ULB Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2003-2004
Corrigé de la séance 6

1. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\Re}=m\overline{v}_G$	$\overline{m}_O=\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$	$T=\frac{1}{2}I_d\omega^2$ avec d=axe de rotation
a	$\overline{\Re}=-m\frac{b}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O}=-m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_y+m\frac{b^2}{6}\omega\overline{1}_z$	$T=m\frac{b^2}{12}\omega^2$
b	$\overline{\Re}=m\frac{h}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O}=m\frac{h^2}{6}\omega\overline{1}_y-m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_z$	$T=m\frac{h^2}{12}\omega^2$
c	$\overline{\Re}=\frac{m}{3}\omega\left(-h\overline{1}_y+b\overline{1}_z\right)$	$\overline{m_O}=m\frac{\left(b^2+h^2\right)}{6}\omega\overline{1}_x$	$T=m\frac{\left(b^2+h^2\right)}{12}\omega^2$
d	$\overline{\Re}=\frac{m}{3}\omega\frac{h^2-b^2}{\sqrt{h^2+b^2}}\overline{1}_x$	$\overline{m_O}=\frac{m}{12}\frac{\omega}{\sqrt{b^2+h^2}}\Big[h\left(2h^2-b^2\right)\overline{1}_y$ $+b\left(2b^2-h^2\right)\overline{1}_z\Big]$ avec $\overline{\omega}^*$	$T=\frac{m}{12\left(b^2+h^2\right)}\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)\omega^2$ avec I_z^{**}

Distance d'1 point $P_1(x_1, y_1)$ à la droite $ax + by + c = 0$,:

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$\overline{\overline{I}}_{O\,xyz}=\begin{pmatrix} m\frac{b^2+h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{h^2}{6} & -m\frac{bh}{12} \\ 0 & -m\frac{bh}{12} & m\frac{b^2}{6} \end{pmatrix}$$

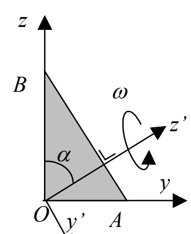
$$I_{z'}^{**}=\int y'^2 dm=\int(\cos\alpha\, y-\sin\alpha\, z)^2 dm$$

$$=\cos^2\alpha I_z+\sin^2\alpha I_y-2\sin\alpha\cos\alpha P_{yz}$$

$$=\frac{b^2}{b^2+h^2}.\frac{mb^2}{6}+\frac{h^2}{b^2+h^2}.\frac{mh^2}{6}-2.\frac{bh}{b^2+h^2}.\frac{mbh}{12}$$

$$=\frac{m}{6}\frac{1}{b^2+h^2}.\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)$$

$$\overline{\omega}^*=\omega\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_y+\omega\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_z$$



(d)

2.1 Centre de masse du volant G : 9r/10 à partir de A avec r=3R/2. (r/3+r=2R). Moment cinétique en A :

$$\overline{M_A}=M\,\overline{AG}\times\overline{v}_A+\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}=M\left(\frac{9r}{10}\overline{1}_{z'}\right)\times\left(-v_G\overline{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\overline{1}_{x'}\right)+\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\overline{1}_{y'}\\ \omega_1\overline{1}_{z'}\end{pmatrix}$$

avec $\overline{v}_A=\overline{v}_G+\overline{\omega}\times\overline{GA}=-v_G\overline{1}_{z'}+\left(\omega_2\overline{1}_{y'}+\omega_1\overline{1}_{z'}\right)\times\left(-\frac{9r}{10}\overline{1}_{z'}\right)=-v_G\overline{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\overline{1}_{x'}$

$$\overline{M_A}=-M\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2\overline{1}_{y'}+\left(A\omega_2\overline{1}_{y'}+C\omega_1\overline{1}_{z'}\right)=\left(A\omega_2-M\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2\right)\overline{1}_{y'}+C\omega_1\overline{1}_{z'}$$

2.2 L'énergie cinétique :

$$T=\frac{M}{2}\overline{v}_G{}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}=\frac{M}{2}v_G{}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\omega_2&\omega_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}A-M\left(9r/10\right)^2&0&0\\0&A-M\left(9r/10\right)^2&0\\0&0&C\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2-\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

$$T=\frac{M}{2}\overline{v}_A{}^2+M\,\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

