1.

Théorème de la résultante cinétique : $\boxed{\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}}$

Avant le départ des obus Système {canon + wagon + obus} $\overline{R}_{t<0} = -\left(m_1 + 2m_2\right)v_0\overline{1_x}$

Au moment du départ de l'obus : Système {canon + wagon + obus }: $\overline{R}_{t>0} = -m_1 v\overline{1_x} + 2m_2(v_r - v)\overline{1_x}$

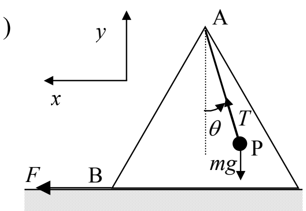
Il n'y a pas de force extérieure suivant l'axe x => $\frac{d}{dt}R_x = 0$ => $R_x = const$:

$$\overline{R}_{t>0} = \overline{R}_{t<0} = -m_1 v + 2m_2(v_r - v) = -\left(m_1 + 2m_2\right)v_0$$

$$v = \frac{2m_2 v_r + \left(m_1 + 2m_2\right)v_0}{m_1 + 2m_2} \Rightarrow \overline{v} = -24{,}7\ m/s\ \overline{1_x}$$

---

2. Pour le système {Triangle+pendule=M+m} : $\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e\right)_x$ => $(M+m)\ddot{x} = F$ (1)



Pour le système {pendule=m} :

$\left(\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e\right)_x$ => $m\ddot{x} = T\sin\theta$ et $0 = mg - T\cos\theta$ => $\ddot{x} = g\ tg\theta$ (2)

(1) + (2) => $\theta = arctg\frac{F}{g\left(M+m\right)}$

On peu aussi utiliser le théorème du moment cinétique pour calculer la deuxième équation :

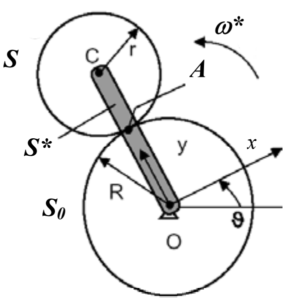
$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}}$ où $\overline{v_G} // \overline{v_A}$

$\overline{M_A} = \overline{M_G} + m\overline{AG} \times \overline{v_G} = ml\cos\theta\dot{x}\ \overline{1_z}$ où $\overline{M_G} = 0$ car m est une masse ponctuelle.

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = ml\cos\theta\ddot{x}\ \overline{1_z} = \overline{m}_{e,A} = \overline{AG} \times m\overline{g} = lmg\sin\theta\ \overline{1_z} \Rightarrow \ddot{x} = g\ \mathrm{tg}\theta$$

---

3. Pour le système {disque S} :



$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$ où $\overline{R} = m\overline{v_{C\in S}} = m\overline{v_{C\in S^*}} = -m(R+r)\dot{\theta}\ \overline{1_x}$ => $\sum \overline{F}_e = -m(R+r)\left(\ddot{\theta}\ \overline{1_x} + \dot{\theta}^2\ \overline{1_y}\right)$

Pour le système { disque S } :

$$\boxed{\overline{m_{e,O}} = \frac{d}{dt}\overline{M_O} - \underbrace{m\overline{v_G}}_{R} \times \underbrace{\overline{v_O}}_{=0}}$$

$$\overline{M_O} = \overline{M_C} + m\overline{OC} \times \overline{v_C}$$

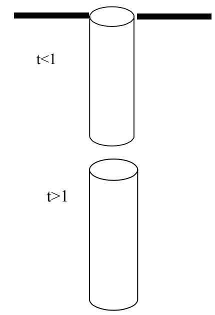
$$\overline{M_C} = I_{z_C}\omega_S\ \overline{1_z} \quad \text{où} \quad I_{z_C} = \frac{mr^2}{2}$$

$$\omega_S : \overline{v_{C\in S^*}} = -\left(R+r\right)\dot{\theta}\ \overline{1_x} = \overline{v_{C\in S}} = \overline{v_A} + \overline{\omega_S} \times \overline{AC} = -\omega r\ \overline{1_x} \Rightarrow \overline{\omega_S} = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}\ \overline{1_z}$$

$$\Rightarrow \overline{M_O} = \frac{mr\left(R+r\right)}{2}\dot{\theta}\ \overline{1_z} + m\left(R+r\right)^2\dot{\theta}\ \overline{1_z} = m\left(R+r\right)\left(\frac{3r}{2} + R\right)\dot{\theta}\ \overline{1_z}$$

$$\overline{m_{e,O}} = \frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\left(R+r\right)\left(\frac{3r}{2} + R\right)\ddot{\theta}\ \overline{1_z}$$

4.



