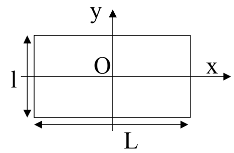
1.1 $$I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho \frac{Ll^3}{12} = m\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m\frac{L^2}{12}$$



1.2
$$I_y^{(a)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\frac{(3a)(2a)^3}{12}\right] = \frac{58}{3}\rho a^4 = I_y^{(b)} = I_y^{(c)} \Rightarrow r_x^{(a)} = r_x^{(b)} = r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{29}{15}}\,a$$

$$I_x^{(a)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\frac{(2a)(3a)^3}{12} + \rho(3a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{46}{3}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(a)} = \sqrt{\frac{23}{15}}\,a$$

$$I_x^{(b)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - 2.\left[\rho\frac{(2a)(\frac{3a}{2})^3}{12} + \rho(\frac{3a}{2})(2a)\left(\frac{5a}{4}\right)^2\right] = \frac{65}{6}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(b)} = \sqrt{\frac{13}{12}}\,a$$

$$I_x^{(c)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\frac{(2a)(3a)^3}{12}\right] = \frac{101}{6}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{101}{60}}\,a$$

2. Soient 1=AB, 2=DE, 3=BCD

$$I_{x1} = \frac{m_1 l_1^2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{9}{2}\rho\ cm^3 \quad et \quad I_{y1} = \frac{m_1 l_1^2}{12}.\frac{1}{2} + m_1\left(\frac{l_1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)^2 = \rho\left(\frac{33}{2} + 9\sqrt{2}\right)cm^3;$$

$$I_{x2} = \frac{m_2 l_2^2}{3}.\frac{3}{4} = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho\ cm^3 \quad et \quad I_{y2} = \frac{m_2 l_2^2}{12}.\frac{1}{4} + m_2\left(\frac{l_1}{2}\frac{1}{2} + 2\right)^2 = \rho\left(\frac{27}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 6\right)cm^3;$$

$$I_{x3} = \frac{m_3 R^2}{2} - m_3\left(\frac{2R}{\pi}\right)^2 + m_3\left(\frac{2R}{\pi} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\,(13\pi + 24\sqrt{2})cm^3 \quad et \quad I_{y3} = \frac{m_3 R^2}{2} = 4\pi\rho\ cm^3;$$

$$I_x = \rho\left[\frac{9}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + 13\pi + 24\sqrt{2}\right]cm^3 \simeq 82,956\rho\ cm^3$$

$$I_x = \rho\left[\frac{45}{2} + 98\sqrt{2} + \frac{27}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 4\pi\right]cm^3 \simeq 58,817\rho\ cm^3$$

3.1
$$I_z = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u^2 + v^2 - 2uv\cos(\pi - \alpha)\right)\sin\alpha = m\frac{(a^2 + b^2)}{3} \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{3}}$$

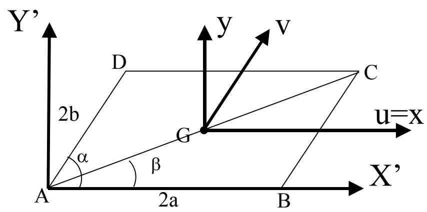
3.2
$$I_x = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(v\sin\alpha\right)^2 \sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha\ ;$$

$$I_y = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u + v\cos\alpha\right)^2 \sin\alpha = \frac{m}{3}\left(a^2 + b^2\cos^2\alpha\right)$$

$$P_{xy} = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u + v\cos\alpha\right)\left(v\sin\alpha\right)\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha$$

Ellipse centrale d'inertie = cercle ssi

$$I_x = I_y \quad et \quad P_{xy} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \quad et \quad a = b$$



3.3 A.P.I. en A : Axes de symétrie orthogonaux tel que $I_{x"x"}X"^2+I_{y"y"}Y"^2+I_{z"z"}Z"^2=1$

Rotation θ des axes Ax' et Ay' // Gx, Gy pour avoir $-P_{x"y"}=0$

$$I_{x'}=m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha+m\left(b\sin\alpha\right)^2\ ;\quad I_{y'}=\frac{m}{3}\left(a^2+b^2\cos^2\alpha\right)+m\left(a+b\cos\alpha\right)^2$$

$$P_{x'y'}=\rho\int_0^{+2a}du\int_0^{+2b}dv\left(u+v\cos\alpha\right)\left(v\sin\alpha\right)\sin\alpha=mab\sin\alpha+m\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$tg2\theta=\frac{2P_{xy}}{I_y-I_x}=\frac{2\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha+ab\sin\alpha\right)}{\frac{4}{3}b^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\frac{4}{3}a^2+2ab\cos\alpha}$$

Ellipse d'inertie en A dans les axes AX'Y'Z' : $I'_{x'x'}X'^2-2P'_{x'y'}X'Y'+I'_{y'y'}Y'^2=1$

$$\frac{4}{3}mb^2\sin^2\alpha X'^2-2m\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha+ab\sin\alpha\right)X'Y'+m\left(\frac{4}{3}b^2\cos^2\alpha+\frac{4}{3}a^2+2ab\cos\alpha\right)Y'^2=1$$

3.4 $$I_{AC}=I_x\mu_x^2+I_y\mu_y^2-2P_{xy}\mu_x\mu_y\quad où\quad \mu_x=\frac{a+b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}\ ;\ \mu_y=\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$$

4. $$I_z=\rho R^4\int_0^{\alpha}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{2\pi}{3}\rho R^4\left(1-\cos\alpha\right)\left(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha\right)$$

$$avec\ \ m=2\pi\rho R^2\left(1-\cos\alpha\right)\ \Rightarrow I_z=\frac{mR^2}{3}\left(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha\right)$$

$$pour\ \ \alpha=\frac{\pi}{2}\ \ et\ \ \alpha=\pi\ :\ I_z=\frac{2mR^2}{3}$$

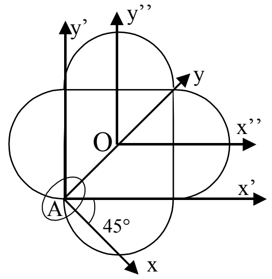
5. Axes principaux en A : x, y symétrie

$$I_x=\frac{I_{x'}}{2}+\frac{I_{y'}}{2}+P_{x'y'}\ ;\ I_y=\frac{I_{x'}}{2}+\frac{I_{y'}}{2}-P_{x'y'}$$

$$où\ \ I_{x'}=I_{y'}=I_{x"}+4mR^2\ \ et\ \ I_{x"}=3mR^2+\frac{16mR^2}{3\pi}$$

$$P_{x'y'}=\int\left(x"+R\right)\left(y"+R\right)dm=4mR^2$$

$$I_x=\left(11+\frac{16}{3\pi}\right)mR^2\ ;\ \ I_y=\left(3+\frac{16}{3\pi}\right)mR^2$$



Erratum : S5 : projet matlab : rayon de la lune : 381 000 km. Sur la figure 1 : l'angle α est +α et non -α.

Les corrigés mis à jour sont sur le site de méca : http://cfao.ulb.ac.be/cfao/ aller dans Teaching>Tps>mécaII et sélectionner les TP 2002-2003. (Login : Student, mot de passe : Newton)
La liste des numéros de binômes et du sujet attribué pour le projet Matlab est aux valves ainsi que dans Teaching>Groups. En cas de problème, je suis joignable par mail : emmanuelle.vin@ulb.ac.be