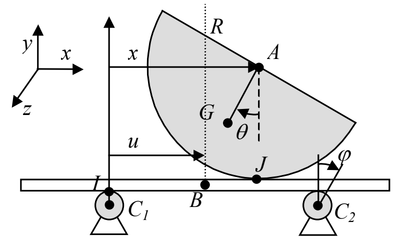
1.1



Coordonnées généralisées :
u : détermine la position du centre de masse de la planche (S_3) (suivant x)
φ : détermine la rotation des deux rouleaux (S_1 et S_2)
=> il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et la planche donc on peut écrire φ en fonction de u. $\overline{v}_{I\in C_1} = r\dot{\varphi}\overline{1}_x = \overline{v}_{I\in P} = \dot{u}\overline{1}_x \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{u}/r$
θ : détermine la rotation du demi-disque autour de A. (S_4)
x : détermine la position de A (suivant x)
=> il n'y a pas de glissement entre le demi-disque et la planche donc on peut écrire x en fonction de u.

Degré de liberté : 2 .Les paramètres u et θ détermine entièrement la position du demi-disque.
Calculons les équations du mouvement par Lagrange.
Considérons le système complet = {2 rouleaux (m) + planche (m) + demi-disque (M)}

$$T = T_{S_1} + T_{S_2} + T_{S_3} + T_{S_4} \quad \text{avec} \quad T_{S_1} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_1}.\overline{\overline{I}}_{C_1}.\overline{\omega}_{S_1} = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2} \quad (\text{avec } \overline{v}_{C_1} = 0);$$

$$T_{S_2} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_2}.\overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega}_{S_2} = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2}; \quad T_{S_3} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_3}.\overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega}_{S_3} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 \quad (\text{avec } \overline{\omega}_{S_3} = 0)$$

$$T_{S_4} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{S_4}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_{S_4} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_{S_4} = -\dot{\theta}\overline{1}_z \ , \ I_{z\,G} = \frac{MR^2}{2} - Ma^2$$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_I + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{IG} = \left(\dot{u} + R\dot{\theta} - a\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \left(a\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_y \quad \left(\text{avec } \overline{IG} = \left(-a\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(R - a\cos\theta\right)\overline{1}_y\right)$$

$$\Rightarrow T_{S_4} = \frac{M}{2}\left(\dot{u}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta R\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$V = V_{S_1} + V_{S_2} + V_{S_3} + V_{S_4} = 0 + 0 + rmg + \left(R - a\cos\theta\right)Mg = C - aMg\cos\theta$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(2m + M\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2 + aMg\cos\theta$$

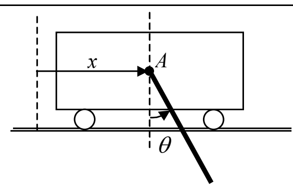
Toutes les forces dérivent d'un potentiel

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 : \ MR\left(\frac{3R}{2} - 2a\cos\theta\right)\ddot{\theta} + M\left(R - a\cos\theta\right)\ddot{u} + MRa\sin\theta\dot{\theta}^2 + aMg\sin\theta = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 : \ \left(2m + M\right)\ddot{u} + M\left(R - a\cos\theta\right)\ddot{\theta} + Ma\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0 \end{aligned}}$$

Intégrales premières :

$$\boxed{\begin{aligned} &T + V = E_0 \ : \ \frac{1}{2}\left(2m + M\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2 + C - aMg\cos\theta = E_0 \\ &\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{u}} = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{u}} = Const : \ \left(2m + M\right)\dot{u} + M\left(R - a\cos\theta\right)\dot{\theta} = Const \end{aligned}}$$

2.1



Système = {Tige} :

Théorème de la résultante cinétique : $\dfrac{d\overline{R}}{dt} = \sum F_e$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AG} = \dot{x}\overline{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right)$$

$$m\left(\ddot{x} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y = X_A\overline{1}_y + \left(-mg + Y_A\right)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = m\left(\ddot{x} + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}$$

A exprimer en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Cherchons la relation $\ddot{x} = f\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\right)$ = équation du mouvement

