Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2004-2005
Corrigé de la séance 2

1. $\overline{\omega}_{AB} = 6\ \text{rad/sec}\ \overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{AB} = 0$; $\overline{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\,\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{BC} = \varepsilon_{BC}\,\overline{1}_z$; $\overline{\omega}_{CD} = -\omega_{CD}\,\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{CD} = -\varepsilon_{CD}\,\overline{1}_z$

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{v}_{C\in BC} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{BC} \times \overline{BC} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right) + \omega_{BC} L_{BC}\,\overline{1}_y \\
\overline{v}_{C\in CD} = \overline{v}_D + \overline{\omega}_{CD} \times \overline{DC} = \omega_{CD} L_{CD}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right) \text{ avec}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\omega_{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB};\quad \omega_{BC} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{L_{AB}}{L_{BC}}\omega_{AB} \\
\overline{\omega}_{CD} = -2{,}165\ \text{s}^{-1}\ \overline{1}_z;\quad \overline{\omega}_{BC} = 5{,}773\ \text{s}^{-1}\ \overline{1}_z
\end{array}\right.$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \left(\overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) + \overline{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} = \overline{\omega}_{AB} \times \left(\overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) = \omega^2{}_{AB} L_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{a}_{C\in BC} = \overline{a}_B + \overline{\omega}_{BC} \times \left(\overline{\omega}_{BC} \times \overline{BC}\right) + \overline{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} = \omega^2{}_{AB} L_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right) - \omega^2{}_{BC} L_{BC}\,\overline{1}_x + \varepsilon_{BC} L_{BC}\,\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_{C\in CD} = \overline{a}_D + \overline{\omega}_{DC} \times \left(\overline{\omega}_{DC} \times \overline{DC}\right) + \overline{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} = \omega^2{}_{CD} L_{CD}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right) + L_{CD}\varepsilon_{DC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{DC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \omega^2{}_{BC} L_{BC} - \frac{1}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{L_{CD}} \\
\varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD} + \frac{1}{2}L_{CD}\varepsilon_{DC}\right)
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{DC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{L_{AB}} - \frac{4}{3}\frac{1}{L_{BC}} - \frac{1}{6}\frac{1}{L_{CD}}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{L^2{}_{AB}}{L_{CD}}\omega^2{}_{AB} \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{DC} = 9{,}073\ s^{-2}\ \overline{1}_z \\
\varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB}\right)^2 L_{CD} + \frac{1}{2}L_{CD}\varepsilon_{DC}\right) \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{BC} = -26{,}4618\ s^{-2}\ \overline{1}_z
\end{array}\right.$$

---

1. 1.). (rem : $\dot{\omega}_1 = 0$; $\dot{\omega}_3 = 0$)

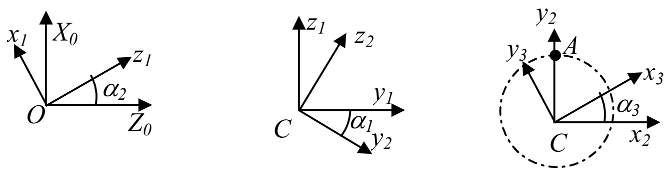
R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Y_0 = y_1$ ($\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \omega_2\,\overline{1}_{y_1}$)

R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ tournant avec R_1 et autour de l'axe $x_1 = x_2$($\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \overline{\omega}_{R_2/R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\,\overline{1}_{y_1}$)

R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $z_2 = z_3$

($\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\,\overline{1}_{y_1} + \omega_3\,\overline{1}_{z_2} = \overline{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)



$$\overline{\omega}_{disque} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\,\overline{1}_{y_1} + \omega_3\,\overline{1}_{z_2} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\left(\cos\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right) + \omega_3\,\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{disque} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1\,\overline{1}_{x_2} + \omega_2\left(\cos\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \dot{\omega}_2\underbrace{\left(\cos\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \sin\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{y_1}} + \omega_2\omega_1\underbrace{\left(-\sin\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} +$$

