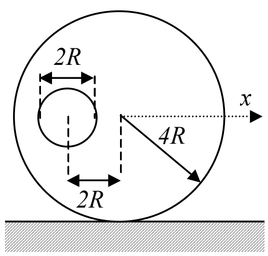
QCM. Les réponses <u>correctes</u> sont :

- 1.a ($T = T_1 + T_2$)
- 1.e ($T = T_1 + T_2$ avec les T_i calculés au point O)
- 2.b
- 3.b et 3.e
- 4.a ($T+V=E_0$ est une intégrale première)
- 4.c (c'est une intégrale première)
- 4.d (c'est la condition pour avoir 4.c)
- 5.b (ssi toutes les forces dérivent d'un potentiel) et 5.e

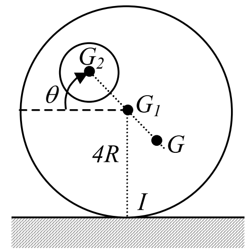
1.1

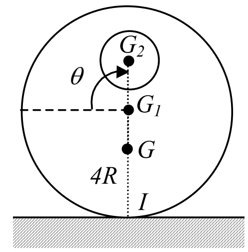


$$m = m_1 - m_2 = 15\rho\pi R^2$$

$$\Rightarrow \; m_1 = \frac{16}{15}m \; ; \; m_2 = \frac{1}{15}m$$

$$\left\|\overline{G_1G}\right\| = \frac{m_1.0 - m_2.(-2R)}{m_1 - m_2} = \frac{2R}{15}$$





$$L = T - V \quad \text{avec} \quad V = -mg\frac{2}{15}R\sin\theta = V_1 - V_2 = 0 - m_2 g 2R\sin\theta \quad (\text{point de référence} : G_1)$$

$$T = T_1 - T_2 \quad \text{où} \quad T_i = \frac{1}{2}Mv_I^2 + M\overline{v_I}.\left(\overline{\omega}\times\overline{IG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{I_i}.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{I_i}.\overline{\omega} = \frac{1}{2}I_{y_{I_i}}\omega^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(I_{y_{I_1}} - I_{y_{I_2}}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{y_I}\omega^2 = \frac{mR^2}{30}\left(16.24 - \frac{41}{2} - 16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 \quad \text{car}$$

$$I_{y_I} = \frac{m_1(4R)^2}{2} + m_1(4R)^2 - \left(\frac{m_2R^2}{2} + m_2\left((4R + 2R\sin\theta)^2 + (2R\cos\theta)^2\right)\right) = \frac{mR^2}{15}\left(16.24 - \frac{41}{2} - 16\sin\theta\right)$$

$$L = \frac{mR^2}{30}\left(16.24 - \frac{41}{2} - 16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + mg\frac{2}{15}R\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{mR^2}{15}\left(16.24 - \frac{41}{2} - 16\sin\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{mR^2}{15}16\cos\theta.\dot{\theta}^2 - mg\frac{2}{15}R\cos\theta = 0$$

1.2

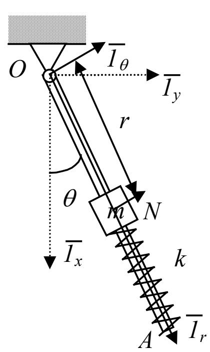
Intégrale première : $T + V = \dfrac{mR^2}{30}\left(16.24 - \dfrac{41}{2} - 16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 - mg\dfrac{2}{15}R\sin\theta = Const$

1.3

$$(T+V)_{\theta=0,\dot{\theta}=0} = (T+V)_{\theta=\pi/2} \;\Rightarrow\; 0 = \frac{mR^2}{30}\left(16.24 - \frac{73}{2}\right)\dot{\theta}^2 - mg\frac{2}{15}R \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2_{\max} = \frac{8g}{(32.24 - 73)R} = \frac{8g}{695R}$$

$AN : R = 0{,}075\ m \Rightarrow \omega = 1{,}227\ s^{-1}$

2.1



Système avec 2 ddl : r et θ.

Système {Tige (M) + masse (m)} : Théorème de Lagrange :

$$T = T_m + T_M \quad \text{où} \quad T_M = \frac{1}{2}Mv_O^2 + M\overline{v}_O.\left(\overline{\omega}\times\overline{OG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + M\overline{v}_G.\left(\overline{\omega}\times\overline{GG}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{I_G=0\text{ (masse ponctuelle)}} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r - r_0)^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}(r - r_0)^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - r_0) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow\; mr^2\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgr\sin\theta = 0 \quad (2)$$

