Mécanique Rationnelle 2

Syllabus d'exercices

Pierre LAMBERT

Syllabus corrigé et complété par **Benjamin Mertens** sur base du travail **d'Emmanuelle VIN** et **Vincent RAMAN**

Les exercices repris dans cet ouvrage sont le fruit du travail collectif de Benjamin Mertens, Emmanuelle Vin et Anne Lamy

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES 2

ENONCÉS 3

CINÉMATIQUE DU SOLIDE, CINÉMATIQUE INSTANTANÉE, CIR 4
DISTRIBUTION DES VITESSES ET ACCÉLÉRATIONS 4
MOUVEMENT INSTANTANÉ 4
MOUVEMENT RELATIF 5
CIR 6
CARACTÉRISTIQUE DES MOUVEMENTS 9
CINÉMATIQUE DES SOLIDES 9
TENSEUR D'INERTIE 14
RÉSULTANTE ET MOMENT CINÉTIQUE 22
THÉORÈMES GÉNÉRAUX 26
LAGRANGE 32
EFFET GYROSCOPIQUE 40
DYNAMIQUE DES SYSTEMES 43

CORRIGÉS 53

CINÉMATIQUE DU SOLIDE, CINÉMATIQUE INSTANTANÉE, CIR 54
DISTRIBUTION DES VITESSES ET ACCÉLÉRATIONS 54
MOUVEMENT INSTANTANÉ 54
MOUVEMENT RELATIF 57
CIR 61
CARACTÉRISTIQUE DES MOUVEMENTS 67
CINÉMATIQUE DES SOLIDES 68
TENSEUR D'INERTIE 80
RÉSULTANTE ET MOMENT CINÉTIQUE 99
THÉORÈMES GÉNÉRAUX 111
LAGRANGE 130
EFFET GYROSCOPIQUE 140
DYNAMIQUE DES SYSTEMES 143

Enoncés

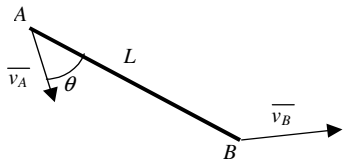
Cinématique du solide, cinématique instantanée, CIR

Formulaire

Distribution des vitesses : $\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BA}$
Distribution des accélérations : $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BA} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{BA} \right)$

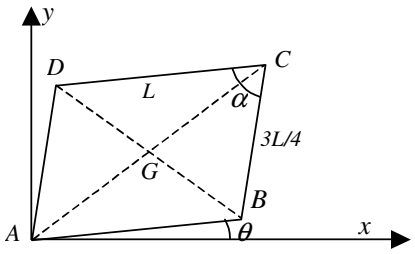
Distribution des vitesses et accélérations

1. $\overline{v}_A$ et $\overline{v}_B$ sont les vitesses (vecteurs coplanaires) des extrémités de la tige *AB* à l'instant *t*. Déterminer à cet instant la vitesse angulaire de la tige en fonction de $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ et θ.



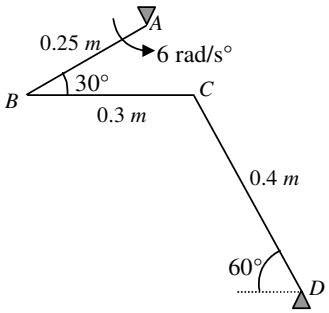
---

2. Le parallélogramme *ABCD* est en rotation dans le plan *Axy*, autour du point *A*.
Si α est constant, calculer la vitesse et l'accélération de son centre de masse *G* en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.
Utiliser
a) la méthode de dérivation des coordonnées.
b) les formules de distribution des vitesses et des accélérations.



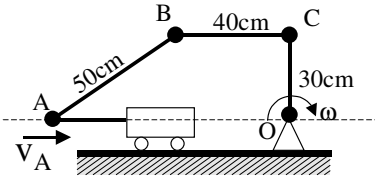
Mouvement instantané

3. On considère le système à 3 barres coplanaires représenté ci-contre. La barre *AB*, à cet instant, a une vitesse angulaire instantanée de 6 rad/s et une accélération angulaire instantanée nulle.
On demande de déterminer les vitesses et accélérations angulaire instantanées correspondantes pour les barres *BC* et *CD*.



---

4. A l'instant où le système représenté est dans la position indiquée (*OC* verticale, *BC* horizontale), ω=2rad/s et v_A=1.2m/s.
1.) Calculer à cet instant la vitesse angulaire de *BC*.
2.) Déterminer la position des centres instantanés de rotation de *BC* et de *AB* et vérifier graphiquement.



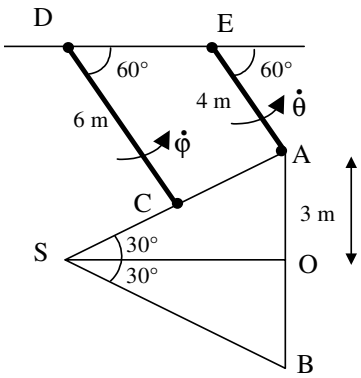
---

5. Une plaque triangulaire est accrochée à l'aide de deux barres de longueur différentes.

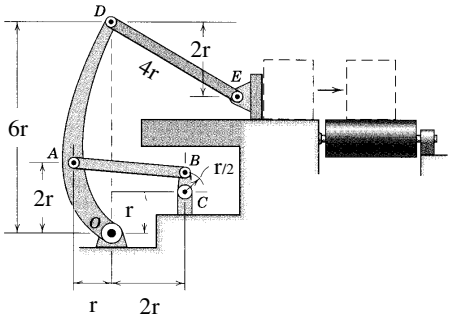
1. Calculez la distance *AC* pour que la hauteur *OS* du triangle soit horizontale dans la configuration donnée par le dessin.

A l'instant représenté, la barre *AE* tourne à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$ de 3 rad/s.

2. Quelle est la vitesse angulaire instantanée $\dot{\varphi}$ de la barre *CD* ?
3. Calculer la vitesse et l'accélération du point *S*..



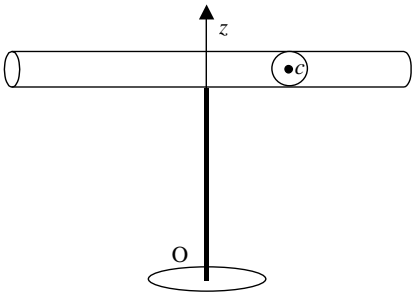
6. Un mécanisme dessiné ci-contre est utilisé pour pousser des petites boites de leur position de stockage sur un convoyeur. Au moment initial, *OD* et *BC* sont en position verticale. *BC* tourne à vitesse constante dans le sens horlogique pour effectuer un tour toutes les deux secondes. Pour la position dessinée, déterminer la vitesse angulaire de chacune des barres ainsi que la vitesse à laquelle la boite est poussée horizontalement sur le convoyeur.



Mouvement relatif

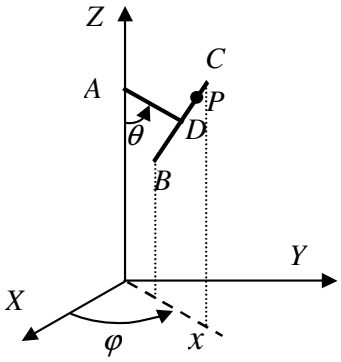
7. Bille se déplaçant dans un tube en rotation.
Le système est constitué d'un tube *s* pouvant être mis en rotation autour de l'axe vertical *Oz* à l'aide d'un moteur. On désigne par ω la vitesse angulaire (constante) de ce tube par rapport au bati S_0. A l'intérieur de ce tube, une masse *m*, de centre de gravité *c*, peut rouler sans frottement.

Déterminer l'accélération du centre de gravité *c* de la masse *m*.

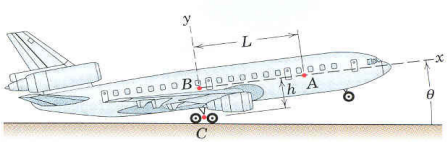


8. Les deux branches d'un T symétrique ont même longueur L. Le T, ABC, est articulé en A sur un axe vertical OZ. Un point P peut se déplacer le long de BC. Le T peut tourner autour de A dans le plan vertical *zOx*, qui, lui-même, peut tourner autour de *OZ*.

a) Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération du point *D*.
b) Déterminer la vitesse du point *P* mobile sur la tige *BC*



9. A la fin de la piste de décollage, l'avion effectue une légère rotation avant de décoller. La vitesse et l'accélération de l'avion exprimées au niveau du point C sont v_c et a_c.
L'angle θ entre le sol et l'avion évolue avec la vitesse $\omega = d\theta/dt$ et l'accélération $\varepsilon = d\omega/dt$. Une personne A marche vers l'avant de l'avion avec la vitesse et l'accélération suivante : v_{rel} et a_{rel}.
Déterminer la vitesse et l'accélération de la personne A vue par un observateur au sol.

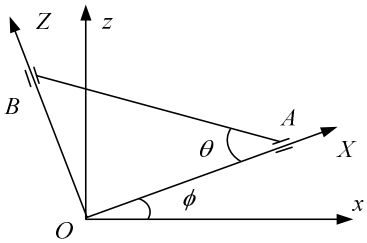


10. Une tige mince *AB* de longueur *3L* est reliée comme indiquée sur la figure par deux glissières à deux droites perpendiculaires *OX* et *OZ* qui tournent dans un plan fixe *Oxz*.
Calculer les composantes dans les axes *XYZ* de la vitesse (absolue) et de l'accélération (absolue) du centre *C* de la tige

1. par dérivation des coordonnées de *C* dans les axes *XYZ*
2. par application des formules de distribution des vitesses dans un solide
3. après avoir déterminé le mouvement du point *C*.

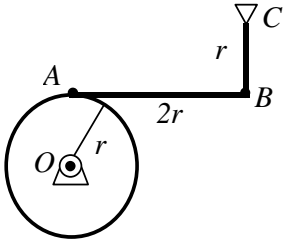
Déterminer entièrement le mouvement instantané de la tige *AB*

4. pour un observateur attaché aux axes *XYZ*
5. pour un observateur attaché aux axes *xyz* (discuter les différents cas correspondant aux valeurs de ϕ et θ)

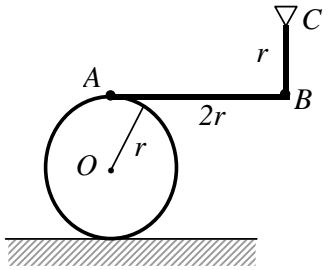


eCIR

11.



(a)

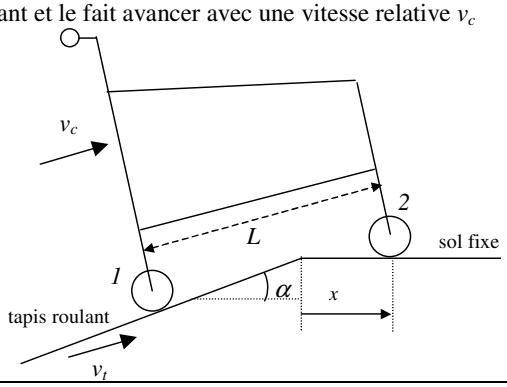


(b)

Déterminer pour chacun des deux cas, la vitesse angulaire de la barre *CB* à l'instant dessiné.

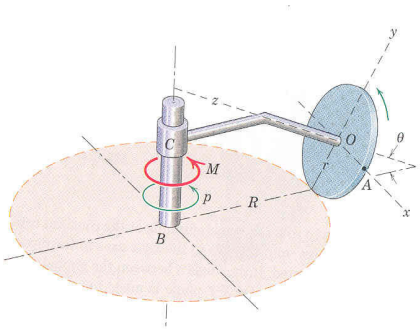
12. Un tapis roulant incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et avançant à une vitesse constante v_t permet de passer avec des caddies du niveau parking au niveau magasin du supermarché. On considère un caddie parvenu au niveau supérieur dont les roues avant ont déjà parcouru une distance *x* sur le sol horizontal.
L'entre-axe entre les roues avant et arrière est *L*
La personne qui pousse le caddie marche sur le tapis roulant et le fait avancer avec une vitesse relative v_c
Les roues, de rayon *R*, roulent sans glisser sur le tapis et sur le sol.
On demande :

1. la vitesse et l'accélération angulaire d'une des roues arrière.
2. la vitesse angulaire du caddie
3. la vitesse du point d'une des roues arrière qui se déplace le plus vite
4. la vitesse du point d'une des roues arrière qui se déplace le moins vite
5. la position du CIR du caddie.



13. La roue circulaire de rayon r tourne librement autour du bras coudé CO en rotation autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante de p rad/s. Le disque roulant sans glisser sur le plan horizontal à une distance R. de l'axe de rotation.

1. Déterminer entièrement le mouvement instantané du disque (l'axe instantané de rotation, la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε de la roue).
2. Déterminer la vitesse et l'accélération instantanée du point du disque opposé au point de contact.

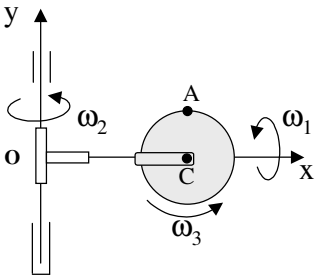


PS : L'axe x est toujours horizontal.

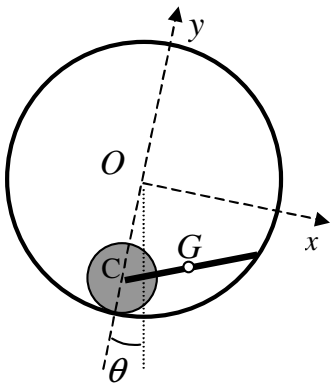
14. A l'instant où le disque de rayon R est dans la position indiquée sur la figure, et en supposant que les vitesses angulaires ω_1 et ω_3 sont constantes dans le temps,

1) Déterminer les composantes dans les axes xyz (x est l'axe horizontal du mécanisme et y l'axe vertical) de la vitesse et de l'accélération angulaire du disque, ainsi que la vitesse et l'accélération du point A.
2) Discuter le type de mouvement du disque en fonction des valeurs ω_1, ω_2 et ω_3. Et préciser dans chaque cas ce qui permet de caractériser entièrement ce mouvement.
3) Tous les points de l'axe hélicoïdal instantané ont-ils le même vecteur accélération ?

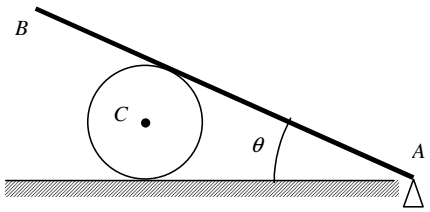
NB : O est un point fixe



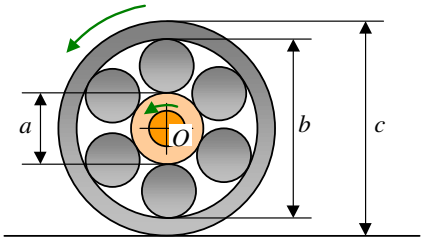
15. Un disque de rayon R peut rouler sans glisser à l'intérieur d'un anneau circulaire mince (fixe) de centre O et de rayon $4R$.
Au centre C du disque est articulée une tige mince homogène de longueur $4R$ dont l'extrémité D peut glisser le long de l'anneau.
Le système est dans un plan fixe.
En choisissant comme coordonnée généralisée l'angle θ indiqué sur la figure, déterminer les types de mouvement du disque et de la tige, et indiquer ce qui les caractérise entièrement.
Calculer les composantes dans les axes xy de la vitesse et de l'accélération du centre de masse G de la tige.



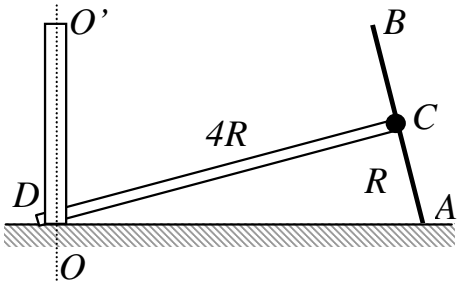
16. Une tige homogène AB est fixée en A et s'appuie sur un disque circulaire de rayon R et de centre C de manière telle qu'il y a roulement sans glissement entre les deux solides, alors que le disque peut se déplacer sans frottement sur l'horizontale passant par A (le système est dans un plan vertical fixe).
Déterminer la vitesse du point C ainsi que la vitesse angulaire de rotation du disque en fonction de θ et $\dot{\theta}$



17. La bague extérieure du roulement à billes roule sans glisser vers la gauche avec une vitesse de son centre O égale à v.
L'axe central qui est enserré dans la bague intérieure du roulement, tourne dans le sens trigonométrique avec une vitesse angulaire Ω.
Déterminer la vitesse angulaire instantané ω du roulement du bas.

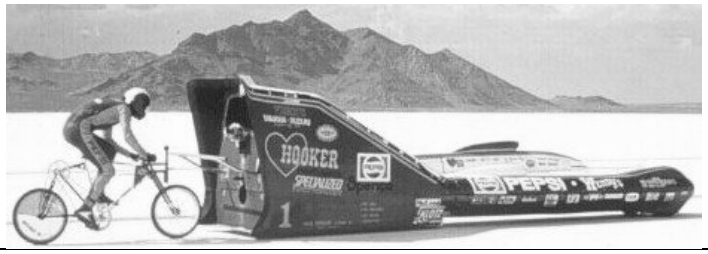


18. La figure ci-dessous représente un broyeur. La roue circulaire (AB) de rayon R tourne librement autour du bras CD en rotation autour de l'axe vertical OO' à la vitesse angulaire constante de Ω rad/s. Le disque AB roule sans glisser sur le plan horizontal.



1) Déterminer entièrement le mouvement instantané du disque (la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε de la roue).
2) Déterminer la vitesse et l'accélération instantanée du point du disque opposé au point de contact.

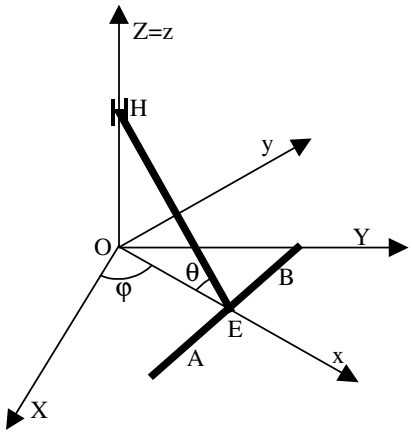
19. En 1985, John Howard établit un record de vitesse à vélo. Roulant derrière un véhicule servant à réduire la résistance de l'air, il atteint une vitesse de 152 miles à l'heure. Le mécanisme d'entraînement de la bicyclette est composé d'une roue dentée de 12cm de rayon relié à l'aide d'une chaîne à une autre roue dentée de 3cm de rayon. Cette dernière est solidaire d'une roue dentée de 10cm de rayon reliée par une deuxième chaîne à la roue dentée de 3cm solidaire de la roue arrière. Le rayon de la roue arrière est de 23.5cm.
Lorsque cet athlète roule à une vitesse de 152 miles à l'heure, quelle est la vitesse de rotation du pédalier (en tours par minutes) ?
PS : 1 mile=1.609344 km



Caractéristique des mouvements

20. Deux tiges *AB* et *HE*, de longueur *L*, sont soudées à angle droit en (milieu de *AB*) pour former un té. La glissière *H* peut coulisser sur *OZ* et la tige *AB* glisse dans le plan fixe *OXY*. La position du té est repérée par les angles φ et θ variables. A l'instant représenté sur la figure ci-contre, on demande :

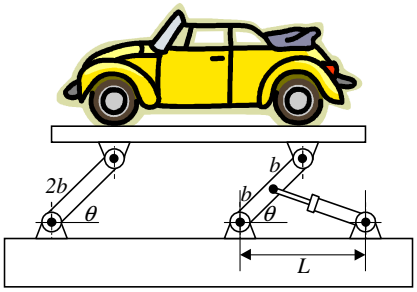
1. de calculer le vecteur vitesse angulaire instantané du té ;
2. de calculer la vitesse des points *H,* A, *B* et *E* ;
3. de discuter la nature du mouvement instantané en fonction de $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$; dans chacun des cas identifiés, caractérisez entièrement celui-ci.



Cinématique des solides

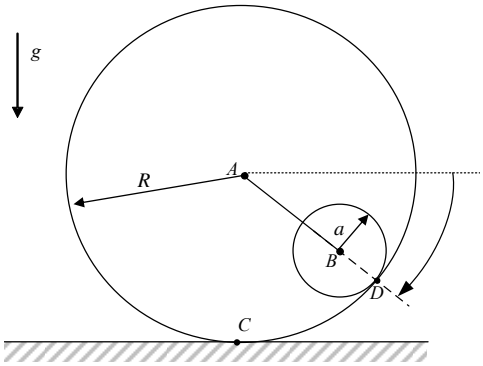
21. Déterminer une relation exprimant la vitesse verticale *v* de la voiture en fonction de *θ*. Le piston sort du cylindre à la vitesse *u*.

$$\text{REP } v = \frac{2u\sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta}}{L\tan\theta}$$



22. Le problème est plan (2-D). Le système, soumis à l'effet de la gravité, est composé de :
- Un anneau de masse M, de rayon *R* et de centre *A*, qui roule sans glisser sur un sol plat.
- Un disque de rayon *a,* de centre *B*, et de masse homogène *m*.
- Une barre AB, de masse négligeable, articulée en A et autour de laquelle le disque peut tourner librement

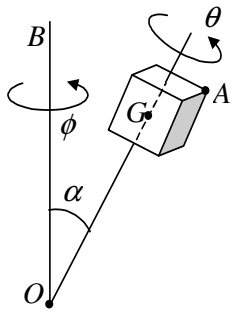
En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser sur la piste de forme circulaire formée par l'intérieur de l'anneau.



Déterminer la vitesse angulaire de chacun des solides en fonction des degrés de liberté que vous définissez. Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération du point *B*.

23. Un cube de côté d a son centre de masse G fixé sur une tige OG, qui le traverse par le milieu de deux faces opposées. L'extrémité O est fixe et $OG = L$. La tige OG tourne sur elle-même ($\dot{\theta}(t)$), et est, de plus, animée d'un mouvement de rotation ($\dot{\phi}(t)$) autour d'un axe vertical fixe avec lequel elle fait un angle constant α.

Déterminer la vitesse du point A (un des sommet supérieur du cube)

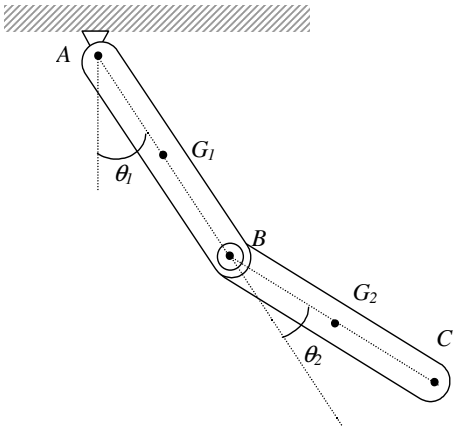


a) par les formules de distribution des vitesses.
b) par la méthode de dérivation des coordonnée dans les axes liés à la tige.

Déterminer l'accélération angulaire du cube dans les axes liés à la tige.
Déterminer l'accélération angulaire du cube dans les axes liés au cube.

---

24. Le double pendule de la figure ci-contre est placé dans le plan vertical. Ce double pendule est constitué de deux barres homogènes AB et BC de masse m et de longueur L. La barre AB est reliée au bâti s par une liaison rotoïde parfaite en A et à la barre BC en B par une autre liaison rotoïde parfaite. La position de ce pendule est repérée par les angles θ_1 et θ_2; l'angle θ_1 étant l'angle que fait la barre AB avec la verticale et l'angle θ_2 est l'angle que fait la barre BC avec la barre AB.



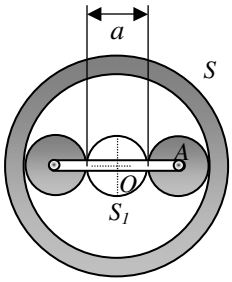
On demande d'exprimer en fonction de ces deux angles la vitesse absolue v_{G1} et l'accélération absolue a_{G1} du centre de gravité G_1 de la barre AB ainsi que la vitesse absolue v_{G2} et l'accélération absolue a_{G2} du centre de gravité G_2 de la barre BC par rapport au bâti.

---

25. Le bras OA tourne autour du point fixe du cylindre O à la vitesse de 90 tours par minute dans le sens horlogique. Déterminer la vitesse angulaire de rotation instantanée du solide central S_1.

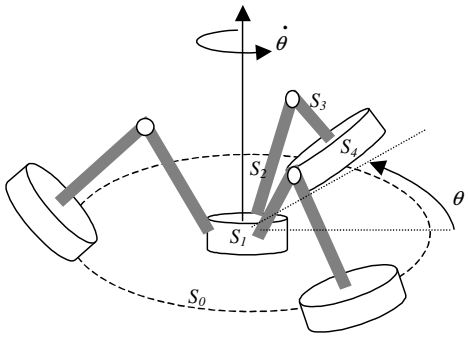
1. Si la bague extérieure est fixe
2. Si la bague extérieure est en mouvement de rotation de 80 tours/min autour de O (sens anti-horlogique).

Vérifier graphiquement.

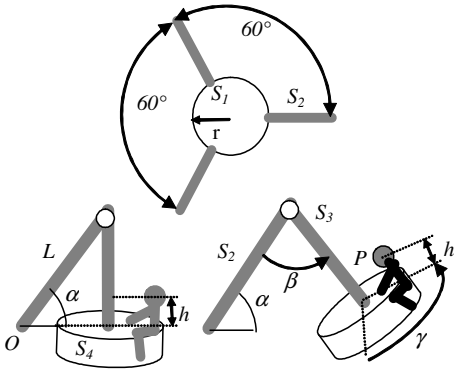


---

26. Le manège représenté ci-dessous est composé de 3 bras (S_2) fixés rigidement sur S_1 (moteur de rayon r). Ce socle tourne à la vitesse constante $\dot{\theta}$ autour de l'axe vertical. Sur chacun des bras S_2 (de longueur L) est articulé un bras S_3 (vertical au repos). Le mouvement du bras S_3 se fait dans le plan défini par S_2 et S_3. Une nacelle S_4 est fixée, en son centre, au bout du bras S_3. Celle-ci tourne autour du bras avec une vitesse angulaire constante $\dot{\gamma}$. Un bonhomme est assis dans la nacelle S_4 , sa tête (P) est située à une hauteur h de la face supérieure de la nacelle.



1. Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la nacelle occupée par le bonhomme.
2. Choisir le repère dans lequel vous exprimerez la vitesse du bonhomme. (Préciser les axes sur le dessin)
3. Quel vecteur allez-vous donc utiliser pour dériver les axes de votre repère ?
4. Si le bonhomme est solidement attaché (considérer la nacelle et le bonhomme comme indéformable), expliciter la (les) équations donnant la vitesse de la tête P ainsi que tous les termes (vecteurs) compris dans ces équations sans effectuer les produits vectoriels.



Position au repos

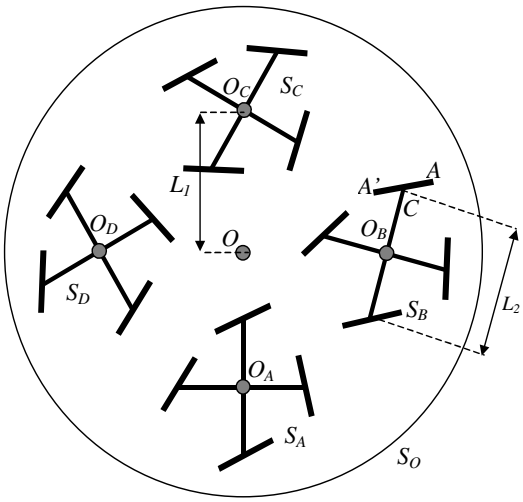
5. Déterminer l'accélération angulaire de la nacelle S_4.
6. Déterminer l'accélération subie par la tête du bonhomme P (en explicitant tous les termes encore inconnus et sans effectuer les produits vectoriels).

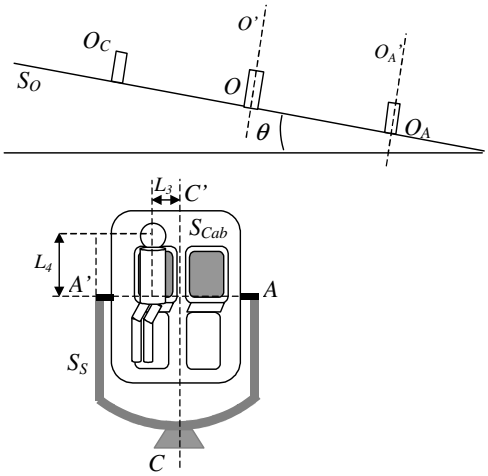
---

27. Un manège à sensation est modélisé de la manière suivante :
Un disque S_O, incliné d'un angle θ, par rapport à l'horizontale, est en rotation constante (ω_1) autour de l'axe OO' passant son centre O dans le sens horlogique.
Quatre dispositifs semblables (S_A, S_B, S_C, S_D) sont placés aux quatre points du disque (O_A, O_B, O_C, O_D) distant d'une longueur L1 du centre du disque. Chacun de ces dispositifs tourne autour de son centre (respectivement suivant les axes $O_iO_{i'}$) avec une vitesse angulaire constante ω2 dans le sens anti-horlogique par rapport au disque S_0.
Le dispositif S_B est constitué de deux bras de longueur L_2 soudés en leur centre (O_B), de même pour les autres dispositifs.
À l'extrémité de chaque bras (par exemple C) est articulé une cabine. Le support de la cabine est articulé en C et permet une rotation ($\omega_3(t)$) suivant l'axe CC'. La cabine est elle-même en rotation ($\omega_4(t)$) autour de l'axe AA'.
(<u>Rem</u> : Détailler les repères ainsi que les angles utilisés.)

1. Écrire la vitesse et l'accélération angulaires absolue ($\bar{\omega}$ et $\bar{\varepsilon}$) de la cabine S_{Cab} dans un repère de votre choix centré en C.
2. Écrire la vitesse absolue que subit la tête du passager de la cabine (située à une distance L_3 de l'axe CC' et L_4 de l'axe AA').

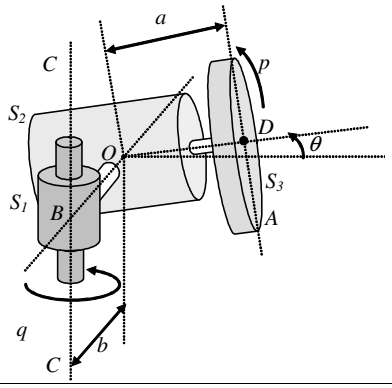
Sans calculer les produits vectoriels ni les sommes, écrire l'équation de l'accélération absolue que subit la tête du passager ainsi que le détail de chacun des termes compris dans cette équation.





28. Un ventilateur peut être modélisé de la manière suivante : un moteur dans le socle S_1 permet la rotation autour de l'axe CC avec la vitesse angulaire q ainsi que la rotation autour de son axe BO. Le solide S_2 dont le centre est séparé de B d'une distance égale à b permet de faire tourner le ventilateur autour de l'axe OD avec la vitesse angulaire p. Le rayon du solide S_3 est R. Ce solide est distant de a du centre O du solide S_2.

1. Exprimer la vitesse angulaire du disque S_3.
2. Exprimer l'accélération angulaire du disque S_3.
3. Déterminer la vitesse du point A.
4. Déterminer l'accélération du point A.

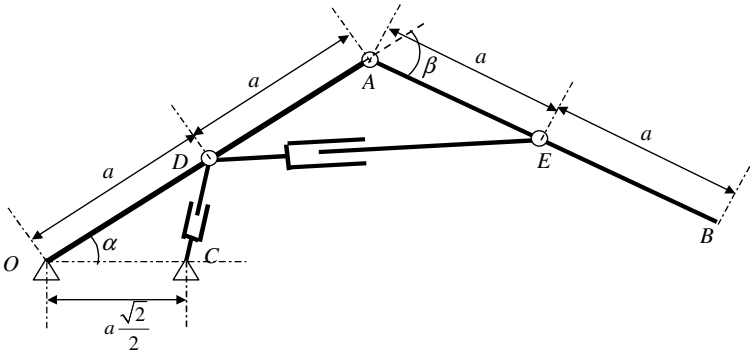


29. Un bras manipulateur d'atelier flexible, chargé de transporter des pièces d'un poste de travail à l'autre est composé de :

- un bras OA, de longueur $2a$, lié au bâti par une liaison pivot en O.
- un bras AB, de longueur $2a$, lié au bras OA par une liaison pivot en A.
- un vérin d'épaule CD lié au bâti par une liaison pivot en C ainsi qu'au bras OA par la liaison pivot en D (situé à la moitié de OA)
- un vérin d'épaule DE lié au bras OA par une liaison pivot en A ainsi qu'au bras AB par la liaison pivot en E (situé à la moitié de AB)

$$OC = a.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

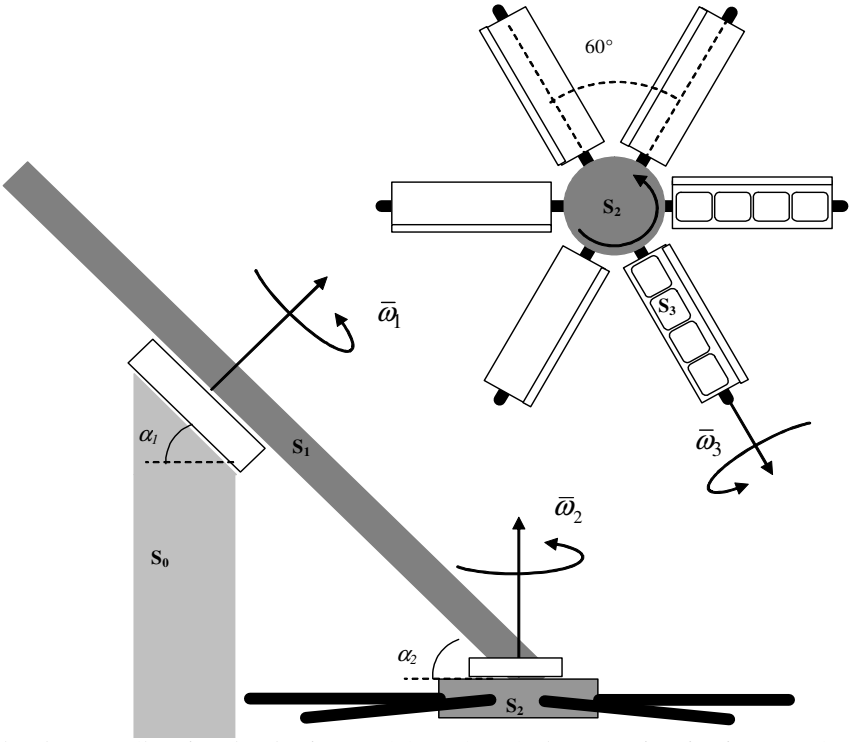
On considère les vitesses de sortie des vérins constantes et égale à V=1 mm/s.
Déterminer la vitesse de B en fonction des paramètres α, β et V.



30. Le manège représenté ci-dessous est composé de :

- un bras fixe vertical muni d'un rotor incliné à α_1 constant°
- un bras S_1 fixé sur ce rotor tournant avec une vitesse angulaire ω_1 constante.

un rotor S_2 fixé au bout du bras S_1 (incliné de α_2 constant par rapport à ce dernier) et tournant avec une vitesse angulaire ω_2 constante.
6 bras (du type S_3) répartis tous les 60° sur le rotor S_2 et tournant avec une vitesse angulaire $\omega_3(t)$ dans le plan du rotor S_2.
Au repos, le rotor S_2 ainsi que les 6 bras sont horizontaux.

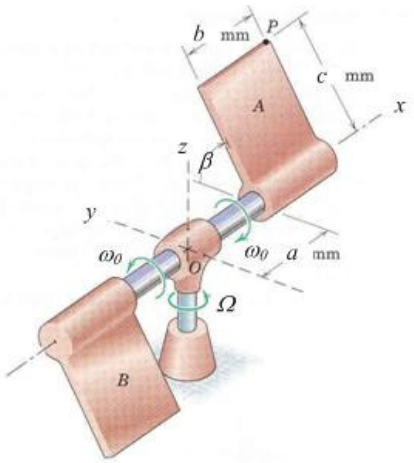


Rem : Pour plus de compréhension, les dessins ont été représentés dans une situation instantanée particulière.
Tenez bien compte de toutes les rotations représentées.
Déterminer les différents systèmes d'axes que vous aller utiliser pour calculer la vitesse angulaire du solide S_3.
Déterminer le vecteur vitesse angulaire du solide S_3.
Déterminer l'accélération angulaire du S_3.

---

31. Un ensemble de panneaux attachés à un système d'axe xyz tourne avec une vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe vertical z. Simultanément, les panneaux tournent autour de l'axe x dans des sens opposés avec une vitesse angulaire constante ω.

1. Déterminer l'accélération angulaire de la plaque A.
2. Déterminer la vitesse du point P
5. Déterminer l'accélération du point P quand $\beta = 90°$



Tenseur d'inertie

Formulaire

Element du tenseur d'inertie : $I^{\alpha\beta} = \int_{système} \left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta \right) dm$
Changement d'axe : $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$
Axes principaux : $tg2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$
Steiner : $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta \right)$

Rappel : avec l'axe z = axe de révolution

$$3D \ : \ I_z = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm = I_x + I_y - 2I_{xy}$$

$$\Rightarrow I_z \underbrace{=}_{z\text{=axe de révolution}} 2I_x - 2I_{xy} \underbrace{=}_{2D(z=0)} 2I_x \quad \text{et} \quad I_x \underbrace{=}_{z\text{=axe de révolution}} \frac{I_z}{2} + I_{xy} \underbrace{=}_{2D(z=0)} \frac{I_z}{2}$$

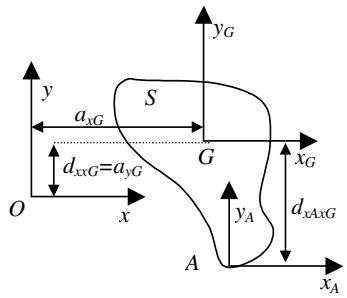
Rappel : Utilisation de la formule de Steiner

$$P_{xy} = \int xydm = \int \left(x_G + a_{x_G} \right)\left(y_G + a_{y_G} \right) dm = P_{x_G y_G} + ma_{x_G} a_{y_G} + a_{x_G} \underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{y_G} \underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

ou $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta \right) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - Ma^x a^y \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + ma_{x_G} a_{y_G}$ avec $x = x_G + a^x$

En pratique :

$$\overline{OG}\left(a_{x_G}, a_{y_G}, a_{z_G} \right) \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m\left(a_{y_G}^2 + a_{z_G}^2 \right) \text{ et } P_{xy} = P_{x_G y_G} + m\left(a_{x_G} a_{y_G} \right)$$



Calcul du moment d'inertie du solide *S* par rapport à l'axe *x* passant par *O* :

$$I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2$$

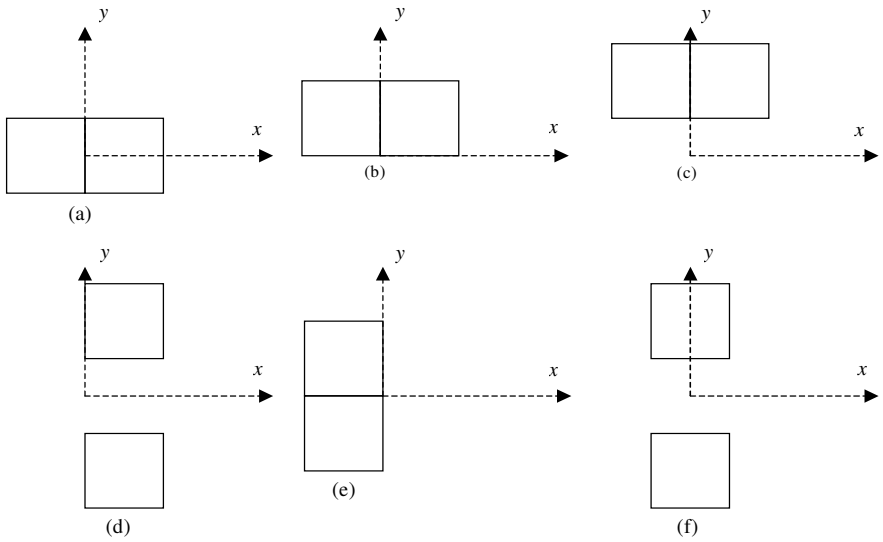
Parfois, il est plus facile de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par *G :*

$$I_{x_A} = I_{x_G} + md_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m\left(d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2 \right)$$

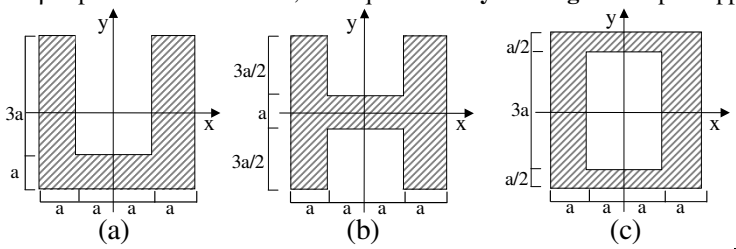
Des animations matlab sont disponibles sur le site : http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/matlab.html

---

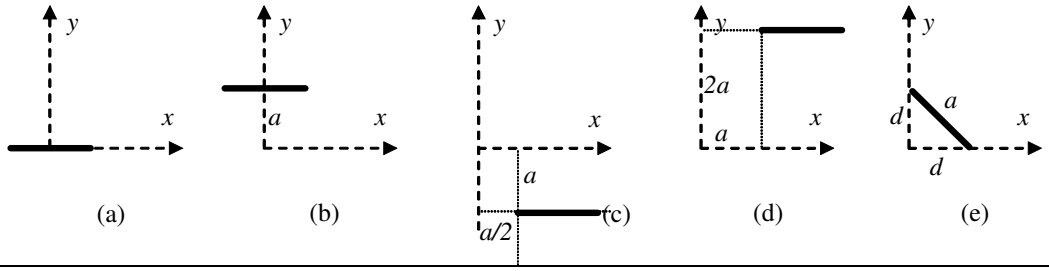
1. Déterminer les moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côté L, l par rapport à ses médianes.
Déduire les moments d'inertie par rapport à x et y de chacune des deux plaques carrées homogènes (de côté *a*) de même masse spécifique superficielle ρ représentées ci-dessous, ainsi que leurs **rayons de giration** par rapport à ces axes.



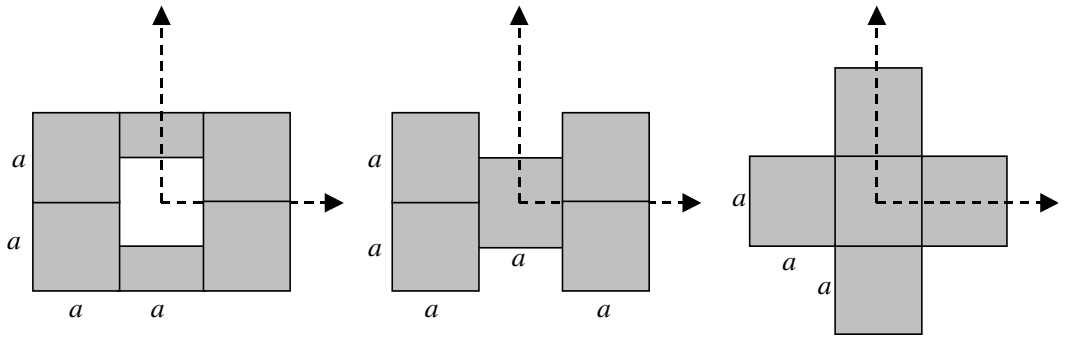
2. Déterminer les moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côté L, l par rapport à ses médianes.
Déduire les moments d'inertie par rapport à x et y de chacune des trois plaques homogènes de même masse spécifique superficielle ρ représentées ci-dessous, ainsi que leurs **rayons de giration** par rapport à ces axes



3. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y ainsi que le produit d'inertie P_{xy} des tiges minces homogènes de masse spécifique ρ et de longueur a.

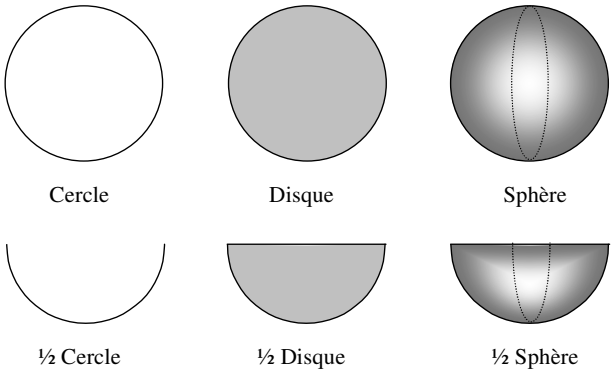


4. Déterminer les moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côté L, l par rapport à ses médianes.
Déduire les moments d'inertie par rapport à x et y de chacune des trois plaques homogènes de même masse spécifique superficielle ρ représentées ci-dessous, ainsi que leurs **rayons de giration** par rapport à ces axes.

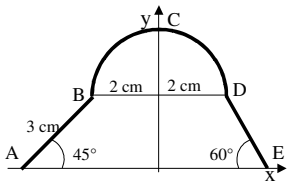


5. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y ainsi que le produit d'inertie P_{xy} des deux systèmes composés chacun de tiges minces homogènes *AB, BC, CD, DE* de masse spécifique ρ ayant la forme indiquée ci-contre. (*DE*=demi-cercle)

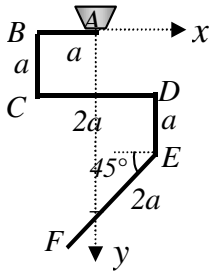
6. Déterminer les moments d'inertie d'un cercle, d'un disque et d'une sphère.
Déduire les moments d'inertie d'un demi-cercle, d'un demi-disque et d'une demi-sphère.



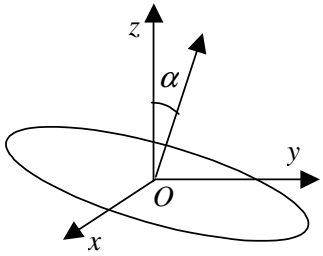
7. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y de la tige mince homogène ABCDE de masse spécifique ρ ayant la forme indiquée ci-contre. (BCD=demi-cercle)



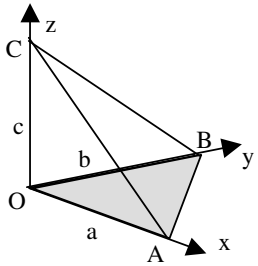
8. Déterminer les moments d'inertie I_x et I_y ainsi que le produit d'inertie P_{xy} du système composé de tiges minces homogènes *AB, BC, CD, DE* et *EF* de masse spécifique ρ ayant la forme indiquée ci-contre.



9. Calculer le tenseur d'inertie associé au disque *S* dans le repère *Oxyz*. L'axe de rotation du disque fait un angle α avec l'axe *Oz*.



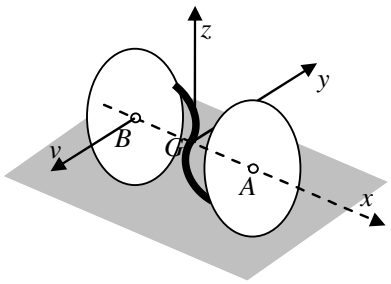
10. Déterminer le tenseur d'inertie en *O* du volume homogène de masse *m* situé à l'intérieur d'un tétraèdre rectangle homogène *OABC* (*OA=a, OB=b, OC=c*)

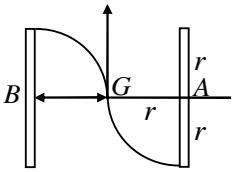


11. Deux disques circulaires, chacun de masse m_1, sont connectés à l'aide d'une barre circulaire composé de deux quarts de cercle. Cette barre possède une masse m_2.

1. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes *Gxyz* du système.

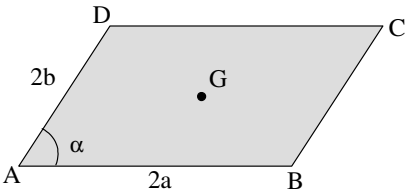
2. Que pouvez-vous dire sur chacun des produits d'inertie ? Justifiez.





Vue de haut

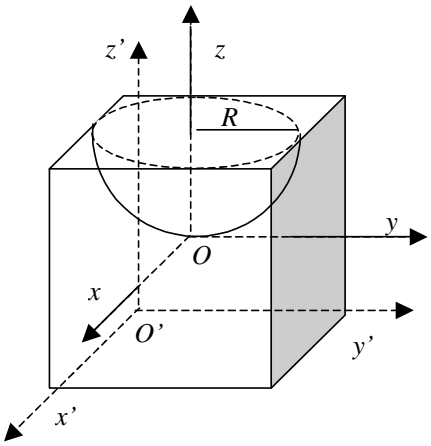
12. Une plaque plane homogène de masse m est délimitée par un parallélogramme ABCD de côtés 2a, 2b.
Calculer le moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan passant par son centre de masse G
Sous quelles conditions **l'ellipse centrale d'inertie** est-elle un cercle ?
Déterminer la direction des **axes principaux d'inertie** en A, et écrire l'équation de l'ellipse d'inertie en A.
Calculer le moment d'inertie de la surface par rapport à la diagonale AC.



13. Un solide homogène plein de masse spécifique ρ est constitué d'un cube de côté $2R$ creusé par une demi-sphère de rayon R.

1. Calculer ses moment d'inertie par rapport aux axes x, y, z centré en O du cube.
2. Déterminer s'il existe des points de l'axe z où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère. Dans l'affirmative, indiquer comment les obtenir.

Calculer le produit d'inertie $P_{x'y'}$ au sommet O'.



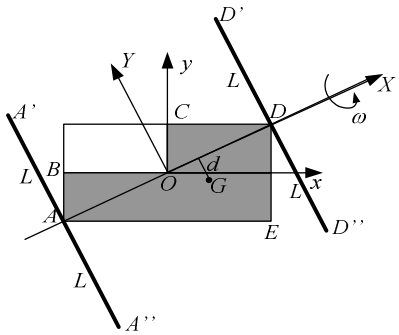
---

14. Un solide S est constitué par :

- une plaque homogène $ABOCDEA$ (S_1), de masse M. Il s'agit pratiquement d'un rectangle de longueur $2H$ et de largeur H auquel on aurait enlevé le quart supérieur gauche.
- deux tiges homogènes $A'A''$ (S_2) et $D'D''$ (S_3), chacune de masse m et de longueur $2L$, soudées perpendiculairement à la diagonale AD de la plaque, de telle façon que le centre de la tige $A'A''$ coïncide avec le sommet A de la plaque, tandis que le centre de la tige $D'D''$ coïncide avec le sommet D.