Pour le système {patineur} : $\overline{m_{e,O}}=0$; $\overline{v_G}=0$ => $\frac{d}{dt}\overline{M_O}=0$ où $\overline{M_O}=\overline{\overline{I_O}}.\overline{\omega}$

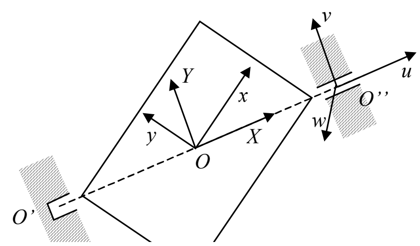
t<0 : $\overline{\omega}=\omega_1\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)}=\frac{m_1r_1^2}{2}+2\left(\underbrace{\frac{m_2l_2^2}{12}}_{I_{z_G(tige)}}+\underbrace{m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2}_{d_{zz_G}}\right)$

t>0 : $\overline{\omega}=\omega_2\,\overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)}=\frac{m_3r_3^2}{2}$ => $\overline{M_O}=\frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2\,\overline{1_z}$

$$\overline{M_O}_{t<0}=\overline{M_O}_{t>0} \Rightarrow \left[\frac{m_1r_1^2}{2}+2\left(\frac{m_2l_2^2}{12}+m_2\left(\frac{l_2}{2}+r_1\right)^2\right)\right]\omega_1=\frac{m_3r_3^2}{2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2=4{,}89\ \ t/s$$

---

5. $F_{O'}=(U_{O'},V_{O'},W_{O'})$ et $F_{O''}=(0,V_{O''},W_{O''})$



Axes $O''uvw$ fixe,
Axes $OXYZ$ lié à la plaque, $\overline{\omega}=\omega\,\overline{1_X}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}}=\underbrace{m\overline{v_G}}_{v_G=0}\times\overline{v_{O'}}+\overline{m_{e,O'}}}$$

$$\overline{m_{e,O'}}=\overline{O'O}\times m\overline{g}+\overline{O'O''}\times\overline{R_{O''}}=\frac{L}{2}mg\overline{1_v}-LW_{O''}\overline{1_v}+LV_{O''}\overline{1_w}$$

$$\overline{M_{O'}}=\overline{M_O}+m\overline{O'O}\times\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=v_O=0}=I_X\omega\overline{1_X}-P_{XY}\omega\overline{1_Y}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}}=I_X\dot{\omega}\overline{1_X}-P_{XY}\dot{\omega}\overline{1_Y}-P_{XY}\omega^2\overline{1_Z}$$

$$\begin{cases}\overline{1_X}=\overline{1_u}\\ \overline{1_Y}=\cos\omega t\overline{1_v}+\sin\omega t\overline{1_w}\\ \overline{1_Z}=-\sin\omega t\overline{1_v}+\cos\omega t\overline{1_w}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{1_u}: I_X\dot{\omega}=0\\ \overline{1_v}: -P_{XY}\dot{\omega}\cos\omega t+P_{XY}\omega^2\sin\omega t=\frac{L}{2}mg-LW_{O''}\\ \overline{1_w}: -P_{XY}\dot{\omega}\sin\omega t-P_{XY}\omega^2\cos\omega t=LV_{O''}\end{cases} \Rightarrow \quad \omega \text{ constant} : \begin{cases}\overline{1_u}: I_X\dot{\omega}=0\\ \overline{1_v}: P_{XY}\omega^2\sin\omega t=\frac{L}{2}mg-LW_{O''}\\ \overline{1_w}: -P_{XY}\omega^2\cos\omega t=LV_{O''}\end{cases} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R}=\sum\overline{F_e} \quad \text{où} \quad \overline{v_G}=0}$$

$$\begin{cases}\overline{1_u}: U_{O'}=0\\ \overline{1_v}: V_{O'}+V_{O''}=0\\ \overline{1_w}: W_{O'}+W_{O''}-mg=0\end{cases} \quad (2) \qquad (1)+(2) \Rightarrow \begin{cases}U_{O'}=0\\ V_{O'}=\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O'}=\frac{mg}{2}+\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}V_{O''}=-\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O''}=\frac{mg}{2}-\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases}$$

6.1 Deux méthodes sont possibles : théorème du moment cinétique et la conservation de l'énergie.

. Nous utiliserons la première.

