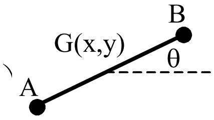
**1.a** 3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : $x, y, \theta$)
Dans un plan horizontal (V=0) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide.**




$$L=T=\left(\frac{M}{2}v_G{}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{solide}}=\frac{2.m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0\\ 0 & . & 0\\ 0 & 0 & I_z(A)+I_z(B)\end{pmatrix}\overline{\omega}$$

$$=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A)=I_{z'}(A)+md^2=m\frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

Or, le moment d'inertie d'un point (masse ponctuelle) est nul, donc il ne reste que le terme $md^2$ :

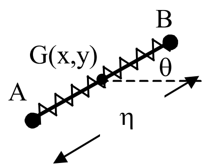
$$\begin{cases} x: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \ddot{x}=0 \Rightarrow \dot{x}=\dot{x}_0 \Rightarrow x=\dot{x}_0t+x_0\\ y: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \Rightarrow \ddot{y}=0 \Rightarrow \dot{y}=\dot{y}_0 \Rightarrow y=\dot{y}_0t+y_0\\ \theta: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \ddot{\theta}=0 \Rightarrow \dot{\theta}=\dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta=\dot{\theta}_0t+\theta_0 \end{cases}$$

Rem :

$$\frac{\partial mx}{\partial x}=m \qquad \frac{\partial mx}{\partial \dot{x}}=0 \qquad \frac{\partial m\dot{x}}{\partial x}=0 \qquad \frac{dm\dot{x}}{dx}=\frac{dm\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx}=m\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

**1.b** 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : $x, y, \theta, \eta$)
Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points.**




$$L=T=\frac{1}{2}\sum m_iv_i{}^2=\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2\right)+\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_B}{dt}\right)^2\right)$$

avec $A(x_G-\frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G-\frac{\eta}{2}\sin\theta)$ et $B(x_G+\frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G+\frac{\eta}{2}\sin\theta)$

$$\overline{v}_A(\dot{x}-\frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta+\frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y}-\frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta-\frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta}) \text{ et } \overline{v}_B(\dot{x}+\frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta-\frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y}+\frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta+\frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta})$$

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{m}{4}\left(\dot{\eta}^2+\eta^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{k}{2}(\eta-l)^2 \Rightarrow \begin{cases} x: \ddot{x}=0 \Rightarrow \dot{x}=\dot{x}_0t+x_0\\ y: \ddot{y}=0 \Rightarrow y=\dot{y}_0t+y_0\\ \theta: \dfrac{m}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\eta^2\dot{\theta}\right)=0 \Rightarrow \eta^2\ddot{\theta}+2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}=0 \quad \text{et} \quad \dfrac{m}{2}\eta^2\dot{\theta}=C\\ \eta: \dfrac{m}{2}\ddot{\eta}-\dfrac{m}{2}\eta\dot{\theta}^2+k(\eta-l)=0 \Rightarrow \dfrac{m}{2}\ddot{\eta}-\dfrac{2C^2}{m\eta^3}+k(\eta-l)=0 \end{cases}$$

La 4ième équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T+V=E_0$

$$\frac{d(T+V)}{dt}=m(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y})+\frac{m}{4}\left(2\dot{\eta}\ddot{\eta}+2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2+2\eta^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right)+k(\eta-l)\dot{\eta}=0 \Rightarrow \frac{m}{2}\ddot{\eta}-m\eta2\left(\frac{C}{m\eta^2}\right)^2+k(\eta-l)=0$$

**1.c** Si on a une tige de longueur l : $L=T=\frac{m}{2}(\dot{x}_G{}^2+\dot{y}_G{}^2)+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$ => Mouvement inchangé.

**1.d** Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2-2mgy \quad \text{avec} \quad y: \ddot{y}=-g \Rightarrow \dot{y}=-gt+\dot{y}_0 \Rightarrow y=-g\frac{t^2}{2}+\dot{y}_0t+y_0$$

**2.**

$$T=\frac{m}{2}v_G{}^2+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad \overline{OG}=\left(x+\frac{l}{2}\sin\theta\right)\overline{1}_x+\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)\overline{1}_y ; \overline{v}_G=\left(\dot{x}+\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x+\left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_y$$

et $V=-mg\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2+2\frac{l}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2+mg\frac{l}{2}\cos\theta$

$$\begin{cases} x: m\ddot{x}+m\dfrac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-m\dfrac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta=0 \quad \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=C \text{ intégrale 1ère}\right)\\ \theta: m\dfrac{l^2}{4}\ddot{\theta}+m\dfrac{l}{2}\ddot{x}\cos\theta+m\dfrac{l^2}{12}\ddot{\theta}+mg\dfrac{l}{2}\sin\theta=0 \end{cases}$$

Pour des petits mouvements (à l'équilibre stable) : *sin*$\theta=\theta$ ; *cos*$\theta=1$ et les termes non linéaires sont négligés

$$\ddot{x}+\frac{l}{2}\ddot{\theta}=0 \quad \text{et} \quad \frac{l}{4}\ddot{\theta}+\frac{\ddot{x}}{2}+\frac{l}{12}\ddot{\theta}+\frac{g}{2}\theta=0$$

**3.** Les axes centraux principaux : // à Aξηζ en G. Les produits d'inertie sont tous nuls.

$$I_{\zeta G}=\frac{mR^2}{2};\ I_{\xi G}=I_{\eta G}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}\quad \text{et}\quad \overline{\omega}=\dot{\theta}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{1}_{\xi G}+\overline{1}_{\zeta G}\right);\quad v_G{}^2=\dot{z}^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{z}^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\left(\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}\right)\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)\quad \text{et}\quad V=mgz$$

a) A fixe : $T=\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2$ avec $l$ constante => on a une rotation uniforme $\theta=\theta_0+\dot{\theta}_0 t$

b) A mobile $L=T-V=\frac{m}{2}\dot{z}^2+m\frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2-mgz$ (2 degrés de liberté)

$z:\ \ddot{z}+g=0 \Rightarrow z=-g\frac{t^2}{2}+\dot{z}_0 t+z_0$ et $\theta:\ \ddot{\theta}=0\ \Rightarrow \dot{\theta}=\dot{\theta}_0 t+\theta_0$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}=\text{constante} \Rightarrow \text{intégrale première}\right)$

$T+V=E_o$ est une deuxième intégrale première.

---

**4.** Le seul degré de liberté est θ (Φ=rθ/R). $\omega$(cercle)= $\dot{\phi}$-$\dot{\theta}$ car défini la vitesse angulaire relative du cercle $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ défini la vitesse angulaire d'entrainement du cercle **.**

$$y_C=R-(R-r)\cos\phi;\ v_C{}^2=(R-r)^2\dot{\phi}^2;\ I_{z,C}=\frac{mr^2}{2}\ ;\quad V=-mg(R-r)\cos\phi$$

$$T=\frac{m}{2}\left((R-r)^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\dot{\phi}-\dot{\theta}\right)^2=\frac{3}{4}m\left(R-r\right)^2\dot{\phi}^2\ ;\ L=T-V=\frac{3}{4}m\left(R-r\right)^2\dot{\phi}^2+mg(R-r)\cos\phi$$

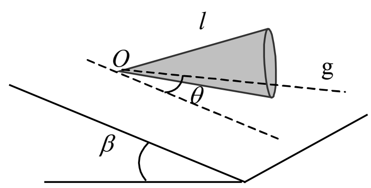
$T+V=E_o$ est une intégrale première.

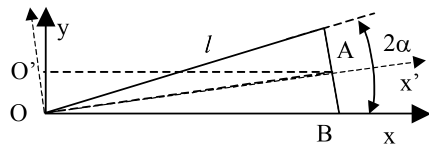
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\phi}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial\phi}=-mg(R-r)\sin\phi \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\phi}+g\sin\phi=0$$

Pour de petits mouvements : $\ddot{\phi}+\omega^2\phi=0$ avec $\omega^2=\frac{2g}{3(R-r)}$ => oscillateur harmonique

---

**5.** Le seul degré de liberté est θ. $O$ est un point fixe du solide. $I_g$ est le moment d'inertie du cône par rapport à la génératrice de contact $g$. ω = la vitesse instantanée de rotation.
Dans le plan de symétrie du cône passant par $g$, on a :




$$OA=l\cos\alpha\ ;\ \overline{OA}=l\cos^2\alpha\,\overline{1}_x+l\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_y\ ;\ \overline{\omega}=\omega\overline{1}_x$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{v}_A&=\overline{v}_O+\overline{AO}\times\overline{\omega}=l\omega\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_z\\ \overline{v}_A&=AO'\dot{\theta}\overline{1}_z=l\cos^2\alpha\dot{\theta}\overline{1}_z\end{aligned}\right\}\Rightarrow \omega=\dot{\theta}\text{cotg}\alpha$$

$$I_{x'}=\frac{3MR^2}{10};\ I_{y'}=\frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5};$$

$$I_g=\int(y^2+z^2)dm=\int((x'\sin\alpha-y'\cos\alpha)^2+z^2)dm=\int(x'^2\sin^2\alpha+y'^2\cos^2\alpha-2x'y'\cos\alpha\sin\alpha+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)z^2)dm$$

$$=\cos^2\alpha I_{x'}-2\cos\alpha\sin\alpha P_{x'y'}+\sin^2\alpha I_{y'}=\frac{h^2}{l^2}\frac{3MR^2}{10}+\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5}\right)=\frac{3MR^2}{20(R^2+h^2)}(R^2+6h^2)$$

avec $R=l\sin\alpha$ ; $h=l\cos\alpha$ => $I_g=\frac{3M}{20}\sin^2\alpha l^2(1+5\cos^2\alpha)$

$$V=-Mgz_G=-Mg\frac{3}{4}l\cos^2\alpha\cos\theta\sin\beta;\ T=\frac{1}{2}\frac{3M}{20}l^2\sin^2\alpha\ \text{cotg}^2\alpha\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

$$L=T-V\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\ \Rightarrow l(1+5\cos^2\alpha)\ddot{\theta}+5g\sin\theta\sin\beta=0$$

Intégrale première : $T+V=E_0$ => $l(1+5\cos^2\alpha)\dot{\theta}^2-10g\cos\theta\sin\beta=-10g\cos\theta_0\sin\beta$

---