1.1

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \left(\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_3}^2\right)$$

$$\overline{v}_{G_2} = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BG_{2}} = L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right) - \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right)$$

$$= L\dot{\theta}\left(-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\overline{1}_x + L\dot{\theta}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\overline{1}_y = -\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_y$$

$$\overline{v}_{G_3} = \frac{d}{dt}\left(2L\cos\theta + \frac{L}{2}\right)\overline{1}_x = -2L\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_x$$

$$T = \left(\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}(8\sin^2\theta + 1)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right)$$

$$=> \quad T = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + 3mL^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

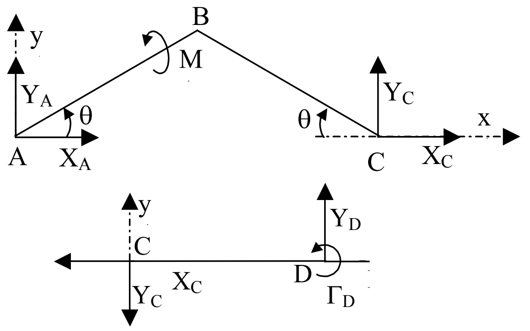
$$\delta\overline{OG_3} = -2L\sin\theta\delta\theta\,\overline{1}_x \quad \text{et} \quad \overline{F} = F(\theta)\overline{1}_x$$

$$\delta\tau = Q_\theta\delta\theta = M\delta\theta - 2Fl\sin\theta\delta\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta \quad => \quad mL^2\ddot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 6\sin^2\theta\right) + 6mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = M - 2FL\sin\theta$$

1.2

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = \overline{m}_{e,A} = M(\theta) + 2L\cos\theta Y_C \quad \text{où} \quad \overline{M}_A = \overline{M}_{A,1} + \overline{M}_{A,2} = \left(\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right) + \left(\overline{M}_{G2} + \overline{AG_2} \times \overline{R}_2\right)$$



$$\overline{M}_A = \left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\,\overline{1}_z\right) + \left(-\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\,\overline{1}_z + m\frac{3l^2}{4}\dot{\theta}\,\overline{1}_z\right) = ml^2\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$=> \quad Y_C = \frac{ml^2\ddot{\theta} - M(\theta)}{2l\cos\theta}$$

$$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x} \quad \text{où} \quad R_x = mv_{G3,x} = -2mL\sin\theta\dot{\theta}$$

$$=> \quad X_C = F(\theta) + 2mL(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)$$

---

2. Forces :

- Force de pesanteur en G, C_1, C_2
- Force de réaction normale et frottement pour empêcher le glissement en O_1 et O_2 (N_1, T_1, N_2, T_2)
- Couple moteur en C sur la roue arrière

Degré de liberté :

- 3 solides en 2D => 3 x 3 paramètres cinématiques de position.
- 8 condition cinématique entre ces solides :
  - Roulement sans glissement en O_1 = 2 conditions cinématiques
  - Roulement sans glissement en O_2 = 2 conditions cinématiques
  - Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_1 = 2 conditions cinématiques
  - Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_2 = 2 conditions cinématiques
- 9 – 8 = 1 ddl. On prend le paramètre x décrivant la position du centre de gravité G de la moto.

2.1 Théorème de la résultante cinétique sur le système complet.

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{F}_e = M\overline{g} + 2m\overline{g} + T_1\overline{1}_x + N_1\overline{1}_y + T_2\overline{1}_x + N_2\overline{1}_y$$

$$\left(M + 2m\right)\ddot{x} = T_1 + T_2 \quad (1)$$

$$0 = -Mg - 2mg + N_1 + N_2 \quad (2)$$

Théorème du moment cinétique en C_2 sur la roue 2 (force de liaison X_2 et Y_2)

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_2} = \sum \overline{m}_{e,C_2} + m\overline{v}_G \times \overline{v}_{C_2} = \overline{m}_{e,C_2} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega} = -\omega_2 \overline{1}_z$$

