{M}_{G_1,2} + \overline{R}_2 \times \overline{AG_2} = mVy\overline{1}_z - m\dot{y}a\overline{1}_z + m\dot{y}\frac{d}{2}\overline{1}_x - mV\frac{d}{2}\overline{1}_y$ avec $\overline{\omega} = 0$ et $\overline{AG}_2(a, y, \frac{d}{2})$

$\overline{M}_{A,3} = \sum_{4\text{roues}} \overline{M}_{G_{3-i}} + \overline{R}_i \times \overline{AG_i} = -4\frac{m_R R^2}{2}\frac{V}{R}\overline{1}_z - 2m_R V d\overline{1}_y$

Pour les 4 roues : $\overline{M}_{G_{3-i}} = -\frac{m_R R^2}{2}\frac{V}{R}\overline{1}_z$ et $\overline{R}_i = m_R V \overline{1}_x$

$\overline{AG}_{3-1}(0,0,0)$; $\overline{AG}_{3-2}(-b,0,0)$; $\overline{AG}_{3-3}(0,0,d)$; $\overline{AG}_{3-4}(-b,0,d)$

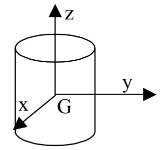
=> $\overline{M}_A = m\dot{y}\frac{d}{2}\overline{1}_x - \left(m + M + 4m_R \right)\frac{d}{2}V\overline{1}_y + \left(\left(Mc + my - 2m_R R \right)V - m\dot{y}a \right)\overline{1}_z$

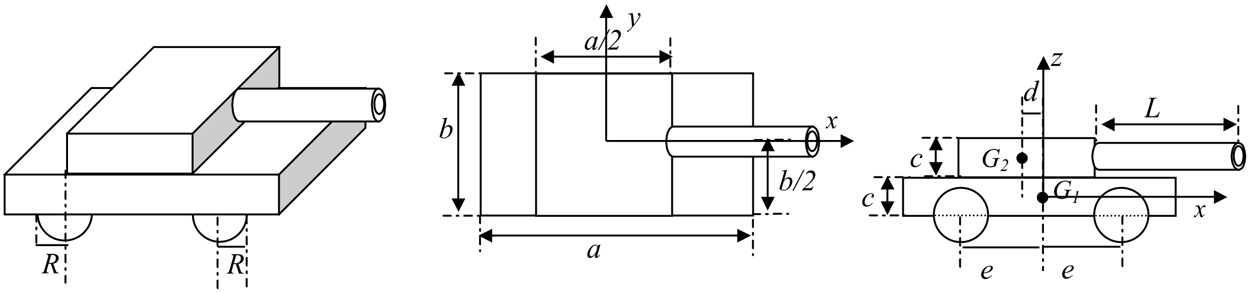
<u>Question 5</u> : Chariot élévateur (5 points)

Un canon est représenté ci dessous. Il est composé de

- deux parallélogrammes plein homogène de côtés respectifs *a,b,c* et *a/2,b,c* de masse volumique ρ et de centre de masse respectif G_1 et G_2.
- quatre roues de rayon R, de masse m_R. Ces roues sont modélisées par des disques pleins fixés sur les bords du parallélogramme *abc*. (Ces roues sont placées à distance égale du centre de masse G_1)
- un canon modélisé, par un cylindre creux de longueur L et de rayon intérieur (r_i) et extérieur (r_e) ayant une masse M. Ce canon est fixé au milieu de la face *bc* du parallélogramme *a/2bc*

Pour un cylindre plein de rayon R et de hauteur h
(G : centre de masse du cylindre)
$I_z = MR^2/2$
$I_{xy} = Mh^2/12$





Déterminer le tenseur d'inertie du canon au centre de masse du parallélogramme *abc*

Parallélogramme abc : $\overline{\overline{I}}_G = \dfrac{\rho abc}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

Parallélogramme $\dfrac{\text{a}}{2}$bc :

$$\overline{\overline{I}}_G = \frac{\rho\left(\frac{a}{2}\right)bc}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\rho\left(\frac{a}{2}\right)bc}{12}\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -(-cd) \\ 0 & d^2+c^2 & 0 \\ -(-cd) & 0 & d^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG'}=(-d,0,c)}$$

$$\text{Canon : } \underbrace{\overline{\overline{I}}_G = \rho\pi\left(r_e^2-r_i^2\right)L\begin{pmatrix} \frac{r_e^2+r_i^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{I}}_{Gi} \text{ au centre du canon}}$$

$$\underbrace{+\rho\pi\left(r_e^2-r_i^2\right)L\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)c \\ 0 & c^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)c & 0 & \left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG_{canon}}=\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d,0,c\right)}$$

Cylindre : $I_x = \dfrac{mR^2}{2} = I_{xy}+I_{xz}$ par symétrie $I_{xy}=I_{xz}=\dfrac{mR^2}{4}$; $I_y = I_{xy}+I_{yz}$ avec $I_{xz}=\dfrac{mL^2}{12}$

4 roues : $$\overline{\overline{I}}_G = \underbrace{4\times\rho\pi R^2\begin{pmatrix}\frac{R^2}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4}\end{pmatrix}}_{\overline{\overline{I}}_{Gi}\ \text{au centre de chq roue}} + \underbrace{\rho\pi R^2\begin{pmatrix}4\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 & 0\\ 0 & 4\left[e^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0\\ 0 & 0 & 4\left[e^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Steiner pour les 4 roues}\\ \text{xyz = axes principaux pour le solide composé des 4 roues}}}$$

$$\overline{GG}_{r1}=\left(e,-\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right);\quad \overline{GG}_{r2}=\left(e,\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right);\quad \overline{GG}_{r3}=\left(-e,\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right);\quad \overline{GG}_{r4}=\left(-e,-\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$$

$$=> \overline{\overline{I}}_G = \frac{\rho abc}{12}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(3b^2+4c^2\right) & 0 & \frac{cd}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{9a^2}{4}+4c^2+d^2\right) & 0\\ \frac{cd}{2} & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{9a^2}{4}+3b^2+d^2\right)\end{pmatrix}_{2\ \text{Parallélogramme}}$$

$$+\rho\pi\left(r_e^2-r_i^2\right)L\begin{pmatrix}\frac{r_e^2+r_i^2}{2}+c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)c\\ 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12}+c^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)^2 & 0\\ -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)c & 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12}+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{2}-d\right)^2\end{pmatrix}_{\text{Canon}}$$

$$+\rho\pi R^2\begin{pmatrix}b^2+c^2+R^2 & 0 & 0\\ 0 & 4e^2+c^2+2R^2 & 0\\ 0 & 0 & 4e^2+b^2+2R^2\end{pmatrix}_{4\ \text{roues}}$$