$$+\,\omega_1\omega_2\underbrace{\left(-\sin\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} - \omega_1\omega_2\underbrace{\left(-\sin\alpha_1\,\overline{1}_{y_2} + \cos\alpha_1\,\overline{1}_{z_2}\right)}_{\overline{1}_{z_1}} + \left(\omega_1\omega_3\,\overline{1}_{y_2} + \omega_2\omega_3\cos\alpha_1\,\overline{1}_{x_2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \omega_2\omega_3\cos\alpha_1\,\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\cos\alpha_1\right)\overline{1}_{y_1} + \left(\omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_3\sin\alpha_1\right)\overline{1}_{z_1}$$

$$=> \overline{\varepsilon}_{disque}\Big|_{\text{Instant } t:\alpha_1=0} = \omega_2\omega_3\,\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1\,\overline{1}_{z_1}$$

autre méthode :

$$\overline{\varepsilon}_d = -\underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}}_{=0}\overline{1}_{x_2} - \omega_1\underbrace{\frac{d\overline{1}_{x_2}}{dt}}_{=\overline{\varpi}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{x_2}} + \underbrace{\frac{d\omega_2}{dt}}_{=\dot{\omega}_2}\overline{1}_{y_1} + \omega_2\underbrace{\frac{d\overline{1}_{y_1}}{dt}}_{=\overline{\varpi}_{R_1/R_0}\times\overline{1}_{y_1}} + \underbrace{\frac{d\omega_3}{dt}}_{=0}\overline{1}_{z_2} + \omega_3\underbrace{\frac{d\overline{1}_{z_2}}{dt}}_{=\overline{\varpi}_{R_2/R_0}\times\overline{1}_{z_2}}$$

$$\overline{\varepsilon}_d\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = -\omega_1\left(-\omega_2\,\overline{1}_{z_1}\right) + \dot{\omega}_2\,\overline{1}_{y_1} + \omega_2\left(0\right) + \omega_3\left(\omega_1\,\overline{1}_{y_2} + \omega_2\underbrace{\cos\alpha_1}_{=0(\alpha_1=0)}\overline{1}_{x_2}\right) = \omega_2\omega_3\,\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\overline{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1\,\overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{v}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{v}_C + \overline{\varpi}_d\times\overline{CA} = -R\omega_3\,\overline{1}_{x_1} - \left(b\omega_2 + R\omega_1\right)\overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{a}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \overline{a}_C + \overline{\varpi}_d\times\left(\overline{\varpi}_d\times\overline{CA}\right) + \overline{\varepsilon}_d\times\overline{CA} = -\left(b\omega^2{}_2 + 2R\omega_1\omega_2\right)\overline{1}_{x_1} - R\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right)\overline{1}_{y_1} + \left(2R\omega_2\omega_3 - b\dot{\omega}_2\right)\overline{1}_{z_1}$$

2. 2.) Invariant scalaire $\boxed{\overline{v}_C.\overline{\varpi} = -b\omega_2\omega_3}$

a) si $\omega_2 \neq 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: mouvement hélicoïdal instantané (HI) = mouvement de rotation et de translation de vecteur vitesse angulaire $\overline{\varpi} = -\omega_1\overline{1}_x + \omega_2\overline{1}_y + \omega_3\overline{1}_z$. Axe HI est // à $\overline{\varpi}$ passant par Q tel que

$$\overline{CQ} = -\frac{\overline{\varpi}\times\left(\overline{v}_Q - \overline{v}_C\right)}{\overline{\varpi}.\overline{\varpi}} + \lambda\overline{\varpi} \quad \text{avec} \quad \overline{v}_Q = \frac{\overline{\varpi}.\overline{v}_C}{\overline{\varpi}.\overline{\varpi}}\overline{\varpi} = -b\omega_2\omega_3\frac{\left(-\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3} \;=>\; \overline{CQ} = \frac{\left(-b\omega^2{}_2, -b\omega_1\omega_2, 0\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3}$$

b) si $\omega_2 = 0$ *et* $\omega_3 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\varpi}$ passant par C avec $\overline{\varpi} = \left(-\omega_1, 0, \omega_3\right)$.