Condition cinématique : $\overline{v}_{O_2} = 0 = \overline{v}_{C_2} + \overline{\omega}_2 \times \overline{C_2O_2} = \dot{x}\overline{1}_x - \omega_2 r \overline{1}_x \Rightarrow \overline{\omega}_2 = -\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z$

$$\overline{M}_{C_2} = \overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega} = -mi^2\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \Rightarrow -mi^2\frac{\ddot{x}}{r}\overline{1}_z = rT_2\overline{1}_z \Rightarrow T_2 = -m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x} \quad (3)$$

(3) dans (1) : $T_1 = (M+2m)\ddot{x} + m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x}$ (4)

2.2 Théorème du moment cinétique en O_1 sur la moto et les 2 roues (force de liaison X_1 et Y_1)

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_{O_1} = \sum \overline{m}_{e,O_1} + \overline{R} \times \overline{v}_{O_1} = \overline{m}_{e,O_1} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_1 = -\omega_1\overline{1}_z = -\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \quad \text{par la deuxième condition cinématique}$$

$$\begin{cases} \overline{M}_{O_1} = \overline{M}_{O_1,M} + \overline{M}_{O_1,r1} + \overline{M}_{O_1,r2} \\ \overline{M}_{O_1,M} = \underbrace{\overline{M}_{G,M}}_{=0} + \overline{O_1G} \times \overline{R} = -hM\dot{x}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r1} = \overline{\overline{I}}_{O_1}.\overline{\omega} + m\overline{O_1C_1} \times \overline{v}_{O_1} = -m\left(i^2+r^2\right)\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r2} = \overline{M}_{G_2,r2} + \overline{O_1G_2} \times \overline{R}_{r2} = -m\frac{i^2}{r}\dot{x}\overline{1}_z - mr\dot{x}\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\left(-hM - m\left(i^2+r^2\right)\frac{1}{r} - m\frac{i^2}{r} - mr\right)\ddot{x} = -\frac{L}{3}Mg - Lmg + LN_2$$

$$\Rightarrow N_2 = \left(\frac{M}{3}+m\right)g - \left(hM + 2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L} \quad (5)$$

En réinjectant (5) dans (2), on obtient :

$$N_1 = \left(\frac{2M}{3}+m\right)g + \left(hM + 2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L}$$

2.3 La moto démarrera en se cabrant lorsque la force verticale entre le sol et la route avant s'annule :

$$N_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_{\max} = \frac{Lr\left(\frac{M}{3}+m\right)g}{\left(hMr + 2m\left(i^2+r^2\right)\right)}$$

Théorème du moment cinétique en C_1 sur la roue arrière (force de liaison X_1 et Y_1)

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_1} = \sum \overline{m}_{e,C_1} + \overline{R} \times \overline{v}_{O_{C_1}} = \overline{m}_{e,C_1} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_1 = -\omega_1\overline{1}_z = -\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \quad \text{par la deuxième condition cinématique}$$

$$-mi^2\frac{\ddot{x}}{r} = -C + rT_1 \Rightarrow \text{avec (4)} : C = \left(m\frac{i^2}{r^2} + (M+2m) + m\frac{i^2}{r^2}\right)r\ddot{x} \Rightarrow C_{\max} = \left(Mr + 2m\left(\frac{i^2+r^2}{r}\right)\right)\ddot{x}_{\max}$$

Ou par l'équation de mouvement :

$$T = T_M + T_{r1} + T_{r2} = \frac{M\dot{x}^2}{2} + 2\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mi^2}{2}\left(-\frac{\dot{x}}{r}\right)^2\right) = \left(\frac{M}{2} + m\frac{r^2+i^2}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

$$V = 0$$

$$Q_x\delta x = -C\delta\theta = -C\left(-\frac{\delta x}{r}\right) = \frac{C}{r}\delta x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = Q_x \Rightarrow \left(M + 2m\frac{r^2+i^2}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{C}{r} \Rightarrow C = \left(Mr + 2m\frac{r^2+i^2}{r}\right)\ddot{x}$$