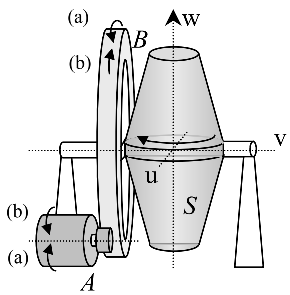
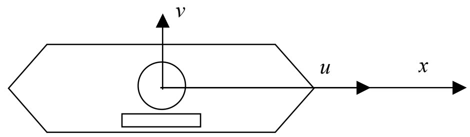
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2003-2004
Corrigé de la séance 11

1.



Vu de haut.



C_e = couple extérieur créé par le roulis ($\bar{C}_e = \pm C_e \bar{1}_x$). => Le couple gyroscopique doit contrer ce roulis.

=> Dans les axes liés au gyroscope, le couple gyroscopique sera suivant l'axe u $\left(\bar{1}_w \times \bar{1}_v\right)$

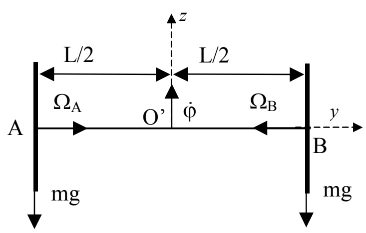
donc on placera le gyroscope tel que son axe u soit parallèle à l'axe longitudial du bateau (x).

$\bar{C}_{gyr}\Big|_a = \Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}_a = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right)\times\bar{1}_v\right) = \Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $-C_e\bar{1}_u$

$\bar{C}_{gyr}\Big|_b = \Gamma\bar{\Omega}\times\bar{\omega}_b = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right)\times\left(-\bar{1}_v\right)\right) = -\Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $+C_e\bar{1}_u$

Grâce au gyroscope, le bateau sera stabilisé et le couple C_e sera compensé. Il n'y aura plus de rotation du bateau suivant l'axe x, et donc le roulis ne génère pas de couple gyroscopique supplémentaire suivant l'axe v.

2.



$\bar{C}_{gyr} = \Gamma\left(\Omega_A - \Omega_B\right)\dot{\varphi}\ \bar{1}_x$

La somme des moments extérieurs en *O'* est nulle car *O'* est le centre de masse du système. Mettre le système en rotation va créer un couple supplémentaire (C_{gyr}) qui vient déséquilibrer le système vers la gauche ou vers la droite en fonction que la différence $\Omega_A - \Omega_B$ est positive oui négative. Si le système était entièrement fixé en *O'* et que seul la rotation autour de l'axe *OO'* était possible, la barre *AB* subirait un moment de flexion qui la ferrait fléchir vers le bas.

3.a Système {tige + masse} : Équation différentielle => Lagrange

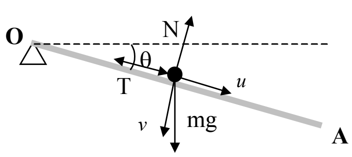
$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}}_{=0}\right)_{\text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$V = -2mg\frac{L}{2}\sin\theta \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mgL\sin\theta$$

Il n'y a pas de force qui ne dérive pas d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{7mL^2}{12}\ddot{\theta} - mgL\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta$$

3.b



$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \sum\bar{F}_e\ :$$

$$m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\bar{1}_v - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\bar{1}_u = +mg\cos\theta\bar{1}_v + mg\sin\theta\bar{1}_u - N\bar{1}_v - T\bar{1}_u$$

Théorème de la résultante cinétique sur la masse : (Si Système {tige}, on doit tenir compte des réactions en O)

$$\begin{cases} -m\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \\ m\dfrac{L}{2}\ddot{\theta} = mg\cos\theta - N \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta - m\dfrac{L}{2}\dfrac{12g}{7L}\cos\theta = \dfrac{1}{7}mg\cos\theta \end{cases}$$

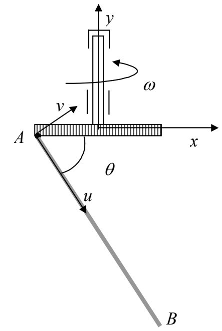
$$\ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2 = \frac{24g}{7L}\sin\theta \;\Rightarrow\; T = m\frac{12g}{7}\sin\theta + mg\sin\theta = \frac{19}{7}mg\sin\theta$$

