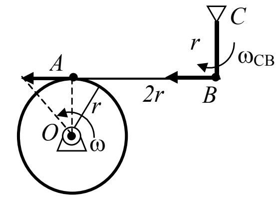
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2003-2004
Corrigé de la séance 3

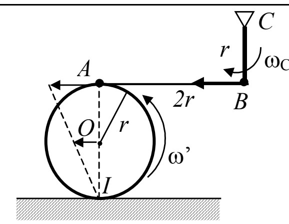
1.a $$\left.\begin{aligned}\overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OA} = \overline{\omega}_{OA}\times\overline{OA} = \omega_{OA} r\,\overline{1}_x\\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB}\times\overline{CB} = \omega_{CB} r\,\overline{1}_x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \omega_{CB}$$

Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de *A* et *B* doivent être égales.

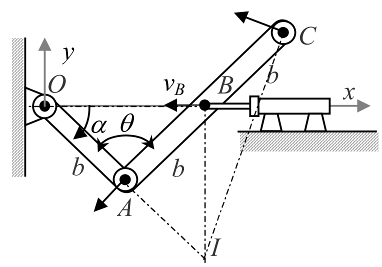


1.b $$\left.\begin{aligned}\overline{v}_A &= \overline{v}_I + \overline{\omega}'\times\overline{IA} = \overline{\omega}'\times\overline{IA} = \omega' 2r\,\overline{1}_x\\ \overline{v}_B &= \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB}\times\overline{CB} = \omega_{BC} r\,\overline{1}_x\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\omega' = \omega_{CB}$$

(avec *I* le point de contact du disque avec le sol)



2.1 Le CIR de la barre *OA* est *O* et celui de la barre AC est représenté sur le dessin : I (intersection de la droite perpendiculaire à v_A et de la perpendiculaire à v_B).



$$A \in \text{ solide } OA : \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \dot{\alpha} = -\frac{\dot{\theta}}{2}$$

$$\overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{OA}\times\overline{OA} = -\dot{\alpha} b\left(\cos\frac{\theta}{2}\overline{1}_x + \sin\frac{\theta}{2}\overline{1}_y\right) = \frac{\dot{\theta}}{2} b\left(\cos\frac{\theta}{2}\overline{1}_x + \sin\frac{\theta}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$A \in \text{ solide } AB : \overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{AC}\times\overline{BA} = -v_b\overline{1}_x + \omega b\left(\cos\frac{\theta}{2}\overline{1}_x - \sin\frac{\theta}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left.\begin{aligned} b\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2} &= -v_b + b\cos\frac{\theta}{2}\omega\\ b\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2} &= -b\sin\frac{\theta}{2}\omega\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = -\frac{\dot{\theta}}{2} \text{ d'où } v_b = -b\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \overline{v}_C = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AC}\times\overline{AC} = v_b\left(-\frac{3}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}tg\frac{\theta}{2}\overline{1}_y\right)$$

2.2 $$\overline{v}_B = -v_b\overline{1}_x = \frac{d}{dt}\left(2b\sin\frac{\theta}{2}\right)\overline{1}_x = b\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_x \Rightarrow v_b = -b\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_C &= b\sin\frac{\theta}{2} + 2b\sin\frac{\theta}{2} = 3b\sin\frac{\theta}{2}\\ y_C &= b\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\dot{x}_C &= \frac{3b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta} = -\frac{3}{2}v_b\\ \dot{y}_C &= -\frac{b}{2}\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta} = \frac{1}{2}v_b tg\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right. \Rightarrow \overline{v}_C = v_b\left(-\frac{3}{2}\overline{1}_x + \frac{1}{2}tg\frac{\theta}{2}\overline{1}_y\right)$$

3 $$\overline{v}_B = \frac{r}{2}\pi\,\overline{1}_x \quad \left(\overline{\omega}_{BC} = -\pi \text{ rad/s}\,\overline{1}_z;\ \overline{\omega}_{OA} = -\omega_{OA}\overline{1}_z \text{ et } \overline{\omega}_{BA} = -\omega_{BA}\overline{1}_z\right)$$

