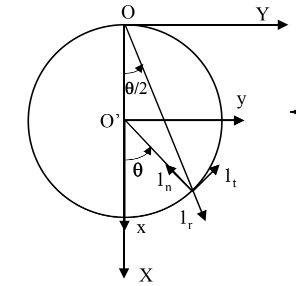
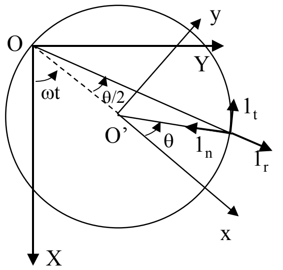
1. Position initiale :



en t :



Le repère relatif tourne avec le tore à la vitesse ω autour de O.

$\bar{a}_{O'} = -R\omega^2 \bar{1}_x = R\omega^2\left(\cos\theta \bar{1}_n + \sin\theta \bar{1}_t\right)$

Dans le repère de Frenet relatif lié au tore (centré en O'), les forces des Coriolis et d'entraînement interviennent comme des forces extérieures.

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \bar{F}_{frott}.\bar{1}_t + \bar{F}_e.\bar{1}_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{R} = \bar{F}_e.\bar{1}_n + \bar{F}_c.\bar{1}_n + N \end{cases}$$

$$\bar{F}_e = -m\bar{a}_e = -m\left(\bar{a}_{O'} + \bar{\varepsilon}\times\overline{OP} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\overline{OP})\right)$$

$$= -m\left(\omega^2 R\left(\cos\theta \bar{1}_n + \sin\theta \bar{1}_t\right) + \omega^2 R \bar{1}_n\right) = m\omega^2 2R\cos(\theta/2)\bar{1}_r$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\bar{\omega}\times\bar{v}_r = -2m\bar{\omega}\times\left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right|_{rel} = -2m\omega R\dot{\theta}\bar{1}_n$$

$$=> \begin{cases} mR\ddot{\theta} = -kR^2\varepsilon\dot{\theta}^2 - m\omega^2 R\sin\theta \\ mR\dot{\theta}^2 = -m\omega^2 2R\cos^2(\theta/2) - 2m\omega R\dot{\theta} + N \end{cases}$$

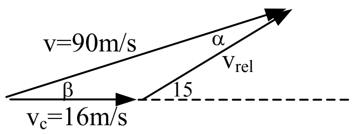
où $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $\bar{v}.\bar{1}_t > 0 \;\; ou \;\; \bar{v}.\bar{1}_t < 0$ .Donc

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + \alpha\dot{\theta}^2 = -2\omega^2\sin\theta \quad où \quad \alpha = \frac{2kR}{m}\varepsilon$$

$$\dot{\theta}^2 = e^{\alpha(\theta_0-\theta)}\left[\dot{\theta}_0{}^2 + \frac{2\alpha\omega^2}{1+\alpha^2}\sin\theta_0 - \frac{2\omega^2}{1+\alpha^2}\cos\theta_0\right] - \frac{2\alpha\omega^2}{1+\alpha^2}\sin\theta + \frac{2\omega^2}{1+\alpha^2}\cos\theta$$

$$N(\theta) = mR\dot{\theta}^2(\theta) + m\omega^2 2R\cos^2(\theta/2) + 2m\omega R\dot{\theta}(\theta)$$

2.



$$\frac{\sin 165}{90} = \frac{\sin\alpha}{16}$$

$$\alpha = 2.64°$$

$$\beta = 180 - 165 - \alpha = 12.36°$$

$$\frac{\sin\beta}{v_{rel}} = \frac{\sin 165}{90}$$

$$v_{rel} = 74,4 \;\; m/s$$

$$F = m.a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dl} \;=>\; 2a.\int_i^f dl = \int_i^f dv^2$$

