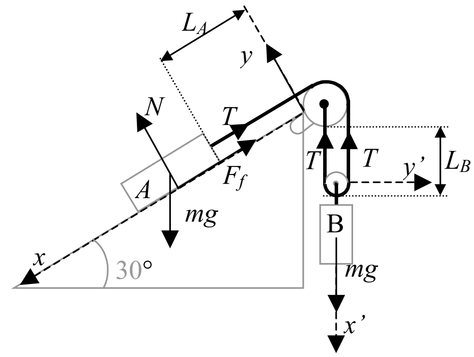
**1.** $L = L_A + 2L_B + C$ avec $C$ = partie constante




$$\overline{F} = m\overline{a} \quad \begin{cases} A|_x : \; m_A a_A = m_A g \sin 30 - T - F_f \\ A|_y : \; 0 = -m_A g \cos 30 + N \\ B|_{x'} : \; m_B a_B = m_B g - 2T \end{cases}$$

A compléter avec la relation entre les accélérations $a_A = -2a_B$

A l'équilibre : $T = \dfrac{m_B g}{2} = 98.1\ N$

$F_{f(\acute{e}qui)} = m_A g \sin 30 - T = 196.2\ N$

(force de frottement nécessaire pour avoir l'équilibre)

Dans notre cas : et $F_f = f_{\text{Stat}} m_A g \cos 30 = 127.4\ N$

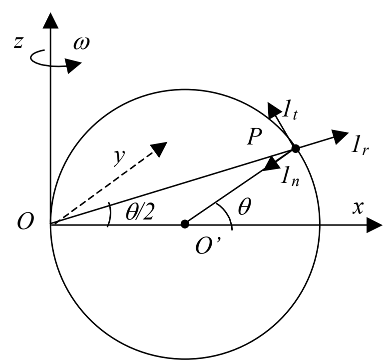
$F_f < F_{f(\acute{e}qui)}$ => Le bloc A va descendre car la force de frottement n'est pas suffisante pour retenir le bloc.

Pendant le mouvement $\left(F_f = f_{dyn} m_A g \cos 30\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} A|_x : \; -120 a_B = +588{,}6.0{,}5 - T - 0{,}2.588{,}6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ B|_{y'} : \; 20 a_B = 196{,}2 - 2T \end{array}\right\} \Rightarrow a_B = -0{,}725\ m/s^2,\ a_A = 1{,}450\ m/s^2 \text{ et } T = 105.4\ N$$

---

**2.1** Dans le repère de Frenet relatif lié au disque (centré en O'), les forces des Coriolis et d'entraînement interviennent comme des forces extérieures.




$$\begin{cases} m\ddot{s} = T + F_T = T + m\overline{g}.\overline{1}_t + \overline{F}_e.\overline{1}_t + \overline{F}_c.\overline{1}_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = N + F_N = N + m\overline{g}.\overline{1}_n + \overline{F}_e.\overline{1}_n + \overline{F}_c.\overline{1}_n \\ 0 = B + F_B = B + \overline{F}_e.\overline{1}_b + \overline{F}_c.\overline{1}_b \end{cases}$$

$$\overline{F}_e = -m\overline{a}_e = -m\left(\overline{a}_{O'} + \overline{\varepsilon}\times\overline{OP} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{OP})\right)$$

$$\overline{F}_c = -m\overline{a}_c = -2m\overline{\omega}\times\overline{v}_r = -2m\overline{\omega}\times\left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right|_{rel}$$

$$\overline{v}_{O'} = R\omega\overline{1}_y \Rightarrow \overline{a}_{O'} = \frac{d\overline{v}_{O'}}{dt} = \left.\frac{d\overline{v}_{O'}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}\times\overline{v}_{O'} = -R\omega^2\overline{1}_x$$

$$\overline{v}_r = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right|_{rel} = R\dot{\theta}\overline{1}_t = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_z) \Rightarrow \overline{\omega}\times\overline{v}_r = -R\dot{\theta}\omega\sin\theta\,\overline{1}_y$$

$$\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{OP}) = \omega\overline{1}_z\times(\omega\overline{1}_z\times(R\cos\theta\,\overline{1}_x + R\sin\theta\,\overline{1}_z)) = -R\cos\theta\,\omega^2\overline{1}_x$$

$$\overline{F}_e = mR\omega^2\left(1+\cos\theta\right)\overline{1}_x \quad \text{et} \quad \overline{F}_c = +2mR\dot{\theta}\omega\sin\theta\,\overline{1}_y$$

$$\overline{1}_x = -\sin\theta\,\overline{1}_t - \cos\theta\,\overline{1}_n\,,\quad \overline{1}_y = -\overline{1}_b \quad \text{et} \quad \overline{1}_z = \cos\theta\,\overline{1}_t - \sin\theta\,\overline{1}_n$$

