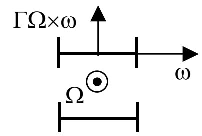
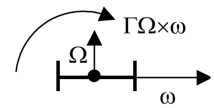
1. Gyrostat : $\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$
Le bus aura tendance à basculer vers la droite.

Vue de haut



Vue de derrière



2. $\frac{d}{dt}\overline{M}_O = \sum \overline{m}_{e,O} + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$ avec $\overline{\omega}$ constant

1. A l'équilibre (ω=0, Ω=0) : 0=$\sum \overline{m}_{e,O} + 0$ => $\sum \overline{m}_{e,O} = \overline{m}_{e,O}(m_A) + \overline{m}_{e,O}(M) = 0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x + C_e\,\overline{1}_x$=0

   avec C_e = couple qui équilibre le moment généré par la masse A => $\overline{C}_e = -0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x$

2. Pendant le mouvement ($\omega = const$) : $0 = \overline{m}_{e,O}(m_A) + \overline{m}_{e,O}(M) + \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$

$$0 = b.m_A g\,\overline{1}_x - 0{,}18.m_A g\,\overline{1}_x - \left(2{,}2\;.\;0{,}06^2\right).\left(\frac{1725}{60}.2\pi\right).\left(0{,}2\right)\overline{1}_x$$

$$=> b - 0{,}18 = 0{,}0364 \;\; => \;\; b = 0{,}216\ m$$

3. $T = 2.\left(\frac{1}{2}mv_{G_1}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1.\overline{\overline{I}}_{G_1}.\overline{\omega}_1\right) + \left(\frac{M}{2}v_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2\right)$ Le solide 2 est en translation curviligne : $\omega_2 = 0$

$$T = 2.\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{M}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\cos\theta = -\left(m+M\right)gL\cos\theta$$

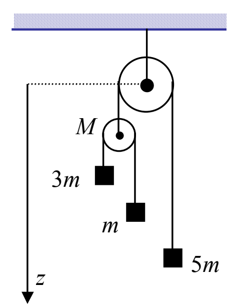
$$L = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \left(m+M\right)gL\cos\theta$$

Le travail du couple C : $\delta\tau$=C$\delta\theta$ => $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q_\theta$: $m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} + \left(m+M\right)gL\sin\theta = C$

4. Nous avons 3 masses ponctuelles et deux solides (poulies). Soit les positions des masses m, 3m, 5m et la poulie M : z_1, z_2, z_3, z_4.

$z_1 = u + v$; $z_2 = +u - v + C_1$; $z_3 = -u + C_2$; $z_4 = u$

$$T = \sum_{\substack{\text{masses}\\\text{ponctuelles}}}\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2\right) + \sum_{solides}\left(\frac{M_i}{2}v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i\right)$$ avec $I = 2mR^2$ donc $M = 4m$ car $I(disque) = \frac{MR^2}{2}$



$$T = \left(\frac{m}{2}(\dot{u}+\dot{v})^2\right)_{m_1} + \left(\frac{3m}{2}(\dot{u}-\dot{v})^2\right)_{m_2} + \left(\frac{5m}{2}(-\dot{u})^2\right)_{m_3} + \left(\frac{1}{2}\frac{4M\left(2R\right)^2}{2}\omega_1{}^2\right)_{S_1(4M)}$$

$$+\left(\frac{M}{2}(\dot{u})^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2{}^2\right)_{S_2(M)} \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\dot{u}}{2R} \text{ et } \omega_2 = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{m}{2}\dot{v}^2 + m\dot{u}\dot{v} + \frac{3m}{2}\dot{u}^2 + \frac{3m}{2}\dot{v}^2 - 3m\dot{u}\dot{v} + \frac{5m}{2}\dot{u}^2 + \frac{8m}{2}\dot{u}^2 + \frac{4m}{2}\dot{u}^2 + \frac{2m}{2}\dot{v}^2$$

$$T = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v}$$

$$V = -mgz_1 - 3mgz_2 - 5mgz_3 - Mgu = -3mgu + 2mgv + C \;\; => \;\; L = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v} + 3mgu - 2mgv$$

$$\begin{cases} u : \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 : \;\; 21m\ddot{u} - 2m\ddot{v} - 3mg = 0 \\ v : \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 : \;\; 6m\ddot{v} - 2m\ddot{u} + 2mg = 0 \end{cases}$$

$$=> \ddot{v} = -\frac{18g}{61} \text{ et } \ddot{u} = \frac{7g}{61}$$

$$=> \ddot{z}_1 = -\frac{18g}{61} + \frac{7g}{61} = -\frac{11g}{61}\ (\downarrow);\ \ddot{z}_2 = \frac{7g}{61} + \frac{18g}{61} = \frac{25}{61}g\ (\downarrow);\ \ddot{z}_3 = -\frac{7g}{61}\ (\uparrow);\ \ddot{z}_4 = \frac{7g}{61}\ (\downarrow)$$