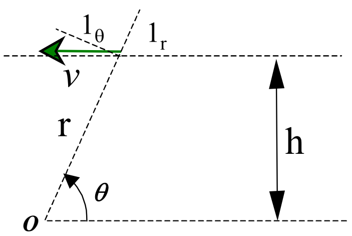
$$v^2{}_{rel-f} - v^2{}_{rel-i} = 2.a.(s_f - s_i)$$

$$v^2{}_{rel-f} = 2.a.d$$

$$F = \frac{1}{2}.m.\frac{v^2{}_{rel-f}}{d} = \frac{1}{2}.\frac{7000}{100}.74,4^2$$

$$F = 193 \;\; 737 \;\; N$$

3.1



$$\bar{r} = r(\theta)\bar{1}_r = \frac{h}{\sin\theta} \;\; en\ A$$

$$\bar{v}_A = \dot{r}\bar{1}_r + r\dot{\theta}\bar{1}_\theta$$

$$\dot{r} = -v_0.\cos\theta = -\cos\theta = -h.\cos\theta.\dot{\theta}.\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$r\dot{\theta} = v_0.\sin\theta = \sin\theta = \frac{h}{\sin\theta}.\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = v_0.\frac{\sin^2\theta}{h}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2v^2{}_0\sin^3\theta\cos\theta}{h^2}$$

3.2

$$\overline{OB} = 1.2\cos\theta\bar{1}_x + 1.2\sin\theta\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_B = -1.2\sin\theta.\dot{\theta}\bar{1}_x + 1.2.\cos\theta.\dot{\theta}\bar{1}_y = R.\dot{\theta}\bar{1}_\theta$$

$$\bar{a}_B = -1.2(\cos\theta.\dot{\theta}^2 + \sin\theta.\ddot{\theta})\bar{1}_x + 1.2.(-\sin\theta.\dot{\theta}^2 + \cos\theta.\ddot{\theta})\bar{1}_y$$

$$F_y = m.a_y = 8.a_y = 80 \;\; N$$

$$1.2.(-\sin\theta.\dot{\theta}^2 + \cos\theta.\ddot{\theta}) = 10$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{10}{1.2} + \sin\theta.\dot{\theta}^2\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{10}{1.2} + \sin\theta.\dot{\theta}^2\right)$$

$$\dot{\theta} = v_0(\theta)\frac{\sin^2\theta}{h}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{dv_0(\theta)}{dt}\frac{\sin^2\theta}{h} + v^2{}_0(\theta)\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{h^2}$$

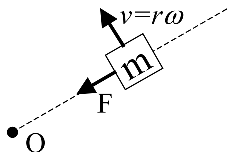
A résoudre par matlab.

$en\ \theta = \pi/2 \;:\; -1.2.\dot{\theta}^2 = 10$

$\dot{\theta}^2 = -10/1.2 < 0$

Impossible à réaliser.

4.



$\sum F_n = m.a_n$

$r = R_0 + b = R_0 + b_0 \sin(2\pi.n.t)$

$\dot{r} = b_0.2\pi.n.\cos(2\pi.n.t)$

$\ddot{r} = -b_0.4\pi^2.n^2.\sin(2\pi.n.t)$

$\dot{\theta} = \omega \ et \ \ddot{\theta} = 0$

$\overline{a}_A = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)1_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})1_\theta$

$a_r = -b_0.4\pi^2.n^2.\sin(2\pi.n.t) - (R_0 + b_0 \sin(2\pi.n.t))\omega^2$

$a_r = -b_0 \sin(2\pi.n.t)\left(4\pi^2.n^2 + \omega^2\right) - R_0\omega^2$

$a_\theta = 0 + 2.b_0.2\pi.n.\cos(2\pi.n.t).\omega$

$\frac{da_r}{dt} = 0 = -b_0 2\pi.n \cos(2\pi.n.t)\left(4\pi^2.n^2 + \omega^2\right)$

$2\pi.n.t = k\pi/2 \ \ (k \ impair)$

$\Rightarrow t^{*1} = \frac{1}{4n} \ \ et \ \ \frac{3}{4n}$

$a_r{*} = -b_0 4\pi^2.n^2 - \left(R_0 + b_0\right)\omega^2$

$\frac{da_\theta}{dt} = 0 = -8.b_0.\pi^2.n^2.\omega.\sin(2\pi.n.t)$

$2\pi.n.t = 0 \Rightarrow t = 0$

$2\pi.n.t = \pi \Rightarrow t^{*2} = \frac{1}{2n}$

$a_\theta{*} = 4b_0\pi n\omega$

<u>Séance 2 : Complément à l'Exercice 3.1 : Application de Matlab à l'Exercice 3</u>