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = T - mg\cos\theta - mR\omega^2\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta = -mg\cos\theta - mR\omega^2\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta \quad \text{(T=0, poli)} \\ mR\dot{\theta}^2 = N + mg\sin\theta - mR\omega^2\left(1+\cos\theta\right)\cos\theta \\ 0 = B - 2mR\dot{\theta}\omega\sin\theta \end{cases}$$

**2.2** $\overline{v}_r = R\dot{\theta}\overline{1}_t = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_z)$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot\theta^2}{d\theta} = -2\dfrac{g}{R}\cos\theta - 2\omega^2\sin\theta - 2\omega^2\sin\theta\cos\theta = -2\dfrac{g}{R}\cos\theta - 2\omega^2\sin\theta - \omega^2\sin 2\theta \\ N = mR\dot\theta^2 - mg\sin\theta + mR\omega^2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ B = 2mR\dot\theta\omega\sin\theta \end{cases}$$

$$\dot\theta^2 - \dot\theta_0^2 = \int_{\theta_0}^{\theta}\left(-2\frac{g}{R}\cos\theta - 2\omega^2\sin\theta - \omega^2\sin 2\theta\right)d\theta$$

$$= -2\frac{g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0) + 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{\omega^2}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\theta_0)$$

$$\Rightarrow N = -mg\sin\theta + mR\omega^2(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$+ mR\left(-2\frac{g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0) + 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{\omega^2}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) + \dot\theta_0^2\right)$$

$$N = -mg\sin\theta + mR\omega^2\cos\theta + mR\omega^2\cos^2\theta - 2mg\sin\theta + 2mR\omega^2\cos\theta + \frac{1}{2}mR\omega^2\cos 2\theta$$

$$+ 2mg\sin\theta_0 - 2mR\omega^2\cos\theta_0 - \frac{1}{2}mR\omega^2\cos 2\theta_0 + mR\dot\theta_0^2$$

$$N(\theta) = -3mg\sin\theta + 3mR\omega^2\cos\theta + \frac{3}{2}mR\omega^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}mR\omega^2\sin^2\theta + C$$

avec $C = 2mg\sin\theta_0 - 2mR\omega^2\cos\theta_0 - \dfrac{1}{2}mR\omega^2\cos 2\theta_0 + mR\dot\theta_0^2$

$$B = 2mR\omega\sin\theta\sqrt{-2\frac{g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0) + 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{\omega^2}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) + \dot\theta_0^2}$$

**2.3**
Si $\dot\theta_0\left(\theta = -\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dot\theta^2 = -2\dfrac{g}{R}(\sin\theta + 1) + 2\omega^2\cos\theta + \dfrac{\omega^2}{2}(\cos 2\theta + 1)$

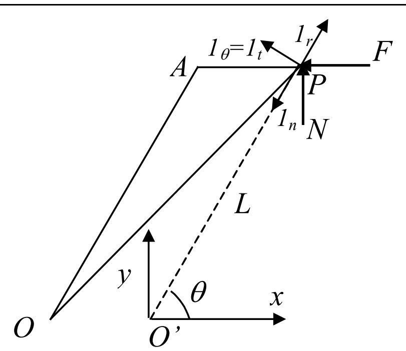
$$\dot\theta^2 = 0 = -2\frac{g}{R}(\sin\theta^* + 1) + 2\omega^2\cos\theta^* + \frac{\omega^2}{2}(\cos 2\theta^* + 1)$$

$\Rightarrow \theta^* = 0{,}9242$ rad (Par Matlab avec R=10 m et $\omega = 1{,}5\ m/s$)

