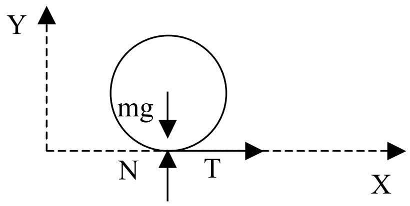
1. Après le départ de l'obus : Système {canon + wagon}: $\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}$ => $M\ddot{x} = -T$ => $\frac{M}{2}\dot{x}_0{}^2 = Tx$

Avant le départ de l'obus Système {canon + wagon + obus} $\frac{d}{dt}R_x = 0$ jusqu'en t=0 : $R_x = 0$

en t=0 : $R_x = 0$ => $M\dot{x}_0 + mv\cos\theta\cos\phi = 0$ => $X = \frac{m^2v^2\cos^2\theta\cos^2\phi}{2MT}$ avec T = force de frottement (=R dans l'énoncé)

---

2. $\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$ => $\Delta\overline{R} = \int\sum \overline{F}_e dt$: $m(v-0) = fmgt$



=> $v = fgt$ et $s = \frac{1}{2}fgt^2$ $(= \frac{1}{2}\dot{v}t^2)$ d'où $t = \sqrt{\frac{2s}{fg}}$

$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = \overline{m}_{e,G}$ => $\Delta\overline{M}_G = \int\overline{m}_{e,G}dt$: $\frac{1}{2}mr^2\omega = fmgrt$

=> $\omega = \frac{2fgt}{r} = \frac{2fg}{r}\sqrt{\frac{2s}{fg}} = \frac{2}{r}\sqrt{2sfg}$

---

3. Deux méthodes sont possibles : théorème du moment cinétique et la conservation de l'énergie. Nous utiliserons la première.

Résultante cinétique : $\overline{R} = m\overline{v}_G = m\omega r\overline{1}_x$

Moment cinétique en G : $\overline{\mathrm{M}}^i_G = \overline{\overline{I}}^i_G.\overline{\omega} = I^i_{Gy}\dot{\theta}\overline{1}_y$ => $\frac{d\overline{\mathrm{M}}^i_G}{dt} = \overline{\overline{I}}^i_G.\dot{\overline{\omega}} = I^i_{Gy}\ddot{\theta}\overline{1}_y$

Moment cinétique en I : $\overline{\mathrm{M}}^i_I = \overline{\overline{I}}^i_G.\overline{\omega} + \overline{R}\times\overline{GI} = \left(I^i_{Gy} + mr^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_y$ $(= m\overline{IG}\times\overline{v}_I + \overline{\overline{I}}^i_I.\overline{\omega}$ avec $\overline{v}_I = 0)$

Moment des force appliquées au solide : $\overline{m}_{e,I} = \left(m_1 + m_2\right)gr_1\sin\alpha\,\overline{1}_y$

Théorème du moment cinétique en I : $\frac{d\overline{\mathrm{M}}^1_I}{dt} + \frac{d\overline{\mathrm{M}}^2_I}{dt} = \frac{d\left(\left(I^1_{Gy} + I^2_{Gy} + m_1r_1{}^2 + m_2r_1{}^2\right)\dot{\theta}\overline{1}_y\right)}{dt} = \overline{m}_{e,I}$

$I^1_{Gy} = \frac{m_1\left(r_1{}^2 + r_2{}^2\right)}{2}$ et $I^2_{Gy} = \frac{m_2r_2{}^2}{2}$.

Or $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ => $\left(\frac{m_1\left(r_1{}^2 + r_2{}^2\right) + m_2r_2{}^2}{2} + m_1r_1{}^2 + m_2r_1{}^2\right)\dot{\theta}^2 = 2\left(m_1 + m_2\right)gr_1\sin\alpha\theta$

On trouve donc $\dot{\theta}^2 = K\theta$ avec $K = \frac{2g\sin\alpha}{r_1}\frac{\delta\gamma^2 + 1 - \gamma^2}{\frac{3}{2} + \delta\left(\frac{\gamma^4}{2} + \gamma^2\right) - \left(\frac{\gamma^4}{2} + \gamma^2\right)}$ après avoir posé $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ et $\gamma = \frac{r_2}{r_1}$.

Nous avons deux cylindres composés d'acier (ρ_1=7.65 gr/cm³) et d'aluminium (ρ_2=2.67 gr/cm³) (C et C*) de masse spécifique (ρ_1, ρ_2) et (ρ_2, ρ_1), de rayon (r_1=2.25cm,r_2=1.5cm) et (r^*_1=2.25cm,r^*_2=2.25cm) tel que leur masses soient égales. [7,65(2,25²-1,5²)+2,67.1,5²=2,67 (2,25²-x²)+7,65.x² =>x=1,677cm]

$\dot{\theta}^2 = \frac{4gr_1\sin\alpha}{\left(\frac{\rho_1h\pi r_1{}^2}{m}r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2r_1{}^2\right)}\theta$ et $\dot{\theta}^{*2} = \frac{4gr_1\sin\alpha}{\left(\frac{\rho_2h\pi r_1{}^2}{m}r_1{}^2 + r^*_2{}^2 + 2r_1{}^2\right)}\theta$

$\frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^{*2}} = \frac{\left(\frac{\rho_2h\pi r_1{}^2}{m} + \frac{r^*_2{}^2}{r_1{}^2} + 2\right)}{\left(\frac{\rho_1h\pi r_1{}^2}{m} + \frac{r_2{}^2}{r_1{}^2} + 2\right)}$ avec $r^*_2{}^2 \cong r_2{}^2$ et $\rho_2 < \rho_1$ $AN: \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^{*2}} \approx \frac{\rho_2}{\rho_1}$ => $\dot{\theta}^2 < \dot{\theta}^{*2}$

Le cylindre C avec l'acier à l'extérieur a un moment d'inertie plus grand le cylindre C* donc sa vitesse angulaire est plus petite et il arrive moins vite en bas de la pente.
Le même calcul peut être fait pour trouver le lien entre des cylindres de masse spécifique différente et de rayon différents pour qu'ils arrivent en même temps en bas. Il faut qu'il y ait le même facteur K.
si le cylindre est homogène, K devient $K = \frac{4g\sin\alpha}{3r_1}$ qui est indépendant de la masse du cylindre.

4.

Dans les axes liés au solide : En A : $\frac{d\bar{M}_A}{dt} = \bar{m}_{e,A} = -lR_{Bx}\bar{1}_z + lR_{Bz}\bar{1}_x$

$$\bar{M}_A = \bar{\bar{I}}_A\bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega\bar{1}_x + I_y\omega\bar{1}_y - P_{yz}\omega\bar{1}_z$$

$$\frac{d\bar{M}_A}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\bar{1}_x}{dt} - P_{yz}\omega\frac{d\bar{1}_z}{dt} = -P_{xy}\omega\left(\bar{\omega}\times\bar{1}_x\right) - P_{yz}\omega\left(\bar{\omega}\times\bar{1}_z\right) = P_{xy}\omega^2\bar{1}_z - P_{yz}\omega^2\bar{1}_x$$

$$P_{xy}\omega^2\bar{1}_z - P_{yz}\omega^2\bar{1}_x = -lR_{Bx}\bar{1}_z + lR_{Bz}\bar{1}_x$$

$$P_{yz} = 0 \;\Rightarrow\; R_{Bz} = 0$$

$$P_{xy} = \frac{l}{3}Rm + \frac{2l}{3}\left(-R\right)m = -\frac{l}{3}Rm \;\Rightarrow\; -lR_{Bx} = -\frac{l}{3}Rm\omega^2 \;\Rightarrow\; R_{Bx} = \frac{Rm\omega^2}{3}$$

En B : $\frac{d\bar{M}_B}{dt} = \bar{m}_{e,B} \Rightarrow P_{x'y'}\omega^2\bar{1}_{z'} - P_{y'z'}\omega^2\bar{1}_{x'} = +lR_{Ax'}\bar{1}_{z'} - lR_{Az'}\bar{1}_{x'}$

$$P_{y'z'} = 0 \;\Rightarrow\; R_{Az'} = 0 \text{ et } P_{xy} = -\frac{l}{3}Rm \;\Rightarrow R_{Ay} = -\frac{Rm\omega^2}{3}$$

---

5. $\frac{d\bar{M}_O}{dt} = \bar{m}_{e,O}$ avec $\bar{M}_O = -P_{xz}\omega\bar{1}_x - P_{yz}\omega\bar{1}_y - I_z\omega\bar{1}_z$

$$\frac{d\bar{M}_O}{dt} = -P_{xz}\omega^2\bar{1}_y + P_{yz}\omega^2\bar{1}_x \quad \text{avec} \quad P_{xz} = 0$$

$$P_{yz}^{(1)} = 0 \;;\; P_{yz}^{(2)} = \rho(-b)\left(\frac{b^2}{2}\right) \;;\; P_{yz}^{(3)} = \rho(b)\left(\frac{-3b^2}{2}\right) \;;\; P_{yz}^{(4)} = 0 \;;$$

$$P_{yz}^{(2)} = \rho(-b)\left(-\frac{5b^2}{2}\right) \;;\; P_{yz}^{(3)} = \rho(-3b)\left(\frac{b^2}{2}\right) \;\Rightarrow P_{yz} = 2\rho b^3$$

$$\bar{m}_{e,O} = 2\rho b^3\omega^2\bar{1}_x$$

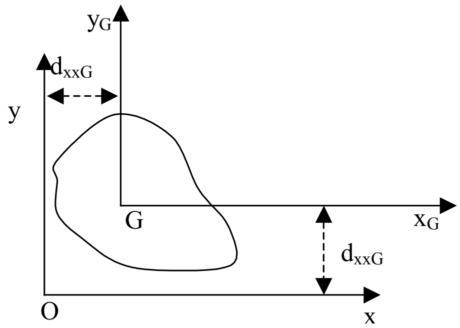
Remarque : pour calculer le produit d'inertie facilement, il faut se rapporter aux axes passant par le centre de masse du solide.

$$P_{xy} = \int xy\,dm = \int \left(x_G + d_{xx_G}\right)\left(y_G + d_{yy_G}\right)dm$$

$$= \int x_G y_G\,dm + \int y_G d_{xx_G}\,dm + \int x_G d_{yy_G}\,dm + \int d_{xx_G} d_{yy_G}\,dm$$

$$P_{xy} = P_{x_G y_G} + d_{xx_G} d_{yy_G}\, m$$

car la deuxième et la troisième intégrale donne les coordonnées du centre de masse. Ces coordonnées sont nulles dans les axes passant par ce centre de masse.



Les corrigés mis à jour sont sur le site de méca : http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ aller dans Teaching>Tps>mécaII et sélectionner les TP 2002-2003. (Login : Student, mot de passe : Newton)

La liste des numéros de binômes et du sujet attribué pour le projet Matlab est aux valves ainsi que dans Teaching>Groups. En cas de problème, je suis joignable par mail : emmanuelle.vin@ulb.ac.be