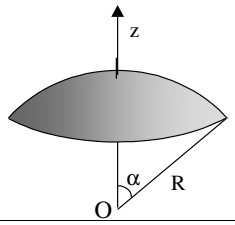
G = le centre de gravité de la plaque seule ;
d= la distance entre le centre de gravité et l'axe AD.

Déterminer le tenseur d'inertie dans les axes $OXYZ$ du système S.



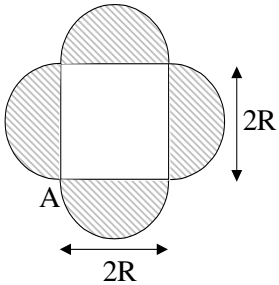
---

15. Déterminer le moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie d'une surface homogène de masse m en forme de calotte sphérique de rayon R.
Particulariser ensuite aux cas d'une demi-sphère et d'une sphère creuse.



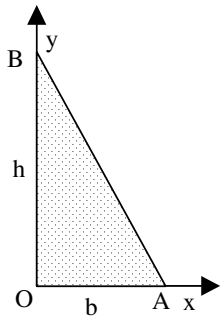
---

16. Calculer les moments d'inertie principaux en A pour la plaque homogène hachurée de masse 4m.
Esquisser l'ellipse d'inertie en A.



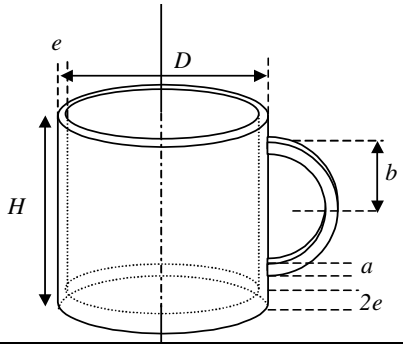
---

17. 1. Calculer les moments d'inertie d'une plaque homogène de masse M en forme de triangle rectangle par rapport à ses côtés de l'angle droit.
2. Calculer le produit d'inertie P_{xy}.
3. Dans le cas où b=4cm et h=6cm, déduire la direction des axes principaux d'inertie en O et les moments d'inertie principaux correspondants.
4. Comparer les valeurs de ceux-ci à celles de I_x et I_y.
5. Si h=b, déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe AC avec C situé à une distance b de B (BC // axe z)

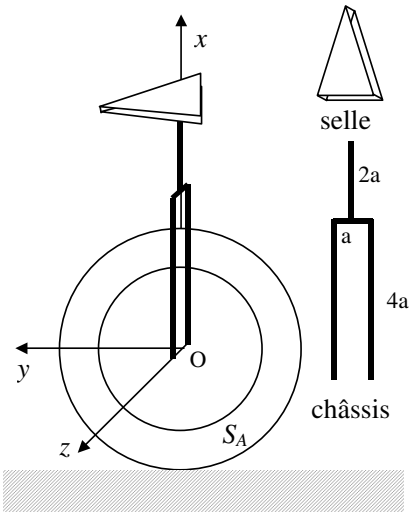


18. Déterminer le moment d'inertie de la tasse par rapport à l'axe vertical passant par son centre.

La tasse est modélisée par un cylindre creux avec les caractéristiques suivantes :
D = diamètre extérieur ; e = épaisseur des bords ; H = hauteur totale ; $2e$ = épaisseur du fond
L'anse est définie par un demi cylindre creux de hauteur et d'épaisseur a et de rayon externe b.

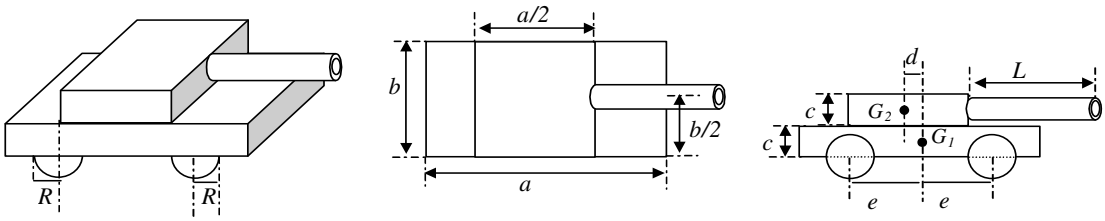


19. Un monocycle peut être représenté de la manière suivante :
la roue (Solide A) est modélisée par un disque creux, de masse m_1, de rayon extérieur $3a$ et de rayon intérieur $2a$.
Le châssis, de masse m_2, est composé de plusieurs tiges homogènes comme représenté sur la figure. Le châssis est fixé à la roue, en O, par une liaison de type rotule.
La selle est un triangle isocèle, de masse m_3, de base a, de hauteur $2a$ et d'épaisseur $a/2$. La selle est fixée au bout du châssis en son centre de masse.
La personne qui est assise sur ce monocycle a une masse m_4 et des rayons de giration égaux à r ($r_x = 0$) par rapport aux axes y et z passant par le centre O. Les produits d'inertie sont nuls en son centre de masse.
Le châssis, la selle et la personne sont solidaires pendant le mouvement, on peut les considérer comme un seul solide (Solide B). Le centre de masse de ce dernier est donné par $x_G = 8a$.



Déterminer le tenseur d'inertie de chacun des deux solides et justifier vos résultats

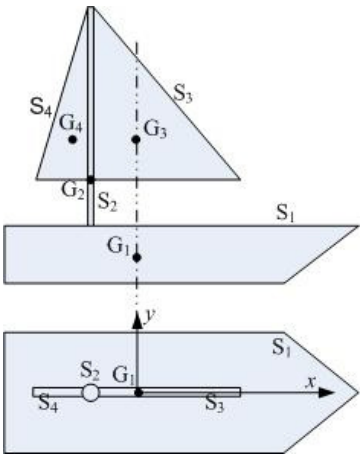
20. Un canon est représenté ci dessous. Il est composé de
- deux parallélogrammes plein homogène de côtés respectifs a,b,c (S_1) et $a/2,b,c$ (S_2) de masse volumique ρ et de centre de masse respectif G_1 et G_2.
- quatre roues (S_{3i}) de rayon R, de masse m_R. Ces roues sont modélisées par des disques pleins fixés sur les bords du parallélogramme abc. (Ces roues sont placées à distance égale du centre de masse G_1)
- un canon (S_4) modélisé, par un cylindre creux de longueur L et de rayon intérieur (r_i) et extérieur (r_e) ayant une masse M. Ce canon est fixé au milieu de la face bc du parallélogramme $a/2bc$



Déterminer le tenseur d'inertie du canon au centre de masse G_1 du parallélogramme *abc*

21. Un bateau est modélisé sur la figure ci-contre.
En supposant que chaque solide S_i est caractérisé par sa masse m_i, la position de son centre de masse G_i ainsi que d'une matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_{G_i}$, on demande :

1. déterminer tout ce que vous pouvez déduire du système sans faire de calculs pour identifier les éléments d'inertie.
2. Déterminer chacun des éléments de **la matrice d'inertie** du système complet évalué en **G1**.



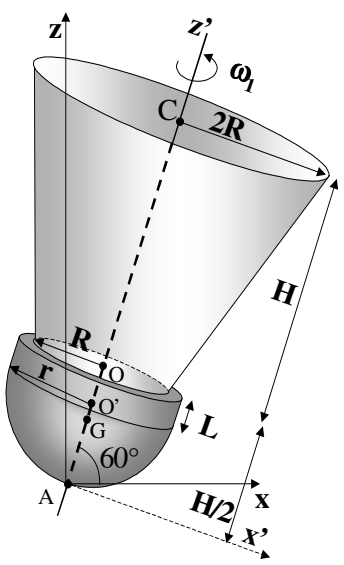
(mat=tige ; voiles=triangles)

$$\overline{OG_i} = (a_i, b_i, c_i)$$

$$\overline{\overline{I}}_{G_1(S1)} = \begin{pmatrix} A_1 & -D_1 & -E_1 \\ -D_1 & B_1 & -F_1 \\ -E_1 & -F_1 & C_1 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\overline{I}}_{G_2(S2)} = \begin{pmatrix} A_2 & -D_2 & -E_2 \\ -D_2 & B_2 & -F_2 \\ -E_2 & -F_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{I}}_{G_2(S3)} = \begin{pmatrix} A_3 & -D_3 & -E_3 \\ -D_3 & B_3 & -F_3 \\ -E_3 & -F_3 & C_3 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\overline{I}}_{G_2(S_4)} = \begin{pmatrix} A_4 & -D_4 & -E_4 \\ -D_4 & B_4 & -F_4 \\ -E_4 & -F_4 & C_4 \end{pmatrix}$$

22.

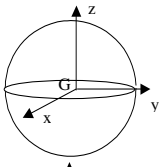


Un volant de badminton est représenté sur la figure ci-contre. Il est composé d'une **demi sphère pleine** de masse M_1 et de rayon r, sur laquelle est posé un **cylindre plein** de masse M_2 de hauteur L et de rayon r. La jupe du volant, de masse M_3 est représentée par un tronc de **surface conique** de hauteur H et de rayons respectifs $2R$ et R. Le centre de masse du tronc de cône est situé sur l'axe z' à une distance 5H/9 de O.
Dans les axes $Ax'y'z'$: $I_{x'} = I_{y'} = A$, $I_{z'} = C$.
Le volant tombe au sol en suivant une courbe parabolique. Le volant subit une rotation autour de $z' = \omega_1$ et autour de $y' = \omega_2$. La vitesse du point G vaut $v_G = -v_G\, 1_{z'}$.

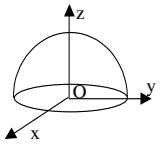
Calculer le moment d'inertie du volant par rapport à l'axe z' et l'axe x' (Il est demandé de résoudre cet exercice sans calculer d'intégrale).

L=r/3; H=4R; L+r=H/2=2R; z'_G=9r/10 pour le volant complet.

Formulaire : Si z = l'axe de révolution.

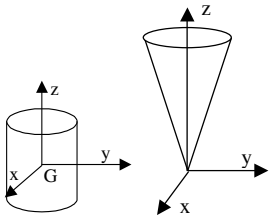


Pour une sphère pleine de rayon R (axes en G)
Moment d'inertie par rapport à l'axe z : I_z=2MR²/5 avec M=ρ4πR³/3



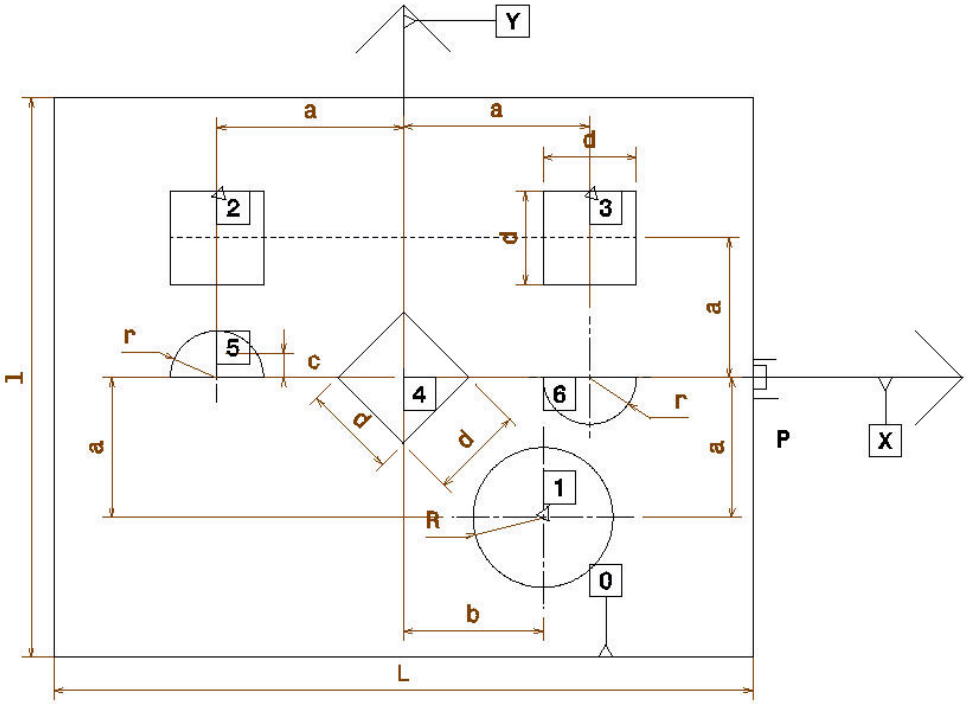
Pour une demi sphère pleine de rayon R (axes sur la base)
z_G(demi sphère)=3R/8.
Moment d'inertie par rapport au plan xy : I_{xy}= MR²/5

Pour un cylindre plein de rayon R et de hauteur h (G : centre de masse du cylindre)
Moment d'inertie par rapport à l'axe z : I_z=MR²/2 et
Moment d'inertie par rapport au plan xy : I_{xy}= Mh²/12



Pour une cône creux de rayon *R* et de hauteur *h*.
Moment d'inertie par rapport à l'axe z : I_z=MR²/2
Moment d'inertie par rapport au plan xy : $I_{xy}=\int z^2 dm$ =Mh²/2
avec M=ρπR $\sqrt{R^2+h^2}$

23. Soit, la plaque trouée d'épaisseur négligeable et de masse surfacique σ représentée sur **le plan ci-dessous**. La distance *c* est la distance entre le centre de masse du demi-cercle et l'axe X.
Calculer le moment d'inertie I_x et le produit d'inertie P_{xy} en *A* (origine des axes X et Y) de la plaque.

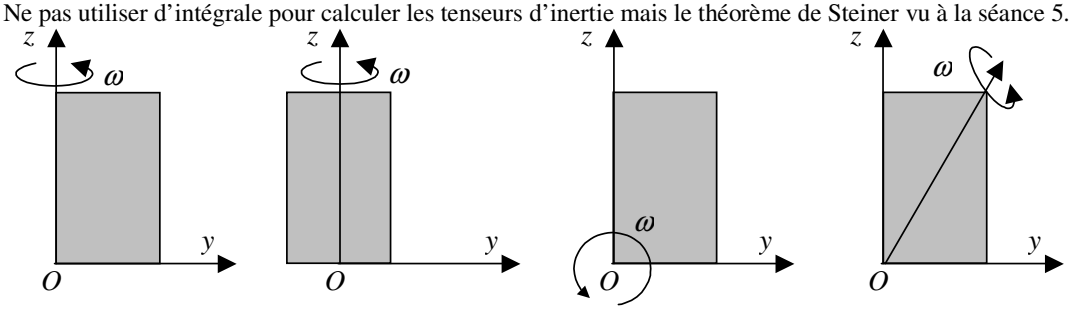


Résultante et moment cinétique

Formulaire

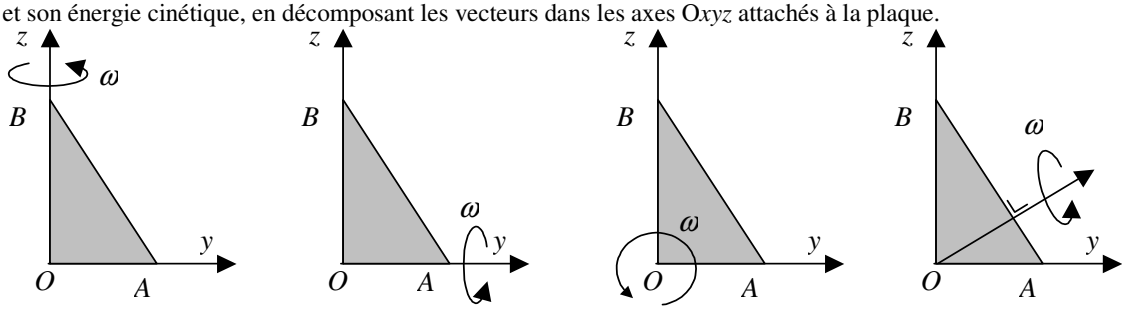
Résultante cinétique : $\overline{R} = m\overline{v}_G$
Moment cinétique par rapport à A : $\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{R}$
Moment cinétique par rapport à $A\left(A \in \text{Solide}\right)$: $\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$
Energie cinétique $\left(\text{A} \in \text{Solide}\right)$: $T = \dfrac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

24. Une plaque rectangulaire homogène de masse m et de petit coté $2a$, de grand côté $2b$, tourne à la vitesse angulaire ω autour d'un comme indiqué sur les figures de 4 manières différentes. Dans chaque cas, calculer la résultante cinétique, le moment cinétique au point O et l'énergie cinétique de la plaque.
Décomposer les vecteurs dans les axes xyz attachés à la plaque.
! Ne pas utiliser d'intégrale pour calculer les tenseurs d'inertie mais le théorème de Steiner vu à la séance 5.



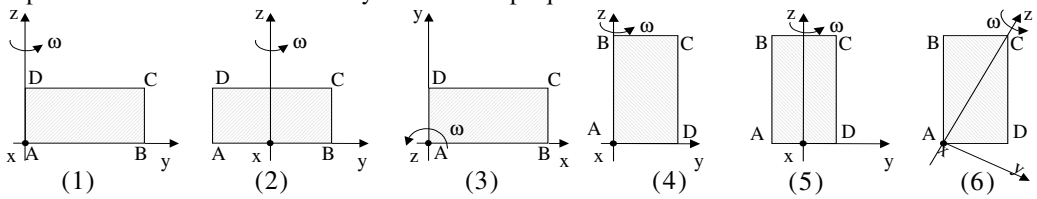
(a) (b) (c) (d)

25. Une plaque homogène de masse m en forme de triangle rectangle, de côtés de l'angle droit OA=b ; $OB=h$, est en rotation continue de vitesse angulaire ω comme indiqué sur les figures.
Dans chacun des cas représentés, calculer la résultante cinétique de la plaque, son moment cinétique au point O et son énergie cinétique, en décomposant les vecteurs dans les axes Oxyz attachés à la plaque.



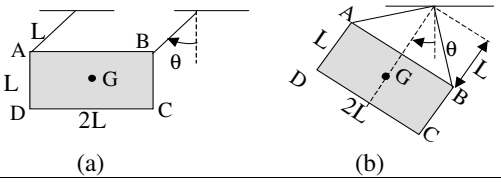
(a) (b) (c) (d)

26. Une plaque rectangulaire homogène de masse m et de côtés AB=$2a$, BC=$2b$, tourne à la vitesse angulaire ωautour d'un axe z disposé de 6 manières différentes. Dans chaque cas, calculer la résultante cinétique, le moment cinétique au point O et l'énergie cinétique de la plaque.
Décomposer les vecteurs dans les axes xyz attaché à la plaque.

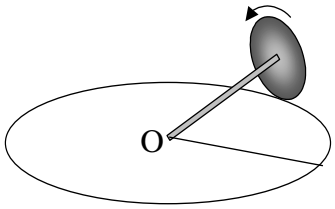


(1) (2) (3) (4) (5) (6)

27. Une plaque rectangulaire homogène ABDC de masse m et de côté L et 2L, peut osciller dans un plan vertical.
Calculer sa résultante cinétique, son énergie cinétique et son moment cinétique en G et en A lorsqu'elle est articulée en A et en B à deux tiges de masses négligeables comme indiqué sur la figure (a) et sur la figure (b)

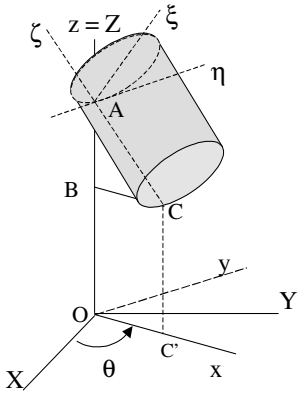


28. Une tige mince homogène, de masse m et de longueur L est soudée au centre d'un disque circulaire homogène de masse M et de rayon R, perpendiculairement à celui-ci. L'autre extrémité de la tige est attachée en un point fixe O d'un plan horizontal sur lequel le disque roule sans glisser. Calculer le moment cinétique du système par rapport à O, ainsi que sa dérivée par rapport au temps (composantes dans un système d'axes au choix)



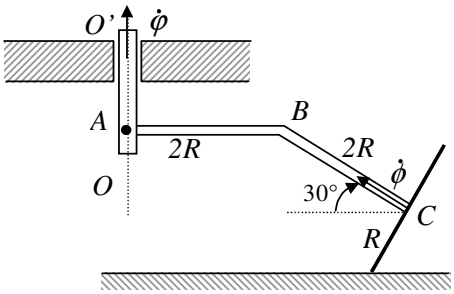
29. Un triangle isocèle, rectangle, ABC, tourne librement autour de son côté AB. (Glissière en B, articulation en A). Le long de AC est soudé un cylindre de rayon R et de hauteur AC=h.
L'assemblage est tel que l'axe du cylindre se trouve dans le plan du triangle. La masse du cylindre est M, celle du triangle est négligeable. En utilisant comme variable θ et Z = OA, calculer le moment cinétique du cylindre en A.
Exprimer les résultats dans un système d'axes au choix. Considérer les cas suivant :

1. A est fixe (rotation uniquement, Z=constante)
2. A est animé d'une vitesse $\dot{Z}\,\bar{1}_z$ (rotation et translation)

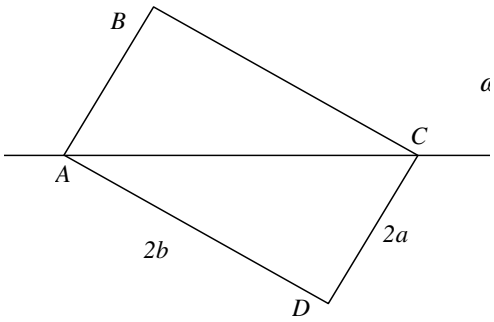


30. Un solide *ABC* composé de deux tiges minces homogènes, de masse *m* et de longueur *2R* et soudées en *B*, est soudé au centre d'un disque circulaire homogène de masse M et de rayon R, perpendiculairement à celui-ci. L'autre extrémité du solide *ABC* est attachée en un point fixe *A* d'un axe vertical *OO'*. Le disque roule sur un plan horizontal sans glisser.

Calculer le moment cinétique du système par rapport à A.

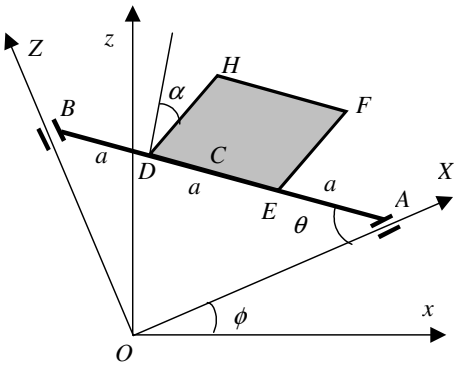


31. Déterminer le moment cinétique au centre G de la plaque rectangulaire homogène ABCD tournant autour de la diagonale AC.

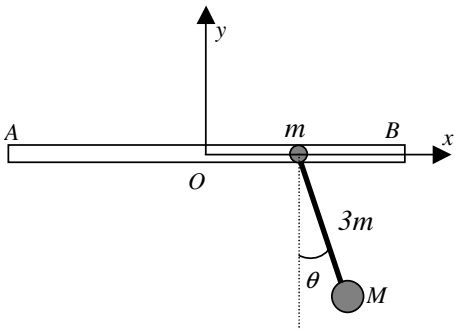


32. Une tige mince homogène AB de masse m et de longueur $3a$ est reliée par deux glissières à deux droites perpendiculaires OX et OZ qui tournent dans une plan fixe Oxy à la vitesse constante ϕ. Une plaque homogène carrée $DEFH$ de côté a et de masse M peut tourner librement autour de AB ($BD = DE = EA = a$) à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ (α étant défini par rapport à la perpendiculaire à AB dans le plan Oxz).

Calculer l'énergie cinétique et le moment cinétique en O du système..

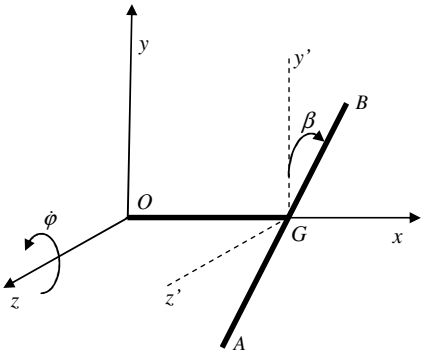


33. Une masse ponctuelle m effectue un mouvement d'oscillation dans la glissière AB suivant la loi : $x = a\cos(\omega t)$.
A cette masse est articulée une tige homogène de longueur a et de masse $3m$, qui peut tourner dans le plan fixe Oxy, à l'extrémité de laquelle est soudée une sphère homogène pleine de masse M et de rayon R.
Calculer la résultante cinétique, l'énergie cinétique ainsi que le moment cinétique en O du système.



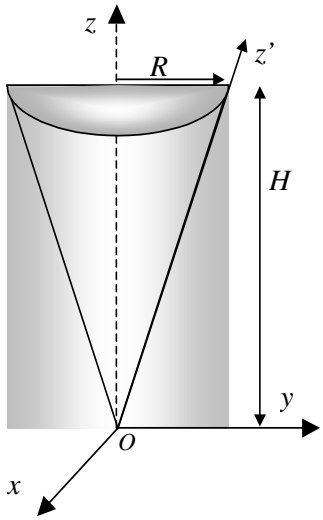
34. Une barre en acier (OG) de longueur L_1 et de masse m_1 est fixée en O et peut tourner librement autour de l'axe z avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.
Au bout de cette barre, en G, est fixée par une rotule une autre barre en acier (AB) de longueur L_2 et de masse m_2. Cette dernière peut tourner autour de son centre de masse, G, dans un plan ($Gy'z'$) perpendiculaire à la barre OG.
Ces deux barres sont modélisées par des tiges minces homogènes.

Déterminer le moment cinétique du système constitué de ces deux barres et sa dérivée.



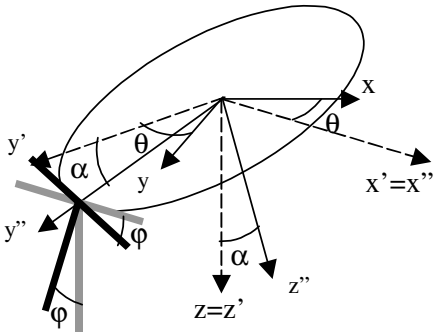
35. Le demi cône inhomogène représenté ci-contre a une masse M et une masse spécifique ρ=kz en $P(x, y, z)$.
Déterminer :

1. le tenseur d'inertie en O dans les axes (x,y,z) ;
2. la condition pour qu'il existe des points en lesquels l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, et déterminer ces points lorsqu'ils existent ;
3. le moment d'inertie du demi cône par rapport à une de ses génératrices (z').
4. Calculer le moment cinétique de ce demi cône en O si ce dernier tourne librement autour de sa génératrice z' (ω).



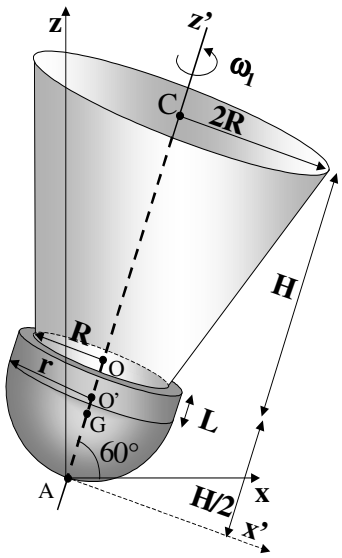
36. Un système est composé d'un fil mince homogène formant un cercle de centre O, de rayon R et de masse M, et de deux tiges minces homogènes identiques, BC et AD, de longueur R et de masse M chacune, soudées à angle droit au centre A de BC de manière à former un T.

Le cercle peut tourner (vitesse angulaire $\dot{\theta}$) autour de l'axe vertical Oz, qui fait un angle constant α avec la perpendiculaire à son plan.
Le T est fixé en A au point le plus bas du cercle, et peut tourner (vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ autour de l'axe y'') dans le plan perpendiculaire à celui du cercle et tangent à celui-ci en A.



Calculer l'énergie cinétique de ce système ainsi que les composantes dans les axes $Ox''y''z''$ de son moment d'inertie.

37.



Un volant de badminton est représenté sur la figure ci-contre. Il est composé d'une **demi-sphère pleine** de masse M_1 et de rayon r, sur laquelle est posé un **cylindre plein** de masse M_2 de hauteur L et de rayon r. La jupe du volant, de masse M_3 est représentée par un tronc de **surface conique** de hauteur H et de rayons respectifs $2R$ et R. Le centre de masse du tronc de cône est situé sur l'axe z' à une distance 5H/9 de O.
Le volant tombe au sol en suivant une courbe parabolique. Le volant subit une rotation autour de $z'=\omega_1$ et autour de $y'=\omega_2$. La vitesse du point G vaut $v_G= -v_G\, 1_{z'}$.

L=r/3; H=4R; L+r=H/2=2R; z'_G=9r/10 pour le volant complet.

Dans les axes $Ax'y'z'$: $I_{x'} = I_{y'} =A$, $I_{z'} =C$.

1. Calculer le moment cinétique du volant en A. (Poser M=masse du volant.)

Calculer l'énergie cinétique du volant.

Théorèmes généraux

Formulaire

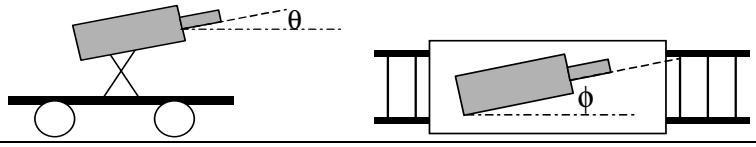
Théorème de la résultante cinétique $\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$

Théorème du moment cinétique calculé en A : $\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}$

avec $\overline{M_A} = \overline{M_G} + \overline{AG} \times \overline{R}$ ou $\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$ si $A \in S$

Théorème de l'énergie cinétique $\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h$ avec $T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

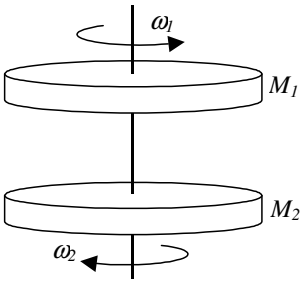
1. Un canon lié rigidement à un wagon au repos sur une voie ferrée tire un obus de masse m à la vitesse v dans la direction indiquée sur les schémas. La masse totale (wagon + canon sans obus) est M. Sachant que la force de frottement entre la voie et le wagon est constante et vaut R, déterminer le recul X du wagon.



2. Deux disques pleins tournent autour d'un même axe. Le disque 1 dans le sens anti-horlogique et le disque 2 dans le sens horlogique. Les disques ont le même rayon R, $M_2 = 3M_1$ et $\omega_1 = 4\omega_2$.

(a) Si le disque du haut tombe sur le disque du bas, quelle sera la vitesse angulaire finale de l'ensemble?

(b) Quel pourcentage de l'énergie cinétique initiale est présente après l'interaction entre les deux disques (la hauteur de la chute est négligeable)?

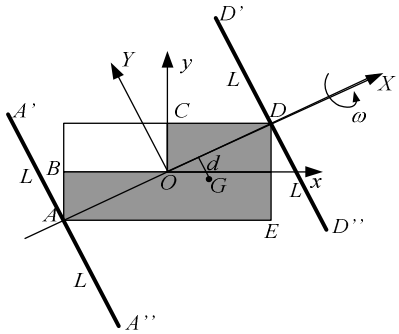


3. Un patineur sur glace de 74 kg dont les bras sont étendus à l'horizontale tourne sur lui-même autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire de 1 tour par seconde.
Estimer sa vitesse angulaire quand il a rabattu ses bras le long de son corps.
Dans ce but, modéliser à l'instant initial les bras du patineur par des tiges minces homogène de 68 cm de long et de 7kg chacune. Le reste du corps du patineur est modélisé par un cylindre homogène de 60 kg et de 33 cm de diamètre. A l'instant final, le patineur est modélisé par un cylindre de 74 kg et de 33 cm de diamètre.
Nous négligerons le frottement entre les patins et la glace.
Pourquoi ne peut-on pas utiliser la loi de la conservation de l'énergie cinétique pour résoudre ce problème ?

4. Un solide S est constitué par :

- une plaque homogène *ABOCDEA*, de masse *M*. Il s'agit pratiquement d'un rectangle de longueur *2H* et de largeur *H* auquel on aurait enlevé le quart supérieur gauche.
- deux tiges homogènes *A'A''* et *D'D''*, chacune de masse *m* et de longueur *2L*, soudées perpendiculairement à la diagonale *AD* de la plaque, de telle façon que le centre de la tige *A'A''* coïncide avec le sommet *A* de la plaque, tandis que le centre de la tige *D'D''* coïncide avec le sommet *D*.

5. Le solide *S* tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe *AD*.

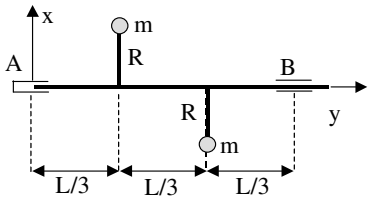


G = le centre de gravité de la plaque seule ; d= la distance entre le centre de gravité et l'axe AD.

1. Déterminer la somme des forces extérieures agissant sur le système ainsi que le moment total de ces forces au point O.
2. Si on veut que le solide soit **équilibré dynamiquement**, déterminer les masses m_A' et m_D'' qu'il faudrait placer respectivement aux points A' et D''

---

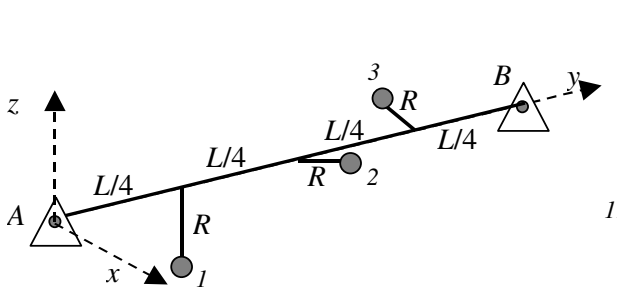
5. L'axe AB, de longueur L et de masse négligeable, entraîne dans sa rotation (ω constant) autour de l'axe y deux masses m placées aux extrémités de deux tiges de longueur R et de masses négligeables. Déterminer les composantes x et z des réactions en A et B dues au défaut d'équilibrage lorsque le plan formé par l'axe AB et les deux masses est confondu avec le plan xy.

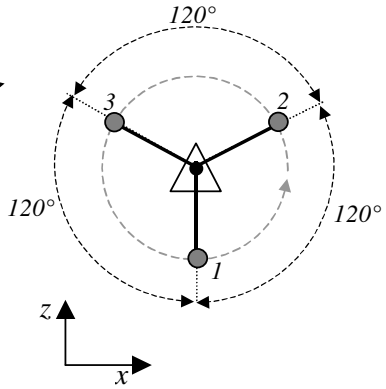


---

6. L'axe AB, de longueur L et de masse négligeable, entraîne dans sa rotation (ω constant) autour de l'axe y trois masses m (0,6 kg). Ces masses sont placées aux extrémités de trois tiges de longueur R (150 mm) et de masse négligeable. Ces trois tiges sont séparées entre elle d'une longueur $L/4$ (L = 800 mm).

Si l'axe tourne à une vitesse constante de 1200 tours/min, déterminer les composantes des réactions de liaison R_A et R_B agissant sur les deux supports.
On néglige l'effet de la pesanteur.





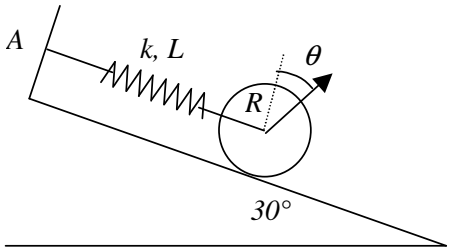
---

7. Ecrire les équations du mouvement d'une roue cylindrique homogène de rayon R, roulant sans glisser le long d'un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizontale, et reliée au point haut du plan (point A) par l'intermédiaire d'un ressort, de raideur k et de longueur libre L, dont l'autre extrémité est fixée à l'axe de la roue de telle façon qu'il soit parallèle au plan.

Quelle est la fréquence d'oscillation ?

Comment peut-on définir l'énergie mécanique totale de ce système ?

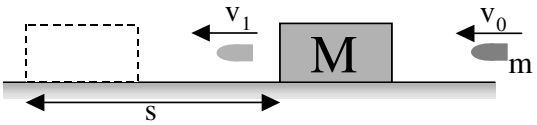
Cette énergie est-elle conservée ?



---

8. Un bloc homogène de masse M est posé sur une surface plane. On tire un projectile de masse m qui pénètre dans le bloc à une vitesse v_o et en ressort à une vitesse v_1.

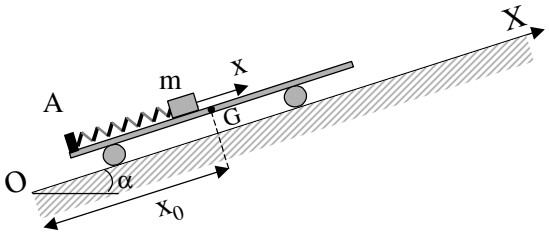
a) Déterminez à quelle vitesse v le bloc part après la collision.
b) Si le bloc est déplacé d'une distance s, déterminer le coefficient de frottement entre le bloc et le sol.



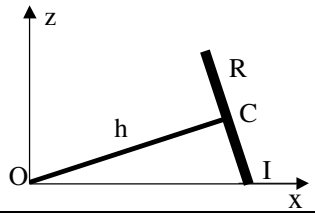
AN : M=3 kg ; m=60 gr ; v_0=600 m/s; v_1=400 m/s; s=2,70m

9. Un wagon pesant de masse M est lâché sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Une masse m peut glisser sur la plate-forme en étant attachée à un ressort de constante de rappel k et de longueur au repos l et dont l'autre extrémité est fixée en A sur la plate-forme.
A l'instant initial, cette masse m est abandonnée sans vitesse initiale dans la position indiquée, le ressort étant étiré d'une longueur d.

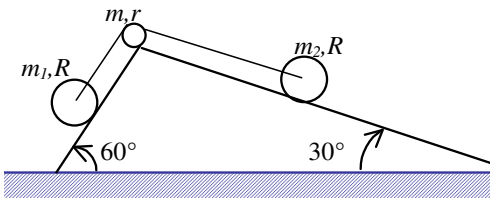
a) En négligeant tout frottement, déterminer la loi du mouvement $X(t)$ du wagon.
b) A partir de quelle valeur de k commence-t-il par remonter la pente ?



10. Un solide, constitué d'un disque homogène de rayon R et de masse M et par une tige sans masse de longueur h soudée perpendiculairement au disque en son centre, roule sans glisser à vitesse angulaire constante sur le plan horizontal Oxy.
Calculer la vitesse angulaire limite à partir de laquelle le contact entre la tige et le sol serait rompu.

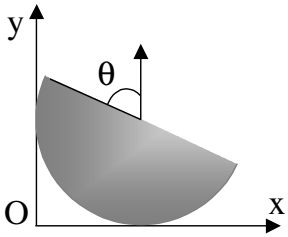


11. Deux roues cylindrique et homogène de rayon R, de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre faisant des angles de 30° et 60° avec l'horizontale.
Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique de masse m et de rayon r.
Quelle est la tension dans la corde ?

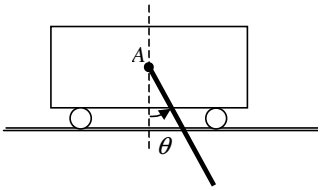


12. Une demi-sphère pleine homogène, de rayon R, est maintenue sur une table horizontale parfaitement lisse, avec sa base parallèle à un mur vertical poli auquel elle est tangente. On l'abandonne à elle-même et elle se met à glisser sous l'action de la pesanteur.

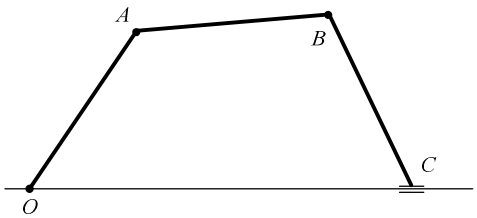
a) Montrer qu'au moment où le contact cesse avec le mur vertical, la vitesse du centre de masse de la demi-sphère est $\frac{3}{16}\sqrt{\frac{15gR}{2}}$.
b) Etudier ensuite le mouvement ultérieur, et montrer que l'inclinaison de la base de la demi-sphère sur l'horizontale ne peut excéder $\arccos\frac{45}{128}$.



13. Un chariot de masse M peut se déplacer sans frottement le long d'un rail horizontal. À ce chariot est attaché, par une de ses extrémités (A), une barre homogène de longueur L et de masse m. La barre peut osciller autour de son point d'attache.
Déterminer la (les) réactions de liaison au niveau de l'attache de cette barre en fonction de θ; $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.



14. Soit trois barres pesantes, homogènes, identiques, de masse m et de longueur L. OA est fixée en O par une rotule, AB est articulée à OA en A, BC est articulée à AB en B. C est une glissière.

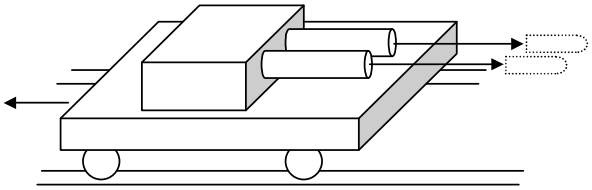


1. Combien de degré de liberté comporte le système ? Justifiez.
2. Quelles sont les inconnues (de mouvement et les réactions de liaison) ?
3. Quelles sont les équations permettant d'établir ces inconnues ?
4. Etablir ces équations (sans détailler les calculs mais en montrant clairement comment établir chaque terme et chaque grandeur fondamentale)

---

15. Deux projectiles, de masse 10 kg chacun, sont tirés simultanément d'un véhicule d'une tonne dont la vitesse initiale, avant le tir, est de 1,2 m/s dans le sens opposé au tir.
La vitesse relative des projectiles par rapport à la plate-forme est de 1200 m/s.

Calculer la vitesse de la plate-forme après le tir, en supposant que les rails sont polis.

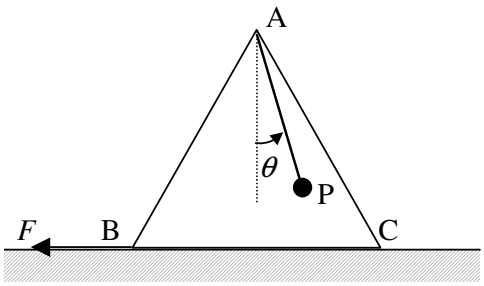


16.

Deux barges A et B, de même masse, M, sont immobiles sur une eau calme. Une voiture de masse m, initialement à l'arrêt sur la barge A, se met en marche et atteint une vitesse de 50 km/h à la sortie du tremplin (incliné à 15° par rapport à l'horizontale).
Déterminer la vitesse de la barge v_B après l'arrêt de la voiture sur la barge B.

---

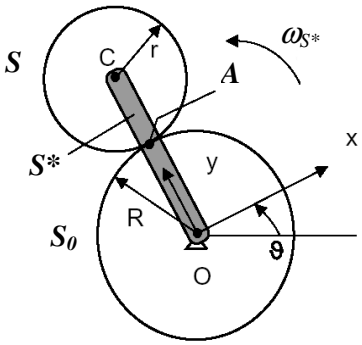
17. Un triangle est composé de 3 barres homogènes ABC, de côté L. Le triangle de masse M se déplace dans un plan vertical. Son côté BC glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet A est suspendu un pendule simple de masse m et de longueur `l` qui oscille dans le plan ABC.
Une force horizontale F agit sur le triangle. On constate en régime que l'angle θ entre le câble du pendule et la verticale reste constant pendant le mouvement.
Déterminer la valeur de θ en négligeant tout frottement.



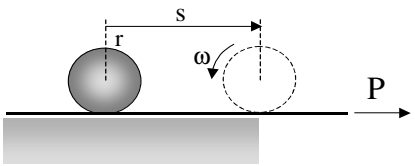
---

18. Le disque S_0 de rayon R est immobile. La tige S^* liée par des rotules au disque S_0 en O et au disque S en C est en rotation. L'évolution de l'angle du bras $\theta(t)$ est supposée connue. Les masses des différents solides homogènes sont m (pour S), m^* (pour S^*) et m_0 (pour S_0). Le solide S roule sans glisser sur le solide S_0.
Déterminer :

1. la résultante des forces qui s'exercent sur le solide S.
2. le moment par rapport à O des forces qui s'exercent sur le solide S.

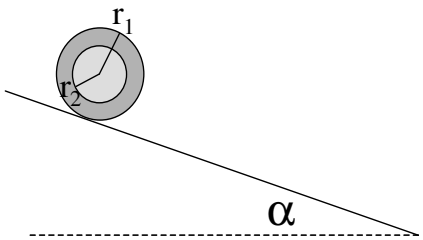


19. Le solide cylindrique de rayon r est au repos sur une plaque quand une force P est appliquée à cette plaque. Si P est suffisant pour causer un glissement entre la plaque et le cylindre à tout moment, déterminer le temps nécessaire pour que le cylindre atteigne la position représentée en pointillé (distance s de la position initiale).
Déterminer aussi la vitesse angulaire ω du cylindre dans cette même position. Le coefficient de frottement entre le cylindre et la plaque est f.

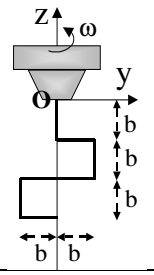


20. Soit un solide cylindrique de longueur L. Il est composé d'un cylindre creux de rayon extérieur r_1 et de rayon intérieur r_2 (ρ_1) et d'un cylindre plein de rayon r_2 (ρ_2).

a) Calculer sa vitesse angulaire s'il est lâché en haut d'une pente (incliné de α) avec une vitesse nulle.
b) Pour deux solides de rayon extérieur identique et où les densités volumiques ρ_1 et ρ_2 sont inversées, déterminer la relation entre les deux rayons intérieurs pour que les deux cylindres, placés sans vitesse initiale au somment du plan incliné, arrivent simultanément en bas de celui-ci.
c) Montrer que dans le cas d'un cylindre homogène, le temps de parcours ne dépend pas de la masse.

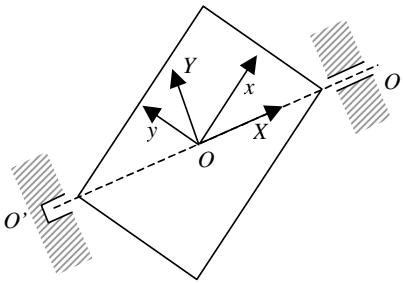


21. Le mélangeur fixé en O au mandrin d'une foreuse est constitué de 7 tronçons de longueur b et de masse volumique ρ. Avant d'être plongé dans la peinture, le mélangeur tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Déterminer le moment de flexion M en O, base du mandrin



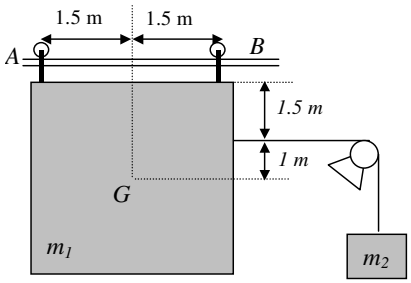
22. La plaque rectangulaire représentée ci-dessus (vue de haut) est en rotation autour de l'axe $O'O''$.

En supposant les éléments du tenseur dans les axes OXYZ connus, déterminer les réactions de liaison dans les paliers O' (palier buté) et O'' (palier guide) lorsque la plaque est mise en rotation à vitesse constante ω.
La distance entre les deux paliers est L.



23. Une porte glissière de masse m_1 =450 kg est entraînée dans son mouvement de translation par un contrepoids de masse m_2 =50 kg auquel elle est reliée par un câble.

Déterminer l'accélération de la porte et les réactions de liaison aux roulettes *A* et *B* en négligeant tout frottement.

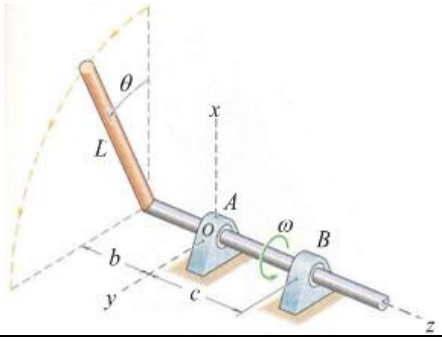


---

24. Une barre uniforme de longueur *L* et de masse *m*, est soudée à un axe. Cet axe est en rotation dans les support *A* et *B* avec une vitesse angulaire constante ω. Rem : on suppose que *B* ne supporte pas de force suivant l'axe.

Rem : le poids de la barre est négligeable.

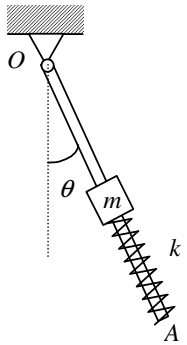
Déterminer l'expression de la force supportée par l'appui en B en fonction de θ.



---

25. Une masse *m* glisse sans frottement sur une tige mince homogène *OA* de masse *M* et de longueur *L* qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité *O*. La masse est reliée à A par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel *k* et de longueur libre $L\text{-}r_O$.
En utilisant les théorèmes généraux :

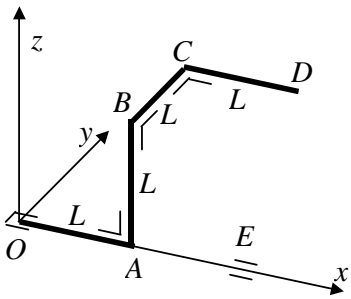
1. Déterminer les équations du mouvement
2. Déterminer les réactions de liaison de la masse *m* sur la tige.



---

26. Une tige mince coudée homogène pesante *OABCD* de longueur 4*L* et de masse 4*m* peut tourner autour de l'axe horizontal *OE*. La tige est reliée à l'axe *OE* par une butée en *O* et une glissière en *E*.
Elle est abandonnée sans vitesse initiale dans la position indiquée sur la figure (*AB* vertical).

1. Déterminer, en fonction de l'angle θ entre la verticale ascendante et *AB*, la vitesse angulaire de la tige.
2. Déterminer les composantes de la réaction de liaison en *E* dans des axes attachés à la tige.