(Ce complément est donné à titre indicatif pour familiariser les étudiants à l'utilisation de Matlab et de la simulation)

On peut résoudre numériquement l'exercice 3.1 à l'aide de l'équation : $\ddot{\theta} = 2.\frac{v^2_0.\sin^3\theta.\cos\theta}{h^2}$; les conditions initiales sont données par $\dot{\theta} = v_0.\sin^2\theta.\frac{1}{h}$ et par une valeur initiale de θ qu'on égalera à 25 ° de manière arbitraire.

Le code Matlab est donné par :

```
options = odeset('RelTol',1e-5);
global hauteur v0
hauteur=0.5
v0=1
figure('Name','Seance 2 Ex 3.1')
y2=v0 * sin(25/ 180 * 3.14159265358979) ^ 2 / hauteur;
[t,y] = ode45('Seance3',[0:0.05:10],[25/ 180 * 3.14159265358979 y2], options);
plot(t,y(:,1))
hold on
plot(t,y(:,2),'r-')
ylabel(['d \theta',' /dt red','      \theta blue']);
xlabel(['t']);

function z = Seance3(t,y)
global hauteur v0
z=zeros(2,1);
z(1) = y(2);
z(2) = 2 * v0 ^ 2 * sin(y(1)) ^ 3 * cos(y(1)) / hauteur ^ 2;
```

L'exécution de ce code donne la Figure 1: on remarque que θ tend asymptotiquement vers un valeur limite tandis que dθ/dt tend vers zéro. Comment interpréter ceci ? On est tout simplement hors du domaine de validité physique de l'équation .

La valeur limite de θ est 180°. La tige OB est alors quasiment horizontale et presque parallèle au piston qui devrait tendre vers une élongation infinie. Le quasi parallélisme de la barre OB et du piston est tel que la vitesse constante de l'extrémité du piston n'arrive presque plus à imprimer la rotation à la barre OB.

Cet exemple simple montre la nécessité de pouvoir comprendre et interpréter le sens physique de la simulation. Il ne suffit pas de donner le résultat de manière brute.

La simulation Visual Basic ci-contre (cliquer deux fois sur l'icône) montre le mouvement réel du système : une fois l'extension maximale atteinte par le piston, la vitesse v0 s'inverse et le tout repart dans l'autre sens à la même vitesse mais en sens opposé.

"Seance2 Ex 3.1.exe"