5.1 1. Système complet

$$T = \sum_{solides} \left(\frac{m_i}{2} v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega}_i . \overline{\overline{I}}_{G_i} . \overline{\omega}_i \right)$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \frac{4L^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{2ML^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad \text{avec } \overline{v}_{G_1} = L\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_x - L\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BG_1} = \frac{d\overline{OG_1}}{dt}$$

$$T_{SF} = \frac{1}{2} m \left(\left(2L\cos\theta\dot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\varphi\dot{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{12}\dot{\varphi}^2 = mL\cos\theta\dot{\theta}\left(2L\cos\theta\dot{\theta} + a\cos\varphi\dot{\varphi}\right) + \frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2$$

$$\text{avec } \overline{v}_{G_2} = \overline{v}_S + \overline{\omega}_2 \times \overline{SG_2} = \frac{d\overline{OG_2}}{dt}$$

$$V = Mgl\cos\theta + mg\left(Const - \frac{a}{2}\cos\varphi \right) + \frac{k}{2}(2Lsin\theta)^2 = Mgl\cos\theta - \frac{a}{2}mg\cos\varphi + \frac{k}{2}4L^2 sin^2\theta$$

$$L = \frac{2ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + 2mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + mLa\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2 - Mgl\cos\theta + \frac{a}{2}mg\cos\varphi - \frac{k}{2}4L^2 sin^2\theta$$

5.2

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \frac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + 4mL^2\cos^2\theta\ddot{\theta} - 8mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + mLa\cos\theta\cos\varphi\ddot{\varphi} - mLa\cos\theta\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$-mLa\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} + 4mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + mLa\sin\theta\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} - Mgl\sin\theta + 4kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$=> \frac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + 4mL^2\cos\theta\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right) + mLa\cos\theta\left(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) - Mgl\sin\theta + 4kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \ : \ \frac{ma^2}{3}\ddot{\varphi} + mLa\cos\varphi\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right) + \frac{a}{2}mg\sin\varphi = 0$$

5.3 Il y a conservation de l'énergie étant donné que toutes les forces en présence dérive d'un potentielle et qu'il n'y a pas de frottement.

6.

$$T = \sum_{solides} \left(\frac{m_i}{2} v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega}_i . \overline{\overline{I}}_{G_i} . \overline{\omega}_i \right)$$

$$T_{Disque} = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$T_{nacelle} = \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_z\left(\dot{\alpha} + \dot{\theta}\right)^2 \quad \text{avec } I_{z_G} = \frac{\left(\rho\pi(2r)^2.2l\right)(2r)^2}{2} - \frac{\left(\rho\pi r^2 l\right)r^2}{2} = \frac{31}{7}m\frac{r^2}{2} \quad avec \quad m = \rho\pi 7r^2 l$$

$$=> T = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 + 4.\left(\frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{31}{14}mr^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\theta}\right) \right) \quad \text{et} \quad V = Const$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + 4mL^2\ddot{\theta} + 2\frac{31}{7}mr^2\ddot{\theta} + 2\frac{31}{7}mr^2\ddot{\alpha} = M(\theta) \ => \left(\frac{MR^2}{2} + 4mL^2\right)\ddot{\theta} = M(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \ : \ 4\frac{31}{14}mr^2\ddot{\alpha} + 4\frac{31}{14}mr^2\ddot{\theta} = 0 \ => \ \ddot{\alpha} + \ddot{\theta} = 0$$

S8E3 : Erreur d'écriture, le résultat était correct : $\overline{M}_{O\,(m)} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} + m\overline{OG} \times \underbrace{\overline{v}_O}_{=0} = \underbrace{\overline{M}_{G\,(m)}}_{=0} + m\overline{OG} \times \overline{v}_G = mr^2\dot{\theta}\ \overline{1}_z$ et

non pas $\overline{M}_{O\,(m)} = \overline{M}_{G\,(m)} + m\overline{OG} \times \underbrace{\overline{v}_O}_{=0} = mr^2\dot{\theta}\ \overline{1}_z$

S8E5 : $\overline{\omega} = 40\pi\ rad/s\ \overline{1}_y$ et non $\overline{\omega} = 40\pi\ rad/s\ \overline{1}_x$

S9E2.2 : L'équation de Lagrange donnée est celle en θ : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ **>Teaching>mécaII>Tps. Login : s*tudent*, mot de passe : n*ewton***