3.2 Glissement si $T=fN$: $T=\frac{19}{7}mg\sin\theta = fN = f\frac{1}{7}mg\cos\theta$ => $tg\theta=\frac{f}{19}$

Décollement si $N=0$: $N=\frac{1}{7}mg\cos\theta = 0$ => $\theta=\frac{\pi}{2}$

Il y aura glissement avant décollement

4.1 Axes $Auvw$, tel que u est suivant AB et $w \,//\, z$.



$$T = T_{tige} + T_{disque} = \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}\right)_{\text{Disque}}$$

$$T_{disque} = \frac{1}{2}\frac{m\left(L/4\right)^2}{2}\omega^2$$

$$\begin{cases} \overline{\omega} = \omega\left(-\sin\theta\,\overline{1}_u + \cos\theta\,\overline{1}_v\right) - \dot{\theta}\,\overline{1}_w \\ \overline{v}_{G_{tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = \frac{L}{4}\omega\,\overline{1}_w - \omega\cos\theta\frac{L}{2}\overline{1}_w - \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{tige} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{16}\omega^2 + \omega^2\cos^2\theta\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4}\omega^2\cos\theta + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos^2\theta\right)$$

et $V = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\frac{L^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{L^2}{4}m\omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega^2\sin\theta + \frac{L^2}{12}m\omega^2\cos\theta\sin\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mL^2\left(\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{8}\right)\omega^2\sin\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0$$

4.2 <u>Système {tige}</u> : Théorème de la résultante cinétique dans les axes $Oxyz$

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \sum\overline{F}_e \;:\; \overline{R} = m\overline{v}_G = -m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_x - m\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\,\overline{1}_y + m\frac{L}{2}\omega\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right)\overline{1}_z$$

$$\begin{cases} -m\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} - m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 + m\frac{L}{2}\omega^2\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) = X_A \\ -m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 = Y_A - mg \\ m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta} + m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta} = Z_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = m\frac{L}{2}\left(\omega^2\sin^2\theta\left(\cos\theta - \frac{3}{8}\right) + \omega^2\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\dot{\theta}^2\right) \\ Y_A = -m\frac{L}{2}\cos\theta\left(-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta\right) + m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + mg \\ Z_A = mL\omega\sin\theta \end{cases}$$

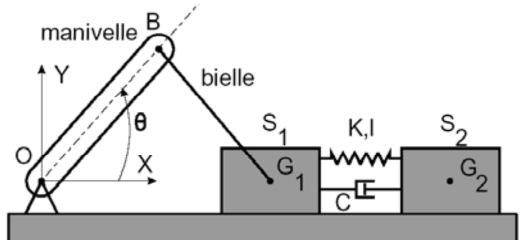
4.3 <u>AN :</u>

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\omega^2\frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{3}{4}\omega^2\cos\theta + 3\frac{g}{L}\sin\theta\right) - \left(\omega^2\frac{\cos 120}{2} - \frac{3}{4}\omega^2\cos 60 + 3\frac{g}{L}\sin 60\right) = \frac{1}{8}\omega^2 + \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{L}$$

$$X_A = \frac{mL}{16}\omega^2 \;;\; Y_A = \frac{mL}{16}\omega^2 + \frac{mg}{2}\left(5 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;;\; Z_A = mL\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{8} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{3g}{L}}$$

5.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OG_1} = 2L\cos\theta\,\overline{1}_x \;\Rightarrow\; \overline{v}_{G_1} = -2L\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_x \\ \overline{OG_2} = x\,\overline{1}_x \;\Rightarrow\; \overline{v}_{G_2} = \dot{x}\,\overline{1}_x\end{array}\right\}$$

$$T = T_{tige} + T_{S_1} + T_{S_2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Force de pesanteur

$$\left\{ F_g = -mg\,\overline{1}_y \;:\; V_{OB} = mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad Q_{\theta(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta \right.$$

Force de rappel

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{F}_R = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right)\overline{1}_x \;:\; V_{S_1} = \frac{k}{2}\left(x - 2L\cos\theta - L\right)^2 \\ \text{et} \quad Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right)2L\sin\theta \quad \text{et} \quad Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right)\end{array}\right.$$

Force d'amortissement proportionnel à la vitesse

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{F}_A = -c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x \;;\; \overline{G_1G_2} = \left(x - 2L\cos\theta\right)\overline{1}_x \;\Rightarrow \delta\,\overline{G_1G_2} = \left(\delta x + 2L\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x \\ Q_\theta = -c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)2L\sin\theta \quad \text{et} \quad Q_x = -c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\end{array}\right.$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + 4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta$$

$$m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} + m4L^2\sin\theta\left(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2\right) = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - \left(k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) + c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\right)2L\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \;:\; m\ddot{x} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) - c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)$$

<u>S9E4</u> : $T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$ Il manquait le carré sur le ℓ **.** La suite est correcte.

Il faut écrire $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = A$ à la place de $\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = A$. Le résultat est correct.

<u>S9E5</u> : $\overline{\omega} = -\dot{\theta}\,\overline{1}_y + \dot{\phi}\,\overline{1}_z = -\dot{\phi}\cos\theta\,\overline{1}_u - \dot{\theta}\,\overline{1}_v + \dot{\phi}\sin\theta\,\overline{1}_w$ **(**inversion des sinus et cosinus) La suite est correcte.