2.2 Système {Tige (M)} : (m est au point P)

$$T=\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad Q_\theta=\overline{N}.\frac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}+M\overline{g}.\frac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}=rN-Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\text{où}\begin{cases}\overline{N}=N\overline{1}_\theta \text{ et } \overline{OP}=r\overline{1}_r;\ \delta\overline{OP}=\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r}\delta r+\dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}\delta\theta=\delta r\overline{1}_r+r\delta\theta\overline{1}_\theta \Rightarrow \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r}=\overline{1}_r \text{ et } \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}=r\overline{1}_\theta\\ M\overline{g}=Mg\overline{1}_x \text{ et } \overline{OG}=\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\overline{1}_x+\sin\theta\overline{1}_y\right);\ \delta\overline{OP}=\dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r}\delta r+\dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}\delta\theta=\dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)\delta\theta\\ \Rightarrow \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r}=0 \text{ et } \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}=\dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x+\cos\theta\overline{1}_y\right)\end{cases}$$

L'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta \Rightarrow \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}=rN-\frac{L}{2}\sin\theta Mg$

$\Rightarrow N=ML\dfrac{\frac{L}{3}\ddot{\theta}+\frac{g}{2}\sin\theta}{r}$ Cette méthode est beaucoup plus lourde que les théorèmes généraux. Il est préférable d'utiliser les théorèmes généraux pour trouver les réactions de liaison (voir TP 8)

---

3. Axes : $z = OB$; $z'=OG$; x et x' dans le même plan que z et z'.

$T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}$ où $I_{x'_G}=I_{y'_G}=I_{z'_G}=\frac{md^2}{6}$=A (par symétrie)

$$\overline{\omega}=\dot{\theta}\overline{1}_{z'}+\dot{\phi}\cos\alpha\overline{1}_{z'}-\dot{\phi}\sin\alpha\overline{1}_{x'}=\dot{\theta}\overline{1}_{z'}+\dot{\phi}\cos\alpha\overline{1}_{z'}-\dot{\phi}\sin\alpha\left(\cos\phi\overline{1}_{x''}-\sin\phi\overline{1}_{y''}\right)$$

et $\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}=A.\left(\omega_{x''}^2+\omega_{y''}^2+\omega_{z''}^2\right)=A\left(\dot{\theta}^2+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\alpha+\dot{\phi}^2\cos^2\alpha+\dot{\phi}^2\sin^2\alpha\cos^2\phi-\dot{\phi}^2\sin^2\alpha\sin^2\phi\right)$

$\Rightarrow \overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}=\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\alpha\right)\frac{md^2}{6}$

$\overline{OG}=\ell\overline{1}_{z'}$; $\overline{v}_G=\ell\left(\dot{\phi}\overline{1}_z\times\overline{1}_{z'}\right)=\ell\dot{\phi}\sin\alpha\overline{1}_{y'} \Rightarrow v_G^2=\ell^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2$

$T=\frac{m}{2}\ell^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\alpha\right)\frac{md^2}{6}$ et $V=0 \Rightarrow L=T$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}-\frac{\partial T}{\partial\phi}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial\phi}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}=A_1$ est une intégrale première : $m\ell^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}+\dot{\theta}\cos\alpha\right)\frac{md^2}{6}=A_1$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=A_2$ est une intégrale première : $\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\cos\alpha\right)\frac{md^2}{6}=A_2$

$\Rightarrow$ on obtient immédiatement : $\begin{cases}\dot{\phi}=\dot{\phi}_0=const\\ \dot{\theta}=\dot{\theta}_0=const\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\phi=\phi_0+\dot{\phi}_0t\\ \theta=\theta_0+\dot{\theta}_0t\end{cases}$

---

4. Axes centrés en A : z = verticale descendante, x = horizontale dirigée de B vers C => vitesse angulaire positive suivant y.

$T=T_M+T_m$ avec $T_M=\frac{1}{2}Mv_A^2+M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$ car le triangle ne tourne pas.

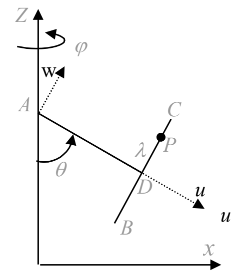
$T_m=\frac{1}{2}mv_G^2+\underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{=0\text{ (point matériel)}}=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$ avec $\overline{v}_P=\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AP}=\left(\dot{x}+\ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x+\ell\dot{\theta}\sin\theta\overline{1}_z$

$V=-mg\ell\cos\theta \Rightarrow L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)+mg\ell\cos\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=A$ est une intégrale première : $M\dot{x}+m\left(\dot{x}+\ell\cos\theta\dot{\theta}\right)=A$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \ell\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta=0$ (ou directement avec $T+V=E_0$)

5.