Résultante cinétique : $\overline{R} = m\overline{v}_G = m\omega r \overline{1}_x$

Moment cinétique en G : $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{i}} = \overline{\overline{I}}_G^i . \overline{\omega} = I_{Gy}^i \dot{\theta} \overline{1}_y$ => $\dfrac{d\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{i}}}{dt} = \overline{\overline{I}}_G^i . \dot{\overline{\omega}} = I_{Gy}^i \ddot{\theta} \overline{1}_y$

Moment cinétique en I : $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}} = \overline{\overline{I}}_G^i . \overline{\omega} + \overline{R} \times \overline{GI} = \left(I_{Gy}^i + mr^2 \right) \dot{\theta} \overline{1}_y$ $(= m\overline{IG} \times \overline{v}_I + \overline{\overline{I}}_I^i . \overline{\omega}$ avec $\overline{v}_I = 0)$

Moment des force appliquées au solide : $\overline{m}_{\mathrm{e},I} = \left(m_1 + m_2 \right) g r_1 \sin\alpha \overline{1}_y$

Théorème du moment cinétique en I : $\dfrac{d\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}^1}{dt} + \dfrac{d\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}^2}{dt} = \dfrac{d\left(\left(I_{Gy}^1 + I_{Gy}^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 \right) \dot{\theta} \overline{1}_y \right)}{dt} = \overline{m}_{\mathrm{e},I}$

$I_{Gy}^1 = \dfrac{m_1 \left(r_1^2 + r_2^2 \right)}{2}$ et $I_{Gy}^2 = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$.

Or $\ddot{\theta} = \dfrac{1}{2} \dfrac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ => $\left(\dfrac{m_1 \left(r_1^2 + r_2^2 \right) + m_2 r_2^2}{2} + m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 \right) \dot{\theta}^2 = 2\left(m_1 + m_2 \right) g r_1 \sin\alpha\theta$

On trouve donc $\dot{\theta}^2 = K\theta$ avec $K = \dfrac{2g\sin\alpha}{r_1} \dfrac{\delta\gamma^2 + 1 - \gamma^2}{\dfrac{3}{2} + \delta\left(\dfrac{\gamma^4}{2} + \gamma^2 \right) - \left(\dfrac{\gamma^4}{2} + \gamma^2 \right)}$ après avoir posé $\delta = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ et $\gamma = \dfrac{r_2}{r_1}$

6.2 $r_1 = r_1^*;\ \rho_1 = \rho_2^*;\ \rho_2 = \rho_1^*$ => $\delta = \dfrac{1}{\delta^*}$ cherchons $r_1\gamma = r_2 = f\left(\gamma^* r_1 = r_2^* \right)$

$$\frac{1 + \delta\gamma^2 - \gamma^2}{\frac{3}{2} + \delta\frac{\gamma^4}{2} + \delta\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{2} - \gamma^2} = \frac{1 + \frac{1}{\delta}\gamma^{*2} - \gamma^{*2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{\delta}\frac{\gamma^{*4}}{2} + \frac{1}{\delta}\gamma^{*2} - \frac{\gamma^{*4}}{2} - \gamma^{*2}}$$

$$\left(1 + \delta\gamma^2 - \gamma^2 \right)\left(3\delta + \gamma^{*4} + 2\gamma^{*2} - \delta\gamma^{*4} - 2\delta\gamma^{*2} \right) = \left(\delta + \gamma^{*2} - \delta\gamma^{*2} \right)\left(3 + \delta\gamma^4 + 2\delta\gamma^2 - \gamma^4 - 2\gamma^2 \right)$$

$$\left(\delta - \left(1 + \delta \right)\gamma^2 \right)\gamma^2 - 5\gamma^{*2} + \left(1 - \delta \right)\left(\gamma^{*2} - \gamma^2 \right)\gamma^2\gamma^{*2} = 0$$

$$\left[5r_2^4 - \left(1 - \delta \right) r_1^4 \right] r_2^{*2} + \left[\left(\delta r_2^2 r_1^2 - \left(1 + \delta \right) r_1^2 \right) \right] r_2^{*4} + \left[-\left(1 - \delta \right) r_2^2 r_1^4 \right] = A r_2^{*4} + B r_2^{*2} + C = 0$$

$$\Rightarrow r_2^{*2} = \frac{-2\left[\left(\delta r_2^2 r_1^2 - \left(1 + \delta \right) r_1^2 \right) \right] \pm \sqrt{\left[\left(\delta r_2^2 r_1^2 - \left(1 + \delta \right) r_1^2 \right) \right]^2 - 4\left[5r_2^4 - \left(1 - \delta \right) r_1^4 \right]\left[-\left(1 - \delta \right) r_2^2 r_1^4 \right]}}{2\left[5r_2^4 - \left(1 - \delta \right) r_1^4 \right]}$$

Le rapport entre les rayons r_2 et r_{2*} doit satisfaire cette dernière équation pour que les deux cylindres arrivent en même temps en bas.

