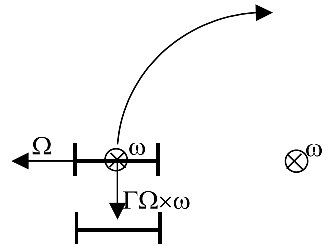
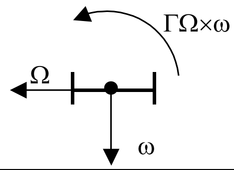
1. Gyrostat : $\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$
les roues droites de la voiture ont tendance à décoller.

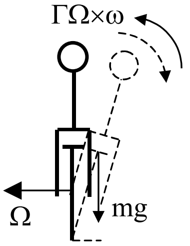
Vue de haut



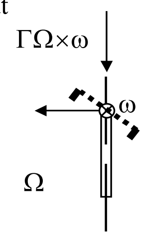
Vue de derrière



2.a Vue de derrière



Vue de haut



Si le cycliste se penche vers la droite, la force de pesanteur génère un moment qui a tendance à faire basculer le cycliste. Pour ne pas tomber, il doit générer un moment opposé qui le ramène en position verticale. En tournant son guidon vers la droite (du côté où il penche), il crée un effet gyroscopique qui le ramène dans sa position verticale.

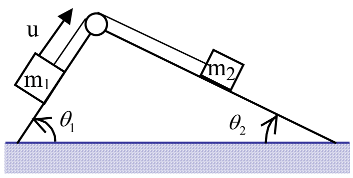
2.b Roue = 60 cm de diamètre ;
Γ=0,6.(0,3)²
$v=\Omega R \;\;=>\;\; 8=\Omega.0,3 \;\;=>\;\; \Omega=8/0,3 \;\;\text{rad/s}$
$\mathrm{m}_{e,C}=\overline{CG}\times m\overline{g}=0,03.80.9,81$
$\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}=0,6.(0,3)^2\dfrac{8}{0,3}\omega$

Pour retrouver l'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M}_C=\mathrm{m}_{e,C}+\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega} \;\;=>\;\; 0=0,03.80.9,81-0,6.(0,3)^2\frac{8}{0,3}\omega$$

$\omega=16,35\;\;\text{rad/s}$

3. $z_1=u\sin\theta_1\,;\,z_2=(C-u)\sin\theta_2$ avec l'axe z orienté vers le bas



$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2=\frac{m_1}{2}\dot{u}^2+\frac{m_2}{2}\dot{u}^2 \;\text{ et }\; V=-m_1 g u\sin\theta_1-m_1 g\left(l-u\right)\sin\theta_2$$

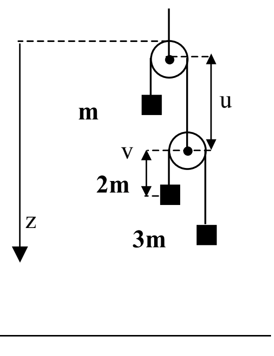
$$u:\; m_1\ddot{u}+m_2\ddot{u}-m_1 g\sin\theta_1+m_2 g\sin\theta_2=0 \;\;=>\;\; \ddot{u}=\frac{m_1 g\sin\theta_1-m_2 g\sin\theta_2}{m_1+m_2}g$$

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}=\sum\overline{F}_{\mathrm{e}}\right)_u \;=>\; m_1\ddot{u}=T-m_1 g\sin\theta_1 \;\;=>\;\; T=m_1\frac{m_1 g\sin\theta_1-m_2 g\sin\theta_2}{m_1+m_2}+m_1 g\sin\theta_1$$

4. Nous avons 3 masses ponctuelles et deux solides (poulies). Soit les positions des masses m, 2m et 3m : z_1, z_2, z_3.

$z_1=-u+C_1\,;\,z_2=u+v\,;\,z_3=+u-v+C_2$

$$T=\sum_{\substack{\text{masses}\\\text{ponctuelles}}}\left(\frac{1}{2}m_i v_i{}^2\right)+\sum_{solides}\left(\frac{M_i}{2}v_{G_i}{}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}_i.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i\right) \quad \text{avec I=2mR² donc M=4m car I(disque)=}\frac{\mathrm{MR}^2}{2}$$



$$T=\left(\frac{m}{2}\dot{u}^2\right)_{m_1}+\left(\frac{2m}{2}(\dot{u}+\dot{v})^2\right)_{m2}+\left(\frac{3m}{2}(\dot{u}-\dot{v})^2\right)_{m3}+\left(\frac{I}{2}\left(\frac{\dot{u}}{R}\right)^2\right)_{S1}+\left(\frac{M}{2}\dot{u}^2+\frac{I}{2}\left(\frac{\dot{v}}{R}\right)^2\right)_{S2}$$

$$\mathrm{T}=6m\dot{u}^2+\frac{7}{2}m\dot{v}^2-m\dot{u}\dot{v} \;\text{ et }\; V=-mgz_1-2mgz_2-3mgz_3-Mgu=mgv-8mgu+C$$

$$\begin{cases} u:\; 12m\ddot{u}-m\ddot{v}-8mg=0 \\ v:\; 7m\ddot{u}-m\ddot{v}+mg=0 \end{cases}$$

$$=>\;\; \ddot{v}=-\frac{4}{83}g \;\text{ et }\; \ddot{u}=\frac{55}{83}g \;\;=>\;\; \ddot{z}_1=-\frac{55}{83}g\;\;(\uparrow);\; \ddot{z}_2=\frac{51}{83}g\;\;(\downarrow);\; \ddot{z}_3=\frac{59}{83}g\,(\downarrow)$$