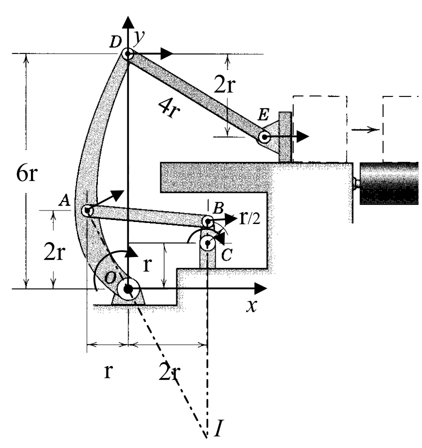
$$\left\{\begin{aligned}\overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{\omega}_{OA}\times\overline{OA} = 2r\omega_{OA}\overline{1}_x + r\omega_{OA}\overline{1}_y\\ \overline{v}_A &= \overline{v}_B + \overline{\omega}_{BA}\times\overline{BA} = \left(\frac{r}{2}\pi + \frac{r}{2}\omega_{BA}\right)\overline{1}_x + 3r\omega_{BA}\overline{1}_y\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \omega_{OA} = 3\omega_{BA}\ ;\ \overline{\omega}_{BA} = -\frac{\pi}{11} \text{ rad/s}\,\overline{1}_z \text{ et } \overline{\omega}_{OA} = -\frac{3\pi}{11} \text{ rad/s}\,\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_D = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{OA}\times\overline{OD} = \frac{3\pi}{11}.6r\,\overline{1}_x$$

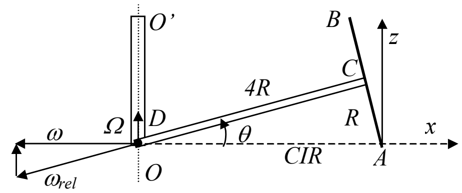
$$\overline{v}_E = \overline{v}_D + \overline{\omega}_{DE}\times\overline{DE} = \frac{18\pi r}{11}\overline{1}_x + 2r\omega_{DE}\overline{1}_x + 2\sqrt{3}r\omega_{DE}\overline{1}_y = v_E\overline{1}_x$$

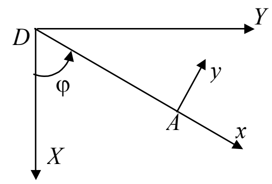
$$\Rightarrow \omega_{DE} = 0 \text{ (barre en translation instatanée) et } \overline{v}_E = \frac{18\pi r}{11}\overline{1}_x$$



4.1 Nous repérons deux points appartenant au solide qui ont une vitesse nulle : le disque ne glisse pas donc la vitesse du point A est nulle. Il en est de même pour le point D qui est appartient à l'axe fixe OO'. Donc l'axe instantané de rotation passe bien par ses deux points.

On travaille dans les axes xyz centrés en A avec z dirigé suivant OO' et x dirigé suivant OA.





$\overline{\omega} = \overline{\Omega} + \overline{\omega}_{rel} = -\omega_{rel}\cos\theta\,\overline{1}_x + (\Omega - \omega_{rel}\sin\theta)\overline{1}_z$

Condition de roulement sans glissement :

$\overline{v}_A = 0 = \overline{v}_C + \overline{\omega}\times\overline{CA}$ avec $\overline{CA} = R\sin\theta\,\overline{1}_x - R\cos\theta\,\overline{1}_z$

et $\overline{v}_C = \overline{\Omega}\times\overline{OC} = \Omega 4R\cos\theta\,\overline{1}_y$

$\overline{v}_A = 0 = \Omega 4R\cos\theta\,\overline{1}_y + (\Omega R\sin\theta - \omega_{rel}R)\overline{1}_y$

=> $\Omega 4R\cos\theta + R\Omega\sin\theta - R\omega_{rel} = 0$

$\omega_{rel} = \Omega\sqrt{17}$ par le dessin on peut aussi directement établir que $\frac{\Omega}{\omega} = tg\theta$ et $\omega_{rel} = \frac{\omega}{\cos\theta}$

=> $\overline{\omega} = -\Omega\sqrt{17}\cos\theta\,\overline{1}_x + \Omega(1-\sqrt{17}\sin\theta)\overline{1}_z = -4\Omega\overline{1}_x$ et $\overline{\varepsilon} = \overline{\Omega}\times\overline{\omega} = \Omega\overline{1}_z\times\overline{\omega} = -4\Omega^2\overline{1}_y$

4.2

$\overline{v}_B = \overline{\omega}\times\overline{AB} = -4\Omega\overline{1}_x \times 2R\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_z\right) = \frac{32\sqrt{17}}{17}\Omega R\overline{1}_y$ ou $\overline{v}_B = \left.\frac{d\overline{DB}}{dt}\right|_{abs} = \left.\frac{d\overline{DB}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\Omega}\times\overline{DB}$

$\overline{a}_A = \overline{a}_C + \overline{\varepsilon}\times\overline{CA} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{CA}\right) = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\overline{1}_z$ où $\overline{a}_C = \underbrace{\overline{a}_D}_{=0} + \underbrace{\overline{\varepsilon}\times\overline{DC}}_{=0} + \overline{\Omega}\times\left(\overline{\Omega}\times\overline{DC}\right) = -\Omega^2 4R\cos\theta\,\overline{1}_x$