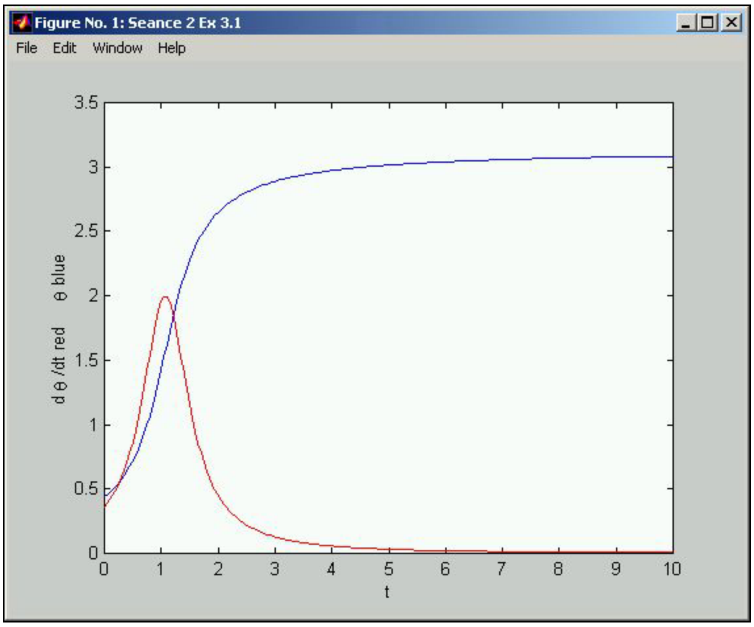


Figure 1

Complément à l'exercice 3.2

Le code Matlab pour simuler ce mouvement est obtenu à partir de l'équation : $1{,}2.(-\sin\theta.\dot{\theta}^2+\cos\theta.\ddot{\theta})=10$

```
options = odeset('RelTol',1e-5);
figure('Name','Seance 2 Ex 3.2')
[t,y]  =  ode45('Seance3',[0:0.005:10],[25/  180  *  3.14159265358979  0],
options);
plot(t,y(:,1))
hold on
plot(t,y(:,2),'r-')
ylabel(['d \theta',' /dt red','     \theta blue']);
xlabel(['t']);

function z = Seance3(t,y)
global hauteur v0
z=zeros(2,1);
z(1) = y(2);
z(2) = (10 / 1.2 + sin(y(1)) * y(2) ^ 2) / cos(y(1));
```

L'exécution de ce code donne lieu à la figure 2 donnant l'évolution de θ et dθ/dt pour une vitesse initiale du piston nulle et une position initiale θ_0=25°

On note que dθ/dt tend vers l'infini lorsque θ=π/2. Essayons d'interpréter ce résultat.

L'équation $1{,}2.(-\sin\theta.\dot{\theta}^2+\cos\theta.\ddot{\theta})=10$ pour θ = π /2 n'admet pas de solution puisqu'elle aboutit à $d^2\theta/dt^2<0$. Au voisinage de π /2, $d^2\theta/dt^2$ tend mathématiquement vers des valeurs de plus en plus grandes pour compenser cosθ qui tend vers zéro au voisinage de π /2.

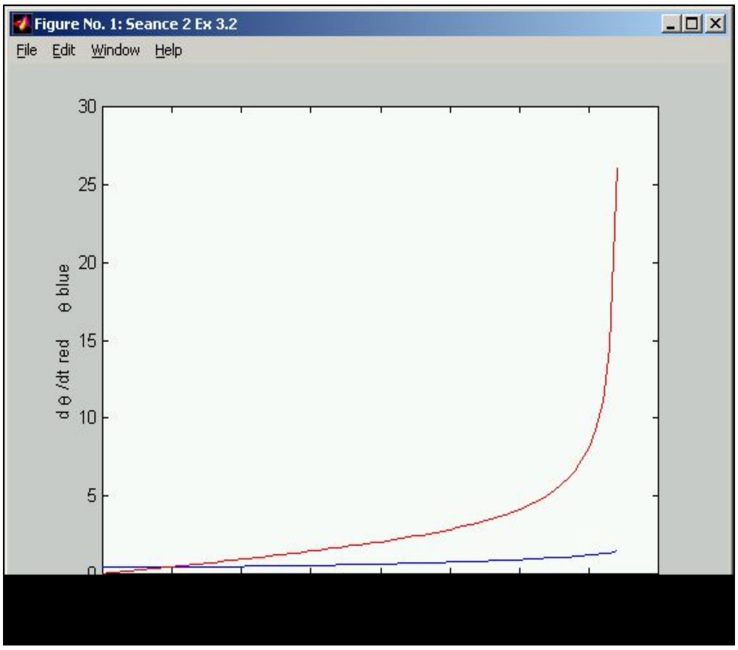


Figure 2

Le piston imprime à la barre OB un couple moteur tel que a_y=80 N. Ce couple moteur vainc le couple résistant généré par le poids de la masse m. Plus la barre s'approche de la verticale (θ=π /2), plus le couple résistant décroît alors que le piston continue à délivrer son couple moteur pour respecter a_y=80N.

C'est la raison pour laquelle au voisinage de θ= π /2, on a divergence : plus aucun couple résistant ne s'oppose au couple moteur et ce dernier explose.

La simulation Visual Basic ci contre simule le mouvement :

"Seance2 Ex 3.2.exe"