6.3 Si le cylindre est homogène, K devient $K = \dfrac{4g\sin\alpha}{3r_1}$ qui est indépendant de la masse du cylindre

---

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be

Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be

http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps. Login : ***student***, mot de passe : **n*ewton***

$$r_1 = r_1*;\;\; \rho_1 = \rho_2*;\;\; \rho_2 = \rho_1* \;=>\; \delta = \frac{1}{\delta*} \quad \text{cherchons} \quad r_1\gamma = r_2 = f\left(\gamma * r_1 = r_2*\right)$$

$$\frac{1+\delta\gamma^2-\gamma^2}{\frac{3}{2}+\delta\frac{\gamma^4}{2}+\delta\gamma^2-\frac{\gamma^4}{2}-\gamma^2} = \frac{1+\frac{1}{\delta}\gamma*^2-\gamma*^2}{\frac{3}{2}+\frac{1}{\delta}\frac{\gamma*^4}{2}+\frac{1}{\delta}\gamma*^2-\frac{\gamma*^4}{2}-\gamma*^2}$$

$$\left(1+\delta\gamma^2-\gamma^2\right)\left(3\delta+\gamma*^4+2\gamma*^2-\delta\gamma*^4-2\delta\gamma*^2\right) = \left(\delta+\gamma*^2-\delta\gamma*^2\right)\left(3+\delta\gamma^4+2\delta\gamma^2-\gamma^4-2\gamma^2\right)$$

$$3\delta+\gamma*^4+2\gamma*^2-\delta\gamma*^4-2\delta\gamma*^2+3\delta\delta\gamma^2+\gamma*^4\,\delta\gamma^2+2\gamma*^2\delta\gamma^2-\delta\gamma*^4\,\delta\gamma^2-2\delta\gamma*^2\delta\gamma^2-\gamma^2 3\delta-\gamma^2\gamma*^4-\gamma^2 2\gamma*^2+\gamma^2\delta\gamma*^4+\gamma^2 2\delta\gamma*^2=$$

$$3\delta+\left(1-\delta\right)\gamma*^4+2\left(1-\delta\right)\gamma*^2-3\delta\left(1-\delta\right)\gamma^2-\left(1-\delta\right)^2\gamma^2\gamma*^4-2\left(1-\delta\right)^2\gamma^2\gamma*^2$$

$$=3\delta-\delta\left(1-\delta\right)\gamma^4-2\delta\left(1-\delta\right)\gamma^2-3\left(1-\delta\right)\gamma*^2-2\left(1-\delta\right)^2\gamma*^2\gamma^2-\left(1-\delta\right)^2\gamma*^2\gamma^4$$

$$\left(\delta-\left(1+\delta\right)\gamma^2\right)\gamma^2-5\gamma*^2+\left(1-\delta\right)\left(\gamma*^2-\gamma^2\right)\gamma^2\gamma*^2=0$$

$$\left(\delta-\left(1+\delta\right)\gamma^2\right)\gamma^2-5\gamma*^2+\left(1-\delta\right)\left(\gamma*^2-\gamma^2\right)\gamma^2\gamma*^2=0$$

$$\left(\delta-\left(1+\delta\right)\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{r_1^2}{r_2^2}-5\frac{r_1^2}{r_2*^2}+\left(1-\delta\right)\left(\frac{r_1^2}{r_2*^2}-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{r_1^2}{r_2*^2}=0$$

$$\left(\delta-\left(1+\delta\right)\frac{1}{r_2^2}\right)\frac{r_1^2}{r_2^2}-5\frac{1}{r_2*^2}+\left(1-\delta\right)\left(\frac{1}{r_2*^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\frac{r_1^2 r_1^2}{r_2^2 r_2*^2}=0$$

$$\left[5r_2^4-\left(1-\delta\right)r_1^4\right]r_2*^2+\left[\left(\delta r_2^2 r_1^2-\left(1+\delta\right)r_1^2\right)\right]r_2*^4+\left[-\left(1-\delta\right)r_2^2 r_1^4\right]=Ar_2*^4+Br_2*^2+C=0$$

$$=> r_2*^2=\frac{-2\left[\left(\delta r_2^2 r_1^2-\left(1+\delta\right)r_1^2\right)\right]\pm\sqrt{\left[\left(\delta r_2^2 r_1^2-\left(1+\delta\right)r_1^2\right)\right]^2-4\left[5r_2^4-\left(1-\delta\right)r_1^4\right]\left[-\left(1-\delta\right)r_2^2 r_1^4\right]}}{2\left[5r_2^4-\left(1-\delta\right)r_1^4\right]}$$