---

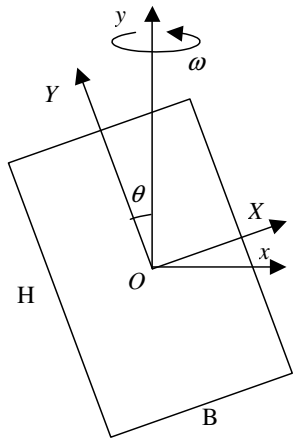
27. Une plaque rectangulaire de base B, de hauteur H et de masse M tourne à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical Oy. Le repère XYZ lié à la plaque est centré en O, milieu de la plaque. Ses axes OX et OY sont paralléles aux côtés de la plaque, l'axe OZ étant perpendiculaire à la plaque (cf. figure de gauche). L'axe de rotation Oy fait un angle θ par rapport à l'axe OY , le repére $Oxyz$ étant également lié à la plaque (Oz est identique OZ et Ox est perpendiculaire Oy et se trouve dans le plan de la plaque).

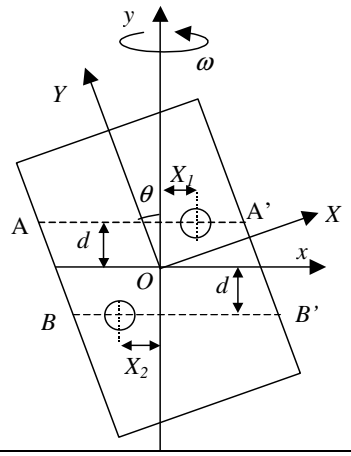
1. Déterminer la **résultante des forces** qui agissent sur la plaque ainsi que leur **moment** par rapport au pôle O.

2. On veut équilibrer la plaque statiquement et dynamiquement simplement en perçant deux trous circulaire de rayon r (cf. figure de droite). Les deux trous seront percés en deux point P_1 et $P2$:

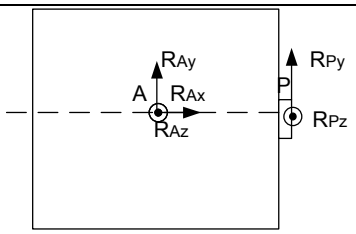
- Le point P_1 sera placé quelque part sur la ligne AA', qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et située à une distance d de l'axe Ox.
- Le point P_2 sera placé quelque part sur la ligne BB', située symétriquement à la ligne AA' par rapport à l'axe Ox.

Si les coordonnées des deux points P_1 et P_2 dans le repére Oxy sont (X_1; d) pour P_1 et (X_2; d) pour P_2, **déterminer** X_1 et X_2 pour que la plaque soit parfaitement **équilibrée**.



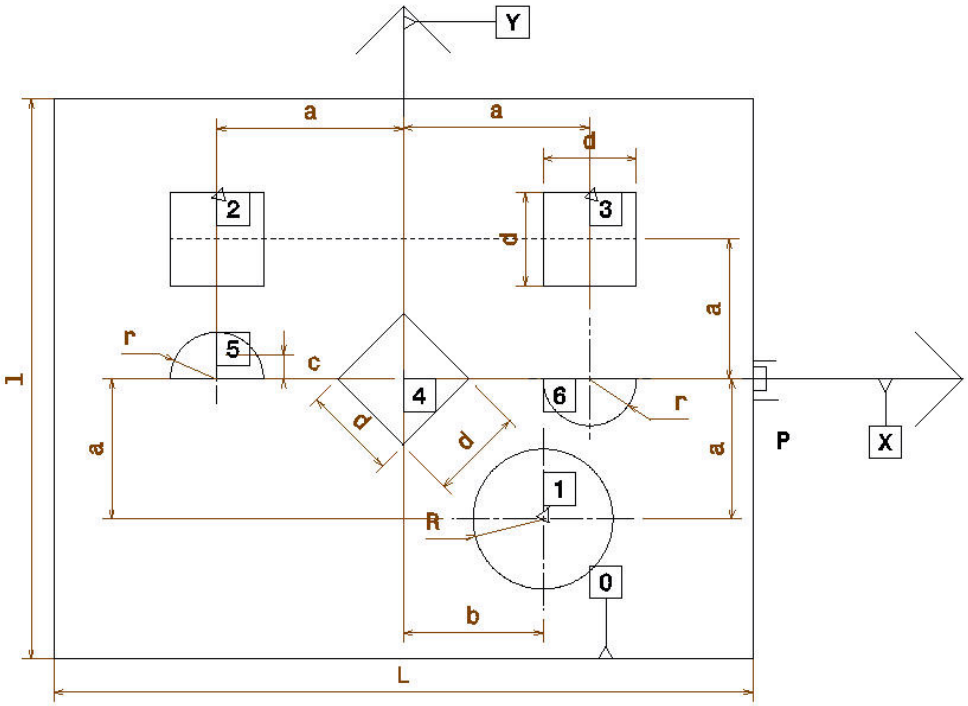


28.



Soit, la plaque trouée d'épaisseur négligeable et de masse surfacique σ représentée sur **le plan ci-dessous**. Elle tourne à une vitesse $\bar{\omega} = \omega \bar{1}_x$ autour de son axe X. Elle est maintenue en P par une liaison induisant une réaction Y et en Z ; et en A par une liaison induisant des réactions en X,Y et Z (voir ci-contre). La distance c est la distance entre le centre de masse du demi-cercle et l'axe X. Ces liaisons lui permettent de tourner sur elle-même et sont de tailles et de masse négligeables.

1. Calculer le moment cinétique en A (origine des axes X et Y) de la plaque.
2. Dans le cas ou le poids de la plaque est négligeable, calculer les réactions de liaisons en y et z de la plaque sur la butée.


Y
a
a
d
2
3
d
a
r
5
c
4
6
r
d
d
a
a
P
X
1
R
0
b
L
l

Lagrange

Formulaire

Lagrangien : $\boxed{L = T - V}$ avec $T = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \overline{\overline{I}}_{G_i}\overline{\omega}_i\right)$

n coordonnée de Lagrange => n équation de Lagrange ($i = 1,....,n$)

$\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$ avec $\delta \overline{r_h} = \sum_i \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i$

Equation de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$ avec $Q_i = Q^*_{i(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel})} + Q_{i(\text{Force dérivant d'un potentiel})}$

Pour les forces dérivent d'un potentiel : $\delta\tau = -\delta V$

$$=> \underbrace{\sum_h \overline{F}_h . \delta \overline{r_h} = \sum_i \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i}_{\delta\tau} = -\underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i}_{\delta V} => \boxed{Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}}$$

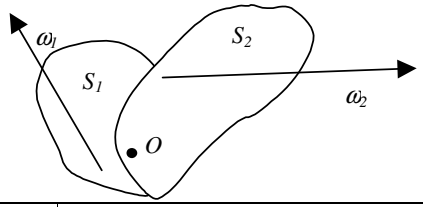
$$=> \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* => \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*}$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$=> \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 => \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Rem : $\frac{\partial m x}{\partial x} = m$; $\frac{\partial m x}{\partial \dot{x}} = 0$; $\frac{\partial m \dot{x}}{\partial x} = 0$; $\frac{d m \dot{x}}{dx} = \frac{d m \dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx} = m\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

1. COCHER LES CASES QUI SONT JUSTES (0 à 3 réponses possibles)



O est le point de liaison de S_1 à S_2

<u>1. Energie cinétique</u>. Les énergies cinétiques suivantes sont-elles correctes ?

- ◯ $T = T_1 + T_2$
- ◯ $T = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}_1 . \bar{\bar{I}}_{1,O} . \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 . \bar{\bar{I}}_{2,O} . \bar{\omega}_2\right)$
- ◯ $T = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right) . \left(\bar{\bar{I}}_{1,O} + \bar{\bar{I}}_{2,O}\right) . \left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right)$
- ◯ $T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_O^2 + \left(m_1 + m_2\right) \bar{v}_O . \left(\left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right) \times \overline{OG}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right) . \left(\bar{\bar{I}}_{1,O} + \bar{\bar{I}}_{2,O}\right) . \left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right)$
- ◯ $T = \frac{1}{2} m_1 v_O^2 + m_1 \bar{v}_O . \left(\bar{\omega}_1 \times \overline{OG_1}\right) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_1 . \bar{\bar{I}}_{1,O} . \bar{\omega}_1 + \frac{1}{2} m_2 v_O^2 + m_2 \bar{v}_O . \left(\bar{\omega}_2 \times \overline{OG_2}\right) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_2 . \bar{\bar{I}}_{2,O} . \bar{\omega}_2$

<u>2. Lagrangien</u>. Que vaut le Lagrangien ?

- ◯ $L = T + V$
- ◯ $L = T - V$
- ◯ $L = T - V + Q$

<u>3. Equation de Lagrange</u>

- ◯ a. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- ◯ b. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- ◯ c. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$
- ◯ d. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$
- ◯ e. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

○ ○ ○ ○	*<u>4. Intégrale première</u>. C'est équations donnent ou entraînent-elles une intégrale première ?* f. $T+V=E_O$ g. $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=A$ h. $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=A$ i. $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$		
○ ○ ○	***5.** Ces expressions sont-elles correctes ?* j. $Q_i=\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ k. $Q_i=-\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ l. $Q_i=-\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$	○ ○	m. $Q_i=\sum_h \bar{F}_h\times\dfrac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial \dot{q}_i}$ n. $Q_i=\sum_h \bar{F}_h.\dfrac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$

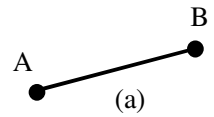
2. Deux points pesants A et B, de masse *m* chacun se déplacent sans frottement sur un plan horizontal Oxy.
Déterminer le nombre de degrés de liberté du système, choisir des coordonnées de lagrange, écrire la fonction Lagrangienne et déterminer le mouvement du système à partir des équation de Lagrange

a) si A et B sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur l.
b) si A et B sont reliés par un ressort linéaire de masse négligeable, de coefficient de rappel k et de longueur libre l.

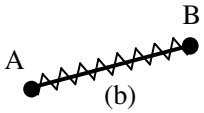
En quoi le mouvement trouvé dans le a) change-t-il

c) si les deux points sont remplacés par une tige de masse *m* et de longueur *l* ?

si le plan Oxy est vertical ?

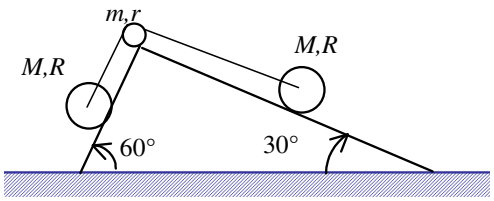


(a)



(b)

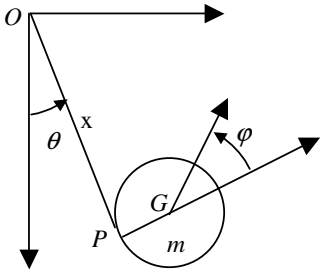
3. Deux roues cylindrique et homogène de rayon R, de masse m_1 et m_2 roulent sans glisser sur les deux plans d'un dièdre faisant des angles de 30° et 60° avec l'horizontale.
Les centres des deux masses sont reliés par une corde inextensible et sans masse, passant (sans glisser) par une poulie cylindrique de masse *m* et de rayon *r*.
Déterminer la(les) équation(s) de mouvement ?



4. On considère un cylindre homogène de masse m et de rayon R autour duquel est enroulée une corde inextensible et sans masse. Le cylindre se déplace dans un plan vertical, en déroulant ou enroulant la corde, avec son axe de symétrie demeurant perpendiculaire à ce plan.
On demande d'écrire les équations du mouvement.
Pour la résolution, nous vous conseillons de considérer les paramètres suivant:

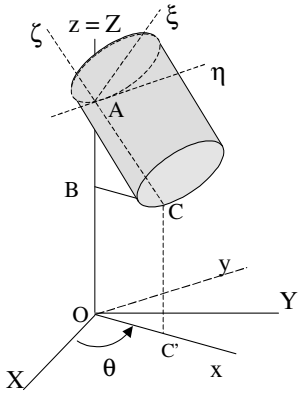
- θ : angle que fait la corde avec la verticale.
- φ : décrivant le mouvement de rotation du cylindre par rapport à la corde.

x : distance OP.

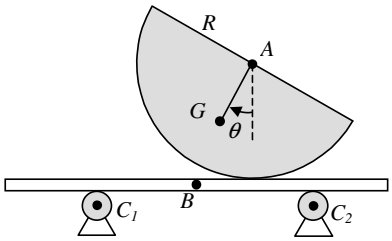


5. Un triangle isocèle, rectangle, ABC, tourne librement autour de son côté AB. (Glissière en B, articulation en A). Le long de AC est soudé un cylindre de rayon R et de hauteur AC=h.
L'assemblage est tel que l'axe du cylindre se trouve dans le plan du triangle. La masse du cylindre est M, celle du triangle est négligeable. En utilisant comme variable θ et Z = OA, écrire les équations de Lagrange du cylindre, supposé pesant, et les intégrer aussi loin que possible.
Considérer les cas suivant :

3. A est fixe (rotation uniquement, Z=constante)
4. A est animé d'une vitesse $\dot{Z}\,\overline{1}_z$ (rotation et translation)



6. Le problème est plan (2-D). Le système est constitué de quatre corps : une bascule ayant la forme d'un demi-disque (de rayon R, de masse M) est posée sur une planche (de longueur L, de masse m) qui est supportée à son tour par deux roulettes (de rayon r, de masse m) donc les centres (C_1 et C_2) sont fixes. Les mouvements entre le demi-disque et la planche ainsi que le mouvement entre la planche et les roulettes se font sans glisser.
On demande d'écrire l'(es) équation(s) du mouvement du demi-disque.
Spécifier la ou les intégrales premières si elle(s) existent.

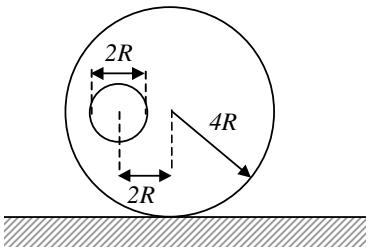


Demi-disque :

AG = a (= $\frac{4R}{3\pi}$) ;

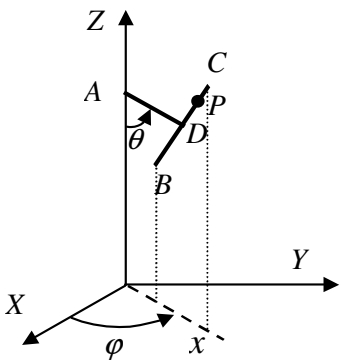
$I_{z_A} = \frac{MR^2}{2}$ axe sortant de la feuille par A

7. Une roue homogène pesante de masse m est constituée d'un disque circulaire de rayon 4R dans lequel est creusé un disque circulaire de rayon R.
Elle est lâchée sans vitesse initiale sur une surface horizontale dans la position indiquée ci-contre.
Déterminer l'équation de Lagrange définissant le mouvement.
Donner une intégrale première.
Calculer la vitesse angulaire maximum qu'elle peut atteindre si elle roule sans glisser sur le plan horizontal. ($\omega = \omega(m,g,R)$)
AN : m = 75 kg ; R = 7,5 cm.



8. Les deux branches d'un *T* symétrique ont même masse *m* et même longueur *l*. Le *T*, *ABC*, est articulé en *A* sur un axe vertical *OZ*. Un point pesant P, de masse M peut se déplacer le long de *BC*. Le *T* peut tourner autour de *A* dans le plan vertical *zOx*, qui, lui-même, peut tourner autour de *OZ*.
Ecrire les équations de Lagrange du système et les intégrales premières immédiates.

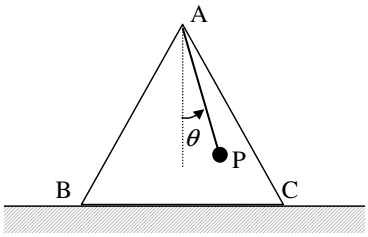
Que deviennent les équations de Lagrange et les intégrales premières si à l'aide d'un couple *C*, on impose $\dot{\phi}$=const ? Calculer *C*.



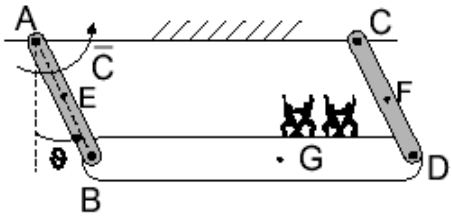
---

9. Un triangle est composé de 3 barres homogènes *ABC*, de côté *L*. Le triangle de masse *M* se déplace dans un plan vertical. Son côté *BC* glisse sans frottement sur une horizontale fixe. Au sommet *A* est suspendu un pendule simple de masse *m* et de longueur ℓ qui oscille dans le plan ABC.

Écrire la(les) équation(s) de Lagrange et leur intégrale(s) première(s).



10.



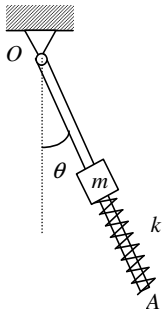
Le carrousel de la figure ci-contre est composé de 3 barres articulées. Les barres *AB* et *CD* sont identiques de longueur *L* et de masse *m*. Elles sont assimilées à des poutres. Les passagers se placent sur le solide *BD*. Ils se répartissent de façon aléatoire.

Le solide *BD* et les passagers ont une masse *M* et une inertie principale I_G connues (*G* : centre de gravité de *BD* + passagers). Le carrousel est entraîné par un moteur hydraulique agissant en A et développant un couple moteur connu *C*.
On demande l'équation différentielle du mouvement du carrousel.

---

11. Une masse *m* glisse sans frottement sur une tige mince homogène *OA* de masse *M* et de longueur *L* qui tourne librement dans un plan vertical autour de son extrémité *O*. La masse est reliée à A par un ressort de masse négligeable, de coefficient de rappel *k* et de longueur libre $L\text{-}r_{O.}$
En utilisant Lagrange :

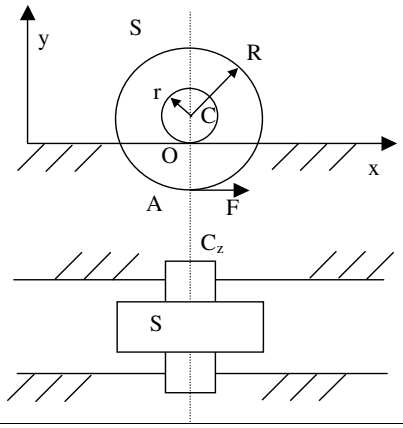
3. Déterminer les équations du mouvement
4. Déterminer les réactions de liaison de la masse *m* sur la tige.



---

12. La poulie de rayon R roule sans glisser sur le sol horizontal grâce à deux ergots de rayon r. Le rayon de giration du solide S (poulie + ergots) autour de l'axe C_Z vaut i_c et sa masse est égale à m. Une force $\overline{F} = F\,\overline{1}_x$ est appliquée en A.

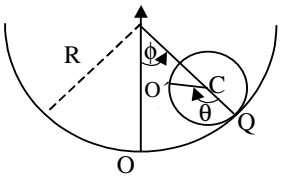
Quel est (sont) l'(les) équation(s) permettant de définir le mouvement de la poulie ?



13. Un disque, pesant, homogène, de masse m et de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon $R > r$, situé dans un plan vertical.

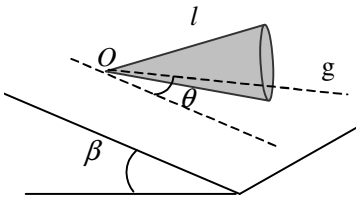
a) Ecrire l'équation de Lagrange ainsi qu'une intégrale première.

b) Etudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre.



14. Un cône circulaire homogène pesant de masse m, de longueur de génératrice l et d'angle au sommet 2α, roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle β sur l'horizontale.

Ecrire l'équation de Lagrange en θ (angle entre la droite de plus grande pente du plan et la génératrice de contact g), ainsi qu'un intégrale première immédiate, si à l'instant initial $\theta=\theta_0$ et $d\theta/dt=0$.



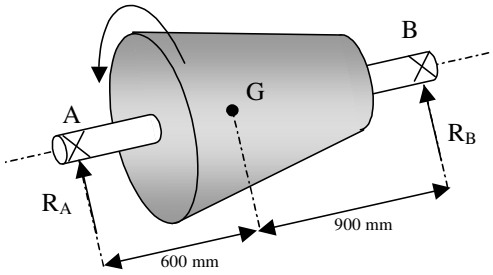
Effet gyroscopique

Formulaire

Couple gyroscopique : $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\varpi}$

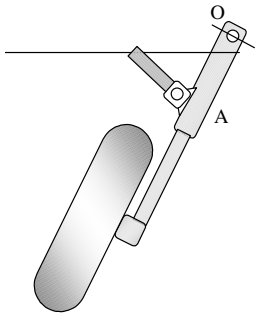
=> Théorème du moment cinétique en G : $\dfrac{d\overline{M_G}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$

1. Le rotor d'une turbine de bateau, représenté ci-contre, a une masse de 1000 kg et un rayon de giration de 20 cm par rapport à son axe. Celui-ci est monté sur les appuis A et B, suivant l'axe longitudinal du bateau. Vu de l'arrière, le rotor tourne à la vitesse angulaire de 5000 tours/min dans le sens trigonométrique. Le bateau effectue un tournant à babord d'un rayon de 400 m à la vitesse de 25 nœuds (1 nœud = 0,514 m/s). Déterminer le couple gyrostatique. L'avant du bateau tend-il à monter ou à descendre sous l'effet de celui-ci ? Calculer les composantes verticales des réactions d'appui en A et B.



2. Un avion, qui vient de décoller à la vitesse de 240 km/h, rentre son train d'atterrissage par un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe parallèle à l'axe longitudinal de l'avion, avec une vitesse angulaire de 0,5 rad/s. Chaque roue a une masse de 33 kg, un rayon de 45 cm et un rayon de giration par rapport à son axe de 30 cm. Déterminer entièrement l'effet du couple gyrostatique dû à la rotation propre des roues lorsque le train d'atterrissage se replie.

NB : On supposera que les roues ont la même vitesse angulaire qu'en quittant la piste.



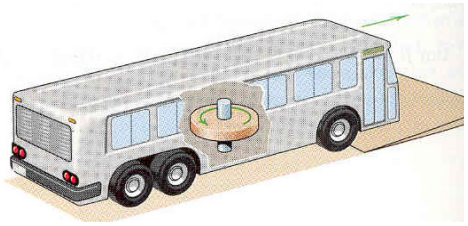
3. Une voiture effectue un virage vers la droite sur une route horizontale. Déterminer si l'effet gyroscopique dû à la rotation propre des roues augmente ou diminue les composantes verticales des réactions de liaison exercées par le sol sur les roues droites du véhicule.

4. Un cycliste roulant à 8 m/s se penche légèrement sur le côté droit, de telle manière que le centre de masse du système formé par lui-même et sa bicyclette (d'une masse totale de 80kg) se trouve à une distance de 3 cm de la verticale passant par le point de contact des roues avec le sol. Par conséquent, un moment de force extérieur s'exerce sur le système.

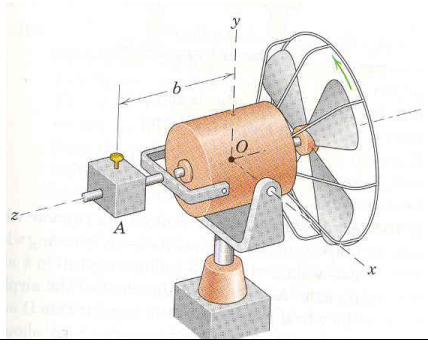
a) Expliquer comment le cycliste peut rétablir l'équilibre en tournant
b) A quelle vitesse angulaire le cycliste doit-il tourner son guidon pour rétablir l'équilibre ?

On suppose que la roue avant mesure 60 cm de diamètre, que sa jante et son pneu ont une masse totale de 600g, et que sa tige et sa fourche sont en position verticale. Moment central d'inertie $\Gamma = mR^2$

5. Un bus expérimental antipollution fonctionne à l'aide de l'énergie cinétique récupérée d'une grande roue mise en rotation comme montré sur le dessin. Quel sera l'effet de cette roue sur la direction suivie par le bus si celui-ci monte une légère rampe ?



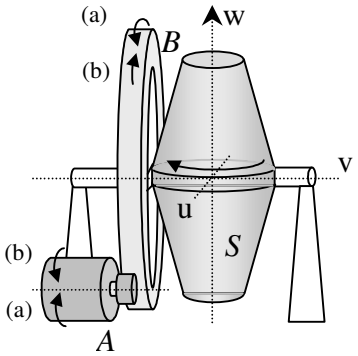
6. Dans le dispositif représenté ci-contre, la position du bloc *A* de norme 0,8 kg peut être ajustée ; lorsque le ventilateur ne tourne pas, le système est à l'équilibre autour de l'axe OX pour *b*=18 cm.
Sachant que la masse totale du ventilateur (avec le moteur) est de 2,2 kg, et que son rayon de giration par rapport à son axe *z* de 6 cm, déterminer la valeur de *b* pour qu'il y ait une précession uniforme $\dot{\phi} = 0,2 \text{ rad/s } \overline{1}_y$ lorsque le ventilateur tourne dans le sens indiqué sur la figure à la vitesse angulaire de 1725 tours par minutes.



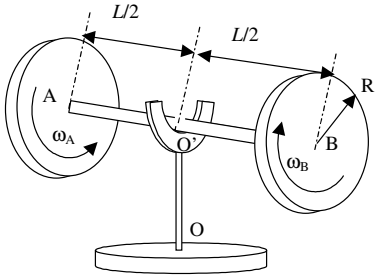
7. Tout bateau est naturellement soumis au roulis. Un bateau comportant une installation médicale doit être stabilisé. Pour se faire, on se propose d'utiliser le dispositif ci-contre. Un gyroscope *S*, comprenant un solide en rotation tournant suivant $-\overline{1}_w$ comme montré sur le dessin, est solidaire de la roue *B*. Cette dernière peut être entraînée par le moteur *A*.

1. Placer ce dispositif sur le bateau pour qu'il contre le roulis du bateau.
2. En fonction de la réponse à la question 1, déterminer pour chacune des deux directions de roulis le sens rotation du moteur *A* ?

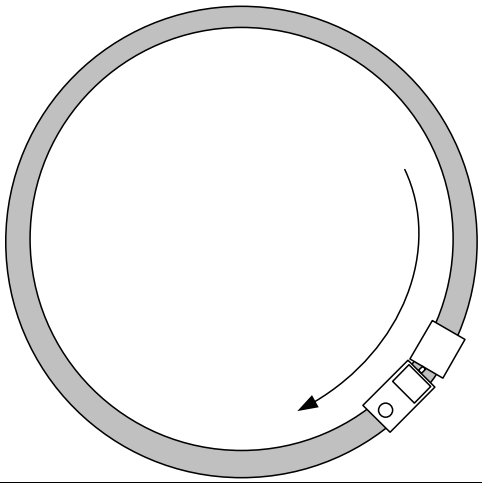
Rem : le roulis fait pivoter le bateau suivant son axe longitudinal.



8. Deux disques homogènes identiques de masse *m* et de rayon *R* sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur *L*, autour de laquelle ils peuvent tourner librement et séparément (vitesse angulaire ω_A et ω_B). Le système est relié comme indiqué à un axe vertical OO'. En fonction de la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ (précession forcée), déterminer le moment de flexion qui va agir sur la barre AB en fonction du sens de rotation de cette dernière.

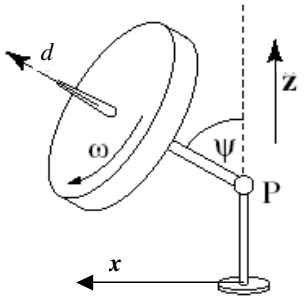


9. On veut éviter le déraillement du train représenté ci-contre et avançant à vitesse constante.
Déterminer la position du gyroscope qu'il faudrait placer sur le deuxième wagon et préciser son sens de rotation pour empêcher le déraillement du train vers l'extérieur.



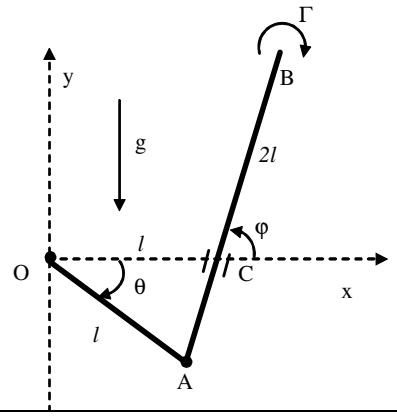
10. Un disque possède un moment d'inertie I par rapport à son axe de révolution et tourne avec une vitesse angulaire ω dans le sens indiqué ci-dessous. La distance entre le pivot P et le centre de masse du disque est h.

1. Déterminer les **forces et les couples** qui agissent sur le système.
2. Sans donner les équations de mouvement, expliquez précisément le **mouvement**.

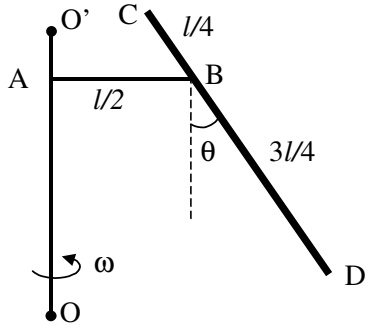


Dynamique des systèmes

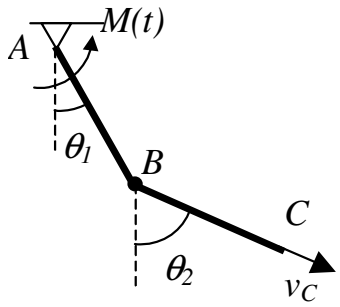
1. La tige OA, de longueur l, de masse m, peut osciller dans le plan vertical Oxy autour du point fixe O. La tige homogène AB, de masse $2m$ et de longueur $2l$, est articulée à la première en A et coulisse (sans frottement) dans le guide (tournant) C. Un couple de force constante, de moment Γ (voir figure) est appliqué à la tige AB.
On demande
1) d'écrire l'équation du mouvement
2) de calculer les réactions de liaison en O, A et C, en fonction de θ.



2. Un axe vertical OO', auquel est soudée perpendiculairement une tige AB, tourne à la vitesse angulaire ω. À ce système, de masse négligeable, est articulée une tige pesante CD, de masse m et de longueur l (CD est dans le plan OAB). Déterminer, en partant de l'équation de Lagrange, une relation entre ω, θ, l et g, lorsque CD est en équilibre relatif.

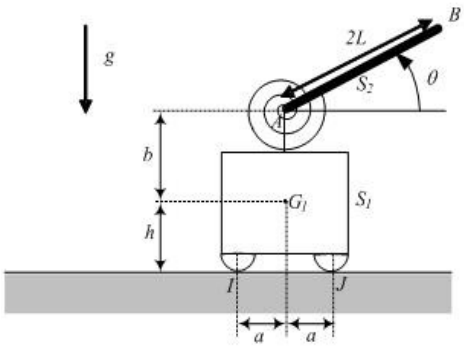


3. Un pendule double constitué de deux tiges homogènes identiques de masse m et de longueur L se déplace dans un plan vertical. Un couple de moment donné $M(t)$ est appliqué à la barre AB dans le plan du mouvement, et un mécanisme agissant sur la barre BC impose que la vitesse de C reste toujours parallèle à BC.
Etablir les équations du mouvement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.
Montrer comment on peut retrouver ces équations en faisant agir en C une force inconnue $F(t)$ perpendiculaire à BC.



4. Considérons le mouvement d'un système matériel constitué de deux solides reliés par un ressort de torsion. Le mouvement est plan.

Le solide S_1 de masse m_1 peut se déplacer horizontalement (G_1 est situé à une hauteur h constante). Le solide S_1 est en contact avec le sol à l'aide de deux appuis I et J. Le coefficient de frottement entre le solide S_1 et le sol vaut f.



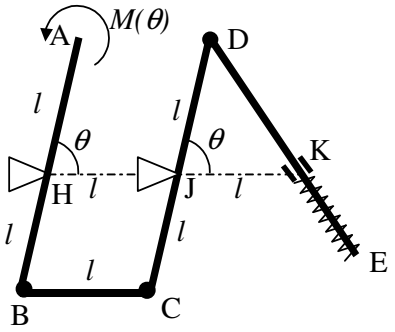
Au point A appartenant au solide S_1 se trouve une rotule sur laquelle est fixé une tige AB (S_2) de longueur $2L$ et de masse m_2. Un ressort de torsion (R), de masse et d'inertie négligeable, est placé entre les solides S_1 et S_2 de telle sorte que l'action du ressort sur S2 est caractérisée un couple en A proportionnel à la raideur de torsion du ressort, C, et à l'angle d'ouverture.

1. Déterminer le(s) degré(s) de liberté du système ainsi que les coordonnées généralisées que vous utiliseriez pour représenter la dynamique du système..
2. Déterminer la résultante cinétique du système.
3. Déterminer le moment cinétique en A du système.
4. Déterminer l'ensemble des forces et couples agissant sur la tige.
5. Déterminer l'ensemble des équations qui permettront de déterminer les réactions en I, J et A en fonction des coordonnées définies à la question 1.
6. Dans le cas où le frottement est nul, déterminer la/les équation(s) de mouvement.
7. Appliquer le théorème de Lagrange pour trouver la/les équations de mouvement

---

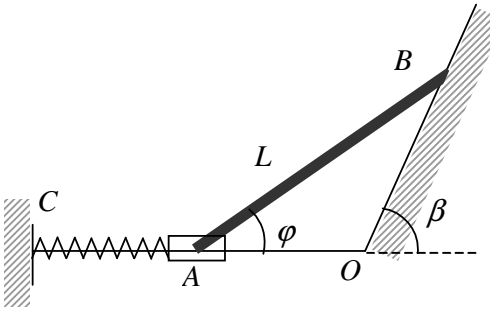
5. Le mécanisme représenté ci-contre est situé dans un plan vertical ; les tiges homogènes AB, CD et DE ont une longueur $2l$ et une masse $2m$; la tige BC est homogène de longueur l et de masse m ;la tige DE peut coulisser dans le guide non fixe K ; le coefficient de rappel du ressort est k et sa longueur libre correspond à la position (θ=0).
En négligeant tout frottement, déterminer
1) l'équation différentielle du mouvement
2) la réaction de liaison en K
3) la réaction de liaison en H

Les réactions de liaisons seront exprimées en fonction de θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, m, l et g.



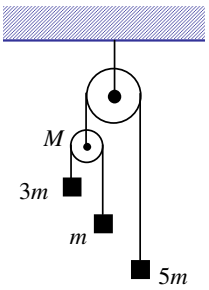
---

6. Une tige homogène AB de masse m et de longueur L se déplace dans le plan vertical fixe en s'appuyant en B contre un mur incliné dépoli (coefficient de frottement f). Son extrémité A est reliée à un ressort de coefficient de rappel k, dont la longueur libre correspond à $\varphi = 0$.
Etablir l'équation différentielle du mouvement
1. en utilisant la seule coordonnée de Lagrange φ
2. en utilisant les coordonnées de Lagrange φ et x_A.



---

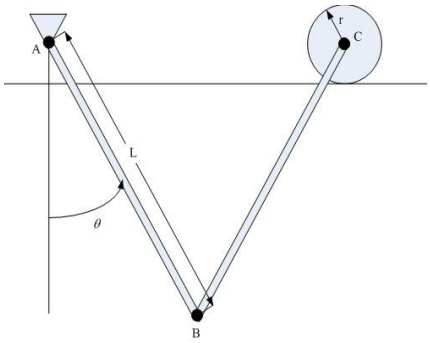
7. Soit le système pesant de trois masses (de masse m, $3m$, $5m$) et deux poulies (de rayon R et $2R$) ci-contre. Déterminer les équations du mouvement pour chacune des masses si les poulies sont assimilées à des disques pleins. Le moment d'inertie du disque de masse M est $I=2mR^2$.



---

8. Le système comporte deux barres AB et BC homogènes identiques de masse m et longueur L et un disque homogène de masse m et de rayon r. Les barres sont articulées en A, B et C grâce à des liaisons rotoïdes parfaites. Le coefficient de frottement entre le sol horizontal et le disque est supposé suffisant pour éviter tout glissement. θ représente l'angle que fait la direction verticale avec la barre AB. α est l'angle caractérisant la rotation du disque.

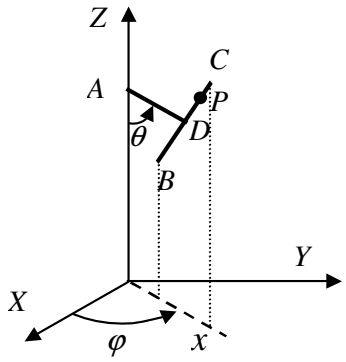
On demande d'établir l'(les) équation(s) du mouvement (en fonction des paramètres de l'énoncé) par le théorème de Lagrange en prenant comme coordonnées généralisées α et θ.



---

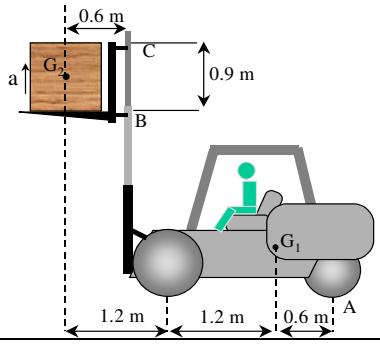
9. Les deux branches d'un T symétrique ont même masse m et même longueur l. Le T, ABC, est articulé en A sur un axe vertical OZ. Un point pesant P, de masse M peut se déplacer le long de BC. Le T peut tourner autour de A dans le plan vertical zOx, qui, lui-même, peut tourner autour de OZ.
Ecrire les équations de Lagrange du système et les intégrales premières immédiates.

Que deviennent les équations de Lagrange et les intégrales premières si à l'aide d'un couple C, on impose $\dot{\phi}$=const ? Calculer C.



---

10. Un élévateur de centre de masse G_1 a une masse de 1600 kg incluant le bras élévateur vertical. La « fourche » avec la charge a une masse de 900 kg avec un centre de masse G_2. Le guide en B est capable de supporter seulement une force horizontale. La connexion C est quant à elle capable de supporter une force horizontale ainsi que de transmettre la force d'élévation verticale de l'élévateur. Si la fourche a une accélération verticale vers le haut suffisante pour réduire la force sous les roues arrière (en A) à zéro, calculer la réaction correspondante en B.

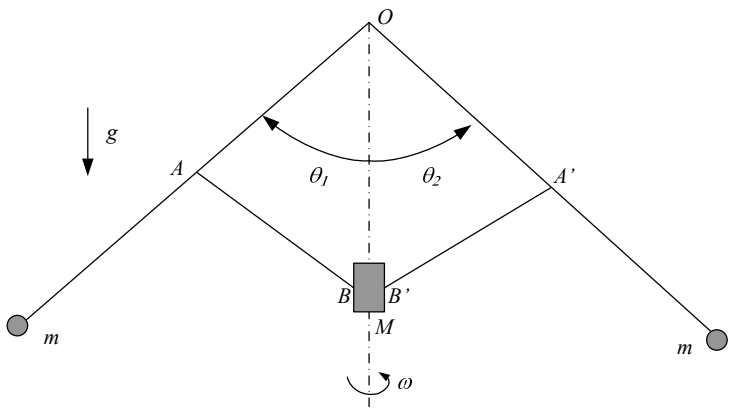


---

11. Le régulateur de Watt

Il s'agit d'un dispositif ancien et ingénieux permettant à un moteur de tourner à vitesse constante malgré les variations de charge. Référez vous à la figure. La tringlerie tourne à une vitesse proportionnelle à celle du moteur. Les masselottes (m_1 et m_2) commandent le moteur : en montant elles diminuent l'admission de carburant, ce qui tend à diminuer la vitesse du moteur. Une accélération du moteur fait monter les masselottes ce qui tire le manchon vers le haut, avec, comme conséquence, une diminution de l'admission.

<u>Caractérisation du système</u> :
– Vitesse de rotation constante, notée ω
– Les barres $Om1$ et $Om2$ sont rigides, sans masse, de longueur L
– Les articulations en A, A', B, B' sont des articulations rotoïdes
– Les articulations A et A' sont à une distance a de O
– Les barres AB et $A'B'$ sont rigides, sans masse, de longueur b
– Les deux masselottes sont modélisées comme des masses ponctuelles, de valeur m
– Le manchon est modélisé comme une masse ponctuelle de valeur M pouvant coulisser le long de l'axe.



Par malheur il y a eu une erreur au montage : l'articulation *A'* a été mal placée sur la barre, si bien que le montage n'est plus symétrique ! Vous devez donc considérer 2 longueurs différentes, notées a_1 et a_2 pour les segments *OA* et *OA'* ! De ce fait, les angles formés par les 2 barres avec l'axe de rotation ne sont donc pas égaux.

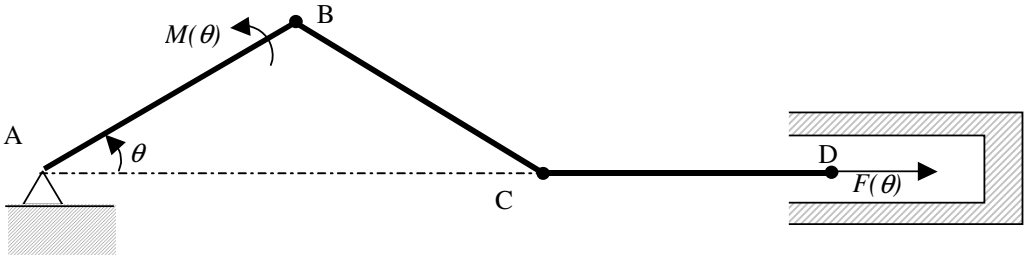
1. Déterminer les degrés de liberté ainsi que les coordonnées que vous utiliserez pour résoudre le problème.
2. Déterminer la(les) équations permettant de trouver la ou les équations de mouvement.
3. Déterminer cette/ces équation(s) de mouvement dans le cas où le système est rééquilibré et que $a_1=a_2=b$

---

12. On considère le système de bielle manivelle *ABCD* constitué de 3 tiges homogènes identiques de masse *m* et de longueur *l* chacune. La tige *CD* subit une force $F(\theta)$ donnée et la manivelle est soumise à un couple de force (agissant dans le plan du système) de moment donné $M=M(\theta)$ donné. Le poids des tiges est négligeable. Déterminer

a) l'équation différentielle du mouvement du système par Lagrange

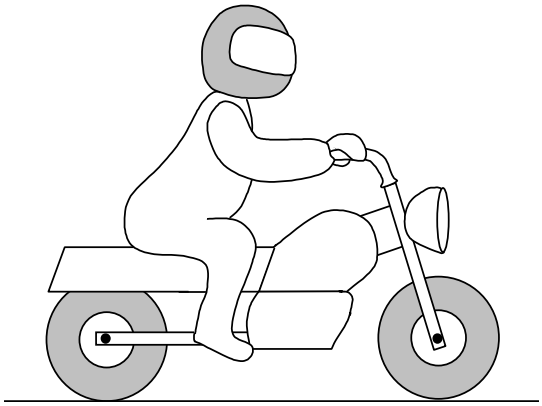
b) la réaction de liaison exercée en *C* par la tige *CD* sur la tige *CB* (en fonction de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$)



---

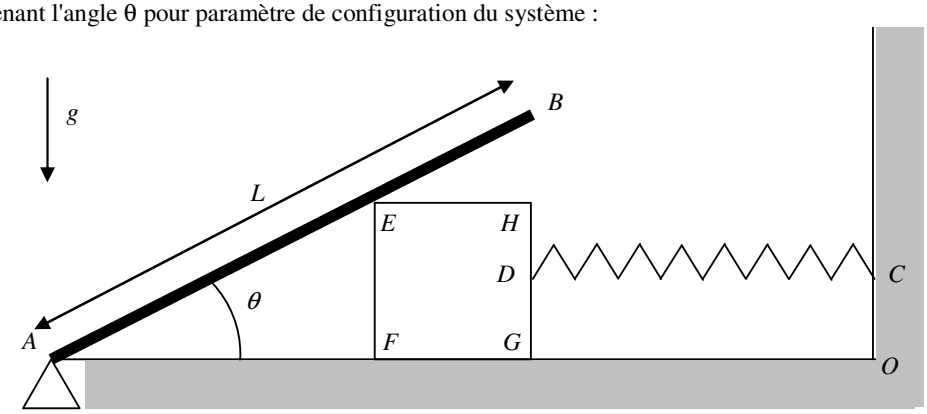
13. Un motocycliste démarre en ligne droite avec sa moto sur une route plane avec une accélération $\ddot{x}$.
On considère en première approximation la moto (sans les roues) et le motocycliste comme un corps rigide unique de masse *M* et de centre de gravité *G*.
Le point G se trouve à une hauteur *h* de la route tandis que la verticale en *G* divise le segment O_1O_2 (joignant les points de contact des roues avec le sol) en un point *D* tel que :
$O_1O_2 = L$; $O_1D = L/3$; $O_2D = 2L/3$
Chacune des roues est parfaitement équilibrée, a une masse *m*, un rayon extérieur *r* et un rayon de giration central *i*. Le moteur exerce sur la roue arrière un couple *C* par l'intermédiaire des organes de transmission. On demande d'exprimer en fonction des données du problème :

1. les composantes horizontales des forces de liaison (Fl_{1x}; Fl_{2x})
2. les composantes verticales des forces de liaison (Fl_{1y}; Fl_{2y})
3. l'accélération maximum $\ddot{x}_{\max}$ et le couple moteur correspondant C_{max} pour lesquels la moto démarrera en se cabrant, la roue avant décollée du sol (on supposera le coefficient de frottement suffisant pour éviter tout glissement).



---

14. Dans le plan vertical, une plaque carrée de masse M et de côté H peut glisser sans frottement horizontalement. La barre homogène AB, de masse m et de longueur L peut tourner sans perte autour de la liaison rotoïde en A. Le ressort horizontal CD relie le point C du bâti au point D du solide, à une hauteur h $(=GD)$. La rigidité de ce ressort vaut k et sa longueur au repos vaut OA.
En prenant l'angle θ pour paramètre de configuration du système :



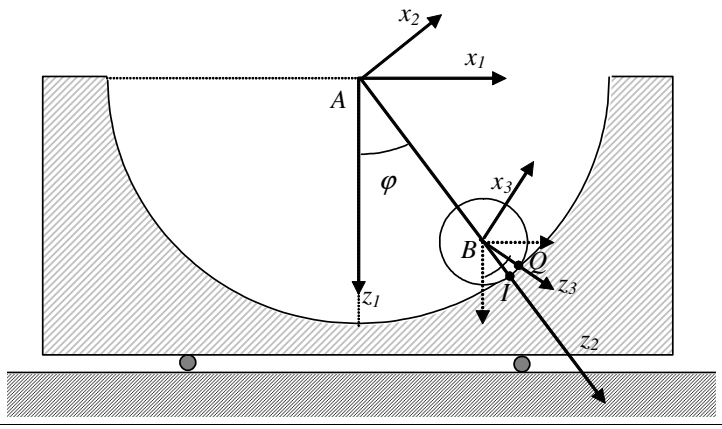
1. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la barre en fonction des degrés de liberté du système.
2. En fonction des coordonnées utilisées à la question 1, déterminer **la ou les équations de mouvement** du système

---

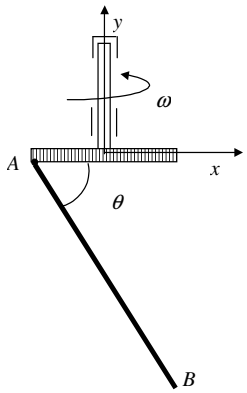
15. Le problème est plan (2-D). Le système, constitué de deux corps, est soumis à l'effet de la gravité suivant 3 : (a) corps *n1* : benne supportée par deux rouleaux. Les rouleaux, de masse et d'inertie négligeables, permettent à la benne de "glisser" horizontalement sans frotter sur un sol plat. Le profil de la partie interne de la benne est circulaire de centre A

- masse M., inertie I
- distance $AB = L$

(b) corps *n2* : disque de rayon a et de centre B. En cours de mouvement, ce disque roule sans glisser à l'intérieur de la benne
disque de masse homogène m
disque de rayon a.
Déterminer la (ou les) équation(s) décrivant le mouvement par la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**.
Déterminer la (ou les) **réaction(s) de laison** entre le disque et la benne.



16.



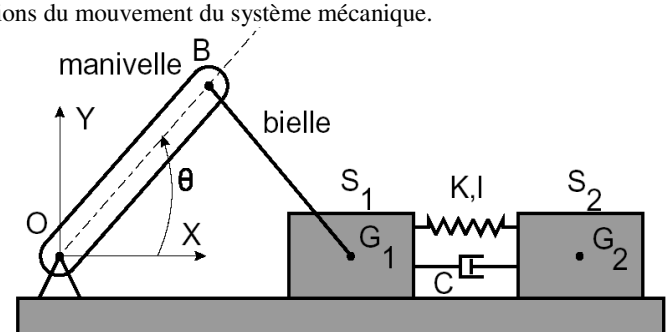
Un disque de rayon *L/4* tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe placé verticalement, suivant l'axe *y*. Une tige mince homogène *AB* de masse *m* et de longueur *L* est articulée en un point *A* de la périphérie du disque de manière à pouvoir osciller dans le plan vertical tournant *x,y*.

Déterminer l'équation différentielle du mouvement. $\ddot{\theta} = f(\theta)$

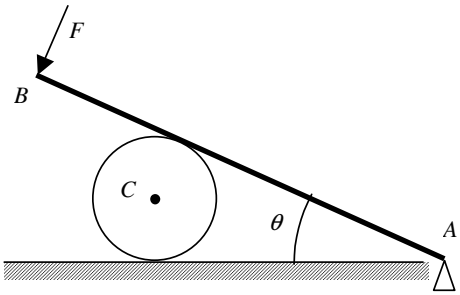
Déterminer les composantes de la réaction de liaison exercée en *A* par le disque sur la tige en fonction de θ et $\dot{\theta}$

Si la tige est lâchée sans vitesse initiale relative dans la position où $\theta = 60°$, déterminer entièrement, uniquement en fonction des données du problème, toutes les composantes de réaction de liaison en *A* pour $\theta = 90$.

