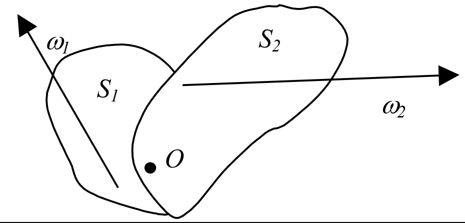
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique Rationnelle **Semaine du 02/02 au 07/02/2004**

2$^{\text{ème}}$ candidature 2003-2004

Séance n°9 : Lagrange (solide)

COCHER LES CASES QUI SONT JUSTES (0 à 3 réponses possibles)



O est le point de liaison de S_1 à S_2

1. Energie cinétique. Les énergies cinétiques suivantes sont-elles correctes ?

- ○ a. $T = T_1 + T_2$
- ○ b. $T = \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}_1 . \overline{\overline{I}}_{O1} . \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 . \overline{\overline{I}}_{O2} . \overline{\omega}_2\right)$
- ○ c. $T = \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) . \left(\overline{\overline{I}}_{O1} + \overline{\overline{I}}_{O2}\right) . \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right)$
- ○ d. $T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_O^2 + \left(m_1 + m_2\right) \overline{v}_O . \left(\left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) \times \overline{OG}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) . \left(\overline{\overline{I}}_{O1} + \overline{\overline{I}}_{O2}\right) . \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right)$
- ○ e. $T = \frac{1}{2} m_1 v_O^2 + m_1 \overline{v}_O . \left(\overline{\omega}_1 \times \overline{OG_1}\right) + \frac{1}{2} \overline{\omega}_1 . \overline{\overline{I}}_{O1} . \overline{\omega}_1 + \frac{1}{2} m_2 v_O^2 + m_2 \overline{v}_O . \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{OG_2}\right) + \frac{1}{2} \overline{\omega}_2 . \overline{\overline{I}}_{O2} . \overline{\omega}_2$

2. Lagrangien. Que vaut le Lagrangien ?

- ○ a. $L = T + V$
- ○ b. $L = T - V$
- ○ c. $L = T - V + Q$

3. Equation de Lagrange

- ○ a. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- ○ b. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- ○ c. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$
- ○ d. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$
- ○ e. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

4. Intégrale première. C'est équations donnent ou entraînent-elles une intégrale première ?

a. $T + V = E_O$

b. $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = A$

c. $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = A$

d. $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

***5.** Ces expressions sont-elles correctes ?*

a. $Q_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

b. $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$

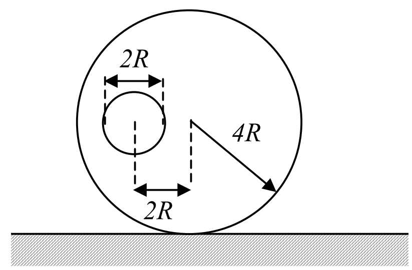
c. $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$

d. $Q_i = \sum_h \overline{F}_h \times \dfrac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial \dot{q}_i}$

e. $Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \dfrac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$

---

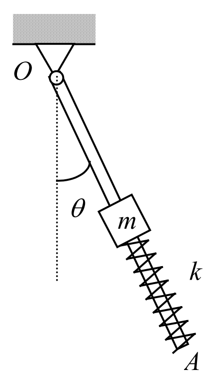
1. Une roue homogène pesante de masse m est constituée d'un disque circulaire de rayon $4R$ dans lequel est creusé un disque circulaire de rayon R.
Elle est lâchée sans vitesse initiale sur une surface horizontale dans la position indiquée ci-contre.
Déterminer l'équation de Lagrange définissant le mouvement.
Donner une intégrale première.
Calculer la vitesse angulaire maximum qu'elle peut atteindre si elle roule sans glisser sur le plan horizontal. ($\omega = \omega\,(m,g,R)$)
AN : m = 75 kg ; R = 7,5 cm.



---

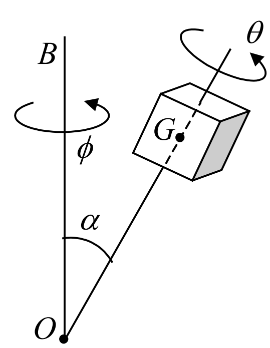
2. Une masse m glisse sans frottement sur une tige mince homogène OA de masse M et de longueur L qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité O. La masse est reliée à A par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel k et de longueur libre L-r_O.
En utilisant Lagrange :

1. Déterminer les équations du mouvement
2. Déterminer les réactions de liaison de la masse m sur la tige.



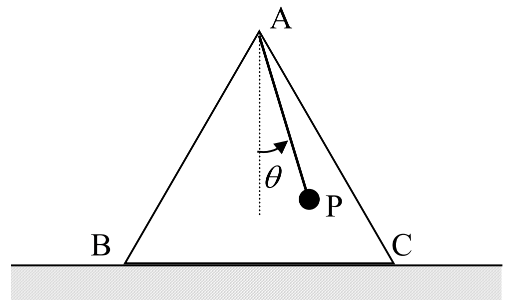
---

3. Un cube plein, homogène, de masse m et de côté d, a son centre de masse G fixé sur une tige sans masse OA, qui le traverse par le milieu de deux faces opposées. L'extrémité O est fixe et $OG = l$. La tige OA tourne sur elle-même ($\dot{\theta}\,(t)$), et est, de plus, animée d'un mouvement de rotation ($\dot{\phi}\,(t)$) autour d'un axe fixe et vertical avec lequel elle fait un angle constant α. Le cube est pesant.
Ecrire les équations de Lagrange et en déduire $\theta(t)$ et $\phi(t)$ pour des conditions initiales quelconques.



4. Un triangle est composé de 3 barres homogènes *ABC*, de côté *L*. Le triangle de masse *M* se déplace dans un plan vertical. Son côté *BC* glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet *A* est suspendu un pendule simple de masse *m* et de longueur ℓ qui oscille dans le plan ABC.

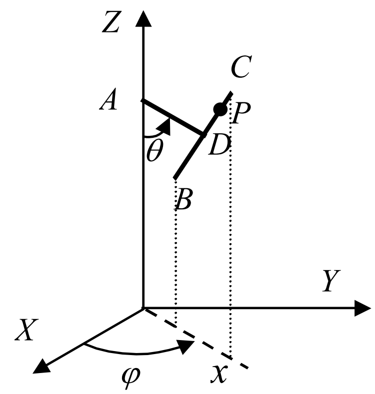
Écrire la(les) équation(s) de Lagrange et leur intégrale(s) première(s).



---

5. Les deux branches d'un *T* symétrique ont même masse *m* et même longueur *l*. Le *T*, *ABC*, est articulé en *A* sur un axe vertical *OZ*. Un point pesant P, de masse M peut se déplacer le long de *BC*. Le *T* peut tourner autour de *A* dans le plan vertical *zOx*, qui, lui-même, peut tourner autour de *OZ*.
Ecrire les équations de Lagrange du système et les intégrales premières immédiates.

Que deviennent les équations de Lagrange et les intégrales premières si à l'aide d'un couple *C*, on impose $\dot{\phi}$=const ? Calculer *C*.



---

6. La poulie de rayon *R* roule sans glisser sur le sol horizontal grâce à deux ergots de rayon *r*. Le rayon de giration du solide *S* (poulie + ergots) autour de l'axe C_Z vaut i_c et sa masse est égale à *m*. Une force $\overline{F} = F\,\overline{1}_x$ est appliquée en *A*.

Quel est (sont) l'(les) équation(s) permettant de définir le mouvement de la poulie ?