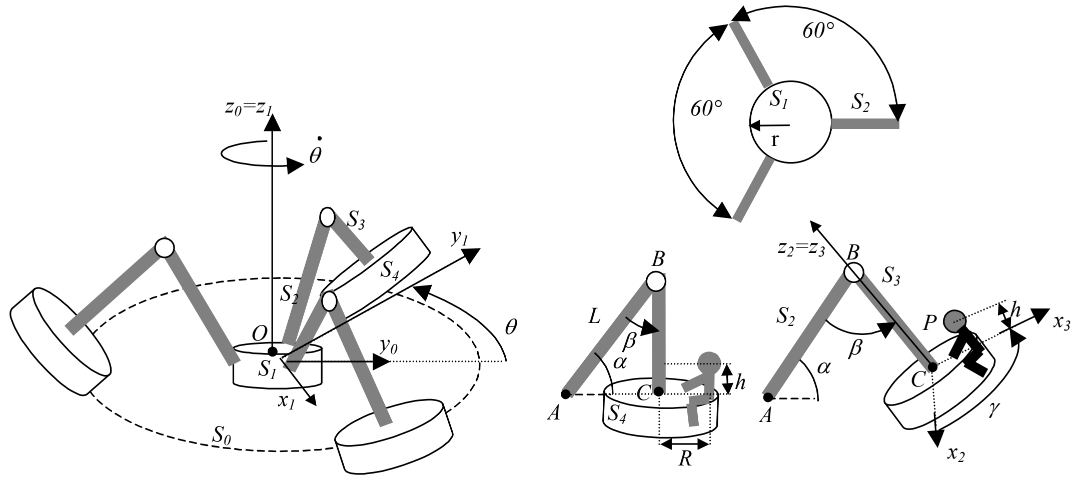
Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2003-2004
Corrigé de l'examen août 2004

1.



Position au repos

$\overline{\omega}_{S_4} = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1} + \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\gamma}\,\overline{1}_{z_2}$

$\overline{\omega}_{S_4} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} - \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\,\overline{1}_{y_1} + \left[\dot{\theta} + \cos(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\right]\overline{1}_{z_1}$

<u>Repère</u> $Ox_1y_1z_1$ => $\overline{\omega}_d = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$

$\overline{v_P} = \overline{v_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}$ avec $\overline{CP} = R\cos\gamma\,\overline{1}_{x_1} + \left(R\sin\gamma\cos(\beta-\beta_0) - h\sin(\beta-\beta_0)\right)\overline{1}_{y_1} + \left(h\cos(\beta-\beta_0) + R\sin\gamma \text{ si}\right.$

$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BC}$ avec $\overline{\omega}_2 = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{BC} = -L\sin\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_1} - \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_1}\right)$

$\overline{v_B} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_1 \times \overline{OB} = -(r + L\cos\alpha)\dot{\theta}\,\overline{1}_{x_1}$ avec $\overline{\omega}_1 = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{OB} = (r + L\cos\alpha)\,\overline{1}_{y_1} + L\cos\alpha\,\overline{1}_{z_1}$

$$\overline{\varepsilon}_{S_4} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_4}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_{S_4} = \left(\ddot{\beta} + \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\beta}\dot{\theta} - \cos(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_1} - \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\beta}\,\overline{1}_{z_1}$$

$\overline{a_P} = \overline{a_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \left(\overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}\right) + \overline{\varepsilon}_{S_4} \times \overline{CP}$

$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{BC}\right) + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{BC}$ avec $\overline{\varepsilon}_2 = \left.\frac{d\overline{\omega}_2}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 = \ddot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\beta}\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_1}$

$\overline{a_B} = \overline{a_0} + \overline{\omega}_1 \times \left(\overline{\omega}_1 \times \overline{OB}\right) + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OB}$ avec $\overline{\varepsilon}_1 = \left.\frac{d\overline{\omega}_1}{dt}\right|_{rel} = 0$ et O fixe : $\overline{a_0} = 0$

ou

$\overline{\omega}_{S_4} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_2} + \sin(\beta-\beta_0)\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_2} + \left[\dot{\gamma} + \cos(\beta-\beta_0)\dot{\theta}\right]\overline{1}_{z_2}$

<u>Repère</u> $Cx_2y_2z_2$ => $\overline{\omega}_d = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1} + \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1}$

$\overline{v_P} = \overline{v_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}$ avec $\overline{CP} = R\left(\cos\gamma\,\overline{1}_{x_2} + \sin\gamma\,\overline{1}_{y_2}\right) + h\,\overline{1}_{z_2}$

$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BC}$ avec $\overline{\omega}_2 = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_2} + \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et $\overline{BC} = -L\sin\alpha\,\overline{1}_{z_2}$

$\overline{v_B} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_1 \times \overline{OB} == -(r + L\cos\alpha)\dot{\theta}\,\overline{1}_{x_2}$ avec $\overline{\omega}_1 = \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et

$\overline{OB} = (r + L\cos\alpha)\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2} - \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2}\right) + L\cos\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$

---

2 z : axe vertical passant par le centre de la tasse, z' : axe vertical passant par le bord de l'anse.

$$I_{z(tasse)} = \rho\pi H \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} - \rho\pi H \frac{\left(\frac{D}{2} - e\right)^4}{2}$$