17. Le piston du système bielle-manivelle est réalisé à partir de deux solides identiques S_1 et S_2 de masse *m* et de centres de gravité G_1 et G_2 respectivement. Les deux parties du piston glissent sans perte sur une glissière horizontale et sont reliées l'une à l'autre grâce à un ressort de raideur *K* et longueur initiale *l*, et à un amortisseur de constante *C*. La bielle et la manivelle sont des barres homogènes de longueur identique *l* mais la masse de la bielle est négligeable tandis que la masse de la manivelle vaut *m*. Toutes les liaisons sont sans perte.
On demande les équations du mouvement du système mécanique.



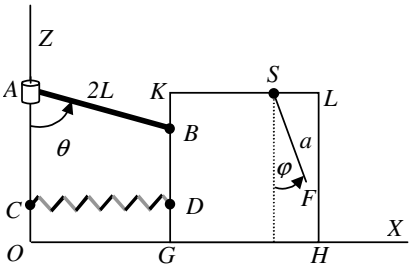
18. Une tige homogène pesante *AB*, de masse *m* et de longueur *L*, est fixée en *A* et subit à son extrémité libre *B* une force *F* qui lui est perpendiculaire et dont la norme est constante. Elle s'appuie sur un disque circulaire de masse *2m*, de rayon *R* et de centre *C* de manière telle qu'il y a roulement sans glissement entre les deux solides, alors que le disque peut se déplacer sans frottement sur l'Horizontale passant par *A* (le système est dans un plan vertical fixe).



1. Ecrire une intégrale première du mouvement de la tige en justifiant la méthode utilisée.
2. Déterminer la réaction de liaison exercée par la tige sur le disque (en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$)

---

19. Le système pesant, représenté ci-dessous, reste constamment dans le plan vertical fixe *ZOX*. La barre AB, de longueur 2*L* et de masse *M*, est articulée en *B* au cadre *GKLH* et en *A* à une glissière qui peut coulisser le long de la verticale *OZ*. Le seul mouvement que peut subir le cadre est un glissement sur l'horizontale *OX*. La barre *SF*, de longueur *a*, et de masse *m*, est articulée au point *S* du cadre de manière à pouvoir osciller librement. Le ressort *CD*, de longueur nulle au repos et de constante de rappel *k,* reste toujours horizontal. Il relie le cadre au point *C* de l'axe *OZ*.



On néglige les frottements et la masse du cadre. On suppose que les barres sont homogènes et que θ peut varier de 0° à 90°.

1. Calculez la fonction Lagrangienne du système.
2. Ecrivez les équations de Lagrange
3. Y a-t-il conservation de l'énergie mécanique ? Justifiez votre réponse.

20.

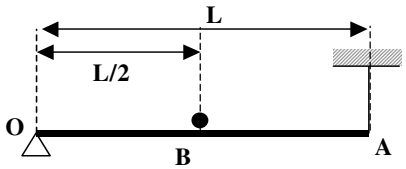


Fig. 1

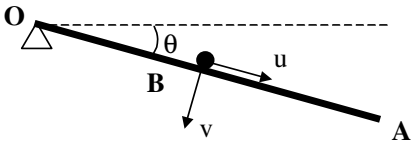


Fig. 2

Un individu situé au milieu d'une trappe qui se dérobe sous lui, *commence-t-il par glisser ou ses pieds décollent-ils par rapport à la trappe qui tombe ?*

Pour répondre à cette question, la modélisation suivante est utilisée. Une tige supposée homogène *OA* de masse *m* et de longueur *L*, porte en son centre une masse considérée comme ponctuelle *B*, également de masse *m*. Le coefficient de frottement entre la tige et la masse vaut *f*. Initialement, la tige est maintenue horizontale grâce à un fil qui maintient la barre en *A* (Figure 1). Au temps $t = 0$, on coupe le fil.

1. Si on se place dans l'hypothèse où, durant la chute, la masse reste solidaire de la tige (Figure 2), on demande :

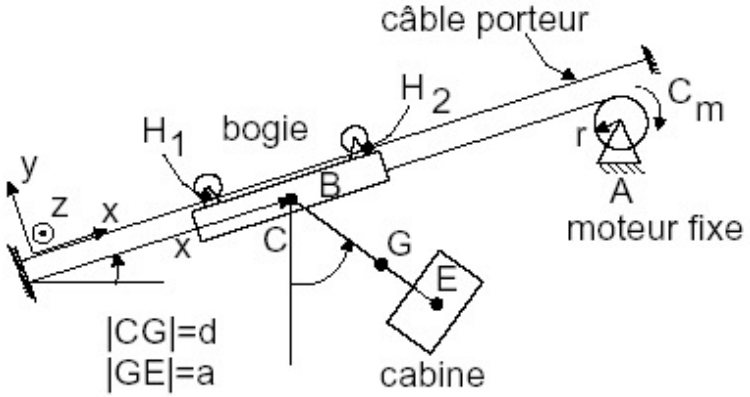
a) d'exprimer l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble (tige + masse);
b) d'exprimer les forces de liaison exercées par la tige *OA* sur la masse *B* en fonction de l'angle θ entre la tige et l'horizontale;

2. En déduire les conditions pour lesquelles il y aurait rupture d'équilibre entre la masse et la tige soit par glissement, soit par décollement. Pour chacun des cas, déterminer l'angle θ_{max} correspondant. Préciser si l'individu va d'abord glisser ou décoller.

---

21. Un téléphérique comporte un bogie *B* de masse *m* et d'inertie I_C autour de son centre de gravité *C*. Les galets du bogie (dont les masses et les inerties sont négligeables) roulent sans glisser sur le câble porteur, faisant un angle α avec l'horizontale (H_1 et H_2 ≡ points de contact galet/câble). Le bogie *B* est tracté via un second câble par le moteur fixe placé en *A*. Le moteur exerce un couple C_m sur une poulie de rayon *r* dont on néglige la masse et l'inertie.

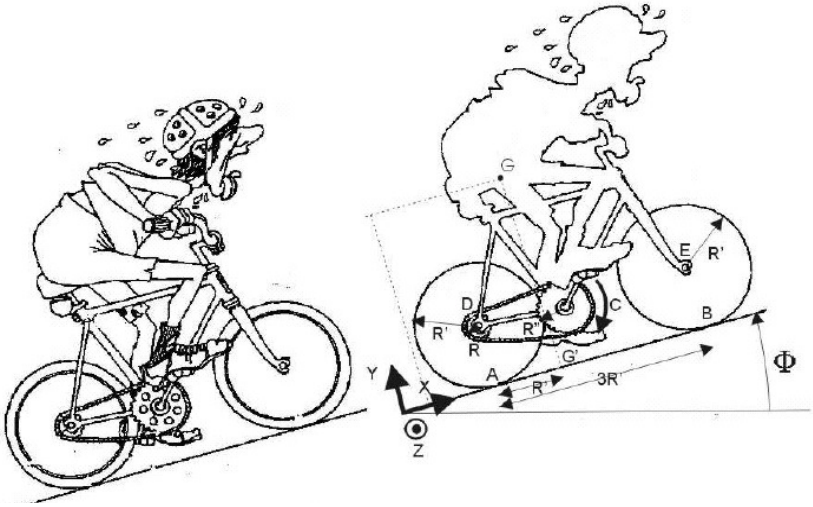
L'ensemble *T*, composé de la cabine du téléphérique et de l'axe *CE*, de masse *M* et d'inertie I_E (autour du point *E*), est articulé en *C* par rapport au bogie *B*. Le centre de gravité de l'ensemble *T* correspond au point *G*. $|CG| = d$, $|GE| = a$.
On notera *x* l'avancement du bogie sur le câble porteur et θ l'angle que fait l'axe du téléphérique par rapport à la verticale.
On demande d'écrire l'équation du mouvement



---

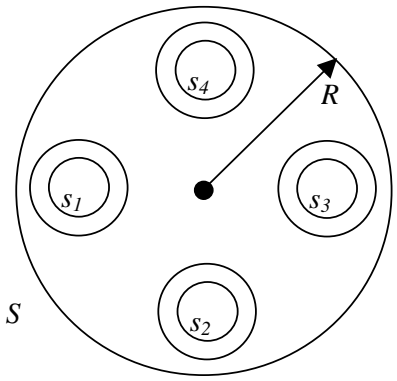
22. Un cycliste grimpe une pente d'angle θ. L'ensemble constitué par le cadre du vélo et le cycliste est considéré comme un solide indéformable *S*, de masse *M* et de centre de gravité *G*. La roue arrière a une masse *M'*, un rayon *R'*, et son centre de gravité est en *D* sur l'axe de rotation de la roue arrière par rapport au cadre; idem pour la roue avant (*M'*, *R'*) autour de *E* (seule la contribution de la masse circonfèrencielle des roues est prise en compte pour leurs propriétés d'inertie).
Le plateau du pédalier *S''* sur lequel le cycliste exerce un couple *C* a un rayon *R*"; ce plateau tourne par rapport au cadre autour du point *O* (la masse du plateau est considérée comme négligeable). La roue arrière est entraînée par l'intermédiaire d'une chaîne (supposée inextensible et sans poids) reliant le plateau du pédalier *S''* avec le pignon de la roue arrière, de centre *D* et de rayon *R* (ce pignon de masse négligeable est solidaire de la roue arrière).
Autres données (pas toutes nécessairement utiles...) :

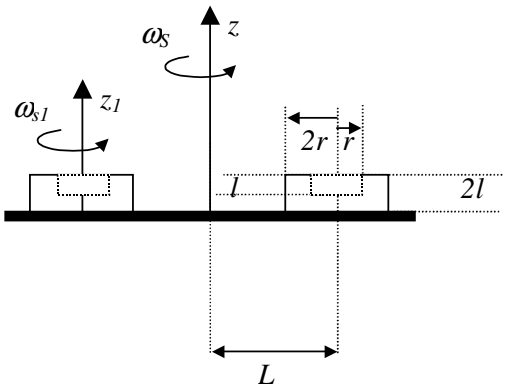
- La distance entre les points *A* et *B* de contact des roues vaut *3R'*. Le point *G*, centre de gravité de S se trouve à une hauteur du sol égale à *H*, *AG'* étant égal à *R'* (*G'*est la projection de *G* sur le sol);
- Toutes les liaisons sont sans perte.



Déterminer la (ou les) **équation(s) différentielle**(s) du mouvement.

23.



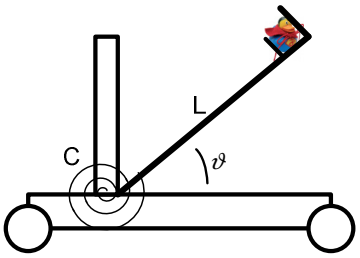


Un carrousel peut être modélisé de la manière suivante : La base est représentée par un disque, de masse M et de rayon R tournant à la vitesse angulaire ω_S. A une distance L du centre de ce disque sont placés 4 nacelles (s_1 à s_4) modélisées à l'aide de cylindre creux de masse $M/8$, de rayon extérieur $2r$ et de rayon intérieur r ($r = R/4$) et d'épaisseur $2l$. Chacune de ces nacelles a une vitesse angulaire propre de ω_{si} autour de l'axe z_i passant par son centre. Le centre des nacelles est placé à une distance L du centre du disque.

1. Calculer le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe z, et exprimer votre réponse en fonction des données M, R et L.
2. Si un couple moteur M entraîne le disque S, déterminer la (les) équation(s) différentielle(s) qui définissent le mouvement.

24. Super Canard (assimilé à une masse ponctuelle) est tombé dans de la kryptonite , il ne sait donc plus voler et souhaite utiliser une catapulte pour se propulser. La catapulte (tout frottement négligeable) est constituée de :

- Une poutre homogène de longueur L et de masse M.
- Super Canard de masse m est situé au bout de la poutre, dans une nacelle de taille et de masse négligeable.
- Un ressort spiral C d'angle libre $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ et de raideur angulaire k permet d'activer la catapulte



Il est demandé de :

1. Déterminer l'énergie totale E du système ;
2. Ecrivez, si elle existe, une intégrale première de l'énergie (Avant qu'il ne quitte la nacelle). Dans ce cas existe-t-il une forme de cette intégrale première indépendante de l'angle ϑ ? Si oui, écrivez-la ;
3. Déterminer la condition sur $\ddot{\vartheta}$ pour que Super Canard quitte la nacelle; Expliquer en quelques mots physiquement le résultat obtenu ;

Déterminer la vitesse de Super Canard à l'instant où il quittera la nacelle si l'on décide de mettre une butée en $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

25. Soit, la balançoire présentée *figure 1* composée d'une bille de centre de masse *(x,y),* de masse m_1 et roulant sans glisser avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ sur une plaque inclinée. En son centre est accrochée une barre de longueur l et de masse m_2 ; elle peut balancer avec un angle ϑ. Une barre perpendiculaire, de longueur h et de masse m_3 y est accrochée en son centre. En travaillant dans le repère *x,y* ; il est demandé de :

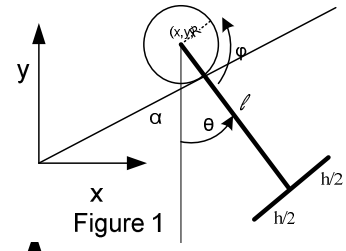


Figure 1

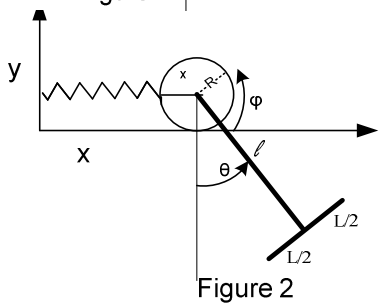


Figure 2

a) Déterminer le système d'équations du mouvement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange dans le cas où la pente suit la relation : $y = \frac{x}{2}$.

b) Dans le cas où (*figure 2*) :

1. L'on place le système sur une plaque horizontal ;
2. L'on rajoute un ressort de raideur *k* et de longueur libre R entre le centre de la bille et le mur ;
   - Déterminer les relations dont vous aurez besoin pour caractériser le système.
   - Donner le système d'équations différentielles du mouvement dans ce cas.

Corrigés

Cinématique du solide, cinématique instantanée, CIR

Formulaire

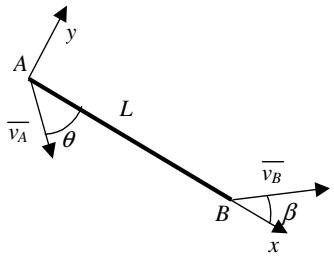
Distribution des vitesses : $\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega} \times \overline{BA}$
Distribution des accélérations : $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BA} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{BA}\right)$

Distribution des vitesses et accélérations

1.

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} v_B \cos\beta = v_A \cos\theta \\ v_B \sin\beta = -v_A \sin\theta + \omega_{AB} L \end{cases}$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{L}\left(v_A \sin\theta \pm v_B \sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \cos^2\theta} \right)$$



Les deux valeurs de ω_{AB} correspondent aux deux directions de $\overline{v}_B$ possibles : en $\pm\beta$; confondues lors de l'élévation au carré. L'unique solution correspondante au schéma est donc :

$$\omega_{AB} = \frac{1}{L}\left(v_A \sin\theta + v_B \sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \cos^2\theta} \right)$$

2.

$$\overline{AG} = \left[\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_y$$

Par dérivation des coordonnées dans le repère Axy

$$\overline{v}_G = \frac{d\overline{AG}}{dt} = \left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\dot{\theta}\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\dot{\theta}\right]\overline{1}_y$$

$$\overline{a}_G = \frac{d\overline{v}_G}{dt} = \left[-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\ddot{\theta}\right]\overline{1}_x$$
$$+\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\ddot{\theta}\right]\overline{1}_y$$

Par la méthode des distribution des vitesse dans le repère Axy $(\overline{\omega}_{AG} = \dot{\theta}\overline{1}_z)$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AG} \times \overline{AG} = \dot{\theta}\overline{1}_z \times \left(\left[\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_x + \left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{3L}{8}\sin(\theta+\alpha)\right]\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_A + \overline{\omega}_{AG} \times \left(\overline{\omega}_{AG} \times \overline{AG}\right) + \overline{\varepsilon}_{AG} \times \overline{AG} \quad \text{avec} \quad \overline{\varepsilon}_{AG} = \ddot{\theta}\overline{1}_z$$

Mouvement instantané

3.

$$\overline{\omega}_{AB} = 6\ \text{rad/sec}\ \overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{AB} = 0\,;\ \overline{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{BC} = \varepsilon_{BC}\overline{1}_z\,;\ \overline{\omega}_{CD} = \omega_{CD}\overline{1}_z \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{CD} = \varepsilon_{CD}\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{v}_{C\in BC} &= \overline{v}_B + \overline{\omega}_{BC} \times \overline{BC} = \omega_{AB} L_{AB}\left(\frac{1}{2}\overline{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_y\right) + \omega_{BC} L_{BC}\overline{1}_y \\ \overline{v}_{C\in CD} &= \overline{v}_D + \overline{\omega}_{CD} \times \overline{DC} = \omega_{CD} L_{CD}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{1}_x - \frac{1}{2}\overline{1}_y\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB}\,;\ \omega_{BC} = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{L_{AB}}{L_{BC}}\omega_{AB} \\ \overline{\omega}_{CD} = -2{,}165\ \text{s}^{-1}\,\overline{1}_z\,;\ \ \overline{\omega}_{BC} = 5{,}773\ \text{s}^{-1}\,\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \left(\bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) + \bar{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} = \bar{\omega}_{AB} \times \left(\bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) = \omega^2{}_{AB} L_{AB} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{1}_x + \frac{1}{2}\bar{1}_y\right)$$

$$\bar{a}_{C\in BC} = \bar{a}_B + \bar{\omega}_{BC} \times \left(\bar{\omega}_{BC} \times \overline{BC}\right) + \bar{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} = \omega^2{}_{AB} L_{AB} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{1}_x + \frac{1}{2}\bar{1}_y\right) - \omega^2{}_{BC} L_{BC}\,\bar{1}_x + \varepsilon_{BC} L_{BC}\,\bar{1}_y$$

$$\bar{a}_{C\in CD} = \bar{a}_D + \bar{\omega}_{DC} \times \left(\bar{\omega}_{DC} \times \overline{DC}\right) + \bar{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} = \omega^2{}_{CD} L_{CD} \left(\frac{1}{2}\bar{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{1}_y\right) + L_{CD}\varepsilon_{DC}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{1}_x - \frac{1}{2}\bar{1}_y\right)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{DC} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \omega^2{}_{BC} L_{BC} - \frac{1}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{L_{CD}} \\ \varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2{}_{CD} L_{CD} + \frac{1}{2} L_{CD}\varepsilon_{DC}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{DC} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{L_{AB}} - \frac{4}{3}\frac{1}{L_{BC}} - \frac{1}{6}\frac{1}{L_{CD}}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{L^2{}_{AB}}{L_{CD}}\omega^2{}_{AB} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{DC} = 9{,}073\ s^{-2}\bar{1}_z \\ \varepsilon_{BC} = \frac{1}{L_{BC}}\left(-\frac{1}{2}\omega^2{}_{AB} L_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L_{AB}}{L_{CD}}\omega_{AB}\right)^2 L_{CD} - \frac{1}{2} L_{CD}\varepsilon_{DC}\right) \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{BC} = -26{,}4618\ s^{-2}\bar{1}_z \end{cases}$$

---

4. 1.) Solide BC : $\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}$

Solide AB : $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}$

$\bar{v}_C.\bar{1}_{AB} + \left(\bar{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}\right).\bar{1}_{AB} = \bar{v}_B.\bar{1}_{AB} = \bar{v}_A.\bar{1}_{AB} + \left(\bar{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}\right).\bar{1}_{AB} = \bar{v}_A.\bar{1}_{AB}$

$0.6 m/s\,\bar{1}_x.\bar{1}_{AB} - \Omega_{BC} 0.4 m\,\bar{1}_y.\bar{1}_{AB} = 1.2 m/s\,\bar{1}_x.\bar{1}_{AB}$

$\bar{1}_y.\bar{1}_{AB} = \sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \bar{1}_x.\bar{1}_{AB} = \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow\ \bar{\Omega}_{BC} = -2s^{-1}\bar{1}_z\ et\ \ \bar{\Omega}_{AB} = +2s^{-1}\bar{1}_z$

ou $tg\alpha = \frac{3}{4} = \frac{v_c}{|\Omega_{BC}|BC} \Rightarrow \Omega_{BC} = 2s^{-1}$

2.a) Analytiquement

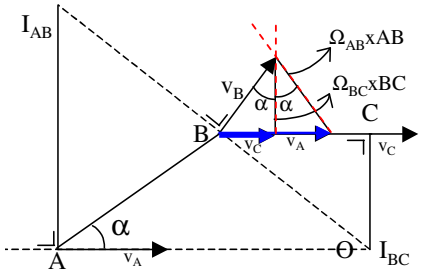
$\bar{v}_B = 0{,}6\,\bar{1}_x + 0{,}8\,\bar{1}_y\ \ m/s = \bar{\Omega}_{BC} \times \overline{I_{BC}B}$ avec $\begin{cases} \overline{OI_{BC}} = x\bar{1}_x + y\bar{1}_y \\ x = 0\ \text{ car } I_{BC} \in OC \end{cases}$

$\bar{v}_C = 0{,}6\,m/s\ \bar{1}_x = \bar{\Omega}_{BC} \times \overline{I_{BC}C} = 2(0{,}3 - y)\bar{1}_x \Rightarrow y = 0$

$\bar{v}_B = 0{,}6\,\bar{1}_x + 0{,}8\,\bar{1}_y\ \ m/s = \bar{\Omega}_{AB} \times \overline{I_{AB}B}$ avec $\begin{cases} \overline{OI_{AB}} = x'\bar{1}_x + y'\bar{1}_y \\ x' = -0{,}4 - 0{,}5\cos\alpha \\ x' = -0{,}8 \text{ car } I_{BC} \in \perp \bar{v}_A \end{cases}$

$\bar{v}_A = 1{,}2\,m/s\,\bar{1}_x = \bar{\Omega}_{AB} \times \overline{I_{AB}A} = 2y' \Rightarrow y' = 0{,}6$

2.b) Graphiquement



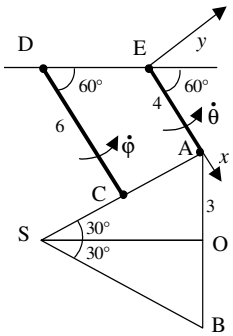
1. construction de $\bar{v}_A$ et $\bar{v}_C$ horizontaux
2. reporter les deux vitesses en B pour faire la composée des vitesses

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_B = \bar{v}_C + \underbrace{\bar{\Omega}_{BC} \times \overline{CB}}_{\perp CB} \\ \bar{v}_B = \bar{v}_A + \underbrace{\bar{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}}_{\perp AB} \end{cases}$$

3. l'intersection des deux droites pointillées rouge nous donne $\bar{v}_B$
4. Comme $\bar{v}_A = 2\,\bar{v}_C$, nous avons un trangle isocè l'angle est connu α car $\underbrace{\bar{\Omega}_{AB} \times \overline{AB}}_{\perp AB}$

---

5. OS Horizontal : (AS est parallèle à l'axe y)



$DC.\sin 60 - EA.\sin 60 = CA.\sin 30 \Rightarrow 6.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = CA.\frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$ m

Vitesse angulaire de la barre DC : $\dot{\theta} = 3$ rad/s $\bar{1}_z$ *et* $\dot{\varphi}$?

$\bar{v}_A = \underbrace{\bar{v}_E}_{0} + \dot{\theta}\bar{1}_z \times \overline{EA} = 4\dot{\theta}\bar{1}_y$ et $\bar{v}_C = \underbrace{\bar{v}_D}_{0} + \bar{\omega}_{DC} \times \overline{DC} = 6\dot{\varphi}$ m/s $\bar{1}_y \Rightarrow$

$\bar{v}_C // \bar{v}_A$ et concourante $\Rightarrow \bar{v}_C = \bar{v}_A$ (solide indéformable)

$\Rightarrow$ le triangle est en translation instantanée $\Rightarrow \bar{\omega}_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = 2$ rad/s $\bar{1}_z$

Vitesse et accélération du point S

$\bar{v}_S = \bar{v}_C = \bar{v}_A = 12$ m/s $\bar{1}_y$ et $\bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS} + \bar{\omega}_{SA} \times \left(\bar{\omega}_{SA} \times \overline{AS}\right) = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS}$

$\bar{a}_A = \bar{a}_E + \bar{\varepsilon}_{AE} \times \overline{EA} + \bar{\omega}_{EA} \times \left(\bar{\omega}_{EA} \times \overline{EA}\right) = \bar{\omega}_{EA} \times \left(\bar{\omega}_{EA} \times \overline{EA}\right) = -\omega_{EA}{}^2 \overline{EA} = -\left\|\overline{EA}\right\| \dot{\theta}^2 \bar{1}_x = -4\dot{\theta}^2 \bar{1}_x$

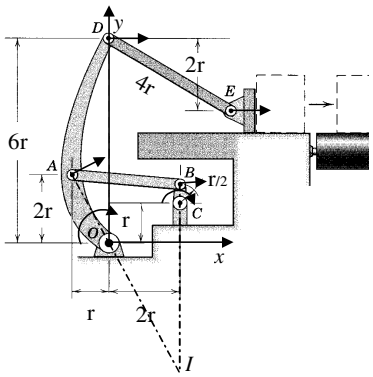
$$\begin{cases} \bar{a}_{C(C\in AC)} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{AC} \times \overline{AC} + \underbrace{\bar{\omega}_{AC} \times \left(\bar{\omega}_{AC} \times \overline{AC}\right)}_{=0} = -\left\|\overline{EA}\right\| \dot{\theta}^2 \bar{1}_x + \left\|\overline{AC}\right\| \varepsilon_{AC} \bar{1}_x \\ \bar{a}_{C(C\in AD)} = \underbrace{\bar{a}_D}_{=0} + \bar{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} + \bar{\omega}_{DC} \times \left(\bar{\omega}_{DC} \times \overline{DC}\right) = \left\|\overline{DC}\right\| \varepsilon_{DC} \bar{1}_y - \left\|\overline{DC}\right\| \dot{\varphi}^2 \bar{1}_x \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_{DC} = 0$ et $-\left\|\overline{EA}\right\| \dot{\theta}^2 + \varepsilon_{AC} \left\|\overline{AC}\right\| = -\left\|\overline{DC}\right\| \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \varepsilon_{AC} = \frac{\left\|\overline{EA}\right\| \dot{\theta}^2 - \left\|\overline{DC}\right\| \dot{\varphi}^2}{\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{4.3^2 - 6.2^2}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ m/s² $\bar{1}_z$

$\Rightarrow \bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{SA} \times \overline{AS} = \left(-4\dot{\theta}^2 + 2\sqrt{3}.\frac{3}{\sin 30}\right)\bar{1}_x = 12\left(-3 + \sqrt{3}\right)\bar{1}_x$

---

6. $\bar{v}_B = \frac{r}{2}\pi \bar{1}_x \quad \left(\bar{\omega}_{BC} = -\pi \text{ rad/s}\, \bar{1}_z ;\ \bar{\omega}_{OA} = -\omega_{OA} \bar{1}_z \text{ et } \bar{\omega}_{BA} = -\omega_{BA} \bar{1}_z\right)$



$$\begin{cases} \bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{OA} \times \overline{OA} = 2r\omega_{OA} \bar{1}_x + r\omega_{OA} \bar{1}_y \\ \bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega}_{BA} \times \overline{BA} = \left(\frac{r}{2}\pi + \frac{r}{2}\omega_{BA}\right)\bar{1}_x + 3r\omega_{BA} \bar{1}_y \end{cases}$$

$\Rightarrow \omega_{OA} = 3\omega_{BA}$; $\bar{\omega}_{BA} = -\frac{\pi}{11}$ rad/s $\bar{1}_z$ et $\bar{\omega}_{OA} = -\frac{3\pi}{11}$ rad/s $\bar{1}_z$

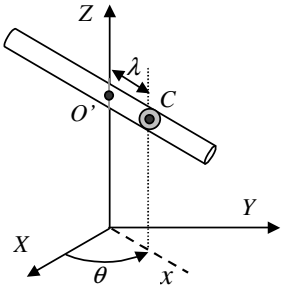
$\bar{v}_D = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{OA} \times \overline{OD} = \frac{3\pi}{11}.6r \bar{1}_x$

$\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{\omega}_{DE} \times \overline{DE} = \frac{18\pi r}{11} \bar{1}_x + 2r\omega_{DE} \bar{1}_x + 2\sqrt{3}r\omega_{DE} \bar{1}_y = v_E \bar{1}_x$

$\Rightarrow \omega_{DE} = 0$ (barre en translation instatanée) et $\bar{v}_E = \frac{18\pi r}{11} \bar{1}_x$

Mouvement relatif

7. $\begin{cases} \bar{1}_x = \cos\theta\,\bar{1}_X + \sin\theta\,\bar{1}_Y \\ \bar{1}_y = -\sin\theta\,\bar{1}_X + \cos\theta\,\bar{1}_Y \\ \bar{1}_z = \bar{1}_z \end{cases}$ et $\bar{\omega} = \omega\bar{1}_z$



$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C-rel} + \bar{v}_{C-entr} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{v}_{C-rel} = \left.\dfrac{d\overline{O'C}}{dt}\right|_{rel} = \dot{\lambda}\bar{1}_x \\ \bar{v}_{C-entr} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}\times\overline{O'C} = 0 + \lambda\omega\bar{1}_y \end{cases}$$

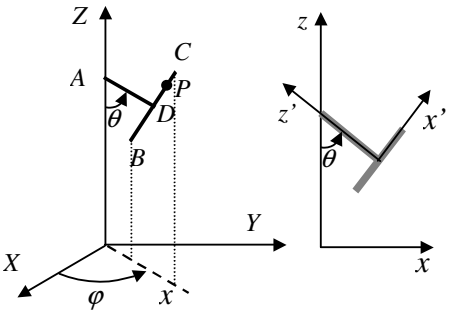
$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C-rel} + \bar{a}_{C-entr} + \bar{a}_{C-cor}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \bar{a}_{C-rel} = \ddot{\lambda}\bar{1}_x \\ \bar{a}_{C-cor} = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_{C-rel} = 2\omega\bar{1}_z\times\dot{\lambda}\bar{1}_x = 2\omega\dot{\lambda}\bar{1}_y \\ \bar{a}_{C-entr} = \bar{a}_{O'} + \bar{\omega}_T\times\left(\bar{\omega}_T\times\overline{O'C}\right) + \bar{\varepsilon}_T\times\overline{O'C} = 0 - \lambda\omega^2\bar{1}_x + 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_C = \ddot{\lambda}\bar{1}_x - \lambda\omega^2\bar{1}_x + 2\omega\dot{\lambda}\bar{1}_y$$

---

8. $\begin{cases} \bar{1}_{x'} = \cos\theta\,\bar{1}_x + \sin\theta\,\bar{1}_z \\ \bar{1}_{y'} = \bar{1}_y \\ \bar{1}_{z'} = -\sin\theta\,\bar{1}_x + \cos\theta\,\bar{1}_z \end{cases}$ et $\begin{cases} \bar{1}_x = \cos\theta\,\bar{1}_{x'} - \sin\theta\,\bar{1}_{z'} \\ \bar{1}_y = \bar{1}_{y'} \\ \bar{1}_z = \sin\theta\,\bar{1}_{x'} + \cos\theta\,\bar{1}_{z'} \end{cases}$



Cinématique (formule de distribution des vitesses) avec les vecteurs exprimés dans le repère *x'y'z'* :

a. $\bar{\omega}_T = \sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_{x'} - \dot{\theta}\bar{1}_{y'} + \cos\theta\dot{\phi}\bar{1}_{z'}$ et $\bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} = \bar{\omega}_T = \sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_{x'} - \dot{\theta}\bar{1}_{y'} + \cos\theta\dot{\phi}\bar{1}_{z'}$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_T = \left.\frac{d\bar{\omega}_T}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ}\times\bar{\omega}_T = \left(\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_{x'} - \ddot{\theta}\bar{1}_{y'} + \left(\cos\theta\ddot{\phi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\bar{1}_{z'}$$

$$\overline{AD} = -L\bar{1}_{z'}$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{\omega}_T\times\overline{AD} = 0 + L\dot{\theta}\bar{1}_{x'} + L\sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_{y'}$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A + \bar{\omega}_T\times\left(\bar{\omega}_T\times\overline{AD}\right) + \bar{\varepsilon}_T\times\overline{AD} = L\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\bar{1}_{x'} + L\left(2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + \left(L\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + L\dot{\theta}^2\right)\bar{1}_{z'}$$

b. $\overline{AP} = \lambda\bar{1}_{x'} - L\bar{1}_{z'}$

$$\bar{v}_{P_{entr}} = \bar{v}_D + \bar{\omega}_T\times\overline{DP} = L\dot{\theta}\bar{1}_{x'} + \left(L\sin\theta\dot{\phi} + \lambda\cos\theta\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + \lambda\dot{\theta}\bar{1}_{z'} \quad \text{et} \quad \bar{v}_{P_{rel}} = \dot{\lambda}\bar{1}_{x'}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_P = \left(L\dot{\theta} + \dot{\lambda}\right)\bar{1}_{x'} + \left(L\sin\theta\dot{\phi} + \lambda\cos\theta\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + \lambda\dot{\theta}\bar{1}_{z'}$$

Cinématique (formule de distribution des vitesses) avec les vecteurs exprimés dans le repère xyz :

---

a. $\bar{\omega}_T = -\dot{\theta}\bar{1}_y + \dot{\phi}\bar{1}_z$; $\bar{\omega}_{xyz/XYZ} = \dot{\phi}\bar{1}_z$ => $\bar{\varepsilon}_T = \left.\frac{d\bar{\omega}_2}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \bar{\omega}_T = \dot{\theta}\dot{\phi}\bar{1}_x - \ddot{\theta}\bar{1}_y + \ddot{\phi}\bar{1}_z$;

$\overline{AD} = L\sin\theta\bar{1}_x - L\cos\theta\bar{1}_z$

$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{\omega}_T \times \overline{AD} = L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + L\sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_y + L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A + \bar{\omega}_T \times \left(\bar{\omega}_T \times \overline{AD}\right) + \bar{\varepsilon}_T \times \overline{AD} = \begin{cases} \left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\phi}^2 - L\sin\theta\dot{\theta}^2\right)\bar{1}_x \\ +\left(2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + L\sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_y \\ +\left(L\cos\theta\dot{\theta}^2 + L\sin\theta\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z \end{cases}$$

b. $\overline{AP} = \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\bar{1}_x + \left(-L\cos\theta + \lambda\sin\theta\right)\bar{1}_z$

$\bar{v}_{P_{entr}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{AP} = \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\phi}\bar{1}_y$

$\bar{v}_{P_{rel}} = \left.\frac{d\overline{AP}}{dt}\right|_{rel-xyz} = \left(L\cos\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\cos\theta - \lambda\sin\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_x + \left(L\sin\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\sin\theta + \lambda\cos\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_z$

=> $\bar{v}_P = \left(L\cos\theta\dot{\theta} - \lambda\sin\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\cos\theta\right)\bar{1}_x + \left(L\sin\theta\dot{\phi} + \lambda\cos\theta\dot{\phi}\right)\bar{1}_y + \left(L\sin\theta\dot{\theta} + \lambda\cos\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\sin\theta\right)\bar{1}_z$

Par dérivation des vecteurs dans le repère *x'y'z'* :

a. $\bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} = \sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_{x'} - \dot{\theta}\bar{1}_{y'} + \cos\theta\dot{\phi}\bar{1}_{z'}$

$\overline{AD} = -L\bar{1}_{z'}$ => A fixe : $\bar{v}_D = \underbrace{\left.\frac{d\overline{AD}}{dt}\right|_{rel}}_{\bar{v}_{D_{rel}}} + \underbrace{\bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} \times \overline{AD}}_{\bar{v}_{D_{entr}}} = 0 + L\sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_{y'} + L\dot{\theta}\bar{1}_{x'}$

$\bar{a}_D = \left.\frac{d\,\bar{v}_D}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} \times \bar{v}_D = L\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\bar{1}_{x'} + L\left(2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + L\left(\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\right)\bar{1}_{z'}$

$\overline{AP} = \lambda\bar{1}_{x'} - L\bar{1}_{z'}$ => $\bar{v}_P = \left.\frac{d\overline{AP}}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} \times \overline{AP} = \left(L\dot{\theta} + \dot{\lambda}\right)\bar{1}_{x'} + \left(\lambda\cos\theta\dot{\phi} + L\sin\theta\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + \lambda\dot{\theta}\bar{1}_{z'}$

$\bar{a}_P = \left.\frac{d\bar{v}_P}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{x'y'z'/XYZ} \times \bar{v}_P =$

$$\begin{cases} \left(L\ddot{\theta} + \ddot{\lambda} - \left(\lambda\cos^2\theta + L\cos\theta\sin\theta\right)\dot{\phi}^2 - \lambda\dot{\theta}^2\right)\bar{1}_{x'} \\ +\left(2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi} + \left(-\lambda sin\theta + 2L\cos\theta\right)\dot{\theta}\dot{\phi} + \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\ddot{\phi} - \lambda\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} \\ +\left(\lambda\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta} + L\dot{\theta}^2 + \left(\lambda\sin\theta\cos\theta + L\sin^2\theta\right)\dot{\phi}^2\right)\bar{1}_{z'} \end{cases}$$

Par dérivation dans les axes *xyz*: $\bar{\omega}_{xyz/XYZ} = \dot{\phi}\bar{1}_z$

$\overline{AD} = L\sin\theta\bar{1}_x - L\cos\theta\bar{1}_z$ => $\bar{v}_D = \left.\frac{d\overline{AD}}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{AD} = L\cos\dot{\theta}\bar{1}_x + L\sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_y + L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z$

Par dérivation des vecteurs dans le repère *xyz* :

$\bar{\omega}_{xyz/XYZ} = \dot{\phi}\bar{1}_z$

$\overline{AD} = L\sin\theta\bar{1}_x - L\cos\theta\bar{1}_z$ => $\bar{v}_D = \left.\frac{d\overline{AD}}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \overline{AD} = L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + L\sin\theta\dot{\phi}\bar{1}_y + L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z$

$$\bar{a}_D = \left.\frac{d\,\bar{v}_D}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \bar{v}_D = \begin{cases} \left(L\cos\theta\ddot{\theta} - L\sin\theta\dot{\theta}^2 + L\sin\theta\dot{\phi}^2\right)\bar{1}_x \\ +\left(2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + L\sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_y \\ +\left(L\cos\theta\dot{\phi}^2 + L\sin\theta\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z \end{cases}$$

b. $\overline{AP} = \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(\lambda\sin\theta - L\cos\theta\right)\overline{1}_z$

$$\overline{v}_P = \left.\frac{d\overline{AP}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{xyz/XYZ}\times\overline{AP} = \begin{cases}\left(-\lambda\sin\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\cos\theta + L\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x \\ +\left(\lambda\cos\theta\dot{\phi} + L\sin\theta\dot{\phi}\right)\overline{1}_y \\ +\left(\lambda\cos\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\sin\theta + L\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_z\end{cases}$$

$$\overline{a}_P = \left.\frac{d\,\overline{v}_P}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{xyz/XYZ}\times\overline{v}_P$$

$$= \begin{cases}\left(\ddot{\lambda}\cos\theta - 2\dot{\lambda}\sin\theta\dot{\theta} + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\ddot{\theta} - \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 - \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\dot{\phi}^2\right)\overline{1}_x \\ +\left(\left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\ddot{\phi} + 2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi} + \left(2L\cos\theta - 2\lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\overline{1}_y \\ +\left(2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\theta} + \ddot{\lambda}\sin\theta + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\ddot{\theta}\right)\overline{1}_z\end{cases}$$

Utilisation des formules du mouvement relatif dans le repère *x'y'z'* :

D = origine du repère mobile $\left(\overline{\omega}_{x'y'z'/XYZ} = \sin\theta\dot{\phi}\overline{1}_{x'} - \dot{\theta}\overline{1}_{y'} + \cos\theta\dot{\phi}\overline{1}_{z'} = \overline{\omega}_T\right)$

=> $\overline{\varepsilon}_T = \left(\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi}\right)\overline{1}_{x'} - \ddot{\theta}\overline{1}_{y'} + \left(\cos\theta\ddot{\phi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\overline{1}_{z'}$

b.

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{P-rel} + \overline{v}_{P-entr} \quad \text{avec} \begin{cases}\overline{v}_{P-rel} = \left.\dfrac{d\overline{DP}}{dt}\right|_{rel-x'y'z'} = \dot{\lambda}\overline{1}_{x'} \\ \overline{v}_{P-entr} = \overline{v}_D + \overline{\omega}_T\times\overline{DP} = L\dot{\theta}\overline{1}_{x'} + \left(L\sin\theta\dot{\phi} + \lambda\cos\theta\dot{\phi}\right)\overline{1}_{y'} + \lambda\dot{\theta}\overline{1}_{z'}\end{cases}$$

$\overline{a}_P = \overline{a}_{P-rel} + \overline{a}_{P-entr} + \overline{a}_{P-cor}$ avec

$\overline{a}_{P-rel} = \ddot{\lambda}\overline{1}_{x'}$

$\overline{a}_{P-cor} = 2\overline{\omega}_{x'y'z'/XYZ}\times\overline{v}_{rel} = 2\left(\sin\theta\dot{\phi}\overline{1}_{x'} - \dot{\theta}\overline{1}_{y'} + \cos\theta\dot{\phi}\overline{1}_{z'}\right)\times\dot{\lambda}\overline{1}_{x'} = +2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi}\overline{1}_{y'} + 2\dot{\theta}\dot{\lambda}\overline{1}_{z'}$

$\overline{a}_{P-entr} = \overline{a}_D + \overline{\omega}_T\times\left(\overline{\omega}_T\times\overline{DP}\right) + \overline{\varepsilon}_T\times\overline{DP}$ avec $\overline{DP} = \lambda\overline{1}_{x'}$

$$\overline{a}_{P-entr} = \begin{cases}L\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\overline{1}_{x'} + L\left(2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi}\right)\overline{1}_{y'} + \left(L\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + L\dot{\theta}^2\right)\overline{1}_{z'} \\ +\left(-\lambda\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\overline{1}_{y'} - \lambda\dot{\theta}^2\overline{1}_{x'}\right) + \left(\lambda\cos\theta\sin\theta\dot{\phi}^2\overline{1}_{z'} - \lambda\cos^2\theta\dot{\phi}^2\overline{1}_{x'}\right) \\ +\lambda\ddot{\theta}\overline{1}_{z'} + \lambda\left(\cos\theta\ddot{\phi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\overline{1}_{y'}\end{cases}$$

$$\overline{a}_P = \begin{cases}\left(\ddot{\lambda} + L\ddot{\theta} - \lambda\dot{\theta}^2 - \left(L\sin\theta\cos\theta + \lambda\cos^2\theta\right)\dot{\phi}^2\right)\overline{1}_{x'} \\ +\left(2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi} + \left(2L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}\dot{\phi} + \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\ddot{\phi} - \lambda\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\overline{1}_{y'} \\ +\left(2\dot{\theta}\dot{\lambda} + \left(\lambda\cos\theta\sin\theta + L\sin^2\theta\right)\dot{\phi}^2 + L\dot{\theta}^2 + \lambda\ddot{\theta}\right)\overline{1}_{z'}\end{cases}$$

Par l'utilisation des formules du mouvement relatif dans le repère xyz :

A = origine du repère mobile xyz $\left(\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_{xyz/XYZ} = \dot{\phi}\overline{1}_z\right)$

$\overline{AP} = \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\overline{1}_x + \left(\lambda\sin\theta - L\cos\theta\right)\overline{1}_z$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{P-rel} + \overline{v}_{P-entr} \quad \text{avec} \begin{cases}\overline{v}_{P-rel} = \left.\dfrac{d\overline{AP}}{dt}\right|_{rel} = \left(L\cos\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}\cos\theta - \lambda\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \left(\dot{\lambda}\sin\theta + \lambda\cos\theta\dot{\theta} + L\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_z \\ \overline{v}_{P-entr} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1\times\overline{AP} = \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\phi}\overline{1}_y\end{cases}$$

$\bar{a}_P = \bar{a}_{P-rel} + \bar{a}_{P-entr} + \bar{a}_{P-cor}$ avec

$$\begin{cases} \bar{a}_{P-rel} = \begin{cases} \left(+\ddot{\lambda}\cos\theta - 2\dot{\lambda}\sin\theta\dot{\theta} - \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\ddot{\theta}\right)\bar{1}_x \\ +\left(\ddot{\lambda}\sin\theta + 2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\theta} + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z \end{cases} \\ \bar{a}_{P-cor} = 2\bar{\omega}_{xyz/XYZ} \times \bar{v}_{P-rel} = 2\left(\left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi}\right)\bar{1}_y \\ \bar{a}_{P-entr} = \bar{a}_A + \bar{\omega}_1 \times \left(\bar{\omega}_1 \times \overline{AP}\right) + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AP} = -\left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\phi}^2\bar{1}_x + \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\ddot{\phi}\bar{1}_y \end{cases}$$

$$\bar{a}_P = \begin{cases} \left(+\ddot{\lambda}\cos\theta - 2\dot{\lambda}\sin\theta\dot{\theta} - \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\dot{\phi}^2 + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\ddot{\theta}\right)\bar{1}_x \\ \left(+2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\phi} + \left(2L\cos\theta - 2\lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}\dot{\phi} + \left(L\sin\theta + \lambda\cos\theta\right)\ddot{\phi}\right)\bar{1}_y \\ +\left(\ddot{\lambda}\sin\theta + 2\dot{\lambda}\cos\theta\dot{\theta} + \left(L\cos\theta - \lambda\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + \left(\lambda\cos\theta + L\sin\theta\right)\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z \end{cases}$$

---

9. L'angle θ représente l'inclinaison de l'avion. Le point C se déplace horizontalement (v_C et a_C), le point B subit une rotation autour du point C (v_{rel-C}) et une translation horizontale ($v_{entr}=v_C$). Le point A possède une vitesse d'entraînement (v_{entr}) et une vitesse relative (v_{rel-A}). La vitesse d'entrainement de A peut être calculée par la formule des distributions des vitesses en considérant que A est fixe dans l'avion (dans son repère relatif) et donc la longueur AB est constante.

$\bar{\omega} = \omega\bar{1}_z = \dot{\theta}\bar{1}_z$, $\bar{\alpha} = \dot{\omega}\bar{1}_z$; $\bar{r} = x\bar{1}_x$, $\bar{v}_{rel} = \dot{x}\bar{1}_x$, $\bar{a}_{rel} = \ddot{x}\bar{1}_x$

$\bar{v}_C = v_C(\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y)$ et $\bar{a}_C = a_C(\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y) \neq \dfrac{d\bar{v}_c}{dt}$ (où $\bar{v}_c$ est la vitesse instantanée)

$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{\omega}\times\overline{CB} = \bar{v}_C + \omega\bar{1}_z \times h\bar{1}_y = (v_C\cos\theta - \omega h)\bar{1}_x - v_C\sin\theta\bar{1}_y$

$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{\varepsilon}\times\overline{CB} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{CB}\right) = \left(a_C\cos\theta - \alpha h\right)\bar{1}_x - \left(a_C\sin\theta + h\omega^2\right)\bar{1}_y$

$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega}\times\overline{BA} + \bar{v}_{rel} = (v_C\cos\theta - \omega h + \dot{x})\bar{1}_x + \left(\omega L - v_C\sin\theta\right)\bar{1}_y$

$\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_B + \bar{\varepsilon}\times\overline{BA} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{BA}\right)}_{\bar{a}_{A,entr}} + \underbrace{2\left(\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}\right)}_{\bar{a}_{a,cor}} + \bar{a}_{rel}$

$\bar{a}_A = \left(a_C\cos\theta - \alpha h - L\omega^2 + \ddot{x}\right)\bar{1}_x + \left(-a_C\sin\theta - h\omega^2 + L\alpha + 2\omega\dot{x}\right)\bar{1}_y$

---

10. 1. $\bar{v}_C = \left.\dfrac{d}{dt}\overline{OC}\right|_{abs} = \left.\dfrac{d}{dt}\overline{OC}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{XYZ/xyz}\times\overline{OC}$

$\overline{OC} = \dfrac{3L}{2}\cos\theta\bar{1}_X + \dfrac{3L}{2}\sin\theta\bar{1}_Z$; $\bar{\omega}_{XYZ/xyz} = -\dot{\phi}\bar{1}_Y$

$\bar{v}_C = \left(-\dfrac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_X + \dfrac{3L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_Z\right) + \left(\dot{\phi}\dfrac{3L}{2}\cos\theta\bar{1}_Z - \dot{\phi}\dfrac{3L}{2}\sin\theta\bar{1}_X\right) = \dfrac{3L}{2}\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\right)\left(-\sin\theta\bar{1}_X + \cos\theta\bar{1}_Z\right)$

2. $\bar{v}_C = \underbrace{\bar{v}_A}_{\bar{v}_{Arel}+\bar{v}_{Aentr}} + \underbrace{\bar{\omega}}_{(\dot{\theta}-\dot{\phi})\bar{1}_Y} \times \overline{AC}$

$\bar{a}_C = \underbrace{\bar{a}_A}_{\bar{a}_{Arel}+\bar{a}_{Aentr}+\bar{a}_{Acor}} + \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{(\ddot{\theta}-\ddot{\phi})\bar{1}_Y} \times \overline{AC} + \underbrace{\bar{\omega}}_{(\dot{\theta}-\dot{\phi})\bar{1}_Y}\left(\times \underbrace{\bar{\omega}}_{(\dot{\theta}-\dot{\phi})\bar{1}_Y} \times \overline{AC}\right)$

3. *C* décrit un cercle de rayon *3L/2* à la vitesse angulaire $-\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\right)\bar{1}_Y$

4. Rotation instantanée, vitesse angulaire $\dot{\theta}\bar{1}_Y$ autour de I_1Y, où I_1 est le sommet du rectangle $AOBI_1$.