**2.4** L'énergie totale est conservée étant donnée qu'il n'y a pas de frottement. $E = T + V$

---

**3.**




$$\begin{cases} \text{Sur } \bar{1}_t : mR\ddot\theta = \sum F_t \Longrightarrow mr\ddot\theta = -mg\cos\theta + N\cos\theta + F\sin\theta \\ \text{Sur } \bar{1}_n : mR\dot\theta^2 = \sum F_n \Rightarrow mr\dot\theta^2 = mg\sin\theta - N\sin\theta + F\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow N = mg + mr(\cos\theta.\ddot\theta - \sin\theta.\dot\theta^2)$ et $F = mr(\sin\theta.\ddot\theta + \cos\theta.\dot\theta^2)$

AN : $N = 432$ N et $F = 81{,}5$ N avec $\theta = \pi/2 - \beta$

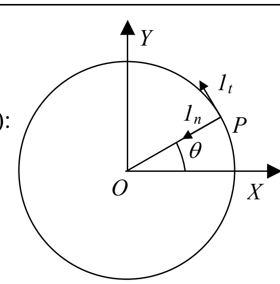
---

**4.** Dans le repère de Frenet, avec des accélérations absolues :

$\dot\theta = \omega,\ r = R \Rightarrow mr\omega^2 = \sum F_n = N \Rightarrow N = m\omega^2 R$

Dans le repère de Frenet, avec des accélérations relatives ($F_{entrainement}$ qui intervient):

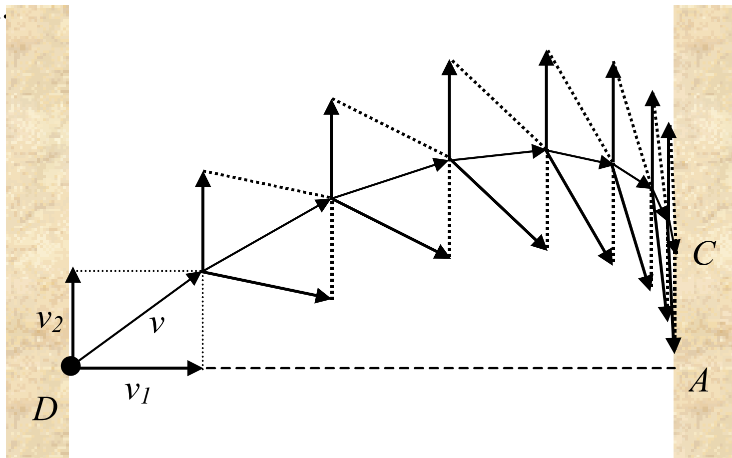
$\dot\theta = \omega$ (Darboux), $r = R \Rightarrow m.0 = \sum F_n = N - m\omega^2 R \Rightarrow N = m\omega^2 R$




Dans le repère relatif, il n'y a pas de mouvement de la bille. Par contre, il faut, dans ce cas, tenir compte de la force d'entraînement qui correspond à la force centrifuge.

---

**5.1.**




Il n'existe de solution pour ce problème que si $v_1$ est plus grand que $v_2$. En fonction des valeurs de ces deux vitesses, la trajectoire sera différente. Sur la trajectoire représentée sur le dessin, le bateau arrivera au point C sur la rive gauche. Pour terminer sa course en A, il remontera le fleuve de *C* à *A*.

**5.2.** $\overline{v}_2 = v_2\,\overline{1}_y = v_2\left(\sin\theta\,\overline{1}_r + \cos\theta\,\overline{1}_\theta\right)$ et $\overline{v}_1 = v_1\,\overline{1}_{PA}$

$$\overline{PA} = \overline{DA} - \overline{DP} = \left(r_0\cos\theta - r\right)\overline{1}_r - r_0\sin\theta\,\overline{1}_\theta \;\; => \;\; \overline{1}_{PA} = \frac{\overline{PA}}{\left\|\overline{PA}\right\|} = \frac{\left(r_0\cos\theta - r\right)\overline{1}_r - r_0\sin\theta\,\overline{1}_\theta}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta}}$$

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \frac{\left(v_2\sin\theta\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} + v_1\left(r_0\cos\theta - r\right)\right)}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta}}\overline{1}_r + \frac{\left(\left(v_2\cos\theta\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} - v_1 r_0\sin\theta\right)\right)}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta}}\overline{1}_\theta$$