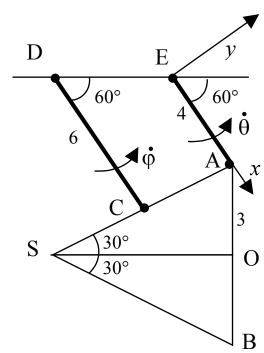
$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}\times\overline{AB} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{AB}\right) = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\overline{1}_z - 4\Omega^2\overline{1}_y\times 2R\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_z\right) - 4\Omega\overline{1}_x\times\frac{32\sqrt{17}}{17}\Omega R\overline{1}_y$

$\overline{a}_B = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\overline{1}_z - \frac{8}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\overline{1}_z - \frac{32}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\overline{1}_x - \frac{128}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\overline{1}_z = -\frac{32}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\overline{1}_x - \frac{68}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\overline{1}_z$

ou $\overline{a}_B = \left.\frac{d\overline{v}_B}{dt}\right|_{abs} = \left.\frac{d\overline{v}_B}{dt}\right|_{rel} + \overline{\Omega}\times\overline{v}_B = -\frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\overline{1}_z - \frac{32\sqrt{17}}{17}R\Omega^2\overline{1}_x$

---

5. 1. OS Horizontal : (AS est parallèle à l'axe y)



$\sin 60.6 - \sin 60.4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.2$ => $AC = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30} = 2\sqrt{3}$ m

2. Vitesse angulaire de la barre DC

$\dot{\theta} = 3$ rad/s $\overline{1}_z$ *et* $\dot{\varphi}$?

$\overline{v}_C \,//\, \overline{v}_A$ => le triangle est en translation instantanée : $\overline{\omega}_{AC} = 0$ et $\overline{v}_C = \overline{v}_A$

$\overline{v}_A = \underbrace{\overline{v}_E}_{0} + \dot{\theta}\overline{1}_z\times\overline{EA} = 4\dot{\theta}\overline{1}_y$ et $\overline{v}_C = \underbrace{\overline{v}_D}_{0} + \overline{\omega}_{DC}\times\overline{DC} = 6\dot{\varphi}$ m/s $\overline{1}_y$ => $\dot{\varphi} = 2$ rad/s $\overline{1}_z$

3. Vitesse et accélération du point S

$\overline{v}_S = \overline{v}_C = \overline{v}_A = 12$ m/s $\overline{1}_y$ et $\overline{a}_S = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}_{SA}\times\overline{AS} + \overline{\omega}_{SA}\times\left(\overline{\omega}_{SA}\times\overline{AS}\right) = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}_{SA}\times\overline{AS}$

$\overline{a}_A = \overline{a}_E + \overline{\varepsilon}_{AE}\times\overline{EA} + \overline{\omega}_{EA}\times\left(\overline{\omega}_{EA}\times\overline{EA}\right) = \overline{\omega}_{EA}\times\left(\overline{\omega}_{EA}\times\overline{EA}\right) = -\omega_{EA}{}^2\overline{EA} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2\overline{1}_x = -4\dot{\theta}^2\overline{1}_x$

$$\begin{cases} \overline{a}_{C(C\in AC)} = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}_{AC}\times\overline{AC} + \underbrace{\overline{\omega}_{AC}\times\left(\overline{\omega}_{AC}\times\overline{AC}\right)}_{=0} = -\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2\overline{1}_x + \left\|\overline{AC}\right\|\varepsilon_{AC}\overline{1}_x \\ \overline{a}_{C(C\in AD)} = \underbrace{\overline{a}_D}_{=0} + \overline{\varepsilon}_{DC}\times\overline{DC} + \overline{\omega}_{DC}\times\left(\overline{\omega}_{DC}\times\overline{DC}\right) = \left\|\overline{DC}\right\|\varepsilon_{DC}\overline{1}_y - \left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2\overline{1}_x \end{cases}$$

=> $\overline{\varepsilon}_{DC} = 0$ et $-\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2 + \varepsilon_{AC}\left\|\overline{AC}\right\| = -\left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2$ => $\varepsilon_{AC} = \frac{\left\|\overline{EA}\right\|\dot{\theta}^2 - \left\|\overline{DC}\right\|\dot{\varphi}^2}{\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{4.3^2 - 6.2^2}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ m/s² $\overline{1}_z$

=> $\overline{a}_S = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}_{SA}\times\overline{AS} = \left(-4\dot{\theta}^2 + 2\sqrt{3}.\frac{3}{\sin 30}\right)\overline{1}_x = 12\left(-3+\sqrt{3}\right)\overline{1}_x$