---

5. a) Si $\dot{\theta} \neq \dot{\phi}$: rotation instantanée de vitesse angulaire $\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y$ autour de IY où I est tel que

$$\overline{v}_C = \cancel{\overline{v}_I} + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{IC} \Rightarrow \overline{\omega}_{AB} \times \overline{v}_C = \overline{\omega}_{AB} \times \overline{\omega}_{AB} \times \overline{IC} = \underbrace{\left(\overline{\omega}_{AB}.\overline{IC}\right)}_{\perp}\overline{\omega}_{AB} - \left(\overline{\omega}_{AB}{}^2\right)\overline{IC} \Rightarrow \overline{\mathrm{CI}} = \frac{\overline{\omega}_{AB} \times \overline{v}_C}{\omega_{AB}^2}$$

$\overline{\mathrm{CI}} = \frac{3L}{2}\frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\left(\cos\theta\,\overline{1}_X + \sin\theta\,\overline{1}_Z\right) = \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}}\overline{CI_1}$ où I_1 est le "CIR" relatif dans les axes $OXYZ$

$$\begin{cases} \text{si } \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} > 1 \text{ : I est au delà de } I_1 \text{ ; si } 0 < \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 1 \text{ : I est entre } C \text{ et } I_1 \text{ ;} \\ \text{si } -1 < \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < 0 \text{ : I est entre } O \text{ et } C \text{ ; si } \frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} < -1 \text{ : I est au delà de } O \text{ ; si } \dot{\theta} = -\dot{\phi} \text{ : I est en } C \text{ ;} \\ \text{si } \dot{\phi} = 0 \text{ : I est en } I_1 \text{ ; Si } \dot{\theta} = 0 \left(\frac{\dot{\theta}+\dot{\phi}}{\dot{\theta}-\dot{\phi}} = -1\right) \text{ : rotation continue de vitesse angulaire } \left(-\dot{\phi}\right)\overline{1}_Y \text{ autour de } O \end{cases}$$

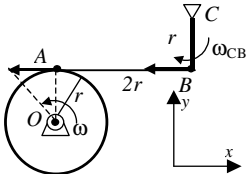
$\Rightarrow AN : \overline{CI} = \frac{7}{3}\overline{CI_1}$

b) si $\dot{\theta} = \dot{\phi}$: translation instantanée de vitesse instantanée $\overline{v}_C = \overline{v}_A = 3L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Z\right)$

CIR

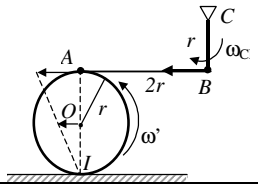
11. a. $\left.\begin{array}{l} \overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OA} = \overline{\omega} \times \overline{OA} = -\omega r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B = \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB} \times \overline{CB} = -\omega_{CB} r\,\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \omega_{CB}$

Les vitesses v_A et v_B sont parallèles. Comme la barre AB est indéformable, elle subit une translation curviligne instantanée donc les vitesses de A et B doivent être égales.



b. $\left.\begin{array}{l} \overline{v}_A = \overline{v}_I + \overline{\omega}' \times \overline{IA} = \overline{\omega}' \times \overline{IA} = -\omega' 2r\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_B = \overline{v}_C + \overline{\omega}_{CB} \times \overline{CB} = -\omega_{BC} r\,\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow 2\omega' = \omega_{CB}$

(avec I le point de contact du disque avec le sol)



---

12. 1. Soit O_1 l'axe de la roue arrière et P_1 son point de contact avec le sol.

$\boxed{\overline{v}_{O_1} = \overline{v}_{P_1} + \overline{\omega}_1 \times \overline{P_1O_1}} \Rightarrow v_{Caddie}1_{x'} = -\omega_1\,\overline{1}_z \times R\,\overline{1}_{y'} = R\omega_1 1_{x'}$ avec $\begin{cases} \overline{v}_{O_1} = \overline{v}_{Tapis} + \overline{v}_{Caddie} \\ \overline{v}_{P_1} = \overline{v}_{Tapis} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{\omega}_1 = -\frac{v_{Caddie}}{R}\overline{1}_z$; $\overline{\varepsilon}_1 = 0$ car $\overline{\omega}_1 = \text{constante}$

2. Soit O2 l'axe de la roue avant et β l'angle d'inclinaison du caddie par rapport à l'horizontale.

On a $\boxed{\overline{v}_{O_2} = \overline{v}_{O_1} + \overline{\omega}_{caddie} \times \overline{O_1O_2}}$; et si on projette la relation sur l'axe y, il vient :

$v_{O_2}\,\overline{1}_x = \left(v_t + v_c\right)\left(\cos\alpha\,\overline{1}_x + \sin\alpha\,\overline{1}_y\right) + \left(-\omega_c\,\overline{1}_z\right) \times L\left(\cos\beta\,\overline{1}_x + \sin\beta\,\overline{1}_y\right)$

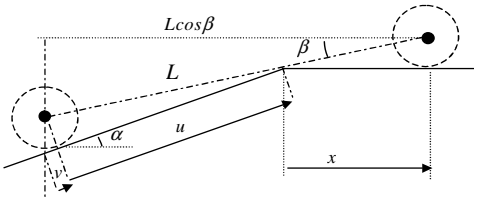
$\begin{cases} \left(v_{O_2} = \left(v_t + v_c\right)\cos\alpha + L\sin\beta\omega_c \quad (1)\right) \\ 0 = \left(v_t + v_c\right)\sin\alpha - L\cos\beta\omega_c \quad (2) \end{cases}$ $\quad (2) \Rightarrow \overline{\omega}_c = \frac{-1}{L\cos\beta}\left(v_t + v_c\right)\sin\alpha\,\overline{1}_z$

Pour trouver une relation donnant β(x) :

$$L\cos\beta = x + (u+v)\cos\alpha$$

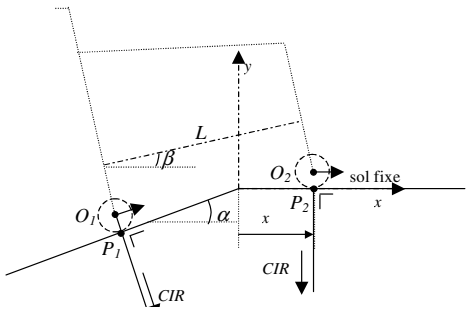
avec $\tan\alpha = \frac{v}{R}$; $\tan\gamma = \frac{u}{R}$; $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta$

$$\Rightarrow L\cos\beta = x + R\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right)\cos\alpha + R\tan\alpha\cos\alpha$$

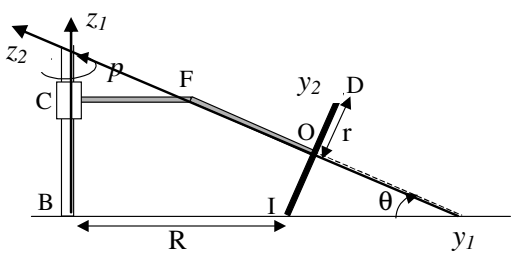


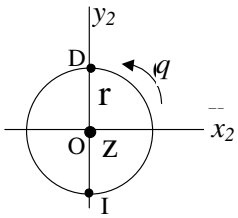
On résout cette équation pour trouver β(x) (avec un calculateur) et on la remplace dans l'équation donnant la vitesse angulaire

3. Le moins vite : Point de contact de la roue avec le tapis ($\overline{v}_{Tapis}$)
4. Le plus vite : Point diamétralement opposé au premier ($\overline{v}_{Tapis} + 2\overline{v}_{Caddie}$)
5. (voir dessin) le CIR se trouve à l'intersection des perpendiculaires :
   au tapis et passant par le point de contact de la roue arrière
   au sol horizontal et passant par le point de contact de la roue avant.



13.





Pour la décomposition en système d'axes :
R0 Repère fixe, R1 Repère tournant avec p autour de BD (z_1), R_2 Repère incliné sur OF (z_2), OD (y_2), R_3 Repère tournant avec p autour de OF (z_2).
1.) Axe instantané de rotation : droite IQ avec I=Pt de contact entre le disque et le plan Q=intersection des droites OF et CB car OQ peut être considéré comme appartenant au solide étudié (tige+disque) et v_Q=0 car Q appartient à l'axe de rotation de Ω. Le point Q appartient virtuellement au solide. Remplacer la tige coudée par une tige OQ soudée au solide ne change rien au mouvement.

$$\overline{\omega} = \overline{p} + \overline{q} = p\cos\theta\,\overline{1}_y + (p\sin\theta + q)\overline{1}_z \quad \text{avec } \overline{\omega}_{rel} = \overline{p}$$

Condition de roulement sans glissement :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_I = 0 = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OI} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x + (rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x \\ \text{avec } \overline{OI} = -r\overline{1}_y;\ \overline{v}_O = \overline{p}\times\overline{OC} = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

Ou

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v}_{O\in tige} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_t\times\overline{CO} \ \text{ et } \ \overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_I + \overline{\omega}_d\times\overline{IO} \\ \boxed{\overline{v}_{O\in disque} = \overline{v}_{O\in tige}} \Rightarrow \overline{\omega}_d\times\overline{IO} = \overline{\omega}_t\times\overline{CO} \Rightarrow -(rp\sin\theta + rq)\overline{1}_x = -p(R + r\sin\theta)\overline{1}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{r}p}$$

$\overline{\omega}_d = p\cos\theta\,\overline{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r})\overline{1}_z$ =vecteur libre constant dans les axes *Oxyz*.

Dériver un vecteur constant : produit vectoriel avec le vecteur de vitesse angulaire agissant sur le repère.

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_d = \underbrace{\left.\frac{d\bar{\omega}_d}{dt}\right|_{xyz}}_{=0} + \bar{\Omega}_{xyz/XYZ} \times \bar{\omega}_d}$$ où XYZ est le repère fixe

$$\bar{\varepsilon}_d = \left(p(\sin\theta + \frac{R}{r}) p\cos\theta - p\cos\theta . p\sin\theta \right) \bar{1}_x = \frac{R}{r} p^2 \cos\theta \bar{1}_x$$

2.)

$$\bar{v}_D = \bar{\omega}_d \times \overline{ID} = \left(p\cos\theta \bar{1}_y + p(\sin\theta + \frac{R}{r}) \bar{1}_z \right) \times 2r\bar{1}_y = -2rp(\sin\theta + \frac{R}{r}) \ \bar{1}_x$$

Comme Q appartient à l'axe de CIR, on peut écrire :

$$\bar{a}_D = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon}_d \times \overline{QD} + \bar{\omega}_d \times \bar{v}_D \quad avec \quad \bar{a}_Q = 0 \ \ (!\bar{a}_I \neq 0)$$

$$\overline{QD} = -\frac{1}{\cos\theta}\left(R + r\sin\theta\right)\bar{1}_z + r\bar{1}_y$$

$$\bar{a}_D = -rp^2\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\sin^2\theta + 3\frac{R}{r}\sin\theta \right)\bar{1}_y + rp^2\left(3\frac{R}{r}\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta \right)\bar{1}_z$$

---

14. 1.). (rem : $\dot{\omega}_1 = 0$; $\dot{\omega}_3 = 0$)

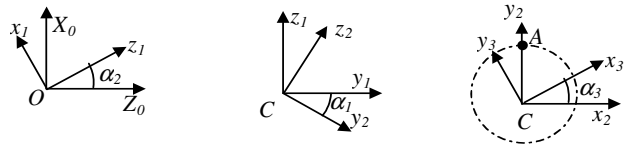
R0 : Repère OX0Y0Z0 fixe.

R1 : Repère Ox1y1z1 tournant autour de l'axe Y0 = y1 ($\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \omega_2 \bar{1}_{y_1}$)

R2 : Repère Ox2y2z2 tournant avec R1 et autour de l'axe x1 = x2($\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \bar{\omega}_{R_2/R_1} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_{x_2} + \omega_2 \bar{1}_{y_1}$)

R3 : Repère Gx3y3z3 lié au disque et tournant avec R2 et autour de z2 = z3

($\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \bar{\omega}_{R_3/R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_{x_2} + \omega_2 \bar{1}_{y_1} + \omega_3 \bar{1}_{z_2} = \bar{\omega}_{disque}$ car le repère R3 est complètement lié au disque)



$$\bar{\omega}_{disque} = -\omega_1 \bar{1}_{x_2} + \omega_2 \bar{1}_{y_1} + \omega_3 \bar{1}_{z_2} = -\omega_1 \bar{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right) + \omega_3 \bar{1}_{z_2}$$

$$\left.\bar{\omega}_{disque}\right|_{\text{instant } t:\alpha_1=0} = -\omega_1 \bar{1}_{x_1} + \omega_2 \bar{1}_{y_1} + \omega_3 \bar{1}_{z_1}$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{disque}}$$ avec $\bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_{x_2} + \omega_2 \left(\cos\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right)$

$$\bar{\varepsilon}_{disque} = \dot{\omega}_2 \underbrace{\left(\cos\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \sin\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right)}_{\bar{1}_{y_1}} + \omega_2\omega_1 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right)}_{\bar{1}_{z_1}} +$$

$$+ \omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right)}_{\bar{1}_{z_1}} - \omega_1\omega_2 \underbrace{\left(-\sin\alpha_1 \bar{1}_{y_2} + \cos\alpha_1 \bar{1}_{z_2} \right)}_{\bar{1}_{z_1}} + \left(\omega_1\omega_3 \bar{1}_{y_2} + \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \bar{1}_{x_2} \right)$$

$$\bar{\varepsilon}_{disque} = \omega_2\omega_3 \cos\alpha_1 \bar{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 \cos\alpha_1 \right) \bar{1}_{y_1} + \left(\omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_3 \sin\alpha_1 \right) \bar{1}_{z_1}$$

$$=> \left.\bar{\varepsilon}_{disque}\right|_{\text{Instant } t:\alpha_1=0} = \omega_2\omega_3 \bar{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 \right) \bar{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1 \bar{1}_{z_1}$$

---

autre méthode :

$$\bar{\varepsilon}_d = -\underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}}_{=0}\bar{1}_{x_2} - \omega_1 \underbrace{\frac{d\bar{1}_{x_2}}{dt}}_{=\bar{\omega}_{R_2/R_0}\times\bar{1}_{x_2}} + \underbrace{\frac{d\omega_2}{dt}}_{=\dot{\omega}_2}\bar{1}_{y_1} + \omega_2 \underbrace{\frac{d\bar{1}_{y_1}}{dt}}_{=\bar{\omega}_{R_1/R_0}\times\bar{1}_{y_1}} + \underbrace{\frac{d\omega_3}{dt}}_{=0}\bar{1}_{z_2} + \omega_3 \underbrace{\frac{d\bar{1}_{z_2}}{dt}}_{=\bar{\omega}_{R_2/R_0}\times\bar{1}_{z_2}}$$

$$\bar{\varepsilon}_d\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = -\omega_1\left(-\omega_2\,\bar{1}_{z_1}\right) + \dot{\omega}_2\,\bar{1}_{y_1} + \omega_2\,(0) + \omega_3\left(\omega_1\,\bar{1}_{y_2} + \omega_2 \underbrace{\cos\alpha_1}_{=1(\alpha_1=0)}\,\bar{1}_{x_2}\right) = \omega_2\omega_3\,\bar{1}_{x_1} + \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\bar{1}_{y_1} + \omega_2\omega_1\,\bar{1}_{z_1}$$

$$\bar{v}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d \times \overline{CA} = -R\omega_3\,\bar{1}_{x_1} - \left(b\omega_2 + R\omega_1\right)\bar{1}_{z_1}$$

$$\bar{a}_A\Big|_{\substack{\text{Instant } t\\ \alpha_1=0}} = \bar{a}_C + \bar{\omega}_d \times \left(\bar{\omega}_d \times \overline{CA}\right) + \bar{\varepsilon}_d \times \overline{CA} = -\left(b\omega^2{}_2 + 2R\omega_1\omega_2\right)\bar{1}_{x_1} - R\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right)\bar{1}_{y_1} + \left(2R\omega_2\omega_3 - b\dot{\omega}_2\right)\bar{1}_{z_1}$$

2.) Invariant scalaire $\boxed{\bar{v}_C.\bar{\omega} = -b\omega_2\omega_3}$

a) si $\omega_2 \neq 0 \;\; et \;\; \omega_3 \neq 0$: mouvement hélicoïdal instantané (HI) = mouvement de rotation et de translation de vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega} = -\omega_1\,\bar{1}_x + \omega_2\,\bar{1}_y + \omega_3\,\bar{1}_z$. Axe HI est // à $\bar{\omega}$ passant par Q tel que

$\boxed{\overline{CQ} = -\dfrac{\bar{\omega}\times\left(\bar{v}_Q - \bar{v}_C\right)}{\bar{\omega}.\bar{\omega}} + \lambda\bar{\omega}}$ avec $\boxed{\bar{v}_Q = \dfrac{\bar{\omega}.\bar{v}_C}{\bar{\omega}.\bar{\omega}}\bar{\omega}} = -b\omega_2\omega_3\dfrac{\left(-\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3}$ => $\overline{CQ} = \dfrac{\left(-b\omega^2{}_2, -b\omega_1\omega_2, 0\right)}{\omega^2{}_1 + \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3}$

b) si $\omega_2 = 0 \;\; et \;\; \omega_3 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\bar{\omega}$ passant par C avec $\bar{\omega} = \left(-\omega_1, 0, \omega_3\right)$.

Cas part. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation instantanée (en t) de $\bar{\omega} = \left(0, 0, \omega_3\right)$ autour de Cz
- si de plus $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\bar{\omega}$, même axe de rotation. ∀t)

c) si $\omega_3 = 0 \;\; et \;\; \omega_2 \neq 0$: Rotation instantanée (en t) autour de l'axe // $\bar{\omega}$ avec $\bar{\omega} = \left(-\omega_1, \omega_2, 0\right)$

Cas part. :

- si $\omega_1 = 0$ Rotation continue autour de Oy.
- Si en plus $\dot{\omega}_2 = 0$: Rotation. continue uniforme

d) si $\omega_2 = \omega_3 = 0$: Rotation instantanée de $\bar{\omega} = \left(-\omega_1, 0, 0\right)$ autour de Ox.

Cas part. :

- si $\dot{\omega}_2 = 0$ Rotation continue (même $\bar{\omega}$, même axe)
- si $\omega_1 = 0$ Solide immobile à cet instant.

3) Si Q et Q' sont deux points distincts de l'axe hélicoïdal instantané ($\bar{v}_Q$ et $\bar{v}_{Q'}$ // $\bar{\omega}$)

$\bar{a}_{Q'} = \bar{a}_Q + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{QQ'}\right) + \bar{\varepsilon}\times\overline{QQ'}$ avec $\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = \bar{\omega}\times\left(\bar{v}_{Q'} - \bar{v}_Q\right) = 0$ car $\bar{\omega} // \bar{v}_{Q'} // \bar{v}_Q$

Pour que les points de l'axe hélicoïdal aient le même vecteur accélération, il faut $\bar{a}_{Q'} = \bar{a}_Q$ => $\bar{\varepsilon}\times\overline{QQ'} = 0$

comme nous avons : $\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{QQ'}\right) = 0$ => $\overline{QQ'} = \dfrac{\overline{QQ'}.\bar{\omega}}{\bar{\omega}.\bar{\omega}}\bar{\omega}$ => $\overline{QQ'} // \bar{\omega}$

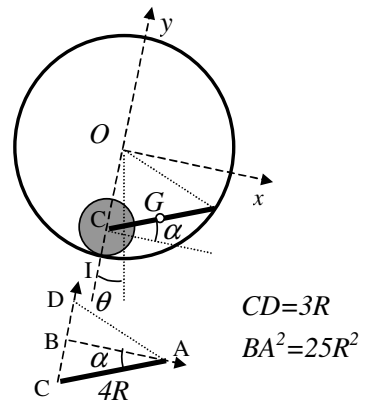
On peut donc vérifier la relation suivante $\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega} = 0$

$$\begin{cases} \left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right)\omega_3 - \omega_1\omega^2{}_2 = 0 \\ \omega_2\left(\omega^2{}_1 + \omega^2{}_3\right) = 0 \\ \omega^2{}_2\omega_3 + \omega_1\left(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_3 = 0 \\ \text{ou} \\ \omega_2 = 0 \;\; et \;\; \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 \end{cases}$$

15. Disque : Rotation instantanée autour de l'axe Iz de vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega}$

Tige : Rotation continue autour de l'axe Oz de vecteur vitesse angulaire $\overline{\Omega}$

Point C : trajectoire circulaire en fonction de l'angle θ.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C\in\text{Disque}} = \overline{v}_I + \overline{\omega}\times\overline{IC} = -\omega R\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_{\text{point }C}(\theta) = -\dot{\theta}3R\,\overline{1}_x\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\omega} = 3\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{C\in\text{Tige}} = \overline{v}_O + \overline{\Omega}\times\overline{OC} = 3R\Omega\,\overline{1}_x \\ \overline{v}_{C\in\text{Disque}} = \overline{v}_{C\in\text{Tige}}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\Omega} = -\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\overline{v}_G = \overline{v}_C + \overline{\Omega}\times\overline{CG} = -3R\dot{\theta}\,\overline{1}_x - 2R\dot{\theta}\left(\cos\alpha\,\overline{1}_y - \sin\alpha\,\overline{1}_x\right)$$

avec $\sin\alpha = \dfrac{3}{8}$ et $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{55}}{8} \Rightarrow \overline{v}_G = -\dfrac{R\dot{\theta}}{4}\left(9\,\overline{1}_x + \sqrt{55}\,\overline{1}_y\right)$

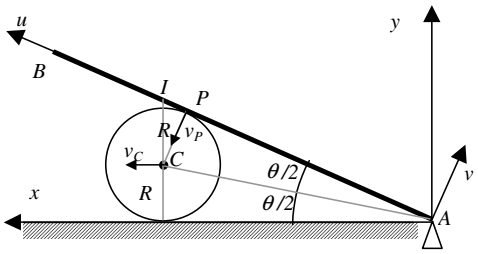
$$\overline{a}_G = \overline{a}_C + \overline{\Omega}\times\left(\overline{\Omega}\times\overline{CG}\right) + \overline{\varepsilon}\times\overline{CG} = \overline{a}_C + -\dot{\theta}\,\overline{1}_z\times\left(-2R\dot{\theta}\left(\cos\alpha\,\overline{1}_y - \sin\alpha\,\overline{1}_x\right)\right) - \ddot{\theta}\,\overline{1}_z\times\overline{CG}$$

$$\overline{a}_G = \overline{a}_C + -2R\dot{\theta}^2\cos\alpha\,\overline{1}_x - 2R\dot{\theta}^2\sin\alpha\,\overline{1}_y + -2R\cos\alpha\ddot{\theta}\,\overline{1}_y + 2R\sin\alpha\ddot{\theta}\,\overline{1}_x$$

$$\overline{a}_G = -3R\ddot{\theta}\,\overline{1}_x + 3R\dot{\theta}^2\,\overline{1}_y + \frac{R}{4}\left(3\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\sqrt{55}\right)\overline{1}_x - \frac{R}{4}\left(\sqrt{55}\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2\right)\overline{1}_y = -\frac{R}{4}\left(9\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sqrt{55}\right)\overline{1}_x - \frac{R}{4}\left(\sqrt{55}\ddot{\theta} - 9\dot{\theta}^2\right)\overline{1}_y$$

16.

$$\overline{v}_C = \frac{d\overline{AC}}{dt} = \frac{d\left(R.\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}\overline{1}_x + R\,\overline{1}_y\right)}{dt} = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\overline{1}_x$$



C.I.R. du disque : $\overline{v}_C$ // x et $\overline{v}_P \perp AP \Rightarrow$ I déterminé

$\overline{\omega}_{\text{disque}}$ dépend de $\dot{\theta} \Rightarrow$ pour déterminer $\overline{\omega}_{\text{disque}}(\dot{\theta})$,

il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P

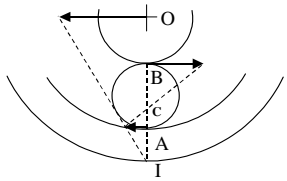
(ds les axes liés à la tige $Auvw$ avec u // AB) : $\boxed{\overline{v}_{P\in\text{tige}} = \overline{v}_{P\in\text{disque}}}$

$$\text{avec}\quad\left\{\begin{array}{l}\overline{v}_{P\in\text{ tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_t\times\overline{AP} = R\,\text{cotg}\dfrac{\theta}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_v \\ \overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d\times\overline{CP} = \left(-\dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\cos\theta - \omega_d R\right)\overline{1}_u + \dfrac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\sin\theta\,\overline{1}_v \quad \text{avec } \overline{\omega}_d = \omega_d\,\overline{1}_z\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\overline{v}_{P\in\text{disque}} = \overline{v}_{P\in\text{ tige}}\right)_{\overline{1}_u} \Rightarrow \omega_d = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\cos\theta = -\text{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\text{cotg}\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

---

17. Nous pouvons appliquer la formule de cinématique pour les solides.



Pour déterminer la vitesse angulaire de la bille, appliquons la formule de cinématique à la bille (C=CIR) :

$$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}\times\overline{BA} \Rightarrow -|v_A| = |v_B| - \omega|BA| \quad\text{avec}\quad \overline{\omega} = -\omega\overline{1}_z \Rightarrow v_A + v_B = \omega\frac{b-a}{2} \Rightarrow \omega = 2\frac{v_A + v_B}{b-a}$$

Pour trouver ω, nous devons déterminer les vitesses v_A et v_B.
Appliquons successivement la formule de cinématique des solides sur la bague extérieure entre O et I puis entre A et I. (IA=d) : I=CIR

$$\bar{v}_O = -v\bar{1}_x = \cancel{\bar{v}_I} + \bar{\Omega}_{ext} \times \overline{IO} \Rightarrow v = \Omega_{ext} c/2 \Rightarrow \Omega_{ext} = \frac{2v}{c}$$

$$\bar{v}_A = \cancel{\bar{v}_I} + \bar{\Omega}_{ext} \times \overline{IA} \Rightarrow \bar{v}_A = -\frac{2v}{c} d\,\bar{1}_x \quad \text{ou} \quad \bar{v}_A = \frac{AI}{AO}\bar{v}_0 = -\frac{d}{c/2} v\,\bar{1}_x$$

Appliquons la même procédure pour la bague intérieure :

$$\bar{v}_B \left(= \bar{v}_{rel} + \bar{v}_{entr}\right) = \bar{v}_0 + \bar{\Omega} \times \overline{OB} = \left(-v + \Omega\frac{a}{2}\right)\bar{1}_x$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = -2\frac{\frac{2dv}{c} + \Omega\frac{a}{2} - v}{b-a}\bar{1}_z = -\left|\frac{-\frac{2b}{c}v + \Omega a}{b-a}\right|\bar{1}_z$$

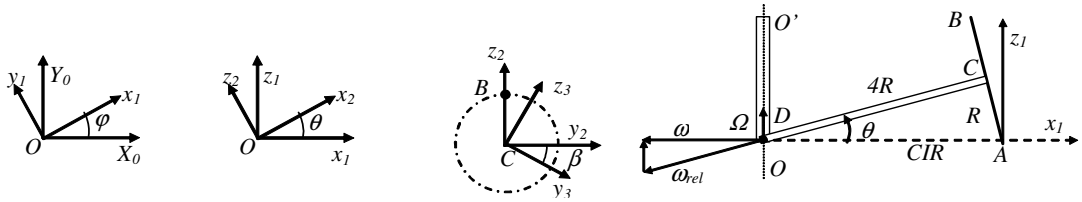
18. 1. R_0 : Repère $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

R_1 : Repère $Ox_1y_1z_1$ tournant autour de l'axe $Z_0 = z_1$ ($\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \Omega\bar{1}_{z_1}$)

R_2 : Repère $Ox_2y_2z_2$ incliné par rapport à R_1 autour de l'axe $y_1 = y_2$ ($\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \underbrace{\bar{\omega}_{R_2/R_1}}_{\dot{\theta}=0} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} = \bar{\omega}_{R_1/R_0}$)

R_3 : Repère $Gx_3y_3z_3$ lié au disque et tournant avec R_2 et autour de $x_2 = x_3$

($\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \bar{\omega}_{R_3/R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\omega_r\bar{1}_{x_2} + \Omega\bar{1}_{z_1} = \bar{\omega}_{disque}$ car le repère R_3 est complètement lié au disque)



$$\Rightarrow \bar{\omega} = \bar{\Omega} + \bar{\omega}_{rel} = -\omega_{rel}\cos\theta\,\bar{1}_x + (\Omega - \omega_{rel}\sin\theta)\bar{1}_z$$

Nous repérons deux points appartenant au solide qui ont une vitesse nulle : le disque ne glisse pas donc la vitesse du point A est nulle. Il en est de même pour le point D qui est appartient à l'axe fixe OO'. Donc l'axe instantané de rotation passe bien par ses deux points. Le vecteur vitesse angulaire du disque se trouvera sur cet axe.

<u>Condition de roulement sans glissement :</u>

$$\bar{v}_A = 0 = \bar{v}_C + \bar{\omega}_d \times \overline{CA} \quad \text{avec} \quad \overline{CA} = -R\bar{1}_{z_2} = R\sin\theta\,\bar{1}_{x_1} - R\cos\theta\,\bar{1}_{z_1} \quad \text{et} \quad \bar{v}_C = \underbrace{\bar{v}_O}_{=0} + \bar{\Omega} \times \overline{OC} = \Omega 4R\cos\theta\,\bar{1}_{y_1}$$

$$\bar{v}_A = 0 = \Omega 4R\cos\theta\,\bar{1}_{y_1} + (\Omega R\sin\theta - \omega_{rel}R)\bar{1}_{y_1} \Rightarrow \Omega 4R\cos\theta + R\Omega\sin\theta - R\omega_{rel} = 0$$

En simplifiant grâce à : $OA = \sqrt{17}R$ et $\sin\theta = 1/\sqrt{17}$; $\cos\theta = 4/\sqrt{17}$; on obtient $\omega_{rel} = \Omega\sqrt{17}$

par le dessin on peut aussi directement établir que $\frac{\Omega}{\omega} = tg\theta$ et $\omega_{rel} = \frac{\omega}{\cos\theta}$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = -\Omega\sqrt{17}\cos\theta\,\bar{1}_{x_1} + \Omega(1 - \sqrt{17}\sin\theta)\bar{1}_{z_1} = -4\Omega\bar{1}_{x_1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{R_1} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} \times \bar{\omega}_{disque} = \Omega\bar{1}_{z_1} \times \bar{\omega}_{disque} = -4\Omega^2\bar{1}_{y_1}$$

2.

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{AB} = -4\Omega\bar{1}_x \times 2R\left(-\sin\theta\,\bar{1}_{x_1} + \cos\theta\,\bar{1}_{z_1}\right) = \frac{32\sqrt{17}}{17}\Omega R\,\bar{1}_{y_1} \quad \text{attention } \bar{v}_B \neq \left.\frac{d\overline{DB}}{dt}\right|_{abs}$$

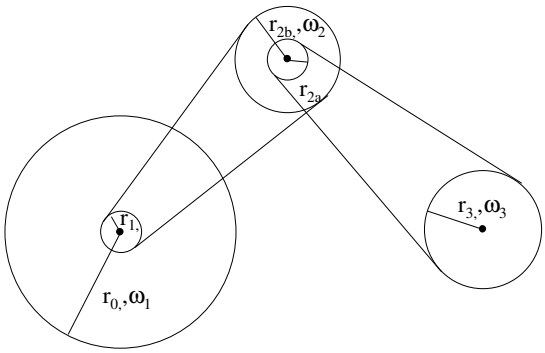
$$\bar{a}_C = \underbrace{\bar{a}_D}_{=0} + \underbrace{\bar{\varepsilon}\times\overline{DC}}_{=0} + \bar{\Omega}\times\left(\bar{\Omega}\times\overline{DC}\right) = -\Omega^2 4R\cos\theta\,\bar{1}_{x_1} = -\Omega^2 R\frac{16}{\sqrt{17}}\bar{1}_{x_1}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{\varepsilon}_d\times\overline{CB} + \bar{\omega}_d\times\left(\bar{\omega}_d\times\overline{CB}\right) = -\Omega^2 R\frac{16}{\sqrt{17}}\bar{1}_{x_1} - 4\Omega^2\bar{1}_{y_1}\times R\left(-\sin\theta\,\bar{1}_{x_1} + \cos\theta\,\bar{1}_{z_1}\right) - 4\Omega\bar{1}_{x_1}\times\frac{16}{\sqrt{17}}\Omega R\bar{1}_{y_1}$$

$$\bar{a}_B = -\frac{16}{\sqrt{17}}R\Omega^2\bar{1}_{x_1} - \frac{4}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\bar{1}_{z_1} - \frac{16}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\bar{1}_{x_1} - \frac{64}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\bar{1}_{z_1} = -\frac{32}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\bar{1}_{x_1} - \frac{68}{\sqrt{17}}\Omega^2 R\bar{1}_{z_1}$$

$$!!!\ \bar{a}_A \neq 0 \Rightarrow \bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{\varepsilon}\times\overline{CA} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\overline{CA}\right) = \frac{68}{\sqrt{17}}R\Omega^2\bar{1}_{z_1}$$

19.



$$r_3\omega_3 = r_{2a}\omega_2$$

$$r_{2b}\omega_2 = r_1\omega_1$$

$$\omega_3 = \frac{r_1}{r_{2b}}\frac{r_{2a}}{r_3}\omega_1$$

$v = 152\ miles/h = 244620\ m/h$

Circonférence de la roue : $2\pi 0.235\ m = 1.476548 m$

$\omega_1 = 244620/1.476548\ tours/h$

$= 165670.1369\ tours/h$

$= 2761.1689\ tours/\min$

$$\omega_3 = \frac{3}{10}\frac{3}{12}2761.1689\ tours/\min = 207.08\ tours/\min$$

Caractéristique des mouvements

20. 1. $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{1}_z + \dot{\theta}\bar{1}_y = -\dot{\theta}\sin\varphi\bar{1}_X + \dot{\theta}\cos\varphi\bar{1}_Y + \dot{\varphi}\bar{1}_Z$

2.

$$\bar{v}_H = \frac{d\overline{OH}}{dt} = \frac{d\left(L\sin\theta\,\bar{1}_Z\right)}{dt} = L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_Z$$

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\,\bar{1}_x - \frac{L}{2}\bar{1}_y\right) = -L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + \dot{\varphi}\bar{1}_Z\times\overline{OA} = \left(-L\sin\theta\dot{\theta} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)\bar{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\,\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_B = \frac{d}{dt}\left(L\cos\theta\,\bar{1}_x + \frac{L}{2}\bar{1}_y\right) = \left(-L\sin\theta\dot{\theta} - \frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)\bar{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\,\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_E = -L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + L\dot{\varphi}\cos\theta\,\bar{1}_y$$

3. invariant $\bar{v}.\bar{\omega} = L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$

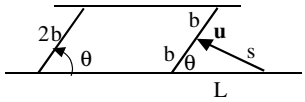
1. $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ Solide immobile
2. $\dot{\theta} = 0; \dot{\varphi} \neq 0$ Rotation continue $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{1}_Z$ (uniforme si $\ddot{\varphi} = 0$)
3. $\dot{\theta} \neq 0; \dot{\varphi} = 0$ Rotation instantanée CIR=($x = L\cos\theta; z = L\sin\theta$)
4. $\dot{\theta} \neq 0; \dot{\varphi} \neq 0$ Mvt hélicoidal instantané $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{1}_Z + \dot{\theta}\bar{1}_y$

Axe hélicoidal : droite de point P tq $\bar{v}_P // \bar{\omega}$

$$\bar{v}_P = \left(\frac{\bar{\omega}.\bar{v}_H}{\bar{\omega}.\bar{\omega}}\right).\bar{\omega} = \frac{L\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}\left(\dot{\theta}\bar{1}_y + \dot{\varphi}\bar{1}_z\right) \quad \text{et} \quad \overline{HP} = \frac{\bar{\omega}\times\bar{v}_H}{\bar{\omega}.\bar{\omega}} + \lambda\bar{\omega} = \frac{L\cos\theta\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}\bar{1}_x + \lambda\left(\dot{\theta}\bar{1}_y + \dot{\varphi}\bar{1}_z\right)$$

Cinématique des solides

21.



$y = 2b\sin\theta$

$\dot{y} = 2b\cos\theta\,\dot{\theta}$

$s^2 = L^2 + b^2 - 2Lb\cos\theta$

$2s\dot{s} = 2bL\sin\theta\,\dot{\theta} \quad avec \quad \dot{s} = v$

$\dot{\theta} = \dfrac{sv}{bL\sin\theta}$

$\dot{y} = 2b\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{su}{Lb} = 2\dfrac{\sqrt{L^2+b^2-2Lb\cos\theta}}{L\,tg\theta}u$

---

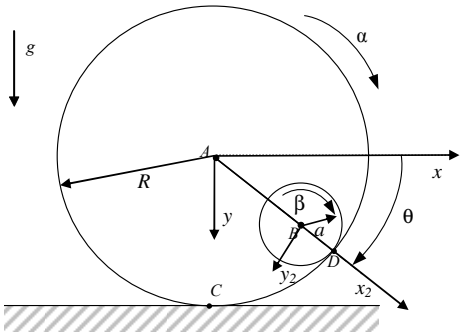
22. 2 degré de liberté $\{x,\theta\}$

Coordonnées $\{x,\alpha,\beta,\theta\}$

$\bar{\omega}_{cercle\ S1} = \dot{\alpha}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{disque\ S2} = \dot{\beta}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\bar{1}_z$

Repère xyz fixe ; Repère x1y1z1 lié à S1 ; Repère x2y2z2 lié à AB ; Repère x3y3z3 lié à S2

Condition de roulement sans glissement en D point de contact entre S_1 et S_2 : $\bar{v}_{D\in S_1} = \bar{v}_{D\in S_2}$



$$\begin{cases} \bar{v}_{D\in S_1} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AD} = \dot{x}\bar{1}_x + R\dot{\alpha}\bar{1}_{y_2} \\ \bar{v}_{D\in S_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{BD} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\bar{1}_{y_2} \end{cases}$$

$=> (R-a)\dot{\theta} + a\dot{\beta} = R\dot{\alpha}$

Condition de roulement sans glissement en I point de contact entre S_1 et le sol : $\bar{v}_{I\in Sol} = \bar{v}_{I\in S_1}$

$=> 0 = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AI} = \dot{x}\bar{1}_x - R\dot{\alpha}\bar{1}_x => \dot{x} = R\dot{\alpha}$

$=> \boxed{\bar{\omega}_{cercle\ S1} = \dfrac{\dot{x}}{R}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{disque\ S2} = \dfrac{\dot{x}-(R-a)\dot{\theta}}{a}\bar{1}_z;\ \bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\bar{1}_z}$

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AD} \times \overline{AB} => \bar{v}_B = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\left(-\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right)$

$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \left(\bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB}\right) + \bar{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} = \ddot{x}\bar{1}_x + (R-a)\ddot{\theta}\bar{1}_{y_2} - (R-a)\dot{\theta}^2\bar{1}_{x_2}$

Ou $\bar{v}_B = \bar{v}_D + \bar{\omega}_2 \times \overline{DB} => \bar{v}_B = \dot{x}\bar{1}_x + R\dot{\alpha}\bar{1}_{y_2} - a\dot{\beta}\bar{1}_{y_2} = \dot{x}\bar{1}_x + (R-a)\dot{\theta}\bar{1}_{y_2}$

---

23. R_0 : Axe $OX_0Y_0Z_0$ fixe.

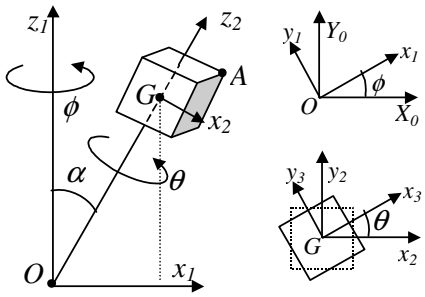
R_1 : Axe $Ox_1y_1z_1$ tourne autour de l'axe $Z_0 = z_1$ (ϕ)

R_2 : Axe $Gx_2y_2z_2$ incliné d'un angle α par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, avec z_2 lié à la tige, tourne autour de l'axe z_1 (ϕ)

R_3 : Axe $Gx_3y_3z_3$ liés au cube et tourne autour de z_1 (ϕ) et z_2 (θ)

=> les vecteurs de Darboux :

$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1}$; $\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1}$; $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} + \dot{\theta}\bar{1}_{z_2}$



a. Par la formule des distribution des vitesses exprimé dans le repère $Ox_2y_2z_2$

$$\bar{\omega}_{Tige} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{Carré} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} + \dot{\theta}\bar{1}_{z_2} = -\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{v}_G = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{Tige} \times \overline{OG} = 0 + L\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_y = L\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{y'}$$

$$\overline{GA} = \frac{d}{2}\left(\bar{1}_{x_3} + \bar{1}_{y_3} + \bar{1}_{z_3}\right) = \frac{d}{2}\left(\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\bar{1}_{x_2} + \left(\sin\theta + \cos\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \bar{1}_{z_2}\right)$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_G + \bar{\omega}_{Carré} \times \overline{GA} = \begin{cases} -\dfrac{d}{2}\left(\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\right)\bar{1}_{x_2} \\ +\left(\left(L + \dfrac{d}{2}\right)\dot{\phi}\sin\alpha + \dfrac{d}{2}\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\right)\bar{1}_{y_2} \\ -\dfrac{d}{2}\dot{\phi}\sin\alpha\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\bar{1}_{z_2} \end{cases}$$

b. Par dérivation des coordonnées exprimées dans le repère $Ox_3y_3z_3$

$$\overline{OA} = \frac{d}{2}\bar{1}_{x_3} + \frac{d}{2}\bar{1}_{y_3} + \left(\frac{d}{2} + L\right)\bar{1}_{z_3} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = -\dot{\phi}\sin\alpha\cos\theta\,\bar{1}_{x_3} + \dot{\phi}\sin\alpha\sin\theta\,\bar{1}_{y_3} + \left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \underbrace{\left.\frac{d\overline{OA}}{dt}\right|_{x_3y_3z_3}}_{=0} + \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \overline{OA} = \begin{cases} \left(\left(\dfrac{d}{2} + L\right)\dot{\phi}\sin\alpha\sin\theta - \dfrac{d}{2}\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\right)\bar{1}_{x_3} \\ +\left(\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\dfrac{d}{2} + \left(\dfrac{d}{2} + L\right)\dot{\phi}\sin\alpha\cos\theta\right)\bar{1}_{y_3} \\ -\dfrac{d}{2}\dot{\phi}\sin\alpha\left(\cos\theta + \sin\theta\right)\bar{1}_{z_3} \end{cases}$$

---

b'. Par dérivation des coordonnées exprimées dans le repère $Ox_2y_2z_2$

$$\overline{OA} = \frac{d}{2}\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\bar{1}_{x_2} + \frac{d}{2}\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \left(\frac{d}{2} + L\right)\bar{1}_{z_2} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \dot{\phi}\cos\alpha\,\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \left.\frac{d\overline{OA}}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{OA} = \begin{cases} -\dfrac{d}{2}\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{x_2} \\ +\left(\left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\dfrac{d}{2}\left(\cos\theta - \sin\theta\right) + \dot{\phi}\sin\alpha\left(\dfrac{d}{2} + L\right)\right)\bar{1}_{y_2} \\ -\left(\dot{\phi}\sin\alpha\dfrac{d}{2}\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\right)\bar{1}_{z_2} \end{cases}$$

---

c. $$\bar{\omega}_{Cube} = -\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{Cube}}{dt}\right|_{rel \text{ dans } R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{\omega}_{Cube} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{R_2/R_0} = -\dot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \dot{\phi}\cos\alpha\,\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\ddot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_2} - \cos\alpha\sin\alpha\dot{\phi}^2\,\bar{1}_{y_2} + \left(\sin\alpha\dot{\phi}\dot{\theta} + \sin\alpha\cos\alpha\dot{\phi}^2\right)\bar{1}_{y_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\ddot{\phi}\sin\alpha\,\bar{1}_{x_2} + \sin\alpha\dot{\phi}\dot{\theta}\,\bar{1}_{y_2} + \left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_2}$$

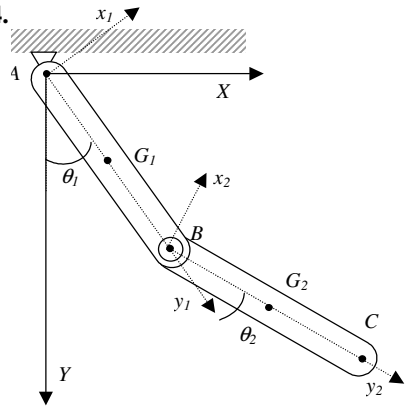
d. $$\bar{\omega}_{Cube} = -\sin\alpha\cos\theta\dot{\phi}\,\bar{1}_{x_3} + \sin\alpha\sin\theta\dot{\phi}\,\bar{1}_{y_3} + \left(\dot{\theta} + \cos\alpha\dot{\phi}\right)\bar{1}_{z_3} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0} = \bar{\omega}_{Cube}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{Cube}}{dt}\right|_{rel \text{ dans } R_3} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{Cube}}_{=0}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = -\sin\alpha\cos\theta\ddot{\phi}\,\bar{1}_{x_3} + \dot{\phi}\sin\alpha\sin\theta\dot{\theta}\,\bar{1}_{x_3} + \sin\alpha\sin\theta\ddot{\phi}\,\bar{1}_{y_3} + \sin\alpha\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\,\bar{1}_{y_3} + \left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{Cube} = \left(\sin\alpha\sin\theta\dot{\phi}\dot{\theta} - \sin\alpha\cos\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_{x_3} + \left(\sin\alpha\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta} + \sin\alpha\sin\theta\ddot{\phi}\right)\bar{1}_{y_3} + \left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos\alpha\right)\bar{1}_{z_3}$$

24.



$\bar{\omega}_1 = -\dot{\theta}_1 \bar{1}_z$ et $\bar{\omega}_2 = -\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\bar{1}_z$

Cinématique du solide

$$\begin{cases} \bar{v}_{G_1} = \underbrace{\bar{v}_A}_{=0} + \bar{\omega}_1 \times \overline{AG_1} = \dfrac{L}{2}\dot{\theta}_1 \bar{1}_{x_1} \\ \bar{a}_{G_1} = \underbrace{\bar{a}_A}_{=0} + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AG_1} + \bar{\omega}_1 \times \left(\bar{\omega}_1 \times \overline{AG_1}\right) = \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}_1 \bar{1}_{x_1} - \dfrac{L}{2}\dot{\theta}_1^2 \bar{1}_{y_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_{G_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{DG_2} = L\dot{\theta}_1 \bar{1}_{x_1} + \dfrac{L}{2}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\bar{1}_{x_2} \\ \quad = L\left(\dot{\theta}_1 + \cos\theta_2 \dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_{x_1} - L\left(\sin\theta_2 \dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_{y_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{G_2} = \bar{a}_B + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BG_2} + \bar{\omega}_2 \times \left(\bar{\omega}_2 \times \overline{BG_2}\right) \text{ avec } \bar{a}_B = L\ddot{\theta}_1 \bar{1}_{x_1} - L\dot{\theta}_1^2 \bar{1}_{y_1} \\ \bar{a}_{G_2} = L\ddot{\theta}_1 \bar{1}_{x_1} - L\dot{\theta}_1^2 \bar{1}_{y_1} + \dfrac{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2}{2} L\bar{1}_{x_2} - \dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2}{2} L\bar{1}_{y_2} \\ \quad = L\left(\ddot{\theta}_1 - \sin\theta_2 \dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2}{2} + \cos\theta_2 \dfrac{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2}{2}\right)\bar{1}_{x_1} - L\left(\dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_2 \dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2}{2} + \sin\theta_2 \dfrac{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2}{2}\right)\bar{1}_{y_1} \end{cases}$$

dérivée dans un repère absolu

$$\begin{cases} \overline{AG_1} = \dfrac{L}{2}\left(\sin\theta_1 \bar{1}_X + \cos\theta_1 \bar{1}_Y\right) \text{ et } \bar{v}_{G_1} = \left.\dfrac{d\overline{AG_1}}{dt}\right|_{OXY} = \dfrac{L}{2}\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \bar{1}_X - \dfrac{L}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \bar{1}_Y \\ \bar{a}_{G_1} = \left.\dfrac{d\bar{v}_{G_1}}{dt}\right|_{OXY} = \left(-\dfrac{L}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \dfrac{L}{2}\cos\theta_1\ddot{\theta}_1\right)\bar{1}_X - \left(\dfrac{L}{2}\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \dfrac{L}{2}\sin\theta_1\ddot{\theta}_1\right)\bar{1}_Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{AG_2} = L\bar{1}_{x_1} + \dfrac{L}{2}\bar{1}_{x_2} = L\left(\cos\theta_1 + \cos\dfrac{\left(\theta_1 + \theta_2\right)}{2}\right)\bar{1}_X + L\left(\sin\theta_1 + \sin\dfrac{\left(\theta_1 + \theta_2\right)}{2}\right)\bar{1}_Y \\ \bar{v}_{G_2} = \left.\dfrac{d\overline{AG_2}}{dt}\right|_{OXY} = L\left(\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_X - L\left(\sin\theta_1\dot{\theta}_1 + \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_Y \\ \bar{a}_{G_2} = \left.\dfrac{d\bar{v}_{G_2}}{dt}\right|_{OXY} = L\left(-\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_1\ddot{\theta}_1 - \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2}{2} + \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_X \\ \qquad - L\left(\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_1\ddot{\theta}_1 + \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2}{2} + \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\dfrac{\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)}{2}\right)\bar{1}_Y \end{cases}$$

Dérivée dans un repère relatif

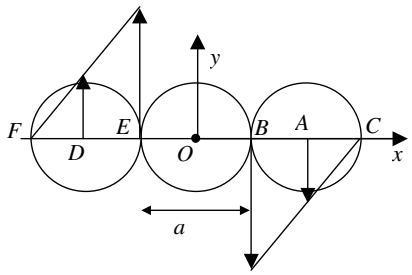
$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AG_1}=\dfrac{L}{2}\overline{1}_{y_1} \quad => \quad \overline{v}_{G_1}=\underbrace{\left.\dfrac{d\overline{AG_1}}{dt}\right|_{Ox_1y_1}}_{=0}+\overline{\omega}_1\times\overline{AG_1}=\dfrac{L}{2}\dot{\theta}_1\overline{1}_{x_1} \quad \text{et} \quad \overline{a}_{G_1}=\left.\dfrac{d\overline{v}_{G_1}}{dt}\right|_{Ox_1y_1}+\overline{\omega}_1\times\overline{v}_{G_1}=\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}_1\overline{1}_{x_1}-\dfrac{L}{2}\dot{\theta}_1^2\overline{1}_{y_1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AG_2}=L\overline{1}_{y_1}+\dfrac{L}{2}\overline{1}_{y_2}=\dfrac{L}{2}\sin\theta_2\,\overline{1}_{x_1}+\left(L+\dfrac{L}{2}\cos\theta_2\right)\overline{1}_{y_1}\\ \overline{v}_{G_2}=\left.\dfrac{d\overline{AG_2}}{dt}\right|_{Ox_1y_1}+\overline{\omega}_1\times\overline{AG_2}=L\left(\cos\theta_2\dfrac{\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)}{2}+\dot{\theta}_1\right)\overline{1}_{x_1}-L\sin\theta_2\dfrac{\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\right)}{2}\overline{1}_{y_1}\\ \overline{a}_{G_2}=\left.\dfrac{d\overline{v}_{G_2}}{dt}\right|_{Ox_1y_1}+\overline{\omega}_1\times\overline{v}_{G_2}\\ \quad =L\left(\ddot{\theta}_1-\sin\theta_2\dfrac{\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2}{2}+\cos\theta_2\dfrac{\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2}{2}\right)\overline{1}_{x_1}-L\left(\dot{\theta}_1^2+\cos\theta_2\dfrac{\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2}{2}+\sin\theta_2\dfrac{\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2}{2}\right)\overline{1}_{y_1}\end{array}\right.$$

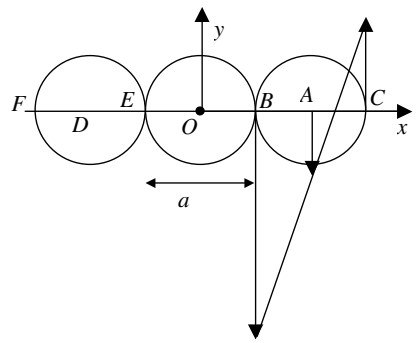
Vitesse d'entraînement et vitesse relative

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{v}_{G_2}=\left.\overline{v}_{G_2}\right|_{rel}+\left.\overline{v}_{G_2}\right|_{entr}=\underbrace{\dfrac{L}{2}\dot{\theta}_2\overline{1}_{y_2}}_{v_{rel}}+\underbrace{\left(\dot{\theta}_1\overline{1}_z\right)\times\left(\left(L+\dfrac{L}{2}\cos\theta_2\right)\overline{1}_{x_1}+\dfrac{L}{2}\sin\theta_2\,\overline{1}_{y_1}\right)}_{v_{entr}}\\ \quad =L\left(\dot{\theta}_1+\cos\theta_2\dfrac{\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2}{2}\right)\overline{1}_{x_1}-L\left(\sin\theta_2\dfrac{\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2}{2}\right)\overline{1}_{y_1}\end{array}\right.$$

25.