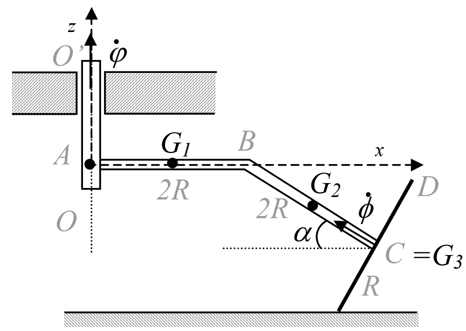
$$\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-v_G\overline{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\overline{1}_{x'}\right).\left(\left(\omega_2\overline{1}_{y'}+\omega_1\overline{1}_{z'}\right)\times\left(\frac{9r}{10}\overline{1}_{z'}\right)\right)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\omega_2&\omega_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}$$

$$\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-v_G\bar{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\bar{1}_{x'}\right).\left(\frac{9r}{10}\omega_2\bar{1}_{x'}\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

$$T=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-\omega_2{}^2\left(\frac{9r}{10}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2-\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

---

3. $\overline{M_O}=\overline{M_{O\,tige\,1}}+\overline{M_{O\,tige\,2}}+\overline{M_{O\,disque}}$



$$\overline{M_{O\,tige\,1}}=\overline{\overline{I_O}}.\overline{\omega_1}\underset{\text{ou}}{=}\overline{M_{G_1}}+\overline{OG_1}\times m_1\overline{v_{G_1}}$$

$$\left\{\overline{M_{O\,tige\,1}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\dfrac{\rho 2R.(2R)^2}{3}&0\\0&0&\dfrac{\rho 2R.(2R)^2}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix}=\frac{\rho 8R^3}{3}\dot{\varphi}\bar{1}_z\right.$$

Axes $G_2x'y'z'$ avec $x'y'z'$ parallèle à $Oxyz$.

Axes $G_2x''y''z''$ = rotation du repère $Ox'y'z'$ d'un angle α tel que x'' est suivant G_2C.

$$\overline{M_{O\,tige\,2}}=\overline{M_{G_2}}+\overline{OG_2}\times m_2\overline{v_{G_2}}$$

$$\begin{cases}
I_{z''}=I_{y''}=\dfrac{mR^2}{3}\ \text{ et }\ I_{x''}=P_{x''z''}=P_{x''y''}=P_{y''z''}=0\\
P_{x'z'}=-\cos\alpha\sin\alpha I_{z''}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\ \text{ et }\ I_{z'}=\cos^2\alpha I_{z''}=\dfrac{\rho R^3}{2}\\
\overline{M_{G_2}}=-P_{x'z'}\omega_{z'}\bar{1}_{x'}-\underbrace{P_{y'z'}}_{=0}\omega_{z'}\bar{1}_{y'}+I_{z'}\omega_{z'}\bar{1}_{z'}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'}+\dfrac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'}\\
\overline{OG_2}=(2R+R\cos\alpha)\bar{1}_x-(R\sin\alpha)\bar{1}_z\ \text{ et }\ \overline{v_{G_2}}=(2R+R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_y\\
\overline{M_{O\,tige\,2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'}+\dfrac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'}+\rho 2R\left((2R+R\cos\alpha)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z+(R\sin\alpha)(2R+R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_x\right)\\
\overline{M_{O\,tige\,2}}=\rho\dot{\varphi}R^3\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)\bar{1}_{x'}+\rho R^3\dot{\varphi}\left(10+4\sqrt{3}\right)\bar{1}_{z'}
\end{cases}$$

Axes $Cuvw$ avec $C=G_3$; v suivant CB et u suivant CD.