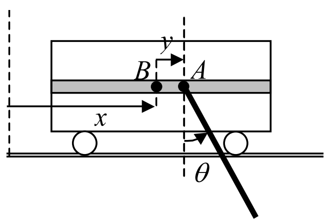
$$T = T_{chariot} + T_{Tige} = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot} + \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige} \quad \text{et} \quad V = C - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ : \ (M+m)\ddot{x} + \dfrac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right) = 0 \ => \ \ddot{x} = -\dfrac{m}{M+m}\left(\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ : \ \left(\dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x}\right) + mg\dfrac{L}{2}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$=> \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta} - \frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\sin\theta = 0$$

$$\boxed{=> \begin{cases} X_A = \dfrac{mM}{M+m}\dfrac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}}$$

2.2



En ajoutant la coordonnée y, on peut décrire complètement le système.
Le théorème de Lagrange nous donnera une équation supplémentaire.

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = (\dot{x}+\dot{y})\overline{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right) = \overline{v}_G* + \dot{y}\overline{1}_x$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}L\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$=> T = T* + \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}L\dot{\theta}\cos\theta\right) \ \text{ et } \ V = V*$$

Théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \sum F_e : \ m\left(\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overline{1}_x + m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y = X_A\overline{1}_y + \left(-mg + Y_A\right)\overline{1}_y$$

$$=> \begin{cases} X_A = m\left(\ddot{x} + \ddot{y} + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta : \dfrac{L}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{1}{2}\cos\theta\left(\ddot{x} + \ddot{y}\right) = -\dfrac{1}{2}g\sin\theta \quad (1) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \ : M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \ddot{y}\right) + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0 \quad (2) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial T}{\partial y} = Q_y \ : m\left(\ddot{x} + \ddot{y}\right) + \dfrac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \dfrac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 = X_A \quad (3) \end{cases}$$

$$(2)-(3): \ M\ddot{x} + \frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{\theta} + \frac{m}{2}L\sin\theta\dot{\theta}^2 + X_A = 0 => \ddot{x} = \frac{X_A}{M}$$

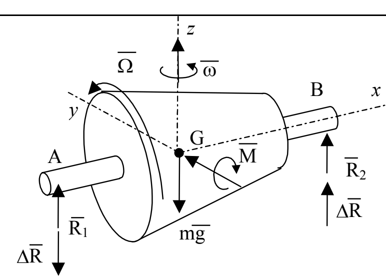
$$\text{dans (1)} \ : \ \ddot{y} = -g\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta}\frac{2L}{3}\ddot{\theta} - \frac{X_A}{M}$$

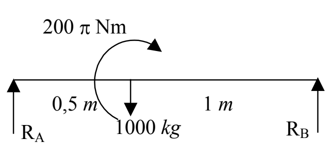
$$\boxed{=> \begin{cases} X_A = m\left(+\left(\dfrac{L}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{2L}{3}\right)\ddot{\theta} - \dfrac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - g\tan\theta\right) \\ Y_A = m\left(\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) + mg \end{cases}}$$

3.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} \ \text{ où } \ \Gamma = mR^2 = 40 \ kgm^2; \\ \Omega = \dfrac{4000.2\pi}{60}\text{s}^{-1} \quad => \ \overline{\Omega} = -\dfrac{400\pi}{3}\text{s}^{-1}\overline{1}_x \\ \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{15}{400}\text{s}^{-1} \quad => \overline{\omega} = \dfrac{3}{80}\text{s}^{-1}\overline{1}_z \end{array}\right\} => \overline{C}_g = 200\pi \ Nm\overline{1}_y$$

=> $C_g = 200\ Nm$ tend à faire descendre l'avant du bateau.





$$\left.\begin{array}{l} \text{Th. moment en } G : \ 0{,}5R_A + 200\pi - 1.R_B = 0 \\ \text{Th. résultante suivant } z : R_A + R_B = 9800 \end{array}\right\} =>$$

$$\frac{3}{2}R_A = 9800 - 200\pi => R_A = \frac{400}{3}\left(49 - \pi\right) \ \text{ et } \ R_B = \frac{400}{3}\left(24{,}5 + \pi\right)$$