(a) $\overline{\omega}_S=0$



(b) $\overline{\omega}_S\neq 0$

(a) Le bras DOA tourne à la vitesse angulaire ω = 90 tours/min

$$\overline{\omega}_{S_{DOA}}=-\frac{90.2\pi}{60}\text{ rad/s }\overline{1}_z=-3\pi\text{ rad/s }\overline{1}_z$$

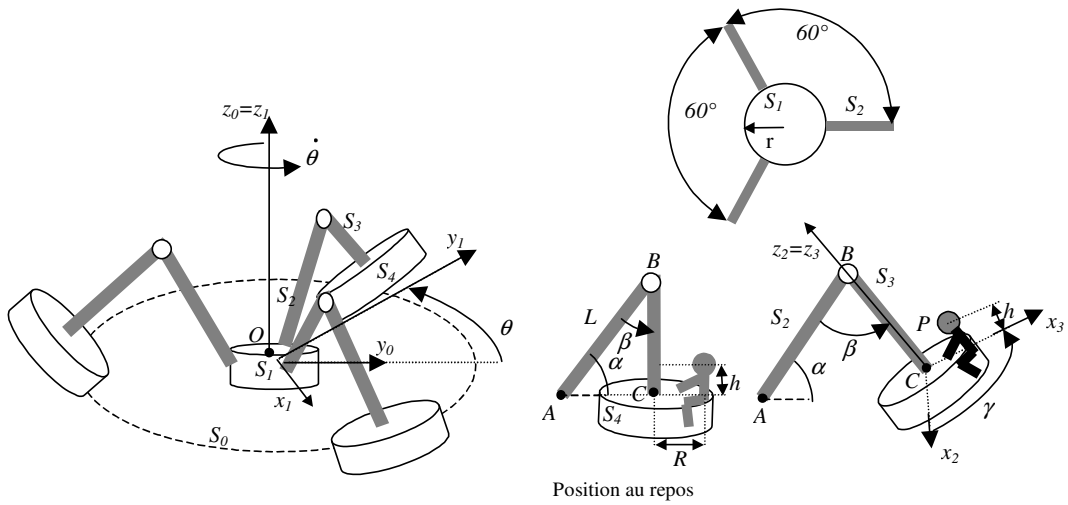
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overline{v}_{A\in S_{DOA}}=\overline{v}_O+\overline{\omega}_{S_{DOA}}\times\overline{OA}=-\omega_{S_{DOA}}a\overline{1}_y\\ \overline{v}_{A\in S_{BAC}}=\underbrace{\overline{v}_C}_{=0}+\overline{\omega}_{S_{BAC}}\times\overline{CA}=-\omega_{S_{BAC}}\dfrac{a}{2}\overline{1}_y\end{array}\right\}=>\omega_{S_{BAC}}=2\omega_{S_{DOA}}\\ \left.\begin{array}{l}\overline{v}_{B\in S_{BAC}}=\underbrace{\overline{v}_C}_{=0}+\overline{\omega}_{S_{BAC}}\times\overline{CB}=-\omega_{S_{BAC}}a\overline{1}_y\\ \overline{v}_{B\in S_{BOE}}=\underbrace{\overline{v}_O}_{=0}+\overline{\omega}_{S_{BOE}}\times\overline{OB}=-\omega_{S_{BOE}}\dfrac{a}{2}\overline{1}_y\end{array}\right\}=>2\omega_{S_{BAC}}=\omega_{S_{BOE}}\end{array}\right\}=>\left\{\begin{array}{l}\omega_{S_{BOE}}=4\omega_{S_{DOA}}\\ \overline{\omega}_{S_{BOE}}=-12\pi\text{ rad/s }\overline{1}_z=-37{,}7\text{ rad/s }\overline{1}_z\end{array}\right.$$

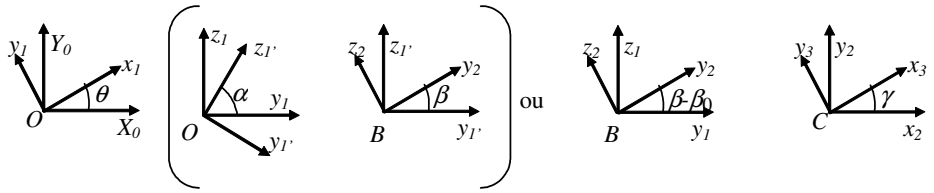
(b) Le bras DOA tourne à la vitesse angulaire ωDOA = 90 tours/min et le solide S à la vitesse ωS = 80 tours/min

$$\bar{\omega}_{S_{DOA}} = -3\pi \text{ rad/s } \bar{1}_z \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_S = \frac{80.2.\pi}{60} \text{ rad/s } \bar{1}_z = \frac{8\pi}{3} \text{ rad/s } \bar{1}_z \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{S_{BOE}} = -\omega_{S_{BOE}} \bar{1}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\bar{v}_{A\in S_{DOA}} = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{S_{DOA}} \times \overline{OA} = -\omega_{S_{DOA}} a \bar{1}_y \\
\bar{v}_{A\in S_{BAC}} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_{S_{BAC}} \times \overline{CA} = \left(\omega_S \dfrac{3a}{2} - \omega_{S_{BAC}} \dfrac{a}{2}\right)\bar{1}_y
\end{array}\right\} => 3\omega_S + 2\omega_{S_{DOA}} = \omega_{S_{BAC}} \\
\left.\begin{array}{l}
\bar{v}_{B\in S_{BAC}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{S_{BAC}} \times \overline{AB} = \left(-\omega_{S_{DOA}} a - \omega_{S_{BAC}} \dfrac{a}{2}\right)\bar{1}_y \\
\bar{v}_{B\in S_{BOE}} = \underbrace{\bar{v}_O}_{=0} + \bar{\omega}_{S_{BOE}} \times \overline{OB} = -\omega_{S_{BOE}} \dfrac{a}{2} \bar{1}_y
\end{array}\right\} => -2\omega_{S_{DOA}} - \omega_{S_{BAC}} = -\omega_{S_{BOE}}
\end{array}\right\} => \left\{\begin{array}{l}
\omega_{S_{BOE}} = 4\omega_{S_{DOA}} + 3\omega_S \\
\bar{\omega}_{S_{BOE}} = -600 \text{ t/min } \bar{1}_z \\
\bar{\omega}_{S_{BOE}} = -20\pi \text{ rad/s } \bar{1}_z
\end{array}\right.$$

26.





Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1} ;\ \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1} + \dot{\beta}\bar{1}_{x_1} ;\ \bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1} + \dot{\beta}\bar{1}_{x_1} + \dot{\gamma}\bar{1}_{z_2}$$

Dans le repère $Ox_1y_1z_1$

1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$$\bar{\omega}_{S_4} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1} + \dot{\beta}\bar{1}_{x_1} + \dot{\gamma}\bar{1}_{z_2} = \dot{\beta}\bar{1}_{x_1} - \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\bar{1}_{y_1} + \left[\dot{\theta} + \cos(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\right]\bar{1}_{z_1}$$

3) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_1 :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1}$$

4) Vitesse de P

$\overline{v_P} = \overline{v_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}$

avec $\overline{CP} = R\cos\gamma\,\overline{1}_{x_1} + \left(R\sin\gamma\cos(\beta-\beta_0) - h\sin(\beta-\beta_0)\right)\overline{1}_{y_1} + \left(h\cos(\beta-\beta_0) + R\sin\gamma\sin(\beta-\beta_0)\right)\overline{1}_{z_1}$

$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BC}$

avec $\overline{\omega}_{S_2} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{BC} = -L\sin\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_1} - \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_1}\right)$

$\overline{v_B} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_1 \times \overline{OB} = -(r + L\cos\alpha)\dot{\theta}\,\overline{1}_{x_1}$

avec $\overline{\omega}_{S_1} = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1}$ et $\overline{OB} = (r + L\cos\alpha)\,\overline{1}_{y_1} + L\cos\alpha\,\overline{1}_{z_1}$

5) Accélération angulaire du solide S_4.

$$\overline{\varepsilon}_{S_4} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_4}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\omega}_{S_4} = \left(\ddot{\beta} + \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_1} + \left(\dot{\beta}\dot{\theta} - \cos(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\beta}\right)\overline{1}_{y_1} - \sin(\beta-\beta_0)\dot{\gamma}\dot{\beta}\,\overline{1}_{z_1}$$

6) Accélération de P dans le repère $Ox_1y_1z_1$

$\overline{a_P} = \overline{a_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \left(\overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}\right) + \overline{\varepsilon}_{S_4} \times \overline{CP}$

$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{\omega}_{S_2} \times \left(\overline{\omega}_{S_2} \times \overline{BC}\right) + \overline{\varepsilon}_{S_2} \times \overline{BC}$ avec $\overline{\varepsilon}_{S_2} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_2}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\omega}_{S_2} = \ddot{\beta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\beta}\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_1}$

$\overline{a_B} = \overline{a_0} + \overline{\omega}_{S_1} \times \left(\overline{\omega}_{S_1} \times \overline{OB}\right) + \overline{\varepsilon}_{S_1} \times \overline{OB}$ avec $\overline{\varepsilon}_{S_1} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_1}}{dt}\right|_{rel} + \underbrace{\overline{\omega}_{R_1/R_0} \times \overline{\omega}_{S_1}}_{=0} = 0$ et O fixe : $\overline{a_0} = 0$

Dans le repère $Cx_2y_2z_2$

1) Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :

$\overline{\omega}_{S_4} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_2} + \sin(\beta-\beta_0)\dot{\theta}\,\overline{1}_{y_2} + \left[\dot{\gamma} + \cos(\beta-\beta_0)\dot{\theta}\right]\overline{1}_{z_2}$

3) Vecteur de Darboux pour dériver les axes du Repère R_2 :

$\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\,\overline{1}_{z_1} + \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_1}$

4) Vitesse de P

$\overline{v_P} = \overline{v_C} + \overline{\omega}_{S_4} \times \overline{CP}$ avec $\overline{CP} = R\left(\cos\gamma\,\overline{1}_{x_2} + \sin\gamma\,\overline{1}_{y_2}\right) + h\,\overline{1}_{z_2}$

$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega}_{S_2} \times \overline{BC}$ avec $\overline{\omega}_{S_2} = \dot{\beta}\,\overline{1}_{x_2} + \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et $\overline{BC} = -L\sin\alpha\,\overline{1}_{z_2}$

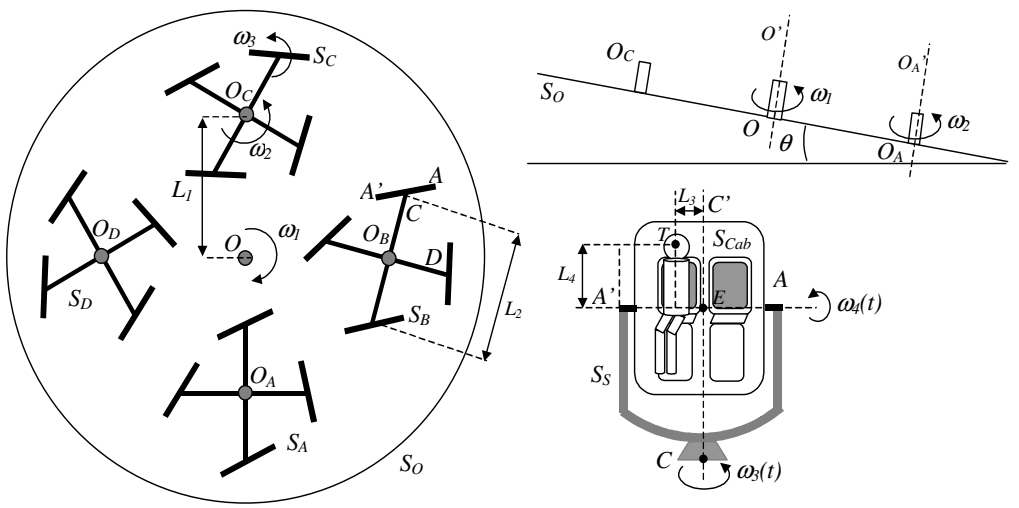
$\overline{v_B} = \overline{v_O} + \overline{\omega}_{S_1} \times \overline{OB} = -(r + L\cos\alpha)\dot{\theta}\,\overline{1}_{x_2}$ avec $\overline{\omega}_1 = \dot{\theta}\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$ et

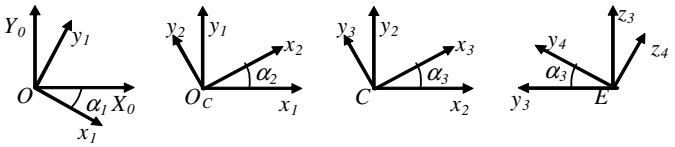
$\overline{OB} = (r + L\cos\alpha)\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2} - \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2}\right) + L\sin\alpha\left(\cos(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{z_2} + \sin(\beta-\beta_0)\,\overline{1}_{y_2}\right)$

5) Accélération angulaire du solide S_4.

$$\overline{\varepsilon}_{S_4} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{S_4}}{dt}\right|_{rel} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{\omega}_{S_4}$$

27.





Vecteur de Darboux pour les dérivées des axes :

$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_{z_1}$; $\bar{\omega}_{R_2/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2)\bar{1}_{z_2}$; $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{1}_{z_3}$; $\bar{\omega}_{R_4/R_0} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{1}_{z_3} + \omega_4 \bar{1}_{x_3}$

1) <u>Vecteur vitesse angulaire du solide S_4 :</u>

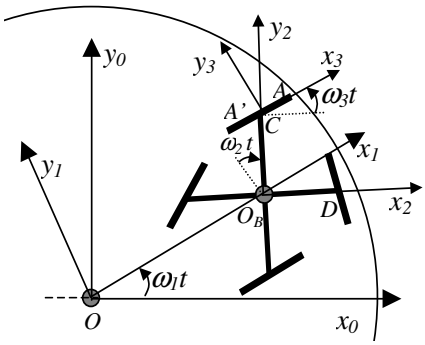
$$\bar{\omega}_{S_{Cab}} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4$$

$$\bar{\omega}_{S_{Cab}} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{1}_{z_3} + \omega_4 \bar{1}_{x_3}$$

<u>Vecteur accélération angulaire du solide S_4 :</u>

$$\bar{\varepsilon}_{S_{Cab}} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S_{Cab}}}{dt}\right|_{rel} + \bar{\omega}_{R_3/R_0} \times \bar{\omega}_{S_{Cab}}$$

$$= \dot{\omega}_3 \bar{1}_{z_3} + \dot{\omega}_4 \bar{1}_{x_3} + \omega_4 (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{1}_{y_3}$$



2) $\overline{v_{O_B}} = \overline{v_O} + \bar{\omega}_{S_0} \times \overline{OO_B} = -\omega_1 L_1 \bar{1}_{y_1}$ avec $\bar{\omega}_{S_0} = -\omega_1 \bar{1}_{z_3}$ et $\overline{OO_B} = L_1 \bar{1}_{x_1}$

$$\overline{v_C} = \overline{v_{O_B}} + \bar{\omega}_{S_B} \times \overline{O_B C} = -L_1 \omega_1 \underbrace{\left(\cos(\omega_2 t)\bar{1}_{y_2} + \sin(\omega_2 t)\bar{1}_{x_2}\right)}_{\bar{1}_{y_1}} - \frac{L_2}{2}(-\omega_1 + \omega_2)\bar{1}_{x_2}$$

avec $\bar{\omega}_{S_S} = (-\omega_1 + \omega_2)\bar{1}_{z_2}$ et $\overline{O_B C} = \frac{L_2}{2}\bar{1}_{y_2}$

$\overline{v_E} = \overline{v_C}$ car $\overline{EC}$ est l'axe de rotation du solide S_S

$\overline{v_T} = \overline{v_E} + \bar{\omega}_{Cab} \times \overline{ET}$ avec $\overline{v_C} = \overline{v_E}$ et $\overline{ET} = -L_3 \bar{1}_{x_4} + L_4 \bar{1}_{z_4} = -L_3 \bar{1}_{x_3} + L_4 \left(\cos(\omega_4 t)\bar{1}_{z_3} - \sin(\omega_4 t)\bar{1}_{y_3}\right)$

$$\bar{\omega}_{Cab} \times \overline{ET} = L_4 \sin(\omega_4 t)(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{1}_{x_3} - \left(L_4 \cos(\omega_4 t)\omega_4 + L_3(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\right)\bar{1}_{y_3} - L_4 \sin(\omega_4 t)\omega_4 \bar{1}_{z_3}$$

$$\overline{v_T} = A(t)\overline{1}_{x_2} + B(t)\overline{1}_{y_2} + C(t)\overline{1}_{z_2} =$$

$$\begin{pmatrix} -L_1\sin(\omega_2 t)\sin(\omega_3 t)\omega_1 - L_4\cos(\omega_4 t)\sin(\omega_3 t)\omega_4 - \frac{L_2}{2}\sin(\omega_3 t)(-\omega_1+\omega_2) \\ -\left(L_4\sin(\omega_4 t)\cos(\omega_3 t)\sin(\omega_3 t) + L_3\sin(\omega_3 t)\right)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) \end{pmatrix}\overline{1}_{x_2}$$

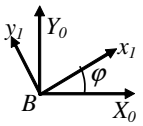
$$\begin{pmatrix} -L_1\cos(\omega_2 t)\omega_1 + L_4\cos(\omega_4 t)\cos(\omega_3 t)\omega_4 \\ +\left(L_3\cos(\omega_3 t) - L_4\sin(\omega_4 t)\sin(\omega_3 t)\right)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) \end{pmatrix}\overline{1}_{y_2}$$

$$-L_4\sin(\omega_4 t)\omega_4\,\overline{1}_{z_2}$$

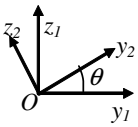
$$\overline{a_T} = \left.\frac{d\overline{v_T}}{dt}\right|_{R_2-rel} + \overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{v_T} = \dot{A}(t)\overline{1}_{x_2} + \dot{B}(t)\overline{1}_{y_2} + \dot{C}(t)\overline{1}_{z_2} + (-\omega_1+\omega_2)\overline{1}_{z_2}\times\overline{v_T}$$

---

28. 1. R0 : Repère OX0Y0Z0 fixe.



R1 : Repère Ox1y1z1 tournant autour de l'axe Z0 (CC)= z1 ($\overline{\omega}_{R_1/R_0} = q\overline{1}_{z_1}$) +
Repère R1' translaté de b suivant l'axe x.

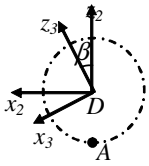


R2 : Repère Ox2y2z2 tournant autour de l'axe x1= x2

$$\overline{\omega}_{R_2/R_0} = \underbrace{\overline{\omega}_{R_2/R_1}}_{\dot{\theta}\overline{1}_{x_1}} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + q\overline{1}_{z_1}$$

( )

R3 : Repère Gx3y3z3 lié au disque et tournant avec R2 et autour de y2 = y3



($\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + q\overline{1}_{z_1} + p\overline{1}_{y_2}$)

Comme le repère R3 est complètement lié au disque on peur écrire :

$$\overline{\omega}_{disque} = \overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + q\overline{1}_{z_1} + p\overline{1}_{y_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\omega}_{disque} = \dot{\theta}\overline{1}_{x_2} + (q\sin\theta + p)\overline{1}_{y_2} + q\cos\theta\overline{1}_{z_2}} = \dot{\theta}\overline{1}_{x_1} + p\cos\theta\overline{1}_{y_1} + (p\sin\theta + q)\overline{1}_{z_1}$$

2.

$$\overline{\varepsilon}_{disque} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque}}{dt}\right|_{abs} = \left.\frac{d\overline{\omega}_{disque/R_2}}{dt}\right|_{R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0}\times\overline{\omega}_{disque/R_2}$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon}_{disque} = \left(\ddot{\theta} - pq\cos\theta\right)\overline{1}_{x_2} + \left(\dot{p} + \dot{q}\sin\theta + q\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_{y_2} + \left(\dot{q}\cos\theta - q\sin\theta\dot{\theta} + p\dot{\theta}\right)\overline{1}_{z_2}}$$

3.

$$\overline{v}_O = \underbrace{\overline{v}_B}_{=0} + \overline{\omega}_{S_1}\times\underbrace{\overline{BO}}_{-b\overline{1}_{x_1}} = -bq\overline{1}_{y_1} = -bq\cos\theta\overline{1}_{y_2} + bq\sin\theta\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{v}_D = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{S_2}\times\underbrace{\overline{OD}}_{a\overline{1}_{y_2}} = -aq\cos\theta\overline{1}_{x_2} - bq\cos\theta\overline{1}_{y_2} + \left(bq\sin\theta + a\dot{\theta}\right)\overline{1}_{z_2}$$

$$\overline{v}_A = \overline{v}_D + \overline{\omega}_{S_3}\times\underbrace{\overline{DA}}_{-R\overline{1}_{z_2}} = \boxed{-\left(aq\cos\theta + (q\sin\theta + p)R\right)\overline{1}_{x_2} + \left(R\dot{\theta} - bq\cos\theta\right)\overline{1}_{y_2} + \left(bq\sin\theta + a\dot{\theta}\right)\overline{1}_{z_2}}$$

où D est le centre du disque ($\overline{AD} // \overline{1}_{z_2}$)

---

4. $\bar{\varepsilon}_1 = \dot{q}\,\bar{1}_{z_1}$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \ddot{\theta}\,\bar{1}_{x_2} + \left(\dot{q}\sin\theta + q\cos\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{y_2} + \left(\dot{q}\cos\theta - q\sin\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{a}_O = \underbrace{\bar{a}_B}_{=0} + \bar{\varepsilon}_{S_1}\times\underbrace{\overline{BO}}_{-b\bar{1}_{x_1}} + \bar{\omega}_{S_1}\times\left(\bar{\omega}_{S_1}\times\overline{BO}\right) = -b\dot{q}\,\bar{1}_{y_1} + bq^2\,\bar{1}_{x_1} = -b\dot{q}\cos\theta\,\bar{1}_{y_2} + b\dot{q}\sin\theta\,\bar{1}_{z_2} + bq^2\,\bar{1}_{x_2}$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_{S_2}\times\underbrace{\overline{OD}}_{a\bar{1}_{y_2}} + \bar{\omega}_{S_2}\times\left(\bar{\omega}_{S_2}\times\overline{OD}\right) = +bq^2\,\bar{1}_{x_2} - b\dot{q}\cos\theta\,\bar{1}_{y_2} + b\dot{q}\sin\theta\,\bar{1}_{z_2}$$

$$a\ddot{\theta}\,\bar{1}_{z_2} - a\left(\dot{q}\cos\theta - q\sin\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_2}$$
$$+a\dot{\theta}q\sin\theta\,\bar{1}_{x_2} - \left(a\dot{\theta}^2 + aq^2\cos^2\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \left(aq^2\cos\theta\sin\theta\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{a}_D = \left(bq^2 - a\dot{q}\cos\theta + 2aq\sin\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_2} - \left(b\dot{q}\cos\theta + a\dot{\theta}^2 + aq^2\cos^2\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \left(b\dot{q}\sin\theta + aq^2\cos\theta\sin\theta + a\ddot{\theta}\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \bar{\varepsilon}_{S_3}\times\underbrace{\overline{DA}}_{-R\bar{1}_{z_2}} + \bar{\omega}_{S_3}\times\left(\bar{\omega}_{S_3}\times\overline{DA}\right)$$

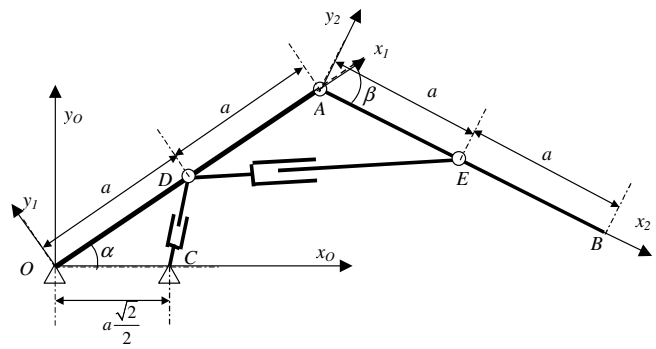
$$\left(bq^2 - a\dot{q}\cos\theta + 2aq\sin\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_2} - \left(b\dot{q}\cos\theta + a\dot{\theta}^2 + aq^2\cos^2\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \left(b\dot{q}\sin\theta + aq^2\cos\theta\sin\theta + a\ddot{\theta}\right)\bar{1}_{z_2}$$
$$-\left(R\dot{p} + R\dot{q}\sin\theta + Rq\cos\theta\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_2} + \left(R\ddot{\theta} - Rpq\cos\theta\right)\bar{1}_{y_2}$$
$$-R\dot{\theta}q\cos\theta\,\bar{1}_{x_2} - \left(Rq^2\cos\theta\sin\theta + Rpq\cos\theta\right)\bar{1}_{y_2} + \left(Rq^2\sin^2\theta + 2R\sin\theta qp + Rp^2 + R\dot{\theta}^2\right)\bar{1}_{z_2}$$
$$= \left(2aq\sin\theta\dot{\theta} - 2Rq\cos\theta\dot{\theta} + bq^2 - R\dot{p} - R\dot{q}\sin\theta - a\dot{q}\cos\theta\right)\bar{1}_{x_2}$$
$$+\left(-a\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta} - 2Rpq\cos\theta - Rq^2\cos\theta\sin\theta - aq^2\cos^2\theta - b\dot{q}\cos\theta\right)\bar{1}_{y_2}$$
$$+\left(R\dot{\theta}^2 + a\ddot{\theta} + 2R\sin\theta qp + aq^2\cos\theta\sin\theta + Rq^2\sin^2\theta + Rp^2 + b\dot{q}\sin\theta\right)\bar{1}_{z_2}$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_D + \bar{\omega}_{S_3}\times\overline{DP} = \left(-aq\cos\theta + \left(q\sin\theta + p\right)R\cos\beta\right)\bar{1}_{x_2} + \left(-bq\cos\theta - R\dot{\theta}\cos\beta + q\cos\theta R\sin\beta\right)\bar{1}_{y_2}$$
$$+\left(bq\sin\theta + a\dot{\theta} - \left(q\sin\theta + p\right)R\sin\beta\right)\bar{1}_{z_2} \Rightarrow \bar{v}_{P/\beta=\pi} = \bar{v}_A$$

$$\bar{a}_P = \left.\frac{d\bar{v}_P}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0}\times\bar{v}_P = \left(aq\sin\theta\dot{\theta} - a\dot{q}\cos\theta + \left(R\dot{p} + Rq\cos\theta\dot{\theta} + R\dot{q}\sin\theta\right)\cos\beta - R\left(q\sin\theta + p\right)\sin\beta\dot{\beta}\right)\bar{1}_{x_2}$$
$$+\left(-b\dot{q}\cos\theta + bq\sin\theta\dot{\theta} - R\ddot{\theta}\cos\beta + R\dot{\theta}\sin\beta\dot{\beta} + R\dot{q}\cos\theta\sin\beta - Rq\sin\theta\dot{\theta}\sin\beta + Rq\cos\theta\cos\beta\dot{\beta}\right)\bar{1}_{y_2}$$
$$+\left(a\ddot{\theta} + bq\cos\theta\dot{\theta} + b\dot{q}\sin\theta - \left(R\dot{p} - Rq\cos\theta\dot{\theta} - R\dot{q}\sin\theta\right)\sin\beta - R\left(q\sin\theta + p\right)\cos\beta\dot{\beta}\right)\bar{1}_{z_2}$$
$$+\begin{vmatrix} \bar{1}_{x_2} & \bar{1}_{y_2} & \bar{1}_{z_2} \\ \dot{\theta} & q\sin\theta & q\cos\theta \\ \left(\left(p + q\sin\theta\right)R\cos\beta - aq\cos\theta\right) & \left(-bq\cos\theta - R\dot{\theta}\cos\beta + q\sin\theta sin\beta\right) & \left(a\dot{\theta} + bq\sin\theta - \left(p + q\sin\theta\right)R\sin\beta\right) \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{P(\beta=\pi)} =$$
$$\left(2aq\sin\theta\dot{\theta} - 2Rq\cos\theta\dot{\theta} + bq^2 - R\dot{p} - R\dot{q}\sin\theta - a\dot{q}\cos\theta\right)\bar{1}_{x_2}$$
$$+\left(-a\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta} - 2Rpq\cos\theta - Rq^2\cos\theta\sin\theta - aq^2\cos^2\theta - b\dot{q}\cos\theta\right)\bar{1}_{y_2}$$
$$+\left(+R\dot{\theta}^2 + a\ddot{\theta} + 2Rpq\sin\theta + aq^2\sin\theta\cos\theta + Rq^2\sin^2\theta + Rp^2 + b\dot{q}\sin\theta\right)\bar{1}_{z_2}$$

29.



$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{\omega}_{OA} \times \overline{OA} = 2a\dot{\alpha}\,\bar{1}_{y_1} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{OA} = \dot{\alpha}\,\bar{1}_z$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB} = 2a\dot{\alpha}\,\bar{1}_{y_1} + 2a\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\bar{1}_{y_2} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{AB} = \left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\bar{1}_z$$

$$\bar{v}_B = 2a\dot{\alpha}\,\bar{1}_{y_1} + 2a\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\left(\sin\beta\,\bar{1}_{x_1} + \cos\beta\,\bar{1}_{y_1}\right) = 2a\sin\beta\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\bar{1}_{x_1} + 2a\left(\dot{\alpha} + \cos\beta\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\right)\bar{1}_{y_1}$$

Pour remplacer les vitesses angulaires $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ en fonction de V :

$$\left\|\overline{CD}\right\|^2 = a^2 + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2aa\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = a^2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)$$

$$=> \frac{\mathrm{d}\left\|\overline{CD}\right\|}{\mathrm{dt}} = V => 2\left\|\overline{CD}\right\|V = \sqrt{2}a^2\sin\alpha\dot{\alpha} => \boxed{\dot{\alpha} = \frac{V\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{a\sin\alpha}}$$

$$\left\|\overline{DE}\right\|^2 = 2a^2\left(1 + \cos\beta\right) \;=>\; \frac{\mathrm{d}\left\|\overline{DE}\right\|}{\mathrm{dt}} = V => 2\left\|\overline{DE}\right\|V = -2a^2\sin\beta\dot{\beta} => \boxed{\dot{\beta} = \frac{-V\sqrt{2\left(1 + \cos\beta\right)}}{a\sin\beta}}$$

Autre méthode : En considérant que la vitesse de D est perpendiculaire à OD, on peut calculer la vitesse de sortie du vérin (V) comme étant la projection de la vitesse de D sur l'axe du vérin (CD). Ce qui revient au même que de décomposer la vitesse du point D par rapport au point C, avec une vitesse relative dans l'axe CD et une vitesse de rotation autour de C avec CD fixe. La composée de ces deux vitesses doit donner la vitesse de rotation de D autour de O.

$V = v_D \sin\gamma$ avec γ l'angle ODC. Par la règle des sinus : $\dfrac{\sin\gamma}{\left\|\overline{OC}\right\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\left\|\overline{CD}\right\|} => V = a\dot{\alpha}.\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}$

$V = v_{E\,rel}\sin\dfrac{\beta}{2}$ avec $\dfrac{\beta}{2}$ l'angle DEA. $=> V = -a\dot{\beta}\sin\dfrac{\beta}{2} => \dot{\beta} = \dfrac{-V}{a\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{-V\,2\cos\frac{\beta}{2}}{a2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \dfrac{-V\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\beta}}{a\sin\beta}$

$$=> \bar{v}_B = 2\sqrt{2}V\sin\beta\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{\left(1 + \cos\beta\right)}}{\sin\beta}\right)\bar{1}_{x_1}$$

$$+2\sqrt{2}V\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{\sin\alpha} + \cos\beta\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\right)}}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{\left(1 + \cos\beta\right)}}{\sin\beta}\right)\right)\bar{1}_{y_1}$$

30.

R1/R0 :Repère incliné sur le rotor 1. $\bar{\omega}_{R_1/R_0} = 0$

R2/R1 :Repère suivant la rotation du rotor. x2 fixé sur le bras S1

$\bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\beta}\,\bar{1}_{z_2}$

R3/R2 :Repère incliné sur le rotor 2. $\bar{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\beta}\,\bar{1}_{z_2}$ et $\bar{1}_{z_2} = \sin\alpha_2\,\bar{1}_{x_3} + \cos\alpha_2\,\bar{1}_{z_3}$

R4/R3 :Repère suivant la rotation du rotor 2. x4 fixé sur le bras S3

$\bar{\omega}_{R_4/R_0} = \dot{\beta}\,\bar{1}_{z_2} + \dot{\theta}\,\bar{1}_{z_3}$

R5/R4 : Repère suivant la rotation de la nacelle S3

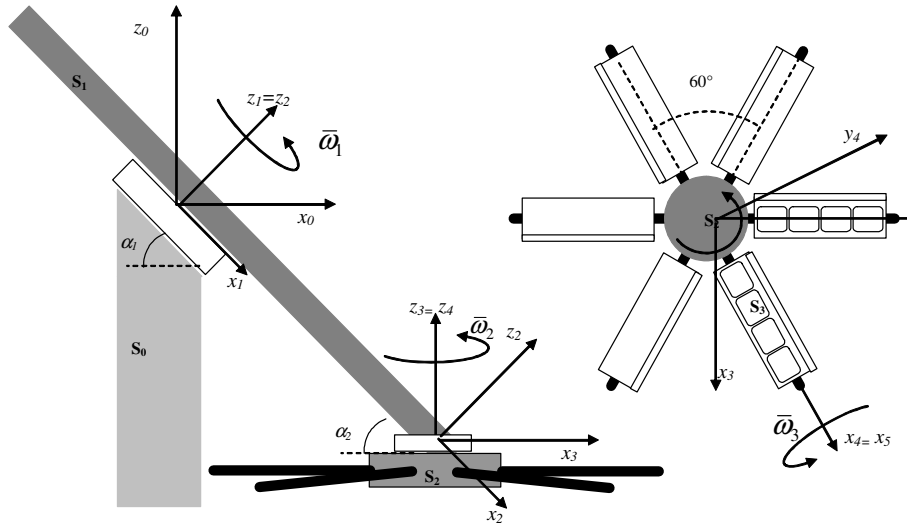
$\bar{\omega}_{R_5/R_0} = \dot{\beta}\,\bar{1}_{z_2} + \dot{\theta}\,\bar{1}_{z_3} + \dot{\varphi}\,\bar{1}_{x_4}$ et $\bar{1}_{x_4} = \cos(\omega_2 t)\,\bar{1}_{x_3} + \sin(\omega_2 t)\,\bar{1}_{y_3}$

avec $\omega_1 = \dot{\beta};\ \omega_2 = \dot{\theta};\ \omega_3 = \dot{\varphi}$ avec $\theta = \omega_2 t$

Comme le repère R5 est entièrement lié à la nacelle étudiée, la vitesse angulaire de la nacelle est :

$\bar{\omega}_{S_3} = \bar{\omega}_{R_5/R_0} = \omega_1\,\bar{1}_{z_2} + \omega_2\,\bar{1}_{z_3} + \omega_3\,\bar{1}_{x_4}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{\omega}_{S_3} = \left(\sin\alpha_2\omega_1 + \cos(\omega_2 t)\,\omega_3\right)\bar{1}_{x_3} + \sin(\omega_2 t)\,\omega_3\,\bar{1}_{y_3} + \left(\cos\alpha_2\omega_1 + \omega_2\right)\bar{1}_{z_3}}$



$$\bar{\varepsilon}_{S_3} = \frac{d\bar{\omega}_{S_3}}{dt} = \left.\frac{d\bar{\omega}_{S_3}}{dt}\right|_{R_3} + \bar{\omega}_{R_3/R_0}\times\bar{\omega}_{S_3} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_{R_3/R_0}\times\bar{\omega}_{S_3} = \bar{\omega}_{R_3/R_0}\times\left(\bar{\omega}_{R_5/R_3} + \bar{\omega}_{R_3/R_0}\right) = \bar{\omega}_{R_3/R_0}\times\bar{\omega}_{R_5/R_3} =$$

$$= -\cos\alpha_2\sin(\omega_2 t)\,\omega_1\omega_3\,\bar{1}_{x_3} + \omega_1\left(\cos\alpha_2\cos(\omega_2 t)\,\omega_3 - \sin\alpha_2\omega_2\right)\bar{1}_{y_3} + \sin\alpha_2\sin(\omega_2 t)\,\omega_1\omega_3\,\bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{S_3} = \left(\cos(\omega_2 t)\,\dot{\omega}_3 - \sin(\omega_2 t)\,\omega_2\omega_3 - \cos\alpha_2\sin(\omega_2 t)\,\omega_1\omega_3\right)\bar{1}_{x_3}$$
$$+\left(\cos(\omega_2 t)\,\omega_2\omega_3 + \sin(\omega_2 t)\,\dot{\omega}_3 + \cos\alpha_2\cos(\omega_2 t)\,\omega_1\omega_3 - \sin\alpha_2\omega_1\omega_2\right)\bar{1}_{y_3}$$
$$+\left(\sin\alpha_2\sin(\omega_2 t)\,\omega_1\omega_3\right)\bar{1}_{z_3}$$

---

31. 1. $R1(xyz)$ repère lié à l'axe : $\bar{\omega}_{R1/R0} = \Omega\,\bar{1}_z$

$R2(x_2 y_2 z_2)$ repère lié au panneau A : $\bar{\omega}_{R2/R1} = \omega_0\,\bar{1}_x \Rightarrow \bar{\omega}_{R2/R0} = \Omega\,\bar{1}_z + \omega_0\,\bar{1}_x$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \underbrace{\left.\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right|_{R1}}_{=0} + \bar{\omega}_{R1/R0}\times\bar{\omega} \Rightarrow \boxed{\bar{\varepsilon} = \omega_0\Omega\,\bar{1}_y}$$

---

2. $\overline{\omega}_{R1/R0} = \Omega \overline{1}_z = \overline{\omega}_{tige}$

$\overline{\omega}_{R2/R0} = \Omega \overline{1}_z + \omega_0 \overline{1}_x = \overline{\omega}_{plaque} \Rightarrow \overline{\varepsilon}_{plaque} = \omega_0 \Omega \overline{1}_y$

$\overline{v}_P = \overline{v}_{Q(a+b,0,0)} + \overline{\omega}_{plaque} \times \overline{QP} = \Omega(a+b)\overline{1}_y + \Omega c\left(-\cos\beta \overline{1}_x\right) + \omega_0 c\left(\cos\beta \overline{1}_z - \sin\beta \overline{1}_y\right)$

$\Rightarrow \boxed{\overline{v}_P = -\Omega c \cos\beta \overline{1}_x + \left(\Omega(a+b) - \omega_0 c \sin\beta\right)\overline{1}_y + \omega_0 c \cos\beta \overline{1}_z}$

avec $\begin{cases} \overline{v}_{Q(a+b,0,0)} = \overline{v}_O + \overline{\omega}_{tige} \times \overline{OQ} = \Omega(a+b)\overline{1}_y \\ \overline{QP} = c\overline{1}_{y_2} = c\left(\cos\beta \overline{1}_y + \sin\beta \overline{1}_z\right) \end{cases}$

3. $\overline{a}_P = \left.\dfrac{d\overline{v}_P}{dt}\right|_{R1} + \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{v}_P = \left[\Omega c \sin\beta \omega_0 \overline{1}_x - \omega_0^2 c \cos\beta \overline{1}_y - \omega_0^2 c \sin\beta \overline{1}_z\right] - \Omega\Omega c \cos\beta \overline{1}_y - \Omega\left(\Omega(a+b) - \omega_0 c \sin\beta\right)\overline{1}_x$

$\Rightarrow \overline{a}_P = \left[2\Omega c \sin\beta \omega_0 - \Omega^2(a+b)\right]\overline{1}_x - \left[\omega_0^2 c \cos\beta + \Omega^2 c \cos\beta\right]\overline{1}_y - \omega_0^2 c \sin\beta \overline{1}_z$

ou

$\overline{a}_P = \overline{a}_Q + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{QP} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_2 \times \overline{QP}$

$\overline{a}_P = \left[-\Omega^2(a+b)\overline{1}_x\right] + \left[\omega_0 \Omega c \sin\beta \overline{1}_x\right] + \left[-\Omega^2 c \cos\beta \overline{1}_y + \left(\Omega(\omega_0 c \sin\beta)\overline{1}_x + \omega_0(-\omega_0 c \sin\beta)\overline{1}_z\right) - \omega_0^2 c \cos\beta \overline{1}_y\right]$

$\Rightarrow \overline{a}_P = \left[2\omega_0 \Omega c \sin\beta - \Omega^2(a+b)\right]\overline{1}_x - \left[\Omega^2 c \cos\beta + \omega_0^2 c \cos\beta\right]\overline{1}_y - \left[\omega_0^2 c \sin\beta\right]\overline{1}_z$

avec $\overline{a}_Q = \overline{a}_O + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OQ} + \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_1 \times \overline{OQ} = -\Omega^2(a+b)\overline{1}_x$ où $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{a}_O = 0$

$\Rightarrow \boxed{\left.\overline{a}_P\right|_{\beta=90°} = \left[2\omega_0 \Omega c - \Omega^2(a+b)\right]\overline{1}_x - \omega_0^2 c \overline{1}_z}$

Tenseur d'inertie

Formulaire

Element du tenseur d'inertie : $I^{\alpha\beta} = \int_{système} \left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta \right) dm$
Changement d'axe : $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$
Axes principaux : $tg 2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$
Steiner : $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta \right)$

Rappel : avec l'axe z = axe de révolution

$$3D \ : \ I_z = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm = I_x + I_y - 2I_{xy}$$

$$\Rightarrow I_z \underbrace{=}_{z\text{=axe de révolution}} 2I_x - 2I_{xy} \underbrace{=}_{2D(z=0)} 2I_x \quad \text{et} \quad I_x \underbrace{=}_{z\text{=axe de révolution}} \frac{I_z}{2} + I_{xy} \underbrace{=}_{2D(z=0)} \frac{I_z}{2}$$

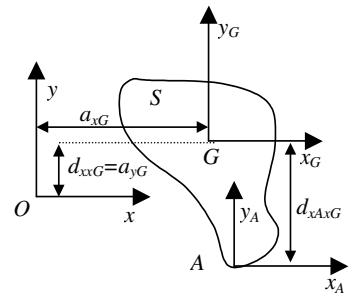
Rappel : Utilisation de la formule de Steiner

$$P_{xy} = \int xydm = \int \left(x_G + a_{x_G} \right)\left(y_G + a_{y_G} \right) dm = P_{x_G y_G} + ma_{x_G} a_{y_G} + a_{x_G} \underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{y_G} \underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

ou $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta \right) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - Ma^x a^y \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + ma_{x_G} a_{y_G}$ avec $x = x_G + a^x$

En pratique :

$$\overline{OG}\left(a_{x_G}, a_{y_G}, a_{z_G} \right) \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m\left(a_{y_G}^2 + a_{z_G}^2 \right) \text{ et } P_{xy} = P_{x_G y_G} + m\left(a_{x_G} a_{y_G} \right)$$



Calcul du moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe x passant par O :

$$I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2$$

Parfois, il est plus facile de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par G :

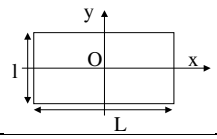
$$I_{x_A} = I_{x_G} + md_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m\left(d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2 \right)$$

Des animations matlab sont disponibles sur le site : http://beams.ulb.ac.be/beams/teaching/meca200/matlab.html

---

1. 1.

$$I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho \frac{Ll^3}{12} = m\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m\frac{L^2}{12}$$



---

2. $I_x^{(a)} = \rho\dfrac{(2a)(a)^3}{12} = \dfrac{1}{6}\rho a^4$; $I_y^{(a)} = \rho\dfrac{(a)(2a)^3}{12} = \dfrac{2}{3}\rho a^4$

$$I_x^{(b)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}\rho a^4 \;;\; I_y^{(b)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(c)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)(a)^2\right] = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;\; I_y^{(c)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(d)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2\right]\right) = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;$$

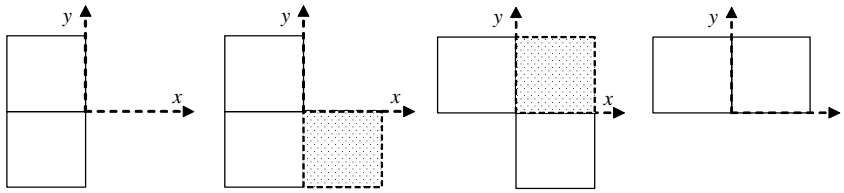
$$I_y^{(d)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\right) = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(e)} = \rho\frac{(a)(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}\rho a^4 \;;\; I_y^{(e)} = \rho\frac{(2a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}\rho a^4$$

$$I_x^{(f)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12} + \left[\rho(a)(a)(a)^2\right]\right) = \frac{13}{6}\rho a^4 \;;\; I_y^{(f)} = 2\left(\rho\frac{(a)(a)^3}{12}\right) = \frac{1}{6}\rho a^4$$

$$\Rightarrow I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_y^{(a)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)} < I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)}$$

Déplacer le rectangle le long de l'axe *y*, ne change rien au I_y comme le montre les cas *a*, *b* et *c*. Grâce à la symétrie orthogonale, on peut voir que tant qu'on ne modifie pas la distance des répartitions des masses par rapport aux axes, les moments d'inertie ne sont pas modifiés. ($I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)}$ **)**



(e) (b)

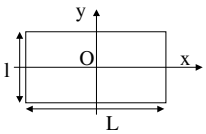
Rayons de gyration $\left(m = \rho 2a^2\right)$: $I_x = mr_x^2$

$$I_x^{(a)} = I_y^{(f)} < I_x^{(e)} = I_y^{(e)} = I_y^{(a)} = I_x^{(b)} = I_y^{(b)} = I_y^{(d)} < I_x^{(f)} = I_x^{(d)} = I_x^{(c)}$$

$$r_x^{(a)} = r_y^{(f)} = \sqrt{\frac{1}{12}}\,a \;;\; r_x^{(e)} = r_y^{(e)} = r_y^{(a)} = r_x^{(b)} = r_y^{(b)} = I_y^{(d)} = \sqrt{\frac{4}{12}}\,a \;;\; r_x^{(f)} = r_x^{(d)} = r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{13}{12}}\,a$$

---

2. 1. $I_x = \rho\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho\frac{Ll^3}{12} = m\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m\frac{L^2}{12}$



2. $I_y^{(a)} = \rho\dfrac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\dfrac{(3a)(2a)^3}{12}\right] = \dfrac{58}{3}\rho a^4 = I_y^{(b)} = I_y^{(c)} \Rightarrow r_y^{(a)} = r_y^{(b)} = r_y^{(c)} = \sqrt{\dfrac{29}{15}}\,a$

$$I_x^{(a)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\frac{(2a)(3a)^3}{12} + \rho(3a)(2a)\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{46}{3}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(a)} = \sqrt{\frac{23}{15}}\,a$$

$$I_x^{(b)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - 2.\left[\rho\frac{(2a)(\frac{3a}{2})^3}{12} + \rho(\frac{3a}{2})(2a)\left(\frac{5a}{4}\right)^2\right] = \frac{65}{6}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(b)} = \sqrt{\frac{13}{12}}\,a$$

$$I_x^{(c)} = \rho\frac{(4a)(4a)^3}{12} - \left[\rho\frac{(2a)(3a)^3}{12}\right] = \frac{101}{6}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{101}{60}}\,a$$

3.