λ = distance entre le point P et le centre du T (D). AD et BC sont perpendiculaires.

$$T = T_{AD} + T_{BC} + T_P$$

$$\begin{cases} T_{AD} = \dfrac{1}{2}Mv_A^2 + M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} \\ \overline{\omega} = -\dot{\theta}\overline{1}_y + \dot{\phi}\overline{1}_z = -\dot{\phi}\cos\theta\,\overline{1}_u - \dot{\theta}\overline{1}_v + \dot{\phi}\sin\theta\,\overline{1}_w \\ => T_{AD} = \dfrac{1}{2}\left(I_w\omega_w^2 + I_v\omega_v^2\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{m\ell^2}{3}\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{BC} = \dfrac{1}{2}Mv_D^2 + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_D.\overline{\omega} \ \text{ où } \ \overline{\omega}_{BC} = \overline{\omega}_{AD} \\ \overline{v}_D = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AD} = \ell\cos\theta\dot{\theta}\overline{1}_x + \ell\sin\theta\dot{\phi}\overline{1}_y + \ell\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_z \ => \ v_D^2 = \ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) \\ => T_{BC} = \dfrac{m\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{m\ell^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos^2\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_P = \dfrac{1}{2}Mv_P^2 + M\overline{v}_P.\left(\overline{\omega}\times\overline{PP}\right) + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_P.\overline{\omega} = \dfrac{1}{2}Mv_P^2 \\ \overline{v}_P = \dfrac{d\overline{AP}}{dt} = \dfrac{d\left(\ell\overline{1}_u + \lambda\overline{1}_w\right)}{dt} = \ell\overline{\omega}\times\overline{1}_u + \dot{\lambda}\overline{1}_w + \lambda\overline{\omega}\times\overline{1}_w = \ell\dot{\theta}\overline{1}_w + \ell\dot{\phi}\sin\theta\,\overline{1}_v + \dot{\lambda}\overline{1}_w - \lambda\dot{\theta}\overline{1}_u + \lambda\dot{\phi}\cos\theta\,\overline{1}_v \\ => T_P = \dfrac{1}{2}M\left(\lambda^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\lambda} + \left(\ell\dot{\phi}\sin\theta + \lambda\dot{\phi}\cos\theta\right)^2\right) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\left(17\dot{\theta}^2 + 16\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\phi}^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}M\left(\lambda^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\lambda} + \left(\ell\dot{\phi}\sin\theta + \lambda\dot{\phi}\cos\theta\right)^2\right)$$

$$V = \underbrace{-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta}_{V_{AD}} - \underbrace{mg\ell\cos\theta}_{V_{BC}} + \underbrace{Mg\left(-\ell\cos\theta + \lambda\sin\theta\right)}_{V_P} = -\frac{3\ell}{2}mg\cos\theta + Mg\left(+\lambda\sin\theta - \ell\cos\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \ => \left(\frac{17m\ell^2}{12} + M\left(\lambda^2 + \ell^2\right)\right)\ddot{\theta} + M\ell\ddot{\lambda} + M2\lambda\dot{\lambda}\dot{\theta}$$

$$-\left(M\ell\lambda\cos 2\theta + \left(M\frac{\left(\ell^2 - \lambda^2\right)}{2} + \frac{5m\ell^2}{8}\right)\sin 2\theta\right)\dot{\phi}^2 + \frac{3\ell}{2}mg\sin\theta + Mg\left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right) = 0$$

(ou directement avec $T + V = E_0$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \ => \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \ => \ \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = A \text{ est une intégrale première :}$$

$$\left(m\ell^2\left(\frac{4}{3}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\cos^2\theta\right) + M\left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)^2\right)\dot{\phi} = A$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial\lambda} = 0 \ =>$$

$$\ddot{\lambda} + \ell\ddot{\theta} - \lambda\dot{\theta}^2 - \left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\phi}^2\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5.2 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \ => Identique$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = C \ => \frac{d\left(m\ell^2\left(\dfrac{4}{3}\sin^2\theta + \dfrac{1}{12}\cos^2\theta\right) + M\left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)^2\right)\dot{\phi}_0}{dt} = C$$

$$=> \left(m\ell^2\frac{15}{6}\sin\theta\cos\theta + 2M\left(\left(\ell^2 - \lambda^2\right)\cos\theta\sin\theta + \lambda\cos^2\theta - \lambda\ell\sin^2\theta\right)\right) = \frac{C}{\dot{\phi}_0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial\lambda} = 0 \ => \ Identique$$

Seule l'équation en φ est modifiée.
Les intégrales premières ne sont pas conservées.

6. Axes : *Axyz* avec *x* dans le sens de *F* et *z* est la verticale ascendante. $\bar{\omega} = \omega \bar{1}_y$

$$V = Const \;\; ; \;\; T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 m \, i_z^{\,2} \;\; ; \;\; L = T - V \;\; \text{et} \;\; Q_\theta = (r - R) F$$

car pour un petit déplacement $\delta\theta$, on a $\delta \overline{OA} = -(R - r)\delta\theta \bar{1}_x$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \;\; \Rightarrow \;\; \left(mr^2 + m i_z^{\,2}\right)\ddot{\theta} = -(R - r)F \;\; \Rightarrow \;\; \ddot{\theta} = -\frac{F(R - r)}{m\left(r^2 + i_z^{\,2}\right)}$$

La poulie va reculer avec une accélération $\ddot{x} = -\dfrac{Fr(R - r)}{m\left(r^2 + i_z^{\,2}\right)}$

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ **>Teaching>mécaII>Tps. Login : s*tudent*, mot de passe : n*ewton***