$$\overline{M_{O\,disque}}=\overline{M_{G_3}}+\overline{OG_3}\times m_3\overline{v_{G_3}}\quad\text{avec }\overline{\omega_3}=-\dot{\phi}\cos\alpha\bar{1}_x+\left(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\sin\alpha\right)\bar{1}_z=\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_u+\left(\dot{\varphi}\sin\alpha+\dot{\phi}\right)\bar{1}_v$$

$$\begin{cases}
I_u=I_w=\dfrac{mR^2}{4}\ \text{ et }\ I_v=\dfrac{mR^2}{2};\ P_{uw}=P_{vw}=P_{uv}=0\\
\overline{M_{G_3}}=I_u\omega_u\bar{1}_u+I_v\omega_v\bar{1}_v+I_w\omega_w\bar{1}_w=\dfrac{\rho\pi R^4}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_u+\dfrac{\rho\pi R^4}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\alpha+\dot{\phi}\right)\bar{1}_v=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_u+\dfrac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_v\\
\overline{OG_3}=(2R+2R\cos\alpha)\bar{1}_x-(2R\sin\alpha)\bar{1}_z\ \text{ et }\ \overline{v_{G_3}}=(2R+2R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_y\\
\overline{M_{O\,tige\,3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_u+\dfrac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_v+\rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z+\rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}\bar{1}_x\\
\overline{M_{O\,tige\,3}}=\rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(2+\dfrac{15}{16}\sqrt{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_x+\rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(\dfrac{117}{16}+4\sqrt{3}\right)+\dfrac{1}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_z
\end{cases}$$

4.1

$$M=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_h^{2h}zdz\int_0^{\frac{R}{h}z}rdr=\frac{15}{4}k\pi R^2h^2$$

$$I_z=\frac{7}{5}MR^2;\quad I_x=I_y=\frac{I_z}{2}+I_{xy}=\frac{7}{10}MR^2+\frac{14}{5}Mh^2;\ P_{xy}=P_{yz}=P_{zx}=0$$

4.2 Trouvons les points P appartenant à l'axe z où les moments d'inertie ($I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$) sont égaux dans le repère $Px'y'z'$

$$\underbrace{\frac{14}{5}Mh^2+\frac{7}{10}MR^2}_{I_x}-M\underbrace{\left(\frac{124}{75}\right)^2h^2}_{d(\text{axe }x,\text{axe }x_G)}+M\underbrace{d^2}_{d(\text{axe }x_G,\text{axe }x')^2}=\frac{7}{5}MR^2 \quad \text{où } d=O'G,\ O'=\text{point cherché}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ racines réelles } d=\pm\sqrt{\frac{7}{10}R^2-\frac{14}{5}h^2+\left(\frac{124}{75}\right)^2h^2} \quad \text{à condition que } \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R}}<\sqrt{\frac{7}{28-10\left(\frac{124}{75}\right)^2}}$$

4.3

$$I_{z'}=I_z\cos^2\alpha+I_x\sin^2\alpha \quad \text{où} \quad \cos^2\alpha=\frac{h^2}{h^2+R^2} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha=\frac{R^2}{h^2+R^2} \Rightarrow I_{z'}=\frac{7M}{5}\frac{R^2}{h^2+R^2}\left(\frac{R^2}{2}+3h^2\right)$$

4.4

$$\overline{OG}=\frac{1}{m}\int_h^{2h}kz.\pi\frac{R^2z^2}{h^2}zdz=\frac{\frac{\pi R^2}{h^2}k}{\frac{15}{4}k\pi R^2h^2}\left(\frac{(2h)^5}{5}-\frac{(h)^5}{5}\right)=\frac{124}{75}h\bar{1}_z \quad \text{avec} \quad M=\frac{15}{4}k\pi R^2h^2$$

$$\bar{v}_G=\frac{124}{75}\frac{hR}{\sqrt{h^2+R^2}}\omega\bar{1}_x \qquad \text{avec} \quad \bar{\omega}=\omega\bar{1}_{z'}=\frac{\omega}{\sqrt{h^2+R^2}}\left(R\bar{1}_y+h\bar{1}_z\right)$$

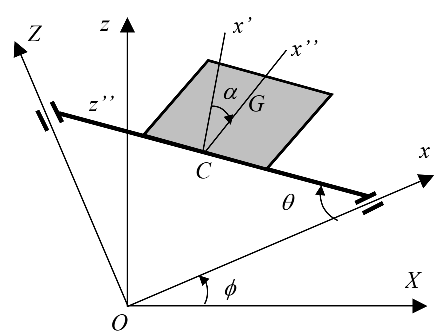
$$\overline{M}_G=\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}=\frac{\omega R}{\sqrt{h^2+R^2}}\left[\left(\frac{7}{10}MR^2+\frac{14}{5}Mh^2-M\left(\frac{124}{75}\right)^2h^2\right)\bar{1}_y+\frac{7}{5}MRh\bar{1}_z\right]$$

$$\overline{M}_O=\overline{M}_G+\overline{OG}\times\Re=\frac{\omega R}{\sqrt{h^2+R^2}}\left[\left(\frac{7}{10}MR^2+\frac{14}{5}Mh^2\right)\bar{1}_y+\frac{5}{7}Mh^2\bar{1}_z\right]$$

$\Rightarrow \overline{M}_O=\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}$ Le point O peut être vu comme un point appartenant au solide et subissant le même mouvement. En effet, la rotation s'effectue autour de l'axe z' passant par O. il est normal que tous les points appartenant à l'axe de rotation soit fixe. Tous les points de l'axe peuvent être considérés comme appartenant au solide.

---

5. $T=T_{Tige}+T_{carré}$



$$T_{Tige}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_C.\bar{\omega}=\rho\frac{9a^3}{8}\left(3\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2+\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)^2\right)$$

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{OC}=\frac{3a}{2}\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_z\right)\\ \bar{v}_C=\frac{d\overline{OC}}{dt}=\frac{3a}{2}\left(-\sin\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\bar{1}_x+\cos\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\bar{1}_z\right)\\ I_{Cy}=\frac{ml^2}{12}=\frac{\rho 9a^2}{4} \quad \text{et } \bar{\omega}=\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_y\end{cases}$$

$$T_{Carré}=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}=\frac{1}{2}m\left(v_{Gx}^2+v_{Gy}^2+v_{Gz}^2\right)+\frac{1}{2}\left(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right)$$

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{OG}=\frac{3a}{2}\left(\cos\theta\bar{1}_x+\sin\theta\bar{1}_z\right)+\frac{a}{2}\bar{1}_{x''}=\left(\frac{3a}{2}\sin 2\theta+\frac{a}{2}\cos\alpha\right)\bar{1}_{x'}+\frac{a}{2}\sin\alpha\bar{1}_{y'}-\frac{3a}{2}\cos 2\theta\bar{1}_{z'}\\ \bar{v}_G=\left(3a\cos 2\theta\dot{\theta}-\frac{a}{2}\sin\alpha\dot{\alpha}+\frac{3a}{2}\cos 2\theta\left(\dot{\phi}-\dot{\theta}\right)\right)\bar{1}_{x'}+\frac{a}{2}\cos\alpha\dot{\alpha}\bar{1}_{y'}\\ \qquad+\left(3a\sin 2\theta\dot{\theta}+\left(\frac{3a}{2}\sin 2\theta+\frac{a}{2}\cos\alpha\right)\left(\dot{\phi}-\dot{\theta}\right)\right)\bar{1}_{z'}=v_{Gx}\bar{1}_{x''}+v_{Gy}\bar{1}_{y''}+v_{Gz}\bar{1}_{z''}\\ \bar{\omega}=\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'}+\dot{\alpha}\bar{1}_{z'}=\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\sin\theta\bar{1}_{x''}+\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\cos\theta\bar{1}_{y''}+\dot{\alpha}\bar{1}_{z''}=p\bar{1}_{x''}+q\bar{1}_{y''}+r\bar{1}_{z''}\\ A=C=I_{x''G}=\frac{ml^2}{12}=\frac{\rho a^4}{12} \quad \text{et} \quad B=I_{y''G}=\frac{ml^2}{6}=\frac{\rho a^4}{6}\end{cases}$$

$$\overline{M}_O=\overline{M}_{O\,tige}+\overline{M}_{O\,carré}$$

$$\overline{M}_{O\,tige}=\overline{M}_C+\overline{OC}\times\Re=\bar{\bar{I}}_C.\bar{\omega}+\overline{OC}\times m\bar{v}_C$$

$$\overline{M}_{O\,carré}=\overline{M}_G+\overline{OG}\times\Re=\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}+\overline{OG}\times m\bar{v}_G=Ap\bar{1}_{x''}+Bq\bar{1}_{y''}+Cr\bar{1}_{z''}+\overline{OG}\times m\bar{v}_G$$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps. Login : **s*tudent***, mot de passe : **n*ewton***