Rappel : avec l'axe z = axe de révolution

cercle : $I_z\,(\text{cercle}) = \int \left(x^2 + y^2\right)dm = 2I_x - 2I_{xy}$ => $I_x = \frac{I_z}{2} + I_{xy}$

Par symétrie : $I_x\,(\text{cercle O}) = I_x\,(\text{demi-cercle} \cup) + I_x\,(\text{demi-cercle} \cap)$ => $I_x\,(\text{demi-cercle} \cup) = \frac{I_x\,(\text{cercle O})}{2}$

$$\text{Dans notre cas : } I_{z'(Anse\cup)} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\left(\rho\pi a\frac{(b)^4}{2} - \rho\pi a\frac{(b-a)^4}{2}\right)}{2}}_{\frac{I_{x'(Anse\,O)}}{2}} + \underbrace{\left(\rho\pi a\frac{a^2b^2}{12} - \rho\pi a\frac{a^2(b-a)^2}{12}\right)}_{I_{y'z'(Anse\,O)}}\right]$$

$$I_{z(Anse\cup)} = I_{z'(Anse\cup)} + \underbrace{\left(\rho\pi a\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(-d_G{}^2 + \left(\frac{D}{2}+d_G\right)^2\right)\right)}_{Steiner} \quad \text{où } d_G\text{=distance(axe } z'\text{;cdm de l'anse)}$$

$$I_z = \frac{\rho\pi H}{2}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{D}{2}-e\right)^4\right) + \frac{\rho\pi a}{4}\left((b)^4-(b-a)^4\right) + \frac{\rho\pi a^3}{12}\left(b^2-(b-a)^2\right) + \rho\pi a\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

3. $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}+R\dot{\theta}\right)^2 + x^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2$ et $V = -mg\left(x\cos\theta - R\sin\theta\right)$

avec $\overline{\omega} = \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z$; $\overline{OG} = x\overline{1}_{x_1} + R\overline{1}_{y_1}$ => $\overline{v}_G = \left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1} + x\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}$

Condition de roulement sans glissement :

$$\left.\begin{aligned}&\overline{v}_{P\in\text{corde}} = x\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}\\&\overline{v}_{Q\in\text{disque}} = \frac{d\left(x\overline{1}_{x_1}+R\overline{1}_{y_1}+R\overline{1}_{y_2}\right)}{dt} = \dot{x}\overline{1}_{x_1} + x\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} - R\dot{\theta}\overline{1}_{x_1} - R\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overline{1}_{x_2} \underset{\substack{\text{quand}\\Q=P}}{=} \dot{x}\overline{1}_{x_1} + x\dot{\theta}\overline{1}_{y_1} + \dot{\varphi}\overline{1}_{x_1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{x} = -R\dot{\varphi}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)^2 + x^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}-\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + mg\left(x\cos\theta - R\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases}x : m\left(\ddot{x}-R\ddot{\theta}\right) - \frac{mR}{2}\left(\ddot{\theta}-\frac{\ddot{x}}{R}\right) - mx\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\ddot{x} - \frac{3}{2}R\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2 = g\cos\theta\\ \theta : m\left(x^2\ddot{\theta} + 2x\dot{x}\dot{\theta} - R\left(\ddot{x}-R\ddot{\theta}\right)\right) + \frac{mR^2}{2}\left(\ddot{\theta}-\frac{\ddot{x}}{R}\right) = -mgx\sin\theta - mgR\cos\theta \;+>\; x\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} - R\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta\end{cases}$$

Théorème de la résultante cinétique : $\begin{cases}m\left(\ddot{x}-R\ddot{\theta}-x\dot{\theta}^2\right) = mg\cos\theta - T\\ m\left(\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta} + \dot{x}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2\right) = -mg\sin\theta\end{cases}$

Théorème du moment cinétique : $\frac{mR^2}{2}\left(\ddot{\theta}-\frac{\ddot{x}}{R}\right) = -RT$

Condition initiale pour que la corde reste verticale :

$\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ => $\ddot{x} = \frac{2}{3}g$

4.

$$\overline{M}_0 = \overline{\overline{I}}_0.\overline{\omega} = \begin{pmatrix}\frac{3mR^2}{20} + \frac{3mH^2}{80} + md_{OG}^2 & - & 0\\ 0 & - & 0\\ 0 & - & \frac{3mR^2}{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\sin\alpha\\0\\\omega\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\overline{M}_0 = \left(\frac{3mR^2}{20} + \frac{3mH^2}{80} + md_{OG}^2\right)\omega\frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}} + \frac{3mR^2}{20}\omega\frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

5. Par le théorème du moment cinétique : concervation du moment cinétique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M}_0 = 0 \Rightarrow \overline{M}_0{}^+ = \overline{M}_0{}^- \Rightarrow \frac{M_1R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{\left(M_1+M_2\right)R^2}{2}\omega$$

$$\frac{M_2R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{\left(M_2+3M_2\right)R^2}{6}\omega \Rightarrow \omega = \frac{\omega_2}{4}$$

Pourcentage de l'énergie cinétique : $\frac{T^+}{T^-} = \frac{\frac{M_1R^2}{2}\omega_1{}^2 + \frac{M_2R^2}{2}\omega_2{}^2}{\frac{\left(M_1+M_2\right)R^2}{2}\omega^2} = 1{,}32\,\%$