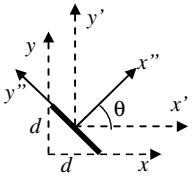
- $I_x^{(a)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho y^2 dx \underbrace{=}_{y=0} 0;\ I_y^{(a)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho x^2 dx = \rho \frac{a^3}{12} \Rightarrow \boxed{I_y^{(a)} = \frac{ma^2}{12}}$ et $P_{xy}^{(a)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho xy dx = 0$ car $y = 0$

- $\begin{cases} I_x^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho y^2 dx \underbrace{=}_{y=a} \rho a^3 = \underbrace{I_{x_G}^{(b)}}_{=0} + ma^2 = ma^2;\ I_y^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho x^2 dx = \frac{ma^2}{12} = I_{y_G}^{(b)} \text{ et} \\ P_{xy}^{(b)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho xy dx \underbrace{=}_{y=a} 0 = P_{x_G y_G} + m.0.a \end{cases}$

- $I_x^{(c)} = 0 + ma^2;\ I_y^{(c)} = \frac{ma^2}{12} + m(a)^2 = \frac{13ma^2}{12};\ P_{xy}^{(c)} = 0 + m.(a).(-a) = -ma^2$

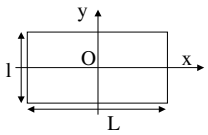
- $I_x^{(d)} = 0 + m(2a)^2;\ I_y^{(d)} = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{7ma^2}{3};\ P_{xy}^{(d)} = 0 + m.\left(\frac{3a}{2}\right).(2a) = 3ma^2$

- $\begin{cases} I_x^{(e)} = I_y^{(e)} \text{ Par symétrie} \qquad I_x^{(e)} = \int y^2 dm = I_{x'}^{(e)} + m\left(\frac{a}{2}.\sin 45\right)^2 \\ I_{x'}^{(e)} = \int y'^2\, dm = \int (\sin\theta x'' + \cos\theta y'')^2\, dm = \\ I_{x'}^{(e)} = \rho \int \left(\cos^2\theta y''^2 + \sin^2\theta x''^2 + 2\cos\theta\sin\theta x'' y''\right) dy' \underbrace{=}_{x''=0} \rho\cos^2\theta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y''^2\, dy'' \\ I_{x'}^{(e)} = \cos^2\theta . I_{x''}^{(e)} = \cos^2\theta \frac{ma^2}{12} \underbrace{=}_{\cos^2\theta = \frac{1}{2}} \frac{ma^2}{24} \Rightarrow I_x^{(e)} = \frac{ma^2}{24} + m\left(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{6} \\ P_{x'}^{(e)} = \int (\cos\theta x'' - \sin\theta y'')(\sin\theta x'' + \cos\theta y'')\, dm \underbrace{=}_{x'=0} -\sin\theta\cos\theta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y''^2\, dm \\ \quad = -\sin\theta\cos\theta . I_{x''}^{(e)} = -\frac{1}{2}\frac{ma^2}{12} \Rightarrow P_x^{(e)} = P_{x'}^{(e)} + m\left(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{ma^2}{12} \end{cases}$



(e)

4. 1. $I_x = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \rho \frac{Ll^3}{12} = m\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_y = m\frac{L^2}{12}$



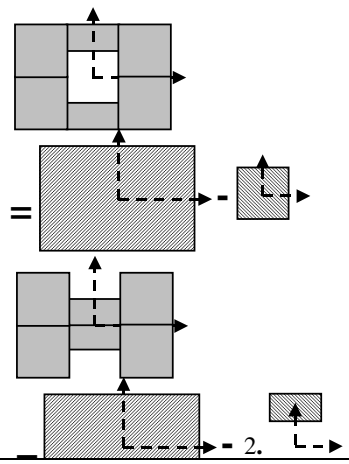
2. $I_x^{(a)} = \rho\frac{3a.(2a)^3}{12} - \left[\rho\frac{a.(a)^3}{12}\right] = \frac{23}{12}\rho a^4 = mr_x^2$

$\Rightarrow r_x^{(b)} = \sqrt{\frac{23}{60}}a \quad (m = \rho 5a^2)$

$I_y^{(a)} = \rho\frac{2a.(3a)^3}{12} - \left[\rho\frac{a.(a)^3}{12}\right] = \frac{53}{12}\rho a^4 = mr_y^2 \Rightarrow r_y^{(b)} = \sqrt{\frac{53}{60}}a$

$I_x^{(b)} = \rho\frac{3a.(2a)^3}{12} - 2.\left[\rho\frac{a.\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} + \rho a.\frac{a}{2}.\left(\frac{3a}{4}\right)^2\right] = \frac{17}{12}\rho a^4$

$\Rightarrow r_x^{(b)} = \sqrt{\frac{17}{60}}a$



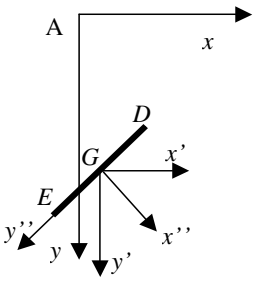
$$I_y^{(b)} = \rho\frac{2a.(3a)^3}{12} - 2.\left[\rho\frac{\frac{a}{2}.(a)^3}{12}\right] = \frac{53}{12}\rho a^4 \Rightarrow r_y^{(b)} = \sqrt{\frac{53}{60}}a$$

$$I_x^{(c)} = \rho\frac{a.(3a)^3}{12} + 2.\left[\rho\frac{a.(a)^3}{12}\right] = \frac{29}{12}\rho a^4 \Rightarrow r_x^{(c)} = \sqrt{\frac{29}{60}}\,a$$

$$I_y^{(c)} = I_x^{(c)} \Rightarrow r_y^{(c)} = r_x^{(c)}$$

---

5. 1.



$$I_x(Tige_{AB}) = \int_0^a \rho y^2 dy = \rho\frac{a^3}{3} = \frac{ma^2}{3};\ I_y(Tige_{AB}) = 0 \text{ et } P_{xy}(Tige_{AB}) = 0$$

$$I_x(Tige_{BC}) = \rho a^3;\ I_y(Tige_{BC}) = \int_0^a \rho x^2 dx = \rho\frac{a^3}{3} = \frac{ma^2}{3} \text{ et } P_{xy}(Tige_{BC}) = \rho a.a.\frac{a}{2}$$

$$I_x(Tige_{CD}) = \int_a^{2a} \rho y^2 dy = \rho\left(\frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{7}{3}ma^2;\ I_y(Tige_{CD}) = \rho a^3$$

$$\text{et } P_{xy}(Tige_{CD}) = \rho a.\frac{3a}{2}.a$$

$$\begin{cases} I_{x''}(Tige_{DE}) = \int_{-a}^{+a} \rho y''^2\, dy = \rho\dfrac{2.a^3}{3} \\ I_{x'}(Tige_{DE}) = \int y'^2\, dm = \int\left(y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} + x''\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 dm = \dfrac{I_{x''}(Tige_{DE})}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}(Tige_{DE})}{2}}_{=0} + \underbrace{P_{x''y''}(Tige_{DE})}_{=0} \\ \Rightarrow I_x(Tige_{DE}) = I_{x'}(Tige_{DE}) + \rho 2a\left(2a + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\left(\dfrac{28}{3}a^3 + 4\sqrt{2}a^3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{y'}(Tige_{DE}) = \int x'^2\, dm = \int\left(x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y''\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 dm = \dfrac{I_{x''}(Tige_{DE})}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}(Tige_{DE})}{2}}_{=0} - \underbrace{P_{x''y''}(Tige_{DE})}_{=0} = \rho\dfrac{a^3}{3} \\ I_y(Tige_{DE}) = I_{y'}(Tige_{DE}) + \rho 2a\left(a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho\dfrac{5.a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{x'y'}(Tige_{DE}) = \int\left(x''\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y''\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y''\dfrac{\sqrt{2}}{2} + x''\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)dm = \dfrac{P_{x''y''}}{2} + \underbrace{\dfrac{I_{y''}}{2}}_{=0} - \dfrac{I_{x''}}{2} - \dfrac{P_{x''y''}}{2} = -\dfrac{I_{x''}}{2} = -\rho\dfrac{a^3}{3} \\ P_{xy}(Tige_{DE}) = P_{x'y'}(Tige_{DE}) + \rho 2a.\left(2a + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

---

2. $I_{x'}(Arc_{DE}) = \int y'^2\, dm = \int_0^{\pi} R^2 \sin^2\theta \rho a d\theta = \rho a^3 \frac{\pi}{2} = \frac{Ma^2}{2}$

$I_{x_G}(Arc_{DE}) = \frac{Ma^2}{2} - M\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2$ => $I_x(Arc_{DE}) = \frac{Ma^2}{2} - M\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 + M\left(2a + \frac{2a}{\pi}\right)^2$

$I_y(Arc_{DE}) = I_{y'}(Arc_{DE}) = \int x'^2\, dm = \int_0^{\pi} R^2 \cos^2\theta \rho R d\theta = \frac{Ma^2}{2}$

$P_{x'y'}(Arc_{DE}) = 0$ par symétrie autour de y

cercle : $I_z(\text{cercle}) = \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm = \int_0^{\pi} R^2 \rho R d\theta = M_{Cercle} R^2 = I_x(\text{cercle}) + I_y(\text{cercle})$ en 2D

$I_z(\text{cercle}) = 2I_x(\text{cercle})$ (par symétrie) => $I_x(\text{cercle}) = \frac{M_{Cercle} R^2}{2}$

Par symétrie : $I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle} \cup) + I_x(\text{demi-cercle} \cap)$ => $I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_\cup R^2}{2}$

---

6. 1. cercle : $I_z(\text{cercle}) = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = M_{Cercle} R^2 = I_x(\text{cercle}) + I_y(\text{cercle})$ en 2D

$I_z(\text{cercle}) = 2I_x(\text{cercle})$ (par symétrie) => $I_x(\text{cercle}) = \frac{M_{Cercle} R^2}{2}$

Par symétrie : $I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle} \cup) + I_x(\text{demi-cercle} \cap)$ => $I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_\cup R^2}{2}$

2. Disque : $I_z(\text{Disque O}) = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r dr d\theta = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{M_{Disque} R^2}{2}$

$\boxed{I_z(\text{O}) \underbrace{=}_{\text{en 2D}} I_x(\text{O}) + I_y(\text{O}) \underbrace{=}_{\text{symétrie}} 2I_x(\text{O})}$ => $I_x(\text{O}) = \frac{M_O R^2}{4}$

Par symétrie : $I_x(\text{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap)$ => $I_x(\cup) = \frac{M_O R^2}{8} = \frac{M_\cup R^2}{4}$

3. Sphère : $I_z(\text{Sphère O}) = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_0^R \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi\right) d\theta\right) dr = \frac{2}{5} M_{Sphère} R^2$

ou $\boxed{I_z(\text{Sphère O}) = I_x(\text{O}) + I_y(\text{O}) - 2I_{xy}(\text{O})}$

avec $\boxed{I_{xy}(\text{O}) = \int z^2 dm} = \int_0^R \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r\cos\theta)^2 \rho r^2 \sin\theta d\varphi\right) d\theta\right) dr = \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2$

$I_x(\text{O}) = I_y(\text{O})$ (par symétrie) =>$I_x(\text{O}) = \frac{I_z(\text{O})}{2} + I_{xy}(\text{O}) = \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2 + \frac{1}{5} M_{Sphère} R^2 = \frac{2}{5} M_{Sphère} R^2$

On pouvait évidemment trouver directement $I_x = I_y = I_z$ par symétrie.

Par symétrie : $I_x(\text{O}) = I_x(\cup) + I_x(\cap)$ => $I_x(\cup) = \frac{M_{Sphère} R^2}{5} = \frac{2M_\cup R^2}{5}$

---

7. Soient 1=AB, 2=DE, 3=BCD

$$I_{x1}=\frac{m_1 l_1^2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\rho\, cm^3 \;\; et \;\; I_{y1}=\frac{m_1 l_1^2}{12}.\frac{1}{2}+m_1\left(\frac{l_1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)^2=\rho\left(\frac{33}{2}+9\sqrt{2}\right)cm^3;$$

$$I_{x2}=\frac{m_2 l_2^2}{3}.\frac{3}{4}=\frac{9}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho\, cm^3 \;\; et \;\; I_{y2}=\frac{m_2 l_2^2}{12}.\frac{1}{4}+m_2\left(\frac{l_1}{2}\frac{1}{2}+2\right)^2=\rho\left(\frac{27}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+6\right)cm^3;$$

$$I_{x3}=\frac{m_3 R^2}{2}-m_3\left(\frac{2R}{\pi}\right)^2+m_3\left(\frac{2R}{\pi}+3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\rho\,(13\pi+24\sqrt{2})cm^3 \;\; et \;\; I_{y3}=\frac{m_3 R^2}{2}=4\pi\rho\;\; cm^3;$$

$$I_x=\rho\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+13\pi+24\sqrt{2}\right]cm^3=82{,}956\rho\;\; cm^3$$

$$I_x=\rho\left[\frac{45}{2}+9\sqrt{2}+\frac{27}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+4\pi\right]cm^3=58{,}817\rho\;\; cm^3$$

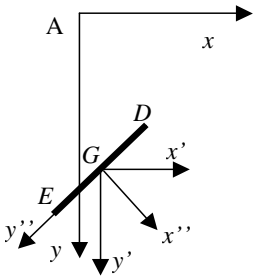
---

8. $\overline{AG_1}=\left(-\frac{a}{2},0,0\right): I_x(AB)=0;\;\; I_y(AB)=\frac{ma^2}{12}+\frac{ma^2}{4}=\frac{ma^2}{3}$

et $P_{xy}(AB)=0$

$\overline{AG_2}=\left(-a,\frac{a}{2},0\right): I_x(BC)=\frac{ma^2}{12}+\frac{ma^2}{4};\;\; I_y(BC)=0+ma^2$

et $P_{xy}(BC)=0+m.(-a).\frac{a}{2}$



$\overline{AG_3}=(0,a,0): I_x(CD)=0+2ma^2;\; I_y(CD)=\frac{2m(2a)^2}{12}$ et $P_{xy}(CD)=\rho 2a.0.a=0$

$\overline{AG_4}=\left(a,\frac{3a}{2},0\right): I_x(DE)=\frac{ma^2}{12}+m\left(\frac{3a}{2}\right)^2;\; I_y(DE)=0+ma^2$ et $P_{xy}(DE)=0+\rho a.a.\frac{3a}{2}$

$\overline{AG_5}=\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2},2a+\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right):$

$$\begin{cases} I_{x''}(Tige_{EF})=\int_{-a}^{+a}\rho y''^2\,dy=\rho\frac{2.a^3}{3} \\ I_{x'}(Tige_{EF})=\int y'^2\,dm=\int\left(y''\frac{\sqrt{2}}{2}+x''\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 dm=\frac{I_{x''}(Tige_{EF})}{2}+\underbrace{\frac{I_{y''}(Tige_{EF})}{2}}_{=0}+\underbrace{P_{x''y''}(Tige_{EF})}_{=0} \\ \Rightarrow I_x(Tige_{EF})=I_{x'}(Tige_{EF})+\rho 2a\left(2a+a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\rho\left(\frac{28}{3}a^3+4\sqrt{2}a^3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{y'}(Tige_{EF})=\int x'^2\,dm=\int\left(x''\frac{\sqrt{2}}{2}-y''\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 dm=\frac{I_{x''}(Tige_{EF})}{2}+\underbrace{\frac{I_{y''}(Tige_{EF})}{2}}_{=0}-\underbrace{P_{x''y''}(Tige_{EF})}_{=0}=\rho\frac{a^3}{3} \\ I_y(Tige_{EF})=I_{y'}(Tige_{EF})+\rho 2a\left(a-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\rho\frac{5.a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{x'y'}(Tige_{EF}) = \int \left(x''\frac{\sqrt{2}}{2} - y''\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\left(y''\frac{\sqrt{2}}{2} + x''\frac{\sqrt{2}}{2} \right) dm = \frac{P_{x''y''}}{2} + \underbrace{\frac{I_{y''}}{2}}_{=0} - \frac{I_{x''}}{2} - \frac{P_{x''y''}}{2} = -\frac{I_{x''}}{2} = -\rho\frac{a^3}{3} \\ P_{xy}(Tige_{EF}) = P_{x'y'}(Tige_{EF}) + \rho 2a.\left(2a + a\frac{\sqrt{2}}{2} \right).\left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

$$I_x = I_x(AB) + I_y(BC) + I_x(CD) + I_x(DE) + I_x(EF) = \rho a^3\left(15 + 4\sqrt{2}\right)$$

$$=> I_y = I_y(AB) + I_y(BC) + I_y(CD) + I_y(DE) + I_y(EF) = \rho a^3 \frac{7}{6}$$

$$P_{xy} = P_{xy}(AB) + P_{xy}(BC) + P_{xy}(CD) + P_{xy}(DE) + P_{xy}(EF) = \rho a^3\left(\frac{5}{3} + 2.\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

---

9. Dans les axes liés au disque, nous avons

$$\bar{\bar{I}}_{GXYZ} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base vaut :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar{1}_x = (1;0;0) = \left(\alpha_1^1;\alpha_2^1;\alpha_3^1\right)$$

$$\bar{1}_y = (0;\cos\alpha;\sin\alpha) = \left(\alpha_1^2;\alpha_2^2;\alpha_3^2\right)$$

$$\bar{1}_z = (0;-\sin\alpha;\cos\alpha) = \left(\alpha_1^3;\alpha_2^3;\alpha_3^3\right)$$

Donc : le moment d'inertie I'_x ne dépend que du vecteur unitaire 1_x.

$$I'_x = \alpha_i^1\alpha_j^1 I^{ij} = \left(\alpha_1^1\right)^2 I_X + \left(\alpha_2^1\right)^2 I_Y + \left(\alpha_3^1\right)^2 I_Z - 2\alpha_1^1\alpha_2^1 P_{XY} - 2\alpha_1^1\alpha_3^1 P_{XZ} - 2\alpha_2^1\alpha_3^1 P_{YZ}$$

$$I'_x = I_X = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'_y = \alpha_i^2\alpha_j^2 I^{ij} = \cos^2\alpha\frac{mR^2}{4} + \sin^2\alpha\frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \sin^2\alpha\right)$$

$$I'_z = \alpha_i^3\alpha_j^3 I^{ij} = \sin^2\alpha\frac{mR^2}{4} + \cos^2\alpha\frac{mR^2}{2} = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \cos^2\alpha\right)$$

$$-P'_{xy} = \alpha_i^1\alpha_j^2 I^{ij} = \left(\alpha_1^1\alpha_1^2 I_X + \alpha_2^1\alpha_2^2 I_Y + \alpha_3^1\alpha_3^2 I_Z - 2\alpha_1^1\alpha_2^2 P_{XY} - 2\alpha_1^1\alpha_3^2 P_{XZ} - 2\alpha_2^1\alpha_3^2 P_{YZ}\right) = 0$$

et $-P'_{xz} = \alpha_i^1\alpha_j^3 I^{ij} = 0$

Les axes Ox et OX sont confondu et forme une direction principale. => les produits d'inertie comprenant l'axe x sont nuls.

$$-P'_{yz} = I'^{23} = \alpha_i^2\alpha_j^3 I^{ij} = \alpha_2^2\alpha_2^3 I_Y + \alpha_3^2\alpha_3^3 I_Z = -\sin\alpha\cos\alpha\frac{mR^2}{4} + \sin\alpha\cos\alpha\frac{mR^2}{2} = m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\bar{\bar{I}}_{Gxyz} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}\left(1 + \sin^2\alpha\right) & m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & m\frac{R^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha & \frac{mR^2}{4}\left(1 + \cos^2\alpha\right) \end{pmatrix}$$

10.

$$I_z = \rho\int_0^a x^2dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz + \rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y^2dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right)$$

$$=> I_x = \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right) \;;\; I_y = \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right) \text{ avec } m = \rho\frac{abc}{6}$$

$$P_{xy} = \rho\int_0^a xdx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} ydy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = \frac{mab}{20} => P_{xz} = \frac{mac}{20} \;;\; P_{yz} = \frac{mbc}{20}$$

$$=> \overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} \frac{m}{10}\left(b^2+c^2\right) & -\frac{mab}{20} & -\frac{mac}{20} \\ -\frac{mab}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+c^2\right) & -\frac{mbc}{20} \\ -\frac{mac}{20} & -\frac{mbc}{20} & \frac{m}{10}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$$

---

11. cercle : $I_z = M_{Cercle}R^2 \underbrace{=}_{2D} I_x + I_y \underbrace{=}_{sym} 2I_y \;\; => \; I_y = \frac{M_{Cercle}R^2}{2}$

y'=diamètre du cercle : Par symétrie : $I_{y'}(\text{cercle O}) = I_{y'}(\cup) + I_{y'}(\cap) \;\; => \;\; I_{y'}(\cup) = \frac{M_O R^2}{4} = \frac{M_\cup R^2}{2}$

$$I_{y'} = \frac{mr^2}{2} => I_y = I_{y'} - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + m\left(r-\frac{2r}{\pi}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + m\left(r^2 - 4\frac{r^2}{\pi}\right) = \frac{3mr^2}{2} - 4m\frac{r^2}{\pi}$$

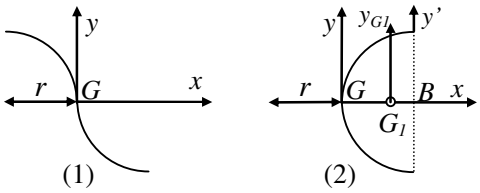
S1=Disque 1 ; S2=Tige ; S3=Disque 2

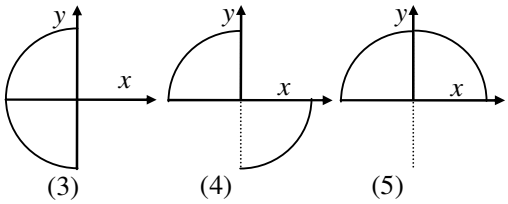
<u>Disques</u> : Par symétrie : $I_{x(S_1)} = I_{x(S_3)} = \frac{m_1r^2}{2}$

Par symétrie : $I_{y(S_1)} = I_{y(S_3)} = I_{z(S_1)} = I_{z(S_3)} = I_{x_{G1}} + m_1r^2 = \frac{m_1r^2}{4} + m_1r^2 = \frac{5m_1r^2}{4}$ car $I_{x(S_1)} = I_{y(S_1)} + I_{z(S_1)} = 2I_{y(S_1)}$

<u>Tige</u> : par symétrie, $I_x(1)=I_x(2)$ car on a bien la même répartition de masse par rapport à l'axe x. Nous pouvons tenir le même raisonnement pour l'axe y. La symétrie orthogonale ne modifie pas les moments d'inertie. => $I_y(1)=I_y(2)$
En utilisant la formule démontrée à la question précédente :

$$I_{y(S_2)} = \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi} => I_{y(S_2)} = \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}$$





Dans le cas du demi-cercle, si on fait deux symétries orthogonales, on passe de la configuration (3) à (5). Or ces symétries ne modifient en rien la disposition des masses par rapport aux axes. On voit donc que dans les trois cas, on a pour le moment d'inertie :

$$I_x = I_y => I_x(2) = I_{y'}(2) = \frac{m_2r^2}{2} => I_{x(S_2)} = \frac{m_2r^2}{2}$$

Pour le système complet :

$$I_x = 2.\left(\frac{m_1r^2}{2}\right) + \frac{m_2r^2}{2} \quad \text{et} \quad I_y = 2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right) + \frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}$$

$$I_z = 2.\left(\frac{5m_1r^2}{4}\right) + \left[\underbrace{\frac{m_2r^2}{2}}_{I_{x(S2)}} + \underbrace{\frac{3m_2r^2}{2} - 4m_2\frac{r^2}{\pi}}_{I_{y(S2)}}\right] = \frac{5m_1r^2}{2} + 2m_2r^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

Grâce à la symétrie des deux disques par rapport aux plans *yz*, *xy* et *xz*, nous pouvons dire que tous les produits d'inertie sont nuls pour le système constitué des deux disques.

Pour la tige constituée des deux quarts de cercle, nous pouvons dire que P_{xz}=P_{yz}=0 car tous les points de la tige possèdent une coordonnée *z* nulle. Quant à P_{xy} il n'y a aucune symétrie, donc rien ne nous permet d'annuler ce terme. Il sera différent de zéro.

$$P_{xy(barre)} = P_{xy(\frac{1}{2}barreA)} + P_{xy(\frac{1}{2}barreB)} \Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreA)} = P_{xy_A} + \frac{m_2}{2}\left(\underbrace{-a.(r-a)}_{GG_1(r-a,-a,0)} - \underbrace{a^2}_{AG_1(-a,-a,0)}\right) = \frac{\rho r^3}{2} - \frac{m_2}{2}ra$$

$$\Rightarrow P_{xy(\frac{1}{2}barreB)} = P_{xy_B} + \frac{m_2}{2}\left(\underbrace{a.(-r+a)}_{GG_2(-r+a,a,0)} - \underbrace{a^2}_{BG_2(a,a,0)}\right) = \frac{\rho r^3}{2} - \frac{m_2}{2}ra \Rightarrow P_{xy(barre)} = \frac{m_2 r^2}{\pi} - m_2 ra$$

$$P_{xy(barre)} = \frac{m_2 r^2}{\pi} - \frac{m_2 r 2r}{\pi} = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$

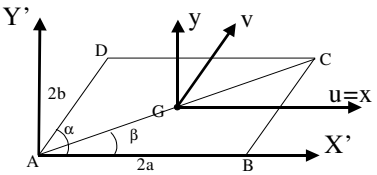
---

12. 1.

$$I_z = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u^2+v^2-2uv\cos(\pi-\alpha)\right)\sin\alpha = m\frac{(a^2+b^2)}{3} \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{3}}$$

avec $dm = \rho du.\sin\alpha dv$ et $\begin{cases} x = u + v\cos\alpha \\ y = v\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = u^2+v^2+2uv\cos\alpha$

2.



$$I_x = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(v\sin\alpha\right)^2\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha\,;$$

$$I_y = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u+v\cos\alpha\right)^2\sin\alpha = \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\cos^2\alpha\right)$$

$$P_{xy} = \rho\int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} dv\left(u+v\cos\alpha\right)\left(v\sin\alpha\right)\sin\alpha = m\frac{b^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha$$

L'ellipse centrale d'inertie est un cercle ssi

$I_x X^2 + I_y Y^2 = 1 \Rightarrow$ cercle de rayon $R = \frac{1}{\sqrt{I_x}}$ *ssi*

$I_x = I_y$ *et* $P_{xy} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ *et* $a = b$

3. Recherche des axes principaux d'inertie en A :
Calcul des éléments du tenseur d'inertie dans les axes AX'Y'Z' (// Gxyz)

$$I_{x'} = m\frac{b^2}{3}\sin^2\alpha + m\left(b\sin\alpha\right)^2\ ;\quad I_{y'} = \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\cos^2\alpha\right) + m\left(a+b\cos\alpha\right)^2$$

$$P_{x'y'} = \rho\int_{0}^{+2a} du \int_{0}^{+2b} dv\left(u+v\cos\alpha\right)\left(v\sin\alpha\right)\sin\alpha = mab\sin\alpha + m\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha$$

Les axes principaux en *A* sont les axes orthogonaux AX''Y''Z'' tel que $I_{x''x''}X''^2 + I_{y''y''}Y''^2 + I_{z''z''}Z''^2 = 1$

Pour se faire, on fait une rotation d'angle θ des axes Ax' et Ay' pour avoir $-P_{x''y''} = 0$.
La formule suivante permet de déterminer cet angle.

$$tg\,2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \frac{2\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\right)}{\frac{4}{3}b^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha}$$

---

4. La quadrique d'inertie en A dans les axes AX'Y'Z' : $I'_{x'x'}X'^2 - 2P'_{x'y'}X'Y' + I'_{y'y'}Y'^2 = 1$

$$\frac{4}{3}mb^2\sin^2\alpha X'^2 - 2m\left(\frac{4}{3}b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\right)X'Y' + m\left(\frac{4}{3}b^2\cos^2\alpha + \frac{4}{3}a^2 + 2ab\cos\alpha\right)Y'^2 = 1$$

L'ellipse d'inertie en A dans les axes AX''Y''Z'' (axes principaux) : $I''_{x''x''}X''^2 + I''_{y''y''}Y''^2 = 1$

avec
$$I''_{x''} = \cos^2\theta . I'_{x'} + \sin^2\theta . I'_{y'} + 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'}\right)$$
$$I''_{y''} = \sin^2\theta . I'_{x'} + \cos^2\theta . I'_{y'} - 2\sin\theta\cos\theta\left(-P_{x'y'}\right)$$

5. Par la formule du changement de base, on écrit le tenseur dans le nouveau système d'axe ayant l'axe AC comme premier vecteur unitaire. Le moment d'inertie suivant l'axe AC ne dépend que du vecteur unitaire suivant AC.

$$I_{AC} = \alpha_i^1\alpha_j^1 I^{ij} = I_x\mu_x^{1\,2} + I_y\mu_y^{1\,2} - 2P_{xy}\mu_x^1\mu_y^1$$

$$où\ \ \mu_x^1 = \frac{a + b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}\ ;\ \mu_y^1 = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}\ \text{ et }\ \mu_z^1 = 0$$

---

13. 1.

$$I_z(Cube) = \int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(\int_{-R}^{+R}\left(x^2 + y^2\right)dx\right)dy\right)dz = \frac{M\left(2R\right)^2}{6} = \frac{\rho 2^5 R^5}{6}$$

$$I_z(sphère) = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{8\rho\pi R^5}{15}\quad => \quad I_z(\frac{1}{2}sphère\cup) = \frac{2}{5}M_\cup R^2 = \frac{4\rho\pi R^5}{15}$$

$$=> I_z = I_z(Cube) - I_z(Demi - Sphère) = \frac{\rho 16R^5}{3} - \rho\frac{4\pi}{15}R^5$$

Axes $O''x''y''z''$: au centre de la face supérieure du cube

Sphère : $I_{x''y''}(\cup) = \int z''^2\,dm = \int_0^R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(r\cos\theta\right)^2\rho r^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr = \frac{1}{5}M_\cup R^2$

$$I_{x''}(\cup) = \frac{I_{z''}(\cup)}{2} + I_{x''y''}(\cup) = \frac{1}{5}M_\cup R^2 + \frac{1}{5}M_\cup R^2 = \frac{2}{5}M_\cup R^2$$

$$I_x(\cup) = \underbrace{I_{x''}(\cup) - M_\cup\left(\frac{3}{8}R\right)^2}_{I_{xG}(\cup)=\frac{83}{320}M_\cup R^2} + M_\cup\left(\frac{5}{8}R\right)^2 = \frac{13M_\cup R^2}{20} = \frac{13\rho\pi R^5}{30}$$

Solide complet :

$$I_x = I_x(\text{Cube}) - I_x(\cup) = \frac{16\rho R^5}{3} - \frac{13\rho\pi R^5}{30} = \frac{\rho R^5}{30}\left(160 - 13\pi\right)\ \text{ et }\ I_z = \frac{\rho R^5}{30}\left(160 - 8\pi\right)$$

2. Tous les systèmes d'axes ayant vertical et les axes x_p y_p parallèle à x y sont des axes principaux. En effet, le plans xz est un plan de symétrie orthogonale donc l'intégration de y sur un domaine symétrique sera nul. De même pour l'intégration suivant x grâce au plan de symétrie orthogonale yz. => Grâce à ces deux plans de symétrie, tous les produits d'inertie sont nuls car ils contiennent tous au moins du x ou du y.
Pour que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, il faut trouver un point P tel que :

$$I_{x_P}x^2 + I_{y_P}y^2 + I_{z_P}z^2 = 1\ \text{ où }\ I_{x_P} = I_{y_P} = I_{z_P}$$

Il est possible de trouver cette ellipsoïde puisque $I_y = I_x < I_z$
On recherche un point P de l'axe z, donc l'axe $z=z_P$

$$=> \underbrace{I_x - \left(m_{Cube} - m_\cup\right)z_G^2}_{I_{xG_{total}}} + \left(m_{Cube} - m_\cup\right)d^2 = I_z$$ où d est la distance du point P recherché à G_{total}

---

3. $P_{x'y'} = P_{x'y'}(Cube) - P_{x'y'}(1/2\ Sphère)$

$\overline{O'G}_{cube} = (R,R,R)$ et $\overline{O'G}_{1/2\ Sphere} = \left(R,R,\left(1+\frac{5}{8}\right)R\right)$

$$\begin{cases} P_{x'y'}(Cube) = P_{xy}(Cube) + m_{Cube}.R.R \\ P_{x'y'}(1/2\ Sphère) = P_{x_{G\,Sph}y_{G\,Sph}}(1/2\ Sphère) + m_{1/2\ Sphère}.R.R \end{cases}$$

Pour le produit d'inertie suivant les axes x' et y', le décallage en z ne nous intéresse pas.

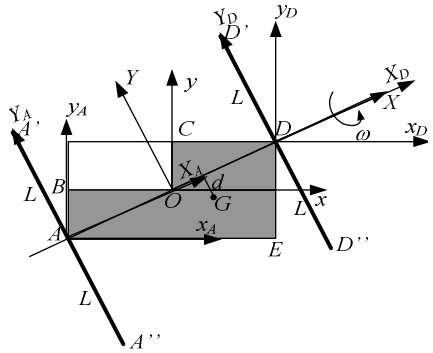
$P_{xy}(Cube) = 0$ car les axes xyz sont des axes principaux

$P_{x_{G\,Sph}y_{G\,Sph}}(1/2\ Sphère) = 0$ car les axes x et y sont intégrés sur un domaine symétrique

$\Rightarrow P_{x'y'} = m_{Carré}R^2 - m_{\cup}R^2 = \rho\left(8 - \frac{2}{3}\pi\right)R^5$

---

14. $\overline{OA} = \left(-\sqrt{H^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}, 0, 0\right)$ et $\overline{OD} = \left(\sqrt{H^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}, 0, 0\right)$



En considérant

M =Rectangle complet ($\square\rho 2H^2$) - petit rectangle ($\square\frac{\rho H^2}{2}$)

$M = \rho 2H^2 - \frac{\rho H^2}{2} = \frac{\rho 3H^2}{2}$

$$\begin{cases} \overline{1}_X = \cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y \\ \overline{1}_Y = -\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \overline{1}_x = \cos\theta\,\overline{1}_X - \sin\theta\,\overline{1}_Y \\ \overline{1}_y = \sin\theta\,\overline{1}_X + \cos\theta\,\overline{1}_Y \end{cases}$$

où $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_X & -P_{XY} & 0 \\ -P_{XY} & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix}$$

avec
$$\begin{cases} I_X = I_{X(S1)} + I_{X(S2)} + I_{X(S3)} = I_{X(S1)} + \left[\underbrace{I_{X_A(S2)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + m.0^2\right] + \left[\underbrace{I_{X_D(S3)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + m.0^2\right] \\ I_Y = I_{Y(S1)} + I_{Y(S2)} + I_{Y(S3)} = I_{Y(S1)} + \left[\underbrace{I_{Y_A(S2)}}_{0} + mH^2\frac{5}{4}\right] + \left[\underbrace{I_{Y_D(S3)}}_{0} + mH^2\frac{5}{4}\right] \\ I_Z = I_{Z(S1)} + I_{Z(S2)} + I_{Z(S3)} = I_{Z(S1)} + \left[\underbrace{I_{X(S2)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + \underbrace{I_{Y(S2)}}_{\frac{5mH^2}{4}}\right] + \left[\underbrace{I_{X(S3)}}_{\frac{m(2L)^2}{12}} + \underbrace{I_{Y(S3)}}_{\frac{5mH^2}{4}}\right] \\ P_{XY} = P_{XY(S1)} + P_{XY(S2)} + P_{XY(S3)} = P_{XY(S1)} + \underbrace{\left[\underbrace{P_{X_AY_A(S2)}}_{0} + m\left(-H\sqrt{\frac{5}{4}}\right).0\right] + \left[\underbrace{P_{X_DY_D(S3)}}_{0} + mH\sqrt{\frac{5}{4}}.0\right]}_{=0} \end{cases}$$

Rem : la symétrie des deux barres par rapport aux axes XYZ permettait de conclure directement que $P_{XY(S2+S3)}=0$

$$\begin{cases} I_{X(S_1)} = \sin^2\theta I_{y(S_1)} + \cos^2\theta I_{x(S_1)} - 2\sin\theta\cos\theta P_{xy(S_1)} = \frac{1}{5}I_{y(S_1)} + \frac{4}{5}I_{x(S_1)} - \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} \\ I_{Y(S_1)} = \cos^2\theta I_{y(S_1)} + \sin^2\theta I_{x(S_1)} + 2\sin\theta\cos\theta P_{xy(S_1)} = \frac{4}{5}I_{y(S_1)} + \frac{1}{5}I_{x(S_1)} + \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} \\ I_{Z(S_1)} = I_{X(S_1)} + I_{Y(S_1)} = \frac{1}{5}I_{y(S_1)} + \frac{4}{5}I_{x(S_1)} - \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} + \frac{4}{5}I_{y(S_1)} + \frac{1}{5}I_{x(S_1)} + \frac{4}{5}P_{xy(S_1)} = I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)} \\ P_{XY(S_1)} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)}\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy(S_1)} = \frac{2}{5}\left(-I_{y(S_1)} + I_{x(S_1)}\right) + \frac{3}{5}P_{xy(S_1)} \end{cases}$$

$$I_{x(S1)} = \left[\left(\rho 2H^2.\frac{H^2}{12}\right)_{\square\rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{4}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12}}\right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}}\right] = \left(\rho 2H^2 - \frac{\rho H^2}{2}\right).\frac{H^2}{12} = \frac{MH^2}{12}$$

$$I_{y(S1)} = \left[\left(\rho 2H^2.\frac{(2H)^2}{12}\right)_{\square\rho 2H^2} - \left(\underbrace{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{12} + \frac{\rho H^2}{2}.\left(\frac{H}{2}\right)^2}_{\frac{\rho H^2}{2}.\frac{H^2}{3}}\right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}}\right] = \left(\rho 2H^2 - \frac{\rho H^2}{2}\right).\frac{H^2}{3} = \frac{MH^2}{3}$$

$$I_{z(S1)} = I_{x(S1)} + I_{y(S1)} = M\frac{H^2}{12} + M\frac{H^2}{3} = M\frac{5H^2}{12}$$

$$P_{xy} = \left[(0)_{\square\rho 2H^2} - \left(0 + \frac{\rho H^2}{2}.\left(-\frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{4}\right)\right)_{\square\frac{\rho H^2}{2}}\right] = \frac{MH^2}{24} \quad \text{avec } \overline{OG}(-\frac{H}{2},\frac{H}{4},0)$$

$$\begin{cases} I_{X(S_1)} = \frac{1}{5}\frac{MH^2}{3} + \frac{4}{5}\frac{MH^2}{12} - \frac{4}{5}\frac{MH^2}{24} = \frac{MH^2}{10} \\ I_{Y(S_1)} = \frac{4}{5}\frac{MH^2}{3} + \frac{1}{5}\frac{MH^2}{12} + \frac{4}{5}\frac{MH^2}{24} = \frac{19MH^2}{60} \\ I_{Z(S_1)} = M\frac{H^2}{3} + M\frac{H^2}{12} = M\frac{5H^2}{12} \\ P_{XY(S_1)} = \frac{2}{5}\left(-M\frac{H^2}{3} + M\frac{H^2}{12}\right) + \frac{3}{5}M\frac{H^2}{24} = \frac{-3MH^2}{40} \end{cases}$$

=>

$$\begin{cases} I_X = \frac{MH^2}{6} + \left[\frac{mL^2}{3}\right] + \left[\frac{mL^2}{3}\right] = \frac{MH^2}{6} + \frac{m2L^2}{3} \\ I_Y = \frac{MH^2}{4} + \left[0 + \frac{5mH^2}{4}\right] + \left[0 + \frac{5mH^2}{4}\right] = \frac{MH^2}{4} + \frac{5mH^2}{2} \\ I_Z = \frac{5MH^2}{12} + \left[\frac{mL^2}{3} + \frac{5mH^2}{4}\right] + \left[\frac{mL^2}{3} + \frac{5mH^2}{4}\right] = \frac{5MH^2}{12} + \frac{m2L^2}{3} + \frac{5mH^2}{2} \\ P_{XY} = \frac{-3MH^2}{40} + \left[0 + m\left(-HL\sqrt{\frac{5}{4}}\right).0\right] + \left[0 + mHL\sqrt{\frac{5}{4}}.0\right] = \frac{-3MH^2}{40} \end{cases}$$

15.

$$I_z = \rho R^4 \int_0^{\alpha} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{3}\rho R^4 (1-\cos\alpha)(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha)$$

avec $m = 2\pi\rho R^2(1-\cos\alpha)$ => $I_z = \frac{mR^2}{3}(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha)$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \pi$: $I_z = \frac{2mR^2}{3}$

---

16. Axes principaux en A : Axy : xz est un plan de symétrie donc par symétrie du domaine de x, les produits Pxy et Pxz seront nuls. De plus, z=0 pour toute la plaque, donc Pyz=0

$$I_{x_1} = \frac{mR^2}{4} = I_{x_{G1}} + m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \Rightarrow I_{x''(S_1)} = I_{x_{G1}} + m\left(\frac{4R}{3\pi}+R\right)^2 = \frac{mR^2}{4} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m\left(\frac{4R}{3\pi}+R\right)^2$$

$$I_{x''(S_1)} = I_{x''(S_2)} = \frac{mR^2}{4} + mR^2 + 2m\frac{4R^2}{3\pi} = \frac{5mR^2}{4} + \frac{8mR^2}{3\pi}$$

$$I_{x''(S_3)} = I_{x''(S_4)} = \frac{mR^2}{4} \Rightarrow I_{x''} = \frac{2mR^2}{4} + \frac{10mR^2}{4} + \frac{16mR^2}{3\pi} = 3mR^2 + \frac{16mR^2}{3\pi}$$

Par symétrie $I_{x''} = I_{y''}$ et $P_{x''y''} = 0$ (grâce au plan de symétrie orthogonal $x''z''$, l'intégrale impaire de y'' sur un domaine symétrie est nulle)

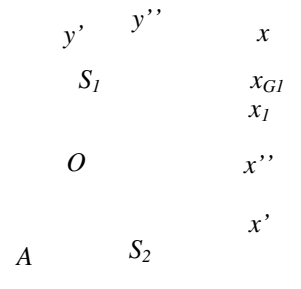
En A : $\overline{AG}(R,R,0)$: $I_{x'} = I_{x''} + \underbrace{4m}_{\substack{4\text{ demi}\\ \text{disques}}} R^2 = 7mR^2 + \frac{16mR^2}{3\pi} = I_{y'}$ et $P_{x'y'} = P_{x''y''} + 4mR^2 = 4mR^2$

Les axes principaux en A sont orientés de θ par rapport a $Ax'y'$ tel que $tg2\theta = \frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}} = \infty \Rightarrow \theta = 45°$.

On trouve par la formule de rotation :

$$I_x = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} - P_{x'y'}\ ;\ I_y = \frac{I_{x'}}{2} + \frac{I_{y'}}{2} + P_{x'y'}\ ;\ P_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow I_x = \left(3+\frac{16}{3\pi}\right)mR^2\ ;\quad I_y = \left(11+\frac{16}{3\pi}\right)mR^2$$



---

17. 1.

$$I_y = \rho\int_0^b\int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} x^2 dxdy = \rho\int_0^b x^2 dx \int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} dy = \rho\frac{hb^3}{12} = \frac{Mb^2}{6} \Rightarrow I_x = \frac{Mh^2}{6}$$

2.

$$P_{xy} = \rho\int_0^b\int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} xydxdy = \rho\int_0^b xdx\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x}{b}\right)^2 = \rho\frac{h^2b^2}{24} = \frac{Mbh}{12}$$

3. si $b = 4\ cm$ et $h = 6\ cm$: $I_x = 6M\ cm^2$; $I_y = \frac{8}{3}M\ cm^2 \approx 2.67M\ cm^2$; $P_{xy} = 2M\ cm^2$

Axe principaux d'inetrie en O sont les axes $Ox'y'$ tel que $tg2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = -1.2 \Rightarrow \theta \approx -25.1°$

4. En utilisant les formules de rotation d'une angle θ autour de l'axe z, nous obtenons les Moment principaux d'inertie en O : $I_{x'} \approx 6.94M\ cm^2$; $I_{y'} \approx 1.73M\ cm^2$

$I_{y'} < I_y < I_x < I_{x'}$

5. Vecteur unitaire nécessaire pour faire la rotation du système d'axes $Ax'y'z'(//Oxyz)$ vers $Ax''y''z''$:

$\overline{1}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;+1;+1) = (\alpha_1^1;\alpha_2^1;\alpha_3^1)$ => I_{AC} dépend seulement des cosinus directeurs de $\overline{1}_{AC}$

$$I_{AC} = I_{x''} = \alpha_i^1\alpha_j^1 I^{ij} = (\alpha_1^1)^2 I_{x'} + (\alpha_2^1)^2 I_{y'} + (\alpha_3^1)^2 I_{z'} - 2\alpha_1^1\alpha_2^1 P_{x'y'} - 2\alpha_1^1\alpha_3^1 P_{x'z'} - 2\alpha_2^1\alpha_3^1 P_{y'z'}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'} + \frac{1}{3}I_{z'} + \frac{2}{3}P_{x'y'} + \frac{2}{3}\underbrace{P_{x'z'}}_{0(z'=0)} - \frac{2}{3}\underbrace{P_{y'z'}}_{0(z'=0)}$$

Calcul des composantes du tenseur dans le repère $Ax'y'z'(//Oxyz)$: utilisez Steiner en passant par le repère au centre de masse Gx_Gy_G de la plaque triangulaire : $\overline{OG}\left(\frac{b}{3},\frac{b}{3},0\right)$ et $\overline{AG}\left(-\frac{2b}{3},\frac{b}{3},0\right)$

$$I_x = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \text{ et } I_{x'} = I_{x_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 \Rightarrow I_{x'} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6};$$

$$I_y = I_{y_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{6} \text{ et } I_{y'} = I_{x_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = I_y - md_{yy_G} + md_{y'y_G} = \left[\frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2\right] + M\left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{Mb^2}{2};$$

$$I_{z'} = I_{x'} + I_{y'} = \frac{2Mb^2}{3} \text{ (en 2D car } z = 0 \text{ pour la plaque)};$$

$$P_{xy} = P_{x_Gy_G} + M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{\text{Mbb}}{12} \text{ et } P_{x'y'} = P_{x_Gy_G} + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow P_{x'y'} = \left[\frac{Mb^2}{12} - M\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\right] + M\left(-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = -\frac{Mb^2}{4}$$

$$\Rightarrow I_{AC} = \frac{1}{3}\frac{Mb^2}{6} + \frac{1}{3}\frac{Mb^2}{2} + \frac{1}{3}\frac{2Mb^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{Mb^2}{4} = \frac{5}{18}Mb^2$$

---

18. z : axe vertical passant par le centre de la tasse, z' : axe vertical passant par le bord de l'anse.

$$I_{z(tasse)} = \rho\pi H\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} - \rho\pi(H-2e)\frac{\left(\frac{D}{2}-e\right)^4}{2}$$

Rappel : avec l'axe z = axe de révolution

cercle : $I_z(\text{cercle}) = \int\left(x^2+y^2\right)dm = 2I_x - 2I_{xy} \Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} + I_{xy}$

Par symétrie : $I_x(\text{cercle O}) = I_x(\text{demi-cercle} \cup) + I_x(\text{demi-cercle} \cap)$

$\Rightarrow I_x(\text{demi-cercle} \cup) = \frac{I_x(\text{cercle O})}{2}$

Dans notre cas : $I_{z'(Anse\cup)} = \frac{1}{2}I_{z'(Anse\,O)}$ avec $I_{z'(Anse\,O)} = \frac{I_{x'(Anse\,O)}}{2} + I_{y'z'(Anse\,O)}$

$$I_{z'(Anse\cup)} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\left(\rho\pi a\frac{(b)^4}{2} - \rho\pi a\frac{(b-a)^4}{2}\right)}{2}}_{\frac{I_{x'(Anse\,O)}}{2}} + \underbrace{\left(\rho\pi a\frac{a^2b^2}{12} - \rho\pi a\frac{a^2(b-a)^2}{12}\right)}_{I_{y'z'(Anse\,O)}}\right]$$

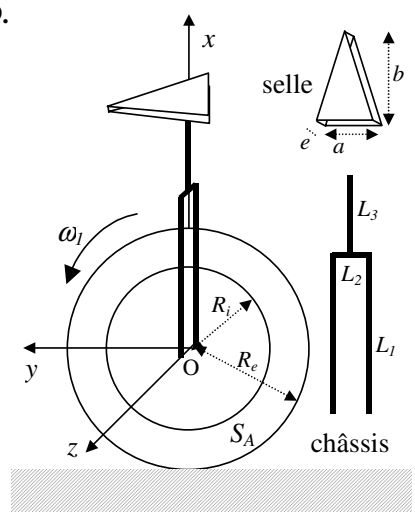
$$I_{z(Anse\cup)} = I_{z'(Anse\cup)} + \underbrace{\left(\frac{\rho\pi a}{2}\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(-d_G{}^2 + \left(\frac{D}{2}+d_G\right)^2\right)\right)}_{Steiner}$$

où d_G =distance(axe z';cdm de l'anse)

$$I_z = \frac{\rho\pi}{2}\left(H\left(\frac{D}{2}\right)^4 - (H-2e)\left(\frac{D}{2}-e\right)^4\right)$$

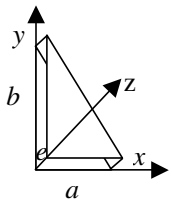
$$+\frac{\rho\pi a}{8}\left((b)^4-(b-a)^4\right) + \frac{\rho\pi a^3}{24}\left(b^2-(b-a)^2\right) + \frac{\rho\pi a}{2}\left(b^2-(b-a)^2\right)\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + Dd_G\right)$$

19.