Cas part. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation instantanée (en t) de $\overline{\varpi} = \left(0,0,\omega_3\right)$ autour de C_z
- si de plus $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\varpi}$, même axe de rotation. ∀t)

c) si $\omega_3 = 0$ *et* $\omega_2 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\overline{\varpi}$ avec $\overline{\varpi} = \left(-\omega_1, \omega_2, 0\right)$

Cas part. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation continue autour de *Oy*.
- Si en plus $\dot{\omega}_2 = 0$: Rotation. continue uniforme

d) si $\omega_2 = \omega_3 = 0$: Rotation instantanée de $\overline{\varpi} = \left(-\omega_1, 0, 0\right)$ autour de *Ox*.

Cas part. :

- si $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\overline{\varpi}$, même axe)
- si $\omega_1 = 0$ Solide immobile à cet instant.

3. Si Q et Q' sont deux points distincts de l'axe hélicoïdal instantané ($\overline{v}_Q$ et $\overline{v}_{Q'}$ // $\overline{\varpi}$)

$$\overline{a}_{Q'} = \overline{a}_Q + \overline{\varpi}\times\left(\overline{\varpi}\times\overline{QQ'}\right) + \overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} \quad \text{avec } \overline{\varpi}\times\left(\overline{\varpi}\times\overline{QQ'}\right) = \overline{\varpi}\times\left(\overline{v}_{Q'} - \overline{v}_Q\right) = 0 \quad \text{car } \overline{\varpi} // \overline{v}_{Q'} // \overline{v}_Q$$

Pour que les points de l'axe hélicoïdal aient le même vecteur accélération, il faut $\overline{j}_{Q'} = \overline{j}_Q \;=>\; \overline{\varepsilon}\times\overline{QQ'} = 0$

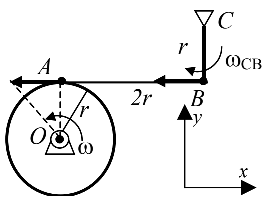
comme nous avons : $\overline{\varpi}\times\left(\overline{\varpi}\times\overline{QQ'}\right) = 0 => \overline{QQ'} = \dfrac{\overline{QQ'}.\overline{\varpi}}{\overline{\varpi}.\overline{\varpi}}\overline{\varpi} \;=>\; \overline{QQ'} // \overline{\varpi}$

On peut donc vérifier la relation suivante $\overline{\varepsilon}\times\overline{\varpi} = 0$

$$\begin{cases} \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\omega_3 - \omega_1\omega^2{}_2 = 0 \\ \omega_2\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) = 0 \\ \omega^2{}_2\omega_3 + \omega_1\left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) = 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_3 = 0 \\ \text{ou} \\ \omega_2 = 0 \;\; et \;\; \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 \end{cases}$$

3.a

$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{\varpi}\times\overline{OA} = \overline{\varpi}\times\overline{OA} = -\omega r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\varpi}_{CB}\times\overline{CB} = -\omega_{CB}r\,\overline{1}_x \end{aligned}\right\} => \omega = \omega_{CB}$$

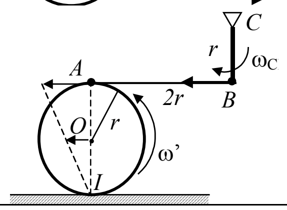


Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de *A* et *B* doivent être égales.

3.b

$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_A &= \overline{v}_I + \overline{\varpi}'\times\overline{IA} = \overline{\varpi}'\times\overline{IA} = -\omega' 2r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\varpi}_{CB}\times\overline{CB} = -\omega_{BC}r\,\overline{1}_x \end{aligned}\right\} => 2\omega' = \omega_{CB}$$

(avec *I* le point de contact du disque avec le sol)

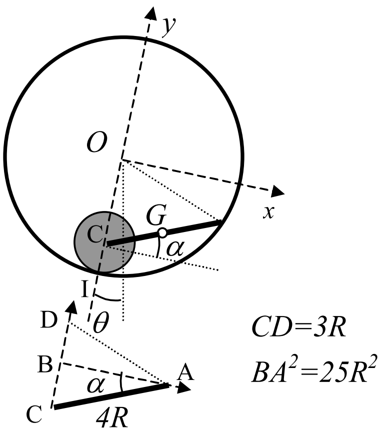


---

4. Disque : Rotation instantanée autour de l'axe *Iz* de vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega}$

Tige : Rotation continue autour de l'axe *Oz* de vecteur vitesse angulaire $\overline{\Omega}$