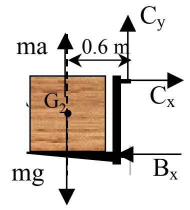
5. 1. Système {fourche + caisse}

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_C = \sum \overline{m}_{e,C} = \overline{CB}\times\overline{B}_x + \overline{CG}_2\times m\overline{g} = \left(0{,}9.B_x - 0{,}6.900.9{,}81\right)\overline{1}_z$$

$\overline{M}_C = \overline{CG}\times\overline{R} + \overline{M}_G$ avec $\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = 0$ (pas de rotation)

$\overline{M}_C = mv_G d_{C-\overline{v}_G}$ où $d_{C-\overline{v}_G}$ est la distance entre le point C et le vecteur vitesse $\overline{v}_G$.

$$\frac{d}{dt} mv_G d_{C-\overline{v}_G} = 900.a.0{,}6 = 0{,}9.B_x - 0{,}6.900.9{,}81$$



2. Système {Véhicule + fourche + caisse}

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_D = \sum \overline{m}_{e,D} = \overline{DG}_1\times M\overline{g} + \overline{DG}_2\times m\overline{g} = \left(1600.1{,}2.9{,}81 - 900.1{,}2.9{,}81\right)\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_D = \left(\overline{DG}_2\times\overline{R}_2 + \overline{M}_{G_2}\right)_m + \left(\overline{DG}_1\times\overline{R}_1 + \overline{M}_{G_1}\right)_M$$

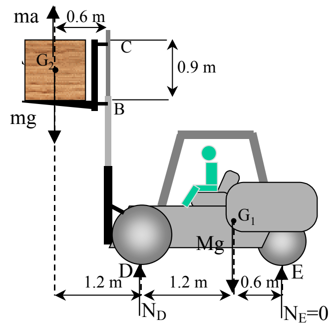
avec $\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = 0$ (pas de rot.) et $\overline{R}_1 = 0$ (pas de mvt)

$\overline{M}_D = mv_G d_{D-\overline{v}_G}$ où $d_{C-\overline{v}_G}$ = distance entre le point D et le vecteur vitesse $\overline{v}_G$.

$$\frac{d}{dt} mv_G d_{C-\overline{v}_G} = 900.a.1{,}2 = 1600.1{,}2.9{,}81 - 900.1{,}2.9{,}81$$

(2) => a=7,63 m/s²

(2) => (1) : B=10,46 kN



Projets Matlab : Toutes les questions peuvent aussi être posées par mail (emmanuelle.vin@ulb.ac.be) ou à Charles Cuvelliez le vendredi 17h45 en UA6.219

Laboratoire en mécanique rationnelle (les doubleurs sont dispensés) : Vous avez jusqu'au 17/02/2003 pour faire vos groupes de 5 étudiants (réalisés à l'intérieur d'une même série) dont vous m'enverrez la liste par mail (emmanuelle.vin@ulb.ac.be). La liste des manipulations de chaque groupe sera affichée le 28/02/2003.

Permanence de mécanique rationnelle : Changement d'horaire
Mardi de 13h à 14h à la salle de réunion (11/02/2003 ; 25/02/2003 ; 11/03/2003)

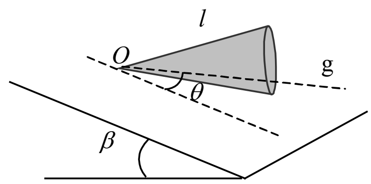
S9-E5

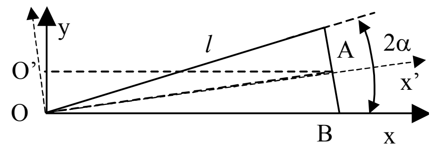
5. Le seul degré de liberté est θ. O est un point fixe du solide. I_g est le moment d'inertie du cône par rapport à la génératrice de contact g. ω = la vitesse instantanée de rotation.
Dans le plan de symétrie du cône passant par g, on a :

$$OA = l\cos\alpha \ ; \ \overline{OA} = l\cos^2\alpha\,\overline{1}_x + l\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_y \ ; \ \overline{\omega} = \omega\overline{1}_x$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{AO}\times\overline{\omega} = l\omega\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_z\\ \overline{v}_A &= AO'\dot{\theta}\overline{1}_z = l\cos^2\alpha\dot{\theta}\overline{1}_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \dot{\theta}\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$I_{x'} = \frac{3MR^2}{10};\ I_{y'} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5};$$





$$I_g = \int (y^2+z^2)dm = \int((x'\sin\alpha - y'\cos\alpha)^2 + z^2)dm = \int (x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)z^2)dm$$

$$= \cos^2\alpha I_{x'} - 2\cos\alpha\sin\alpha P_{x'y'} + \sin^2\alpha I_{y'} = \frac{h^2}{l^2}\frac{3MR^2}{10} + \frac{R^2}{l^2}\left(\frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5}\right) = \frac{3MR^2}{20(R^2+h^2)}(R^2+6h^2)$$

avec $R = l\sin\alpha\ r =;\ h = l\cos\alpha \Rightarrow I_g = \frac{3M}{20}\sin^2\alpha\, l^2(1+5\cos^2\alpha)$

$$V = -Mgz_G = -Mg\frac{3}{4}l\cos^2\alpha\cos\theta\sin\beta;\ T = \frac{1}{2}\frac{3M}{20}l^2\sin^2\alpha\ \mathrm{cotg}^2\alpha\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

$$L = T - V \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow l(1+5\cos^2\alpha)\ddot{\theta} + 5g\sin\theta\sin\beta = 0$$

Intégrale première : $T + V = E_0 \Rightarrow l(1+5\cos^2\alpha)\dot{\theta}^2 - 10g\cos\theta\sin\beta = -10g\cos\theta_0\sin\beta$
