Faculté des Sciences Appliquées

Mécanique rationnelle
2e candidature 2002-2003
Corrigé de la séance 1

---

1 R=const

$\theta = \omega . t$

$z = 7 + 3.\sin(4\theta)$

$\dot{z} = 12.\cos(4\theta).\dot{\theta}$ où $\dot{\theta} = \omega$

$\ddot{z} = -48.\sin(4\theta).\omega^2$

L'accélération maximale est subie quand le sinus est égal à –1.

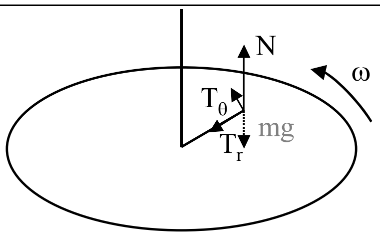
Nous avons alors

$\ddot{z} = 48.\omega^2$ m/s^2

avec $\sin(\ 4\theta\ ) = -1$

$4\theta^* = 3\pi/2 \Rightarrow \theta^* = 3\pi/8$

2



$\overline{r} = R\overline{1}_r$

$\overline{v} = R.\dot{\theta}\overline{1}_\theta$

$\overline{a} = R.\ddot{\theta}\overline{1}_\theta - R.\dot{\theta}^2\overline{1}_r$

$\overline{F} = N\overline{1}_n + F_r\overline{1}_r + F_\theta\overline{1}_\theta$

$v = R\dot{\theta}$

$m\ddot{s} = T_\theta = m.R.\dot{\omega}$

$m\dfrac{s^2}{\rho} = T_r = -m.R.\omega^2$

$0 = N - m.g$

Pour qu'il n'y ait pas de décollement :

$F_{\max} = fN = fmg$

$\sqrt{T_r{}^2 + T_\theta{}^2} = fmg$

$mR\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = fmg = ma$

$\omega^4 = f^2g^2/R^2 - \alpha^2$

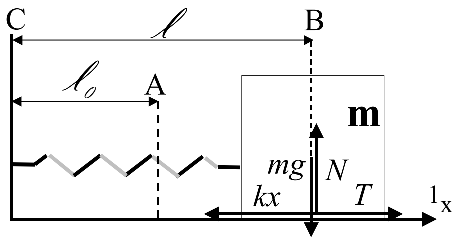
$\ddot{\theta} = \alpha$

$\dot{\theta} = \alpha\ t + \dot{\theta}_0 = \alpha.t = \sqrt[4]{f^2g^2/R^2 - \alpha^2}$

$t^* = \dfrac{\sqrt[4]{f^2g^2/R^2 - \alpha^2}}{\alpha}$

$\theta = \alpha\ t^2/2 + \theta_0 = \dfrac{\sqrt{f^2g^2/R^2 - \alpha^2}}{2}\alpha + \theta_0$

3



Valeur numérique :
f=0.3 ; m=10kg ; $l - l_0$=0.5m ; k=300
Axe : x = 0 en A.
Phase de rappel :

$-kx + fmg = m\ddot{x}$

$$\left[-k\frac{x^2}{2} + fmgx\right]_{x1}^{x2} = \left[m\frac{\dot{x}^2}{2}\right]_{x1}^{x2}$$

De B à A :

$-\dfrac{1}{2}k(x_A{}^2 - x_B{}^2) + fmg(x_A - x_B) = \dfrac{1}{2}m.(v_A{}^2 - v_B{}^2)$

$En\ A\ :\ \dfrac{1}{2}(300).x_B{}^2 - (0{,}30).(10).(9{,}81).x_B = \dfrac{1}{2}10.v^2$

$x_B = 0{,}5m\ :\ v_A = 2{,}13\ m/s$

De A à D :

$-\dfrac{1}{2}k.(x_D{}^2 - x_A{}^2) + f.m.g.(x_D - x_A) = \dfrac{1}{2}m(v_D{}^2 - v_A{}^2)$

$-\dfrac{1}{2}(300)x_D{}^2 + (0{,}30).(10).(9{,}81).(x_D) = -\dfrac{1}{2}10.4{,}557$

$x_D{}^2 - 0.1962\,x_D - 0.1519 = 0$

$x_D = \dfrac{0.1962}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(0.1962)^2 + 4(0.1519)} = 0.0981 \pm 0.4019$

$x_D = -0.304\ \ m < 0$

4

$y\ =\ \dfrac{h}{2}\left(1 + \cos\ \dfrac{\pi x}{b}\right)$

$\dot{y}\ =\ -\dfrac{h}{2}\dfrac{\pi}{b}\dot{x}\left(\sin\ \dfrac{\pi x}{b}\right)$

$\ddot{y}\ =\ -\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\pi}{b}v\right)^2\left(\cos\ \dfrac{\pi x}{b}\right)$

$\ddot{y}_{\max}\ =\ \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\pi}{b}v\right)^2$

$F = m.a$

$-mg + m\ddot{y} \leq 0$

$\ddot{y}_{\max} = \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\pi}{b}v\right)^2 = g$

$donc\ \ h = 2g\left(\dfrac{b}{\pi.v}\right)^2$

$Pour\ \ b = 1\ \ m,\ \ v = 20/3{,}6 = 5{,}56\ \ m/s$

$h = 2.9{,}81.\left(\dfrac{1}{\pi.5{,}56}\right)^2 = 0{,}0644\quad m$