Point C : trajectoire circulaire en fonction de l'angle θ.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C\in\text{Disque}} = \overline{v}_I + \overline{\omega}\times\overline{IC} = -\omega R\overline{1}_x \\ \overline{v}_{\text{point } C}(\theta) = -\dot{\theta}3R\overline{1}_x\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\omega} = 3\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C\in\text{Tige}} = \overline{v}_O + \overline{\Omega}\times\overline{OC} = 3R\Omega\overline{1}_x \\ \overline{v}_{C\in\text{Disque}} = \overline{v}_{C\in\text{Tige}}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\Omega} = -\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_C + \overline{\Omega}\times\overline{CG} = -3R\dot{\theta}\overline{1}_x - 2R\dot{\theta}\left(\cos\alpha\,\overline{1}_y - \sin\alpha\,\overline{1}_x\right)$$

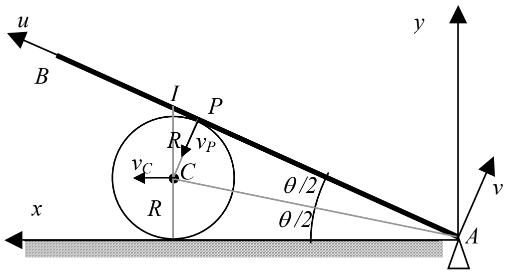
$$\text{avec } \sin\alpha = \frac{3}{8} \text{ et } \cos\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8} \Rightarrow \overline{v}_G = -\frac{R\dot{\theta}}{4}\left(9\overline{1}_x + \sqrt{55}\,\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_C + \overline{\Omega}\times\left(\overline{\Omega}\times\overline{CG}\right) + \overline{\varepsilon}\times\overline{CG} = \overline{a}_C + -\dot{\theta}\overline{1}_z\times\left(-2R\dot{\theta}\left(\cos\alpha\,\overline{1}_y - \sin\alpha\,\overline{1}_x\right)\right) - \ddot{\theta}\,\overline{1}_z\times\overline{CG}$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_C + -2R\dot{\theta}^2\cos\alpha\,\overline{1}_x - 2R\dot{\theta}^2\sin\alpha\,\overline{1}_y + -2R\cos\alpha\ddot{\theta}\,\overline{1}_y + 2R\sin\alpha\ddot{\theta}\,\overline{1}_x$$

$$\overline{a}_G = -3R\ddot{\theta}\overline{1}_x + 3R\dot{\theta}^2\overline{1}_y + \frac{R}{4}\left(3\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\sqrt{55}\right)\overline{1}_x - \frac{R}{4}\left(\sqrt{55}\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2\right)\overline{1}_y = -\frac{R}{4}\left(9\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sqrt{55}\right)\overline{1}_x - \frac{R}{4}\left(\sqrt{55}\ddot{\theta} - 9\dot{\theta}^2\right)\overline{1}_y$$

5.



$$\overline{v}_C = \frac{d\overline{AC}}{dt} = \frac{d\left(R.\text{cotg}\frac{\theta}{2}\overline{1}_x + R\overline{1}_y\right)}{dt} = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\overline{1}_x$$

C.I.R. du disque : $\overline{v}_C \,//\, x$ et $\overline{v}_P \perp AP \Rightarrow$ *I* déterminé

$\overline{\omega}_{\text{disque}}$ dépend de $\dot{\theta} \Rightarrow$ pour déterminer $\overline{\omega}_{\text{disque}}(\dot{\theta})$,

il faut écrire la condition de roulement sans glissement en *P*

(ds les axes liés à la tige *Auvw* avec $u \,//\, AB$) : $\overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_{P\in\text{disque}}$

$$\text{avec}\left\{\begin{array}{l}\overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_t\times\overline{AP} = R\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\overline{1}_v \\ \overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d\times\overline{CP} = \left(-\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta - \omega_d R\right)\overline{1}_u + \frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta\,\overline{1}_v \quad \text{avec } \overline{\omega}_d = \omega_d\overline{1}_z\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_{P\in\text{tige}}\right)_{\overline{1}_u} \Rightarrow \omega_d = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\theta\;\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps.