Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2003-2004
Corrigé de la séance 1

---

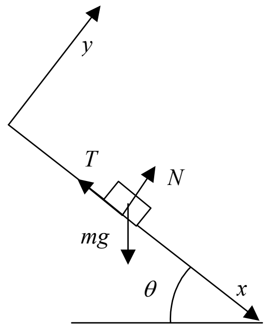
1. $\sum \overline{F} = m\overline{a}$

$$\begin{cases} \overline{1}_n : m\ddot{s} = mg\sin\theta - 0{,}3N \\ \overline{1}_t : m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = 0 = -mg\cos\theta + N \end{cases}$$

$$=> m\ddot{x} = mg\sin\theta - 0{,}3mg\cos\theta$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g\sin\theta - 0.3g\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx} = g\sin\theta - 0.3g\cos\theta$$



$$\int_{v_1{}^2}^{v_2{}^2} d\dot{x}^2 = \int_{x_1}^{x_2} 2\left(g\sin\theta - 0.3g\cos\theta\right)dx$$

$$\frac{1}{2}(v_2{}^2 - v_1{}^2) = \left(g\sin\theta - 0.3g\cos\theta\right)(x_2 - x_1)$$

$$\sin\theta(x_2 - x_1) = d$$

$$\frac{1}{2}(0.14^2 - 0.4^2) = \left(g\sin\theta - 0.3g\cos\theta\right)\frac{1.5}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{tg}\theta = 0.299 \quad => \quad \theta = 16.62°$$

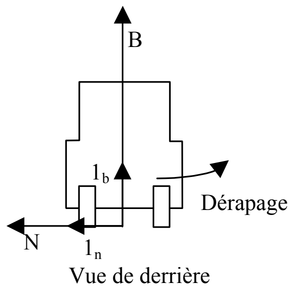
<u>*Rem*</u> : $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{x}^2}{dx}$

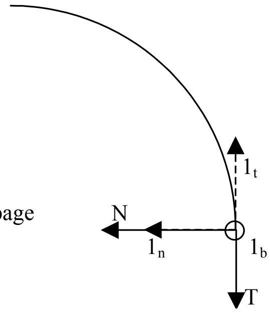
---

2 La vitesse limite à trouver est celle pour laquelle les voitures ne dérapent pas dans la direction de la normale à la courbe suivie sous l'effet de la force centrifuge. (v = const)

L'équation de Newton projetée dans le trièdre de Frenet devient dans les axes ($\overline{1}_t$, $\overline{1}_n$, $\overline{1}_b$)

$$\begin{cases} m\ddot{s} = T + F_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = N + F_n \\ 0 = B + F_b \end{cases}$$





où F_b = *-mg* ; F_n = *0* et F_t = *0* . => *B* = *mg* = *const*

Quand débute le glissement transversal, on utilise la réaction N suivant 1_n qui est liée à la réaction B par la relation suivante N<f.B exprimant le glissement transversal.

Donc à la limite, on a $fmg = \dfrac{mv^2}{R}$ => $v = \sqrt{fgR} = 19{,}81\ m/s = 70\ km/h$.

Pour avoir une marge de sécurité (usure des pneus, non respect des limites de vitesse), on prévoit d'installer un panneau de 50 km/h.

Pour augmenter cette limite de vitesse, différentes solutions sont possibles :

- Augmenter le coefficient de frottement entre la voiture et l'asphalte
- Incliner la route vers l'intérieur pour contrer l'effet de la force centrifuge

---

3. Conservation de l'énergie car il n'y a pas de frottement $V_A + T_A = V_B + T_B$

$$V_A = mg\frac{a}{2} + \frac{k}{2}(l_A - l_0)^2 \quad \text{et} \quad T_A = 0$$

$$V_B = 0 + \frac{k}{2}(l_B - l_0)^2 \quad \text{et} \quad T_B = \frac{mv_B^2}{2}$$

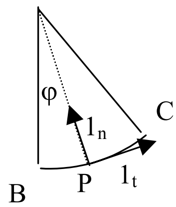
$$v_B^2 = \frac{k}{m}\left[\left(\sqrt{2}a - \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2\right] + ga \quad => \quad v_B = 2.1\ m/s$$

---

4 Sur la droite AB :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ 0 = N - mg \end{cases} => \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{gR} \\ N = mg \end{cases}$$

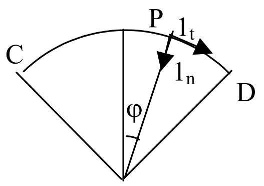
Sur BC :



$$\begin{cases} mR\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \\ mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi \end{cases} => \begin{cases} \dot{\varphi}^2 = \dfrac{2g}{R}\left(1 + \cos\varphi\right) \\ N = mg\left(2 + 3\cos\varphi\right) \end{cases}$$

$N > 0 \quad \forall\varphi \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}\right)$ => P ne peut quitter la courbe entre B et C

Sur CD :



$$\begin{cases} mR\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \\ mR\dot{\varphi}^2 = N + mg\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow N_C = mR\dot{\varphi}_C^2 - mg\cos\varphi_C = mg\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

=> Le point P quitte la courbe en C

5.1 $\overline{F} = m.\overline{a}$

suivant $\overline{1}_y$: $F_y = m.a_y$

Position $A \to B$ $(t_A = 0;\ \dot{y}_A = 0)$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = g \ : \ \int_{\dot{y}_A=0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_{t_A=0}^{t} g\,dt \ \Rightarrow\ \dot{y} = gt$$

$$\int_{y_A=0}^{y} dy = \int_{t_A=0}^{t} gt\,dt \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}gt^2$$

En B : $y_B = \frac{1}{2}gt_B^2 = 44{,}145\ m$

suivant $\overline{1}_x$: $F_x = ma_x$

Position $A \to B(C)$ $(a_x = 0;\ \dot{x}_A = 83{,}33\ m/s)$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{\dot{x}_A}^{\dot{x}} d\dot{x} = 0 \ \Rightarrow\ \dot{x} - \dot{x}_A = 0$$

$$\int_{x_A}^{x} dx = \int_{t_A=0}^{t} \dot{x}_A\,dt \ \Rightarrow\ x - x_A = L = \dot{x}_A t$$

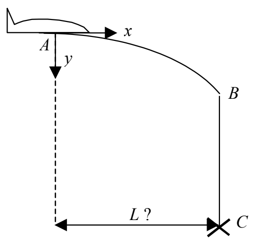
$v = \dot{x}_A = 83{,}33\ m/s$ d'où $L = 250\ m$

Position $B \to C$ (v constant : $\dot{y} = 1{,}8\ m/s$; $y_C = 120\ m$)

$$F_y = 0 = m.\ddot{y} \ : \ \int_{\dot{y}_B}^{\dot{y}} d\dot{y} = 0 \ \Rightarrow\ \dot{y} - \dot{y}_B = 0$$

$$\int_{y_B}^{y} dy = \int_{t_B}^{t} \dot{y}_B\,dt \ \Rightarrow\ y - y_B = \dot{y}_B\left(t_B - t\right)$$

En C : $y_C - y_B = v\left(t_C - t_B\right) = 1.8\ m/s$ => $t_C = 45{,}1416\ s$

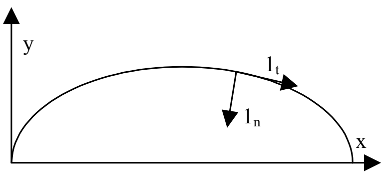


5.2 La résolution complète de l'exercice est sur le site dans l'onglet « More » de « MécaII » : projet matlab : le bombardier

---

6. $\overline{r} = a\left(u - \sin u\right)\overline{1}_x + a\left(1-\cos u\right)\overline{1}_y$ et $\frac{d\overline{r}}{du} = a\left(1-\cos u\right)\overline{1}_x + a\sin u\,\overline{1}_y$

$\frac{d^2\overline{r}}{du^2} = a\sin u\,\overline{1}_x + a\cos u\,\overline{1}_y$ et $\frac{ds}{du} = 2a\sqrt{\left(1-\cos u\right)} = 2a\sin\frac{u}{2}$



$$\rho = \frac{\left\|\frac{d\overline{r}}{du}\right\|^3}{\left\|\frac{d\overline{r}}{du}\times\frac{d^2\overline{r}}{du^2}\right\|} = 4a\sin\frac{u}{2} \quad \text{et} \quad \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{d\dot{s}^2}{du}$$

$$\overline{1}_t = \frac{d\overline{r}}{ds} = \sin\frac{u}{2}\overline{1}_x + \cos\frac{u}{2}\overline{1}_y \quad \text{et} \quad \overline{1}_n = \frac{\frac{d\overline{1}_t}{ds}}{\left\|\frac{d\overline{1}_t}{ds}\right\|} = \cos\frac{u}{2}\overline{1}_x - \sin\frac{u}{2}\overline{1}_y \quad \text{avec} \quad \overline{1}_t.\overline{1}_n = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = m\overline{g}.\overline{1}_t - \left|T\right| \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = m\overline{g}.\overline{1}_n + N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \frac{m\dot{s}^2}{4a\sin\frac{u}{2}} - mg\sin\frac{u}{2} \\ m\frac{1}{\rho}\frac{d\dot{s}^2}{du} = -mg\cos\frac{u}{2} - \left|T\right| \quad \text{où} \quad \left|T\right| = f\left|N\right| \end{cases}$$

$$\frac{d\dot{s}^2}{du} - f\dot{s}^2 = -g\rho\cos\frac{u}{2} - fg\rho\sin\frac{u}{2} = -2ag\sin u - 2afg\left(1-\cos u\right) = -2ag\left(\sin u + f\left(1-\cos u\right)\right)$$

ED1er ordre à résoudre par la méthode de variation de la constante (soit $\dot{s}^2 = X$) $X = c(u)e^{fu}$

$$c(u) = c_0 - 2ag\int_{\pi}^{u} e^{-fu}\left(\sin u + f\left(1-\cos u\right)\right)du$$

$$c(u) = c_0 + \frac{2age^{-fu}}{1+f^2}\left(\cos u + f\sin u\right) - 2ag\left(e^{-f\pi} - e^{-fu}\right) + \frac{2agfe^{-fu}}{1+f^2}\left(\sin u - f\cos u\right)$$

$$\Rightarrow \ \dot{s}^2 = e^{f(u-\pi)}\left(v_0^2 - \frac{4agf^2}{1+f^2}\right) + 2ag + 2ag\frac{1-f^2}{1+f^2}\cos u + \frac{4ag}{1+f^2}\sin u$$

---

si $N = \dfrac{m\dot{s}^2}{4a\sin\dfrac{u}{2}} - mg\sin\dfrac{u}{2} \geq 0$ le point quitte la courbe

Si $N(\pi) \geq 0$, le point quitte immédiatement la courbe. C'est le cas quand $v_0^2 \geq 4ag$.

Si $v_0^2 < 4ag$, le point quitte la courbe en u^* tel que $\cos u^* + f\sin u^* = \left(f^2 - v_0^2\dfrac{1+f^2}{4ag}\right)e^{f(u^*-\pi)}$

---

http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps. Login : ***student***, mot de passe : **n*ewton***