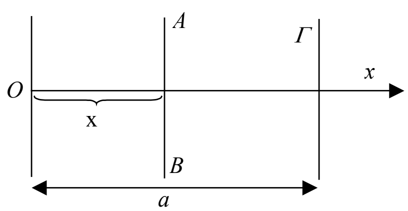
$$\overline{v} = \frac{d\overline{DP}}{dt} = \frac{dr\,\overline{1}_r}{dt} = \dot{r}\,\overline{1}_r + r\dot{\theta}\,\overline{1}_\theta$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\left(v_2\sin\theta\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} + v_1\left(r_0\cos\theta - r\right)\right)}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta}} => \left(\dot{r} - v_2\sin\theta\right)\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} = v_1\left(r_0\cos\theta - r\right) \\ r\dot{\theta} = \dfrac{\left(\left(v_2\cos\theta\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} - v_1 r_0\sin\theta\right)\right)}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta}} => \left(r\dot{\theta} - v_2\cos\theta\right)\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0\cos\theta} = -v_1 r_0\sin\theta \end{cases}$$

**5.3** Le bateau arrivera au point *C* après un temps
*t*=18,4475 s* pour des valeurs de $R$ = 100 m, $v_1$ = 10,01 m/s et $v_2$ = 10 m/s.
*t*=61,55 s* pour des valeurs de $R$ = 100 m, $v_1$ = 3,003 m/s et $v_2$ = 3 m/s.
Par MATLAB : complément de corrigé
lien sur le site Teaching>>Notes>>Séances de travaux pratiques>>Compléments des TPs (2003-2004).

---

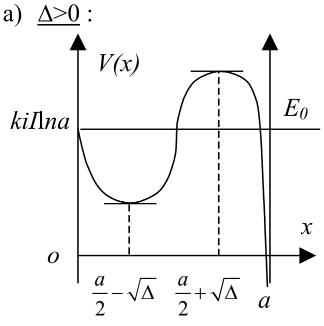
**6.1**



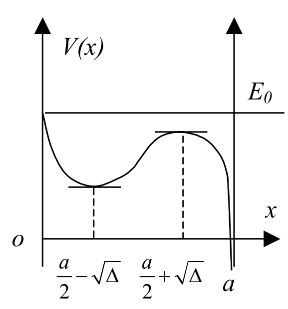

$$m\ddot{x} = -cx + \frac{kiIl}{a-x};\quad V(x) = c\frac{x^2}{2} + kiIl\ln(a-x)$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\Delta} \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{a^2}{4} - \frac{kiIl}{c}$$

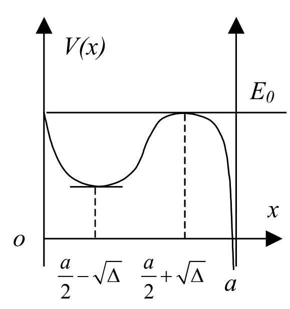
a) <u>Δ>0</u> :




Oscillations

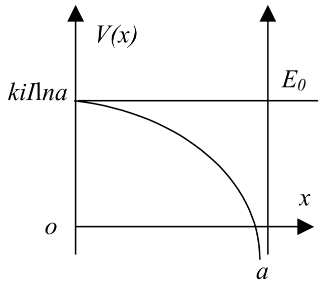



AB => Δ

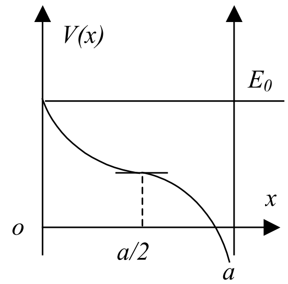



AB => $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\Delta}$

b) <u>Δ<0</u> :




c) <u>Δ=0</u> :




AB => Γ AB => Γ

**6.2**

a. $\Delta > 0: \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\Delta}, 0\right) = \text{centre}$ et $\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\Delta}, 0\right) = \text{col}$

b. $\Delta = 0: \left(\frac{a}{2}, 0\right) =$ point singulier multiple

c. $\Delta < 0:$ il n'existe pas de points singuliers

Application MATLAB : lien sur le site
Teaching>>Notes>>Séances de travaux pratiques>>Compléments des TPs (2003-2004).

---

Pour les problèmes relatifs au Tps et aux laboratoires, contactez Emmanuelle.Vin@ulb.ac.be
Pour les problèmes relatifs aux projets Matlab, contactez CFAO.Matlab@ulb.ac.be
http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ >Teaching>mécaII>Tps. Login : ***student***, mot de passe : **n*ewton***