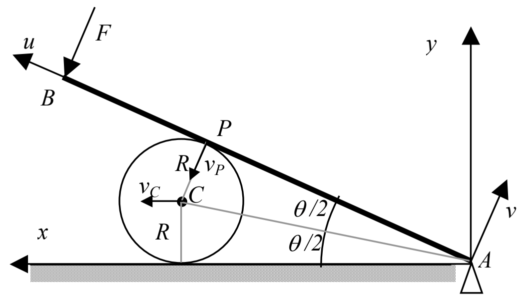
1.1 Considérons le système = {tige (m) + disque (2m)}}



Calcul de l'énergie cinétique :

$$T_{Tige} = \left(\frac{1}{2}\overline{\omega}_t.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_t\right)_{Tige} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_t = \dot{\theta}\,\overline{1}_z \quad (\text{avec } \dot{\theta} < 0)$$

$$T_{Disque} = \left(\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_d.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d\right)_{Disque} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_d = \dot{\varphi}\,\overline{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{v}_C = \frac{d\overline{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\right)\overline{1}_x = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\overline{1}_x$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\overline{\omega}_t.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_t\right)_{Tige} + \left(\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_d.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d\right)_{Disque} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$\dot{\varphi}$ dépend de $\dot{\theta}$ => pour déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P (dans les axes liés à la tige $Auvw$ avec u // AB)

$$\overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_{P\in\text{disque}}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_t \times \overline{AP} = R\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_v \\ \overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d \times \overline{CP} = \left(-\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta - \dot{\varphi}R\right)\overline{1}_u + \frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta\,\overline{1}_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_{P\in\text{tige}}\right)_{\overline{1}_u} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

$$\text{donc} \quad T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\text{cotg}^2\theta\,\text{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2$$

Energie potentielle : $V = V_{\text{tige}} + V_{\text{disque}}$

L'intégrale première est $T + V = E_0$ car :

$\overline{mg}$ dérive d'une potentiel => $V = mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$\overline{F}$ dérive d'un potentiel car $\overline{F} = -F\,\overline{1}_v = -\overline{grad}\,V = -\frac{1}{L}\frac{\partial V}{\partial\theta}$ => $V = FL\theta$

$\overline{T}_P$: la force de frottement (sans glissement) en P ne travaille pas pour un petite déplacement $\delta\theta$:

$\overline{AP} = d\,\overline{1}_u \Rightarrow \delta\overline{AP} = d\delta\theta\,\overline{1}_v$; $\overline{T}_P = -T_P\,\overline{1}_u \Rightarrow Q_{\theta(T_P)} = 0$

Il n'y a pas de frottement en Q donc pas de travail.

$$\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{mR^2}{2}\text{cotg}^2\theta\,\text{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta + FL\theta = E_0$$

1.2 Système = {disque (2m)} : Théorème du moment cinétique en C

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_C = \sum \overline{m}_{e,C}$$

$$\overline{M}_C = \overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d = \frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_z = -mR^2\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_C = -mR^2\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta}\overline{1}_z + mR^2\frac{1}{\sin^2\theta}\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\overline{1}_z + mR^2\text{cotg}\theta\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\overline{1}_z$$

$$\overline{m}_{e,C} = RT_P\overline{1}_z \;\Rightarrow\; T_P = mR\left(-\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} + \frac{\text{cotg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{\text{cotg}\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\right)$$

Système = {tige (m)} : Théorème du moment cinétique en A

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = \sum \overline{m}_{e,A}$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -R\text{cotg}\frac{\theta}{2}N_P - LF - \frac{L}{2}\cos\theta mg \;\Rightarrow\; N_P = -\frac{mL^2}{3R}\text{tg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \frac{LF}{R}\text{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{Lmg}{2R}\cos\theta\,\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

---

2 Système = {Bogie + Ensemble T (cabine + axe CE)} : Lagrange :

Energie cinétique : $T = T_{Bogie} + T_{Cabine}$

$$T_{Bogie} = \left(\frac{1}{2}mv_C^2\right)_{Bogie} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_T = \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{Cabine} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{z_G}\dot{\theta}^2$$

avec $\overline{v}_G = \overline{v}_C + \overline{\omega}\times\overline{CG} = \left(\dot{x} + d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \left(d\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\overline{1}_y$ et $I_E = I_{z_G} + Ma^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\dot{x}\right) + \frac{1}{2}\left(I_E - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

1. Bogie

$$V_{Bogie} = mgx\sin\alpha \;\Rightarrow\; Q_{x(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg\sin\alpha \;\text{ et }\; Q_{\theta(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$$

($y_C = x\sin\alpha$; $\delta y_C = \sin\alpha\delta x$ et $F_y = -mg \Rightarrow Q_{x(mg)}\delta x = -mg\sin\alpha\delta x$)

2. Ensemble T

$$V_T = Mg\left(x\sin\alpha - d\cos\theta\right) \;\Rightarrow\; Q_{x(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Mg\sin\alpha \;\text{ et }\; Q_{\theta(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -Mgd\sin\theta$$

($y_G = x\sin\alpha - d\cos\theta$; $\delta y_G = \sin\alpha\delta x + d\sin\theta\delta\theta$ et $F_y = -Mg \Rightarrow Q_{x(Mg)}\delta x = -Mg\sin\alpha\delta x$ et $Q_{\theta(Mg)}\delta\theta = -Mgd\sin\theta\delta\theta$)

3. Couple moteur

$$Q_{x(C_M)} = \frac{C_M}{r} \;\text{ car }\; \delta\tau = Q_x\delta x = C_M\delta\alpha = C_M\frac{\delta x}{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x = Q_{x(mg)} + Q_{x(Mg)} + Q_{x(C_M)} \\ \Rightarrow (m+M)\ddot{x} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{\theta} - Md\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}^2 = -(m+M)g\sin\alpha + \dfrac{C_M}{r} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta = Q_{\theta(mg)} + Q_{\theta(Mg)} + Q_{\theta(C_M)} \\ \Rightarrow Md^2\ddot{\theta} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{x} + \left(I_E - Ma^2\right)\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta \end{cases}$$