Formulaire :

Pour une tige homogène de longueur L (axes en G)
Moment d'inertie par rapport à l'axe y : I_y=ML²/12
Pour un triangle rectangle de côté a, b et d'épaisseur e. (axes sur la base de l'angle droit)
Moment d'inertie par rapport au plan xy : I_{xy}= Me²/3
Moment d'inertie par rapport au plan yz : I_{yz}= Ma²/6
Moment d'inertie par rapport au plan zx : I_{zx}= Mb²/6
Pour un disque plein de rayon R (G : centre de masse du disque)
Moment d'inertie par rapport à l'axe z_G : I_z=MR²/2



m la masse de la roue

$$I_{x(roue)} = I_{y(roue)} = \frac{I_{z(roue)}}{2}$$

$$I_{z(roue)} = \frac{m\left(R_e^2 + R_i^2\right)}{2}$$

m1 la masse de la tige L1

$$I_{x(L_1)} = m_1\left(\frac{L_2}{2}\right)^2$$

$$I_{z(L_1)} = \frac{m_1 L_1^{\,2}}{12} + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

$$I_{y(L_1)} = \frac{m_1 L_1^{\,2}}{12} + m_1\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

m2 la masse de la tige L2

$$I_{x(L_2)} = \frac{m_2 L_2^{\,2}}{12}$$

$$I_{y(L_2)} = \frac{m_2 L_2^{\,2}}{12} + m_2 L_1^{\,2}$$

$$I_{z(L_2)} = m_2 L_1^{\,2}$$

m3 la masse de la tige L3

$$I_{x(L_3)} = 0$$

$$I_{y(L_3)} = \frac{m_3 L_3^{\,2}}{12} + m_3\left(L_1 + \frac{L_3}{2}\right)^2$$

$$I_{z(L_3)} = \frac{m_3 L_3^{\,2}}{12} + m_3\left(L_1 + \frac{L_3}{2}\right)^2$$

m4 la masse du corps

$$I_{y(corps)} = 0$$

$$I_{y(corps)} = I_{z(corps)} = m_4 r^2$$

M la masse de la selle

$$I_{z(selle)} = I_{xz} + I_{yz}$$

$$I_{x(selle)} = \frac{M\left(\frac{a}{2}\right)^2}{6} + \frac{Mb^2}{6} - M\left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$I_{y(selle)} = \frac{Me^2}{3} + \frac{M\left(\frac{a}{2}\right)^2}{6} + M\left(L_1 + L_3 + \frac{e}{2}\right)^2 - M\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$I_{z(selle)} = \frac{Me^2}{3} + \frac{Mb^2}{6} + M\left(L_1 + L_3 + \frac{e}{2}\right)^2 - M\left(\frac{b}{3}\right)^2 - M\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

Tous les $P_{x_i x_j} = 0$

La roue :composante z=0 + symétrie suivant par rapport au plan xz et yz
Le châssis :composante y=0 + symétrie suivant par rapport au plan xy
La selle : au centre de masse : symétrie suivant l'axe z_G et l'axe x_G
les distances de décalage des axes : $x=x_G + d_x$; $y=y_G$;$z=z_G$ où d_y et d_z sont nuls.
Le corps : au centre de masse : les produits d'inertie sont nuls (énoncé)
les distances de décalage des axes : $x=x_G + d_x$; $y=y_G$;$z=z_G$ où d_y et d_z sont nuls.

20.

S_1-Parallélogramme abc : $\overline{\overline{I}}_{G\,S_1} = \dfrac{\rho abc}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

S_2 - Parallélogramme $\frac{a}{2}$bc :

$$\bar{\bar{I}}_{G\,S_2} = \frac{\rho\left(\frac{a}{2}\right)bc}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\rho\left(\frac{a}{2}\right)bc\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -(-cd) \\ 0 & d^2+c^2 & 0 \\ -(-cd) & 0 & d^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG_2}=(-d,0,c)}$$

$$S_3 - 4 \text{ roues} : \bar{\bar{I}}_{G\,S_3} = 4\times\rho\pi R^2\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{4} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{I}}_{Gi} \text{ au centre de chq roue}} + \underbrace{\rho\pi R^2\begin{pmatrix} 4\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & 4\left[e^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & 4\left[e^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Steiner pour les 4 roues} \\ \text{xyz = axes principaux pour le solide composé des 4 roues}}}$$

$\overline{GG}_{r1} = \left(e,-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$; $\overline{GG}_{r2} = \left(e,\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$; $\overline{GG}_{r3} = \left(-e,\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$; $\overline{GG}_{r4} = \left(-e,-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

Cylindre : $I_x = \frac{mR^2}{2} = I_{xy} + I_{xz}$ par symétrie $I_{xy} = I_{xz} = \frac{mR^2}{4}$; $I_y = I_{xy} + I_{yz}$ avec $I_{yz} = \frac{mL^2}{12}$

Cylindre creux de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur R_i :

$$I_x = \frac{\rho\pi h\left(R_e^4 - R_i^4\right)}{2} = \frac{M\left(R_e^2+R_i^2\right)}{2} \;;\; I_y = \frac{M\left(R_e^2+R_i^2\right)}{4} + \frac{mL^2}{12} = I_z$$

$$S_3\text{-Canon} : \bar{\bar{I}}_{G\,S_3} = \underbrace{\rho\pi\left(r_e^2 - r_i^2\right)L\begin{pmatrix} \frac{r_e^2+r_i^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{I}}_{Gi} \text{ au centre du canon}}$$

$$+\underbrace{\rho\pi\left(r_e^2 - r_i^2\right)L\begin{pmatrix} c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)c \\ 0 & c^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)c & 0 & \left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)^2 \end{pmatrix}}_{\text{Steiner avec } \overline{GG}_{canon}=\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d,0,c\right)}$$

=> $\overline{\overline{I}}_G = \overline{\overline{I}}_{G\,S_1} + \overline{\overline{I}}_{G\,S_2} + \overline{\overline{I}}_{G\,S_3} + \overline{\overline{I}}_{G\,S_4}$

$$\overline{\overline{I}}_G = \frac{\rho abc}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{12}\left(3b^2+15c^2\right) & 0 & cd \\ 0 & \left(\frac{9a^2}{24}+\frac{15c^2}{12}+d^2\right) & 0 \\ cd & 0 & \left(\frac{9a^2}{24}+\frac{3b^2}{12}+d^2\right) \end{pmatrix}_{2\text{ Parallélogramme}}$$

$$+\rho\pi\left(r_e^2-r_i^2\right)L\begin{pmatrix} \frac{r_e^2+r_i^2}{2}+c^2 & 0 & -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)c \\ 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12}+c^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)c & 0 & \frac{r_e^2+r_i^2}{4}+\frac{L^2}{12}+\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{4}-d\right)^2 \end{pmatrix}_{\text{Canon}}$$

$$+\rho\pi R^2\begin{pmatrix} b^2+c^2+R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4e^2+c^2+2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4e^2+b^2+R^2 \end{pmatrix}_{4\text{ roues}}$$

==> la symétrie du domaine d'intégration en y nous donnait directement que Pxy et Pyz étaient nuls pour chacun des solides du système.

---

21. 1. $S1$: grâce à la symétrie du domaine d'intégration suivant l'axe y : $D_1 = F_1 = 0$

$S2$: le mat est suivant z_2 => le domaine d'intégration unidimensionnel est suivant cet axe $(0,0,z_2)$

=> $C_2 = D_2 = E_2 = F_2 = 0$; $A_2 = B_2$

S3: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe y_3 (pas d'épaisseur)

Pb en 2D => $B_3 = A_3 + C_3$; $D_3 = F_3 = 0$

$S4$: Le domaine d'intégration est nul suivant l'axe y_3 (pas d'épaisseur)

Pb en 2D => $B_4 = A_4 + C_4$; $D_4 = F_4 = 0$

2. $\overline{G_1G_2} = \left(a_2-a_1, 0, c_2-c_1\right)$

$$\overline{\overline{I}}_{G1(S2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} \left(c_2-c_1\right)^2 & 0 & -\left(a_2-a_1\right)\left(c_2-c_1\right) \\ 0 & \left(a_2-a_1\right)^2+\left(c_2-c_1\right)^2 & 0 \\ -\left(a_2-a_1\right)\left(c_2-c_1\right) & 0 & \left(a_2-a_1\right)^2 \end{pmatrix}$$

$\overline{G_2G_3} = (a_3 - a_2, 0, c_3 - c_2)$ et $\overline{G_1G_3} = (0, 0, c_3 - c_1)$

$$\overline{\overline{I}}_{G_3(S3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & A_3 + C_3 & 0 \\ -E_3 & 0 & C_3 \end{pmatrix} - m_3 \begin{pmatrix} (c_3 - c_2)^2 & 0 & -(a_3 - a_2)(c_3 - c_2) \\ 0 & (a_3 - a_2)^2 + (c_3 - c_2)^2 & 0 \\ -(a_3 - a_2)(c_3 - c_2) & 0 & (a_3 - a_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_{G_1(S3)} = \overline{\overline{I}}_{G_3(S3)} + m_3 \begin{pmatrix} (c_3 - c_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (c_3 - c_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = [A_1] + \left[A_2 + m_2 (c_2 - c_1)^2\right] + \left[A_3 - m_3 (c_3 - c_2)^2 + m_3 (c_3 - c_1)^2\right] \\ B = [B_1] + \left[A_2 + m_2 \left((a_2 - a_1)^2 + (c_2 - c_1)^2\right)\right] + \left[(A_3 + C_3) - m_3 \left((a_3 - a_2)^2 + (c_3 - c_2)^2\right) + m_3 (c_3 - c_1)^2\right] \\ C = [C_1] + \left[0 + m_2 (a_2 - a_1)^2\right] + \left[C_3 - m_3 (a_3 - a_2)^2\right] \\ D = [0] + [0 + 0] + [0 + 0] = 0 \\ E = [E_1] + \left[0 + m_2 (a_2 - a_1)(c_2 - c_1)\right] + \left[E_3 - m_3 (a_3 - a_2)(c_3 - c_2)\right] \\ F = [0] + [0 + 0] + [0 + 0] = 0 \end{cases}$$

---

22. Pour la demi sphère pleine.

$M_1 = \dfrac{\rho 2\pi r^3}{3}$ et $z'_{G1} = \dfrac{5r}{8}$. $\Rightarrow I_{z'} = \dfrac{2M_1 r^2}{5}$

Axes $x_{O'} y_{O'} z'$ en O': $I_{x_{O'}} = I_{x_{O'} y_{O'}} + \dfrac{I_{z'}}{2} = \dfrac{M_1 r^2}{5} + \dfrac{M_1 r^2}{5} = \dfrac{2M_1 r^2}{5}$

$$I_{x'} = I_{x_{G1}} + M_1 d_{x' x_{G1}}{}^2 = \left(I_{x_{O'}} - M_1 d_{x_{O'} x_{G1}}{}^2\right) + M_1 d_{x' x_{G1}}{}^2 = M_1 \left(\frac{2r^2}{5} - \frac{9r^2}{64} + \frac{25r^2}{64}\right) = \frac{13 M_1 r^2}{20}$$

Pour le cylindre plein.

$M_2 = \rho \pi L r^2$ et $z'_{G2} = r + \dfrac{L}{2}$ $\Rightarrow$ $I_{z'} = \dfrac{M_2 r^2}{2}$ et $I_{x_{G2}} = I_{x_{G2} y_{G2}} + \dfrac{I_{z'}}{2} = \dfrac{M_2 L^2}{12} + \dfrac{M_2 r^2}{4}$

$$I_{x'} = I_{x_{G2}} + M_2 d_{x' x_{G2}}{}^2 = \frac{M_2 L^2}{12} + \frac{M_2 r^2}{4} + M_2 \left(\frac{L}{2} + r\right)^2 = M_2 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{4} + r^2 + Lr\right) = M_2 \left(\frac{L^2}{3} + \frac{5r^2}{4} + Lr\right)$$

Pour le cône.

$$M_3 = \rho \pi 2R\sqrt{4R^2 + 4H^2} - \rho \pi R \sqrt{R^2 + H^2} = 3\rho \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$I_{z'} = \frac{\rho \pi 2R\sqrt{4R^2 + 4H^2} 4R^2}{2} - \frac{\rho \pi R \sqrt{R^2 + H^2} R^2}{2} = \frac{15 \rho \pi R \sqrt{R^2 + H^2}}{2} = \frac{5 M_3 R^2}{2}$$

A la pointe du cone ($x_p y_p z'$) :

$$I_{x_P} = \frac{I_{z_P}}{2} + I_{x_P y_P} = \frac{5M_3 R^2}{4} + \left[\frac{\rho \pi 2R\sqrt{4R^2 + 4H^2} 4H^2}{2} - \frac{\rho \pi R \sqrt{R^2 + H^2} H^2}{2}\right] = \frac{5M_3 R^2}{4} + \frac{5M_3 H^2}{2}$$

$$I_{x'} = I_{x_{G3}} + M_3 d_{x_{G3} x'}{}^2 = \left(I_{x_P} - M_3 d_{x_P x_{G3}}{}^2\right) + M_3 d_{x_{G3} x'}{}^2$$

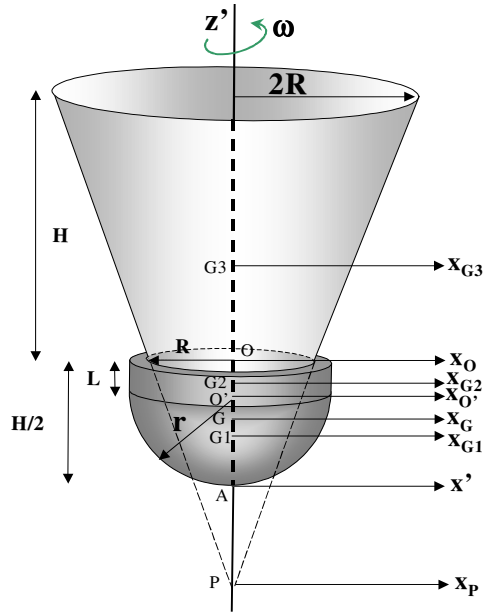
$$= \frac{5M_3 R^2}{4} + \frac{5M_3 H^2}{2} - M_3 \left(\frac{14H}{9}\right)^2 + M_3 \left(\frac{19H}{18}\right)^2 = \frac{5M_3 R^2}{4} + \frac{43 M_3 H^2}{36}$$

Pour le volant complet :

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \frac{\rho_1 2\pi r^3}{3} + \rho_2 \pi L r^2 + 3\rho_3 \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$I_{z'} = I_{z' Sphère} + I_{z' Cylindre} + I_{z' Cone} = \frac{2M_1 r^2}{5} + \frac{M_2 r^2}{2} + \frac{5M_3 R^2}{2}$$

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{x' Sphère} + I_{x' Cylindre} + I_{x' Cone} = \frac{13 M_1 r^2}{20} + M_2 \left(\frac{L^2}{3} + \frac{5r^2}{4} + Lr\right) + \frac{5M_3 R^2}{4} + \frac{43 M_3 H^2}{36}$$



23. L'inertie de la plaque trouée est égale à l'inertie de la plaque pleine diminuée de l'inertie des trous.

$$I_{x,total} = I_{x_G,0} - (I_{x,1} + I_{x,2} + I_{x,3} + I_{x,4} + I_{x,5} + I_{x,6})$$

$$P_{xy} = P_{xy_0} - (P_{xy_1} + P_{xy_2} + P_{xy_3} + P_{xy_4} + P_{xy_5} + P_{xy_6})$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} I_{x_G,0} = \sigma L l \dfrac{l^2}{12} \\ I_{x_G,1} = \sigma\pi R^2 \dfrac{R^2}{4} \Rightarrow I_{x,1} = \sigma\pi R^2(\dfrac{R^2}{4} + a^2) \\ I_{x_G,2} = I_{x_G,3} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \Rightarrow I_{x,2} = I_{x,3} = \sigma d^2(\dfrac{d^2}{12} + a^2) \\ I_{x_G,4} = I_{x,4} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12}(\cos^2 45° + \sin^2 45) = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \\ I_{x,5} + I_{x,6} = 2\dfrac{\sigma\pi r^2}{2}\dfrac{r^2}{4} \end{array}\right.$$

et

$$\left|\begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy_0} - (\underbrace{P_{xy_1}}_{0-\frac{\sigma\pi R^2}{2}ab} + \underbrace{P_{xy_2}}_{0-\sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_3}}_{0+\sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_4}}_{0} + \underbrace{P_{xy_5}}_{0-\frac{\sigma\pi r^2}{4}ac} + \underbrace{P_{xy_6}}_{0-\frac{\sigma\pi r^2}{4}ac}) \\ P_{xy} = \frac{\sigma\pi R^2}{2}ab + \frac{\sigma\pi r^2}{2}ac = \frac{\sigma\pi a}{2}(bR^2 + cr^2) \end{array}\right.$$

Résultante et moment cinétique

Formulaire

Résultante cinétique : $\overline{R} = m\overline{v}_G$
Moment cinétique par rapport à A : $\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{R}$
Moment cinétique par rapport à $A\left(A \in \text{Solide}\right)$: $\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$
Energie cinétique $\left(\text{A} \in \text{Solide}\right)$: $T = \dfrac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

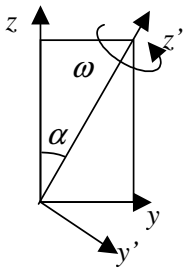
1. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G$	$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$	$T = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\omega$
1	$\overline{\mathfrak{R}} = -ma\omega\overline{1}_x$	$\overline{M}_O = -P_{xz}\omega\overline{1}_x - P_{yz}\omega\overline{1}_y + I_z\omega\overline{1}_z$ $= -mab\omega\overline{1}_y + \frac{4}{3}ma^2\omega\overline{1}_z$	$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$ $= \frac{2}{3}ma^2\omega^2$
2	$\overline{\mathfrak{R}} = 0$	$\overline{M}_O = -P_{xz}\omega\overline{1}_x - P_{yz}\omega\overline{1}_y + I_z\omega\overline{1}_z$ $= \frac{ma^2}{3}\omega\overline{1}_z$	$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$ $= \frac{1}{6}ma^2\omega^2$
3	$\overline{\mathfrak{R}} = -mb\omega\overline{1}_y$ $+ ma\omega\overline{1}_z$	$\overline{M}_O = +I_x\omega\overline{1}_x - P_{xy}\omega\overline{1}_y - P_{xz}\omega\overline{1}_z$ $= \frac{4}{3}m(a^2+b^2)\omega\overline{1}_x$	$T = \frac{1}{2}I_x\omega^2$ $= \frac{2}{3}m(a^2+b^2)\omega^2$
4	$\overline{\mathfrak{R}} = 0$	$\overline{M}_O = \cancel{-P_{xy}\omega_y\overline{1}_x} + I_y\omega_y\overline{1}_y - P_{yz}\omega_y\overline{1}_z$ $\cancel{-P_{xz}\omega_z\overline{1}_x} - P_{yz}\omega_z\overline{1}_y + I_z\omega_z\overline{1}_z$ $\overline{M}_O = +\frac{4}{3}mb^2\omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{1}_y - mab\omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{1}_y$ $+\frac{4}{3}ma^2\omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{1}_z - mab\omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{1}_z$ ou $\overline{M}_O = \cancel{-P_{x'z'}\omega_{z'}\overline{1}_{x'}} - P_{y'z'}\omega\overline{1}_{y'} + I_{z'}\omega\overline{1}_{z'}$ $= \frac{1}{3}mab\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\omega\overline{1}_{y'} + \frac{2}{3}\frac{ma^2b^2}{a^2+b^2}\omega\overline{1}_{z'}$ On aurait pu faire : $\overline{M}_O = \overline{M}_G$	$T = \frac{1}{2}I_{z'}\omega^2$ $= \frac{1}{3}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\omega^2$

(4)

$$I_{z'} = \int y'^2 dm = \int (\cos\alpha y - \sin\alpha z)^2 dm = \cos^2\alpha I_z + \sin^2\alpha I_y - 2\sin\alpha\cos\alpha P_{yz}$$

$$= \frac{b^2}{a^2+b^2}.\frac{4}{3}ma^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{4}{3}mb^2 - 2\frac{ab}{a^2+b^2}.mab = \frac{2}{3}\frac{ma^2b^2}{a^2+b^2}$$



$$P_{y'z'} = \int y'z'dm = \int (\cos\alpha y - \sin\alpha z)(\sin\alpha y + \cos\alpha z)dm = \cos\alpha\sin\alpha(I_z - I_y) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)P_{yz}$$

$$= \frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{4}{3}ma^2 - \frac{4}{3}mb^2\right) + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)mab = \frac{1}{3}\frac{ma^3b}{a^2+b^2} - \frac{1}{3}\frac{mab^3}{a^2+b^2}$$

2. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G$	$\overline{m}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$	$T = \frac{1}{2}I_d\omega^2$ avec d=axe de rotation
a	$\overline{\mathfrak{R}} = -m\frac{b}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = -m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_y + m\frac{b^2}{6}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{b^2}{12}\omega^2$
b	$\overline{\mathfrak{R}} = m\frac{h}{3}\omega\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = m\frac{h^2}{6}\omega\overline{1}_y - m\frac{bh}{12}\omega\overline{1}_z$	$T = m\frac{h^2}{12}\omega^2$
c	$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{m}{3}\omega\left(-h\overline{1}_y + b\overline{1}_z\right)$	$\overline{m_O} = m\frac{(b^2+h^2)}{6}\omega\overline{1}_x$	$T = m\frac{(b^2+h^2)}{12}\omega^2$
d	$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{m}{3}\omega\frac{h^2-b^2}{\sqrt{h^2+b^2}}\overline{1}_x$	$\overline{m_O} = \frac{m}{12}\frac{\omega}{\sqrt{b^2+h^2}}\left[h(2h^2-b^2)\overline{1}_y + b(2b^2-h^2)\overline{1}_z\right]$ avec $\overline{\omega}^*$	$T = \frac{m}{12(b^2+h^2)}(b^4+h^4-b^2h^2)\omega^2$ avec I_z^{**}

$$\underbrace{\overline{\overline{I}}_{O\,xyz}}_{Triangle} = \begin{pmatrix} m\frac{b^2+h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{h^2}{6} & -m\frac{bh}{12} \\ 0 & -m\frac{bh}{12} & m\frac{b^2}{6} \end{pmatrix}$$

Résultante (d) : Distance d'1 point P1(x1, y1) à la droite ax + by + c = 0,:

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

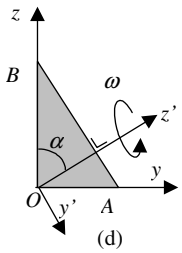
Ou utiliser la formule classique de cinématique : $\overline{v}_G = \overline{v}_O + \overline{\omega}\times\overline{OG}$

$$\overline{\omega}^* = \omega\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_y + \omega\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\overline{1}_z$$

$$I_{z'}^{**} = \int y'^2 dm = \int (\cos\alpha y - \sin\alpha z)^2 dm$$

$$= \cos^2\alpha I_z + \sin^2\alpha I_y - 2\sin\alpha\cos\alpha P_{yz}$$

$$= \frac{m}{6}\frac{1}{b^2+h^2}.\left(b^4+h^4-b^2h^2\right)$$



3. O = point appartenant à l'axe de rotation fixe.

	$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G$	$I_x = I_y + I_z$	$\overline{m}_O = -P_{xz}\omega\overline{1}_x - P_{yz}\omega\overline{1}_y + I_z\omega\overline{1}_z$	$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$
1	$-ma\omega\overline{1}_x$	$I_z = m(2a)^2/12 + ma^2$ $I_y = m(2b)^2/12 + mb^2$	$-mab\omega\overline{1}_y + \frac{4}{3}ma^2\omega\overline{1}_z$	$\frac{2}{3}ma^2\omega^2$
2	0	$I_z = m(2a)^2/12$ $I_y = m(2b)^2/12 + mb^2$	$\frac{ma^2}{3}\omega\overline{1}_z$	$\frac{1}{6}ma^2\omega^2$
3	$-mb\omega\overline{1}_x + ma\omega\overline{1}_y$	$I_y = m(2a)^2/12 + ma^2$ $I_x = m(2b)^2/12 + mb^2$ $I_z = I_x + I_y$	$\frac{4}{3}m(a^2+b^2)\omega\overline{1}_z$	$\frac{2}{3}m(a^2+b^2)\omega^2$
4	$-mb\omega\overline{1}_x$	$I_z = m(2b)^2/12 + mb^2$ $I_y = m(2a)^2/12 + ma^2$	$-mab\omega\overline{1}_y + \frac{4}{3}mb^2\omega\overline{1}_z$	$\frac{2}{3}mb^2\omega^2$
5	0	$I_z = m(2b)^2/12$ $I_y = m(2a)^2/12 + ma^2$	$\frac{mb^2}{3}\omega\overline{1}_z$	$\frac{1}{6}mb^2\omega^2$
6	0	* (1)	$\frac{1}{3}mab\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\omega\overline{1}_y + \frac{2}{3}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\omega\overline{1}_z$	$\frac{1}{3}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\omega^2$

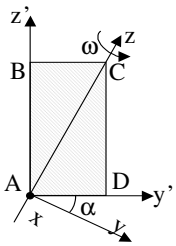
* (1)

$$I_z = \int y^2 dm = \int (\cos\alpha y' - \sin\alpha z')^2 dm$$

$$= \cos^2\alpha I_{z'} + \sin^2\alpha I_{y'} - 2\sin\alpha\cos\alpha P_{y'z'}$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{4}{3}mb^2 + \frac{b^2}{a^2+b^2}.\frac{4}{3}ma^2 - 2mab.\frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{ma^2b^2}{a^2+b^2}$$



4. Axe x (AB), y (AD), z (perpendiculaire au plan en A)

a) ! le vecteur de vitesse angulaire est négatif (-1x)

$$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G = m\overline{v}_A = mL\dot{\theta}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_G^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \quad car \quad \overline{\omega} = 0 \quad (translation)$$

$$\overline{m}_G = 0; \overline{m}_A = \overline{m}_G + \overline{AG} \times \overline{\mathfrak{R}} = mL^2\dot{\theta}(-\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta)\overline{1}_z$$

b)

$$\overline{\mathfrak{R}} = m\overline{v}_G = \frac{3}{2}mL\dot{\theta}(-1, 0, 0)$$

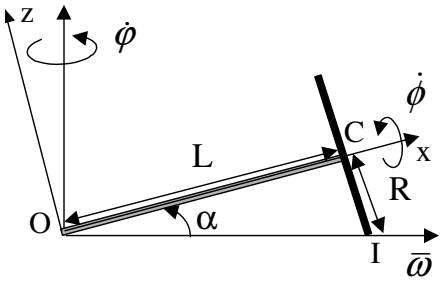
$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}.\overline{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m\frac{L^2+4L^2}{12} + m\left(\frac{3L}{2}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$\overline{m}_G = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{5}{12}mL^2\dot{\theta}\overline{1}_z$$

$$\overline{m}_A = \overline{m}_G + \overline{AG} \times \overline{\mathfrak{R}} = \frac{7}{6}mL^2\dot{\theta}\overline{1}_z$$

5. Dans les axes principaux Oxyz tel que précisé sur le dessin.



$$\overline{m}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\left(\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi}\right) \\ 0 \\ B\dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$où \quad A = \frac{MR^2}{2}; \quad B = M\frac{R^2}{4} + ML^2 + \frac{mL^2}{3}$$

$$B = I_{disque}(= I_{diamètre} + Md_{(diamètre-axe\ Z)}) + I_{tige}$$

vC = vitesse C ∈ tige = vitesse C ∈ disque.

$$L\cos\alpha\dot{\varphi} = \overline{\omega} \times \overline{CI} \quad => \quad \sqrt{R^2+L^2}\dot{\varphi} = R\dot{\phi} \quad => \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{\varphi}}{\sin\alpha}$$

$$\overline{n}_O = -A\dot{\varphi}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\overline{1}_x + B\dot{\varphi}\cos\alpha\overline{1}_z$$

$$\frac{d\overline{m}_O}{dt} = -A\ddot{\varphi}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\overline{1}_x - \dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha(B + A\mathrm{cotg}^2\alpha)\overline{1}_y + B\ddot{\varphi}$$

6. $\overline{m}_A = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} + M\overline{AG}\times\overline{v}_A$

où $\overline{\omega} = \dot{\theta}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{1}_\xi + \overline{1}_\varsigma)$;

Axes (η', ξ, ς') *centrés au centre de la base* $(\eta'^2 + \xi'^2 = r^2)$

$$I_{\varsigma' G} = \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'(\eta'^2+\xi'^2) = \rho\frac{\pi}{2}R^4 h = \frac{MR^2}{2};\ I_\varsigma = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$I_{\eta'} = I_\xi = \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'(\varsigma'^2+\eta'^2) = \frac{I_{\varsigma' G}}{2} + \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'\,\varsigma'^2 = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{3}$$

$$P_{\xi\eta} = \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'(\xi\eta') = 0;$$

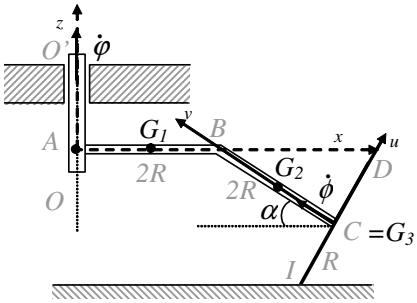
$$P_{\xi\varsigma} = \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'\big((\xi'_G + R)\varsigma'\big) = P_{\xi'\varsigma'} + \rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h d\varsigma'\varsigma' R = -\frac{MRh}{2}$$

$$M\overline{AG}\times\overline{v}_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}M(R+\frac{h}{2})\dot{z}\overline{1}_\eta$$

$$\overline{m}_A = \frac{M\sqrt{2}}{24}\dot{\theta}\Big[\big(3R^2+4h^2+6Rh\big)\overline{1}_\xi + \big(18R^2+6Rh\big)\overline{1}_\varsigma\Big] - \frac{\sqrt{2}}{2}M(R+\frac{h}{2})\dot{z}\overline{1}_\eta$$

---

7. Les rotations subies par les trois solides ne sont pas identiques => calculer le moment cinétique de chaque solide.



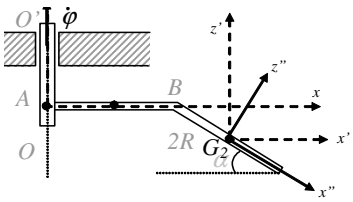
$\overline{M_A} = \overline{M_{A(S1)}} + \overline{M_{A(S2)}} + \overline{M_{A(S3)}}$

Solide 1 : A appartient à S1

$$\overline{M_{A(S1)}} = \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}_1 \underset{\text{ou}}{=} \overline{M_{G_1}} + \overline{AG_1}\times m_1\overline{v}_{G_1}$$

$$\overline{M_{A(S1)}} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & \dfrac{\rho 2R.(2R)^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\rho 8R^3}{3}\dot{\varphi}\overline{1}z$$

Axes G2x'y'z' avec x'y'z' parallèle à Axyz.
Axes G2x''y''z'' = rotation du repère Ax'y'z' d'un angle α tel que x'' est suivant G2C.



$\boxed{\overline{M_{A(S2)}} = \overline{M_{G_2}} + \overline{AG_2}\times m_2\overline{v_{G_2}}}$ avec $A \notin S_2$

$\overline{AG_2} = \big(2R + R\cos\alpha\big)\overline{1}_x - \big(R\sin\alpha\big)\overline{1}_z$ et $\overline{v_{G_2}} = \big(2R + R\cos\alpha\big)\dot{\varphi}\overline{1}_y$

$I_{z''} = I_{y''} = \dfrac{mL^2}{12} = \dfrac{mR^2}{3}$ et $I_{x''} = P_{x''z''} = P_{x''y''} = P_{y''z''} = 0$ et $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 = \dot{\varphi}\overline{1}_z$

$$\overline{M_{G_2}} = \overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & \dfrac{m_2R^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\alpha \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{m_2R^2}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\,\overline{1}_{z''} = \frac{m_2R^2}{3}\dot{\varphi}\cos\alpha\big(\sin\alpha\,\overline{1}_{x'} + \cos\alpha\,\overline{1}_{z'}\big)$$

$$\overline{M_{G_2}} \underset{\alpha=30°}{=} \rho R^3 \dot{\varphi}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\bar{1}_{x'} + \frac{1}{2}\bar{1}_{z'}\right)$$

on peut aussi travailler directement dans les axes $G_2x'y'z'$ en calculant les éléments du tenseurs

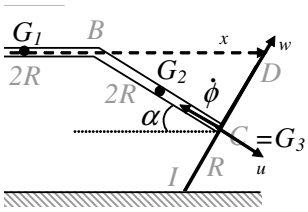
avec les changements d'axes : $P_{x'z'} = -\cos\alpha\sin\alpha I_{z''} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3$ et $I_{z'} = \cos^2\alpha I_{z''} = \frac{\rho R^3}{2}$

$$\overline{M_{G_2}} = -P_{x'z'}\omega_{z'}\bar{1}_{x'} - \underbrace{P_{y'z'}}_{=0}\omega_{z'}\bar{1}_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}\bar{1}_{z'} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \frac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'}$$

$$=> \begin{cases} \overline{M_{A\,tige\,2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho R^3\dot{\varphi}\bar{1}_{x'} + \frac{\rho R^3}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_{z'} + \rho 2R\left((2R+R\cos\alpha)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z + (R\sin\alpha)(2R+R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_x\right) \\ => \overline{M_{A\,tige\,2}} = \rho\dot{\varphi}R^3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)\bar{1}_{x'} + \rho R^3\dot{\varphi}\left(10+4\sqrt{3}\right)\bar{1}_{z'} \end{cases}$$

Axes Cuvw avec C=G3 ; u suivant BC, v//y et w suivant CD.

$\boxed{\overline{M_{A(S3)}} = \overline{M_{G_3}} + \overline{AG_3}\times m_3\overline{v_{G_3}}}$ avec $A \notin S_3$



$$\overline{OG_3} = (2R+2R\cos\alpha)\bar{1}_x - (2R\sin\alpha)\bar{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{v_{G_3}} = \frac{d\overline{OG_3}}{dt} = (2R+2R\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_y$$

ou par la formule de cinématique de distribution des vitesses avec $\overline{\omega_{S_3}} = \left(-\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w$

$$\overline{v_{G_3}} = \underbrace{\overline{\omega}_{S_1}\times\overline{AC}}_{\overline{v}_{C\in tige}} = 2R(1+\cos\alpha)\dot{\varphi}\bar{1}_{y'} = \underbrace{\overline{\omega}_{S_3}\times\overline{IC}}_{\overline{v}_{C\in disque}} = R\left(\dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\phi}\right)\bar{1}_y$$

ce qui nous donne le lien entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\phi}$ (en égalant la vitesse de C appartenant à la tige et la vitesse de C appartenant au disque) avec $=> \dot{\phi} = \left(2(1+\cos\alpha) - \sin\alpha\right)\dot{\varphi} \underset{\alpha=30°}{=} \left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}$

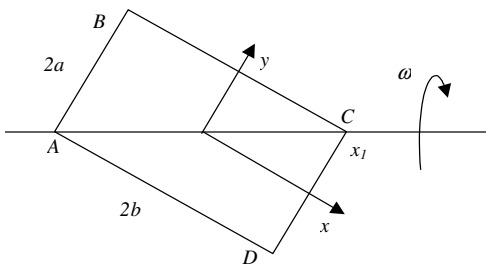
$$I_v = I_w = \frac{mR^2}{4} \quad \text{et} \quad I_u = \frac{mR^2}{2}; \quad P_{uw} = P_{vw} = P_{uv} = 0$$

$$\overline{M_{G_3}} = \overline{\overline{I}}_{G_3}.\overline{\omega}_3 = \begin{pmatrix} \frac{m_3R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3R^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\alpha - \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\alpha \end{pmatrix} = I_u\omega_u\bar{1}_u + I_w\omega_w\bar{1}_w$$

$$=> \overline{M_{G_3}} = -\frac{\rho\pi R^4}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\rho\pi R^4}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\bar{1}_w = -\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_w$$

$$=> \begin{cases} \overline{M_{O\,tige\,3}} = -\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\dot{\varphi}+2\dot{\phi}\right)\bar{1}_u + \frac{\sqrt{3}}{8}\rho\pi R^4\dot{\varphi}\bar{1}_w + \rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)^2\dot{\varphi}\bar{1}_z + \rho\pi R^4\left(2+\sqrt{3}\right)\dot{\varphi}\bar{1}_x \\ => \overline{M_{O\,tige\,3}} = \rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(2+\frac{15}{16}\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_x + \rho\pi R^4\left(\dot{\varphi}\left(\frac{117}{16}+4\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\dot{\phi}\right)\bar{1}_z \end{cases}$$

8.



$$\bar{\omega} = \omega \bar{1}_{x_1} = \omega\cos\alpha\,\bar{1}_x + \omega\sin\alpha\,\bar{1}_y$$

où $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Les produits d'inertie sont nuls car nous travaillons dans les axes principaux. En effet, l'intégration des puissances impaire (x et y) sur le domaine symétrique est nulle. Et la coordonnée z est nulle pour toute la plaque.

$$\bar{M}_G = \bar{\bar{I}}.\bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & - \\ 0 & I_y & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = I_x\cos\alpha\omega\bar{1}_x + I_y\sin\alpha\omega\bar{1}_y$$

$$\bar{M}_G = \frac{(\rho 2a2b)(2a)^2}{12}\omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\bar{1}_x + \frac{(\rho 2a2b)(2b)^2}{12}\omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\bar{1}_y = \frac{\rho 4}{3}\frac{a^2b^2\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\bar{1}_x + b\bar{1}_y\right)$$

---

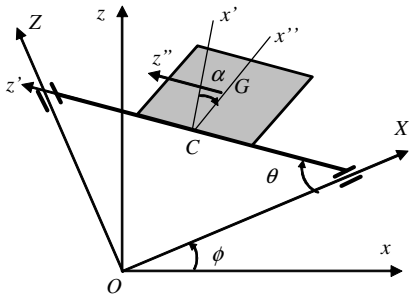
9. $T = T_{Tige} + T_{carré}$

Dans les axes principaux $(Cx'y'z')$ lié au centre de masse de la tige :

$$T_{Tige} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_C.\bar{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2 + v_{C_z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x \underbrace{p}_{=0}{}^2 + I_y q^2 + I_z \underbrace{r}_{=0}{}^2\right)$$

avec
$$\begin{cases} \overline{OC} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\bar{1}_X + \sin\theta\bar{1}_Z\right) \\ \bar{v}_C = \dfrac{d\overline{OC}}{dt} = \dfrac{3a}{2}\left(-\sin\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\bar{1}_X + \cos\theta\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)\bar{1}_Z\right) \\ I_{Cy} = \dfrac{mL^2}{12} = \dfrac{\rho 9a^3}{4} \quad \text{et } \bar{\omega} = \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{Tige} = \rho\frac{9a^3}{8}\left(\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)^2\right)$$



Dans les axes principaux Gx''y''z'' lié au centre de masse du carré.

$$T_{Carré} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} = \frac{1}{2}m\left(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 + v_{Gz}^2\right) + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$$

avec
$$\begin{cases} \overline{OG} = \dfrac{3a}{2}\left(\cos\theta\bar{1}_X + \sin\theta\bar{1}_Z\right) + \dfrac{a}{2}\bar{1}_{x''} = \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\bar{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\sin\alpha\bar{1}_{y'} - \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\bar{1}_{z'} \\ \bar{v}_G = \left(3a\cos 2\theta\dot{\theta} - \dfrac{a}{2}\sin\alpha\dot{\alpha} - \dfrac{3a}{2}\cos 2\theta\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\right)\bar{1}_{x'} + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\dot{\alpha}\bar{1}_{y'} \\ \qquad + \left(3a\sin 2\theta\dot{\theta} - \left(\dfrac{3a}{2}\sin 2\theta + \dfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\right)\bar{1}_{z'} = v_{Gx}\bar{1}_{x''} + v_{Gy}\bar{1}_{y''} + v_{Gz}\bar{1}_{z''} \\ \bar{\omega} = \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\bar{1}_{y'} + \dot{\alpha}\bar{1}_{z'} = \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\sin\alpha\bar{1}_{x''} + \left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right)\cos\alpha\bar{1}_{y''} + \dot{\alpha}\bar{1}_{z''} = p\bar{1}_{x''} + q\bar{1}_{y''} + r\bar{1}_{z''} \\ A = C = I_{x''G} = \dfrac{ml^2}{12} = \dfrac{\rho a^4}{12} \quad \text{et} \quad B = I_{y''G} = \dfrac{ml^2}{6} = \dfrac{\rho a^4}{6} \end{cases}$$

Pour les moments cinétiques :

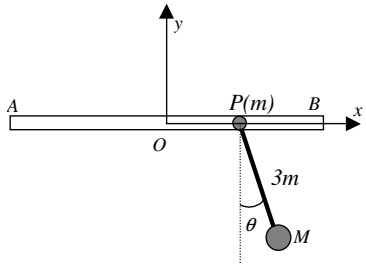
$$\overline{M_O} = \overline{M_{O\,tige}} + \overline{M_{O\,carré}}$$

$$\overline{M_{O\,tige}} = \overline{M_C} + \overline{OC}\times\bar{\Re} = \bar{\bar{I}}_C.\bar{\omega} + \overline{OC}\times m\bar{v}_C$$

$$\overline{M_{O\,carré}} = \overline{M_G} + \overline{OG}\times\bar{\Re} = \bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} + \overline{OG}\times m\bar{v}_G = Ap\bar{1}_{x''} + Bq\bar{1}_{y''} + Cr\bar{1}_{z''} + \overline{OG}\times m\bar{v}_G$$

---

10. $\overline{\Re} = \sum_i m\overline{v}_{G_i} = m\overline{v}_P\,\overline{1}_x + 3m\overline{v}_{G_{tige}} + M\overline{v}_{G_{balle}}$



avec $\begin{cases} x = a\cos\omega t; \\ \overline{OG} = \left(a\cos\omega t + \frac{a}{2}\sin\theta\right)\overline{1}_x - \frac{a}{2}\cos\theta\,\overline{1}_y\ ; \\ \overline{OG'} = \left(a\cos\omega t + (a+R)\sin\theta\right)\overline{1}_x - (a+R)\cos\theta\,\overline{1}_y \end{cases}$

$$\overline{\Re} = \left[-ma\sin\omega t\,.\omega\overline{1}_x\right] + \left[3m\left(\left(-a\sin\omega t.\omega + \frac{a}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + \frac{a}{2}\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_y\right)\right]$$

$$+\left[M\left(\left(-a\sin\omega t.\omega + (a+R)\cos\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x + (a+R)\sin\theta\dot{\theta}\overline{1}_y\right)\right]$$

$$=> \overline{\Re} = (4m+M)\left[\left(-\omega a\sin\omega t + a\dot{\theta}cos\theta\right)\overline{1}_x + A\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_y\right] \text{ avec } A = \frac{3m\frac{a}{2} + M(a+R)}{4m+M}$$

$$T = \sum_i T_i = \left[\frac{1}{2}mv_{G_m}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_m}.\overline{\omega}}_{=0(\text{masse ponct})}\right] + \left[\frac{1}{2}(3m)v_{G_{tige}}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{tige}.\overline{\overline{I}}_{G_{tige}}.\overline{\omega}_{tige}\right] + \left[\frac{1}{2}Mv_{G_{balle}}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{balle}.\overline{\overline{I}}_{G_{balle}}.\overline{\omega}_{balle}\right]$$

$$T = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right] + \left[\frac{1}{2}3mv_{G_{tige}}^2 + \frac{1}{2}\frac{3ma}{12}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}Mv_{G_{balle}}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}^2\right]$$

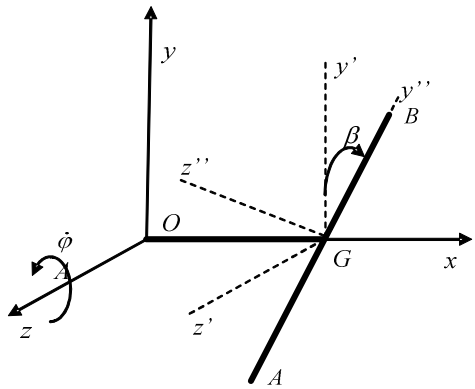
$$=> T = \left(2m + \frac{M}{2}\right)a^2\omega^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}\left[ma^2 + M(a+R)^2 + \frac{2}{5}MR^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$-\left[\frac{3}{2}ma^2 + Ma(a+R)\right]\omega\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta$$

---

11. dans les axes principaux $Gy''z''$ lié à la tige :

$\overline{\omega} = -\dot{\beta}\overline{1}_x + \dot{\varphi}\overline{1}_z = -\dot{\beta}\overline{1}_{x''} + \dot{\varphi}\cos\beta\,\overline{1}_{z''} - \dot{\varphi}\sin\beta\,\overline{1}_{y''}$



<u>1. Dans les axes Oxyz</u>

$$\overline{M_O}_{(S1+S2)} = \overline{\overline{I}}_{O(S1+S2)}.\overline{\omega} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1.L_1^2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 \\ 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos\beta\sin\beta \\ 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_2.L_1^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$=> \boxed{\overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\dot{\varphi}\overline{1}_y + \left(\left(\frac{m_1.L_1^2}{3} + m_2.L_1^2\right) + \frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2\beta\right)\dot{\varphi}\overline{1}_z}$$

$$\frac{d\overline{M_O}}{dt}=\frac{d\overline{M_O}}{dt}_{xyz}+\overline{\omega}_{xyz/XYZ}\times\overline{M_O}=$$

$$\frac{d\overline{M_O}}{dt}=-\frac{m_2.L_2^2}{12}\ddot{\beta}\overline{1}_x+\frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\ddot{\varphi}\overline{1}_y+\left(\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+m_2.L_1^2\right)+\frac{m_2.L_2^2}{12}\cos^2\beta\right)\ddot{\varphi}\overline{1}_z$$

$$+\frac{m_2.L_2^2}{12}\cos 2\beta\dot{\beta}\dot{\varphi}\overline{1}_y+\left(-\frac{m_2.L_2^2}{12}2\cos\beta\sin\beta\right)\dot{\varphi}\dot{\beta}\overline{1}_z\underbrace{-\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\dot{\varphi}\overline{1}_y-\frac{m_2.L_2^2}{12}\frac{\sin 2\beta}{2}\dot{\varphi}^2\overline{1}_x}_{\overline{\omega}_{xyz/XYZ}\times\overline{M_O}}$$

2. Dans les axes Oxyz tournant avec les 2 tiges. (S=S1+S2)

$$\overline{M_O}_{(S1+S2)}=\overline{\overline{I}}_{O(S1+S2)}.\overline{\omega}=\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{m_1.L_1^2}{3}&0\\0&0&\frac{m_1.L_1^2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{m_2.L_2^2}{12}&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{m_2.L_2^2}{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&m_2.L_1^2&0\\0&0&m_2.L_1^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-\dot{\beta}\\-\dot{\varphi}\sin\beta\\\dot{\varphi}\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_O}=-\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_{x''}-\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\sin\beta\overline{1}_{y''}+\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+\frac{m_2.L_2^2}{12}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{z''}}$$

$$\frac{d\overline{M_O}}{dt}=\frac{d\overline{M_O}}{dt}_{x''y''z''}+\overline{\omega}_{x''y''z''/XYZ}\times\overline{M_O}=$$

$$-\frac{m_2.L_2^2}{12}\ddot{\beta}\overline{1}_{x''}-\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+m_2.L_1^2\right)\ddot{\varphi}\sin\beta\overline{1}_{y''}-\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\cos\beta\dot{\beta}\overline{1}_{y''}$$

$$+\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+\frac{m_2.L_2^2}{12}+m_2.L_1^2\right)\ddot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{z''}-\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+\frac{m_2.L_2^2}{12}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\sin\beta\dot{\beta}\overline{1}_{z''}$$

$$-\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\left(\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{y''}+\dot{\varphi}\sin\beta\overline{1}_{z''}\right)-\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\sin\beta\left(-\dot{\beta}\overline{1}_{z''}-\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{x''}\right)$$

$$+\left(\frac{m_1.L_1^2}{3}+\frac{m_2.L_2^2}{12}+m_2.L_1^2\right)\dot{\varphi}\cos\beta\left(\dot{\beta}\overline{1}_{y''}-\dot{\varphi}\sin\beta\overline{1}_{x''}\right)$$

3. en considérant séparément les deux solides.

$$\overline{M_O}=\overline{M_{O(S1)}}+\overline{M_{O(S2)}}\quad\text{avec}\quad\begin{cases}\overline{M_{O(S1)}}=\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}=\begin{pmatrix}/&/&0\\&&0\\&&\frac{m_1.L_1^2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix}=\frac{m_1.L_1^2}{3}\dot{\varphi}\overline{1}_z\\\overline{M_{O(S2)}}=\overline{M_G}+\overline{OG}\times\overline{R}=\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2+m_2\left(L_1\overline{1}_x\right)\times L_1\dot{\varphi}\overline{1}_y\end{cases}$$

$$\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2.L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2.L_2^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ -\dot{\varphi}\sin\beta \\ \dot{\varphi}\cos\beta \end{pmatrix} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_{x''} + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\overline{1}_{z''}$$

$$=> \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}_2 = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\sin\beta\overline{1}_y + \frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos\beta\cos\beta\overline{1}_z$$

$$\overline{M_{O\,(S2)}} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24}\dot{\varphi}\sin 2\beta\overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos^2\beta + m_2L_1^2\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z$$

$$=> \overline{M_O} = -\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\beta}\overline{1}_x + \frac{m_2.L_2^2}{24}\dot{\varphi}\sin 2\beta\overline{1}_y + \left(\frac{m_2.L_2^2}{12}\dot{\varphi}\cos^2\beta + m_2L_1^2\dot{\varphi} + \frac{m_1.L_1^2}{3}\dot{\varphi}\right)\overline{1}_z$$

---

12. 1.

$$M = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H zdz \int_0^{\frac{R}{H}z} rdr = k\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2}{2}\frac{(H)^4}{4}\pi = k\pi\frac{R^2H^2}{8}$$

$$I_z = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H zdz \int_0^{\frac{R}{h}z} r^3dr = k\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^4}{4}\frac{(H)^6}{6}\pi = \frac{k\pi}{24}H^2R^4 = \frac{MR^2}{3}$$

$$I_{xy} = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H zdz \int_0^{\frac{R}{H}z} \left(z^2\right) rdr = k\pi\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2}{2}\frac{H^6}{6} = \frac{2MH^2}{3}$$

$$I_{yz} = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H zdz \int_0^{\frac{R}{H}z} (r\cos\theta)^2 rdr = k\frac{\pi}{2}\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^4}{4}\frac{H^6}{6} = \frac{MR^2}{6} = I_{xz}$$

$$=> I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3} = I_y;$$

$P_{xy} = P_{yz} = 0$ grace à l'intégration de y sur un domaine symétrique

$$P_{zx} = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^H zdz \int_0^{\frac{R}{H}z} z(r\cos\theta) rdr = k2\frac{\left(\frac{R}{H}\right)^3}{3}\frac{H^6}{6} = \frac{8M}{9\pi}RH$$

2. Trouvons les points P appartenant à l'axe z où les moments d'inertie (I_{xP} , I_{yP} , I_{zP}) sont égaux dans le repère $Px_Py_Pz_P$

$$\underbrace{\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3}}_{I_x} - M\underbrace{\left(\frac{3H}{4}\right)^2}_{d(\text{axe } x, \text{axe } x_G)} + M\underbrace{d^2}_{d(\text{axe } x_G, \text{axe } x_P)^2} = \frac{MR^2}{3}$$

=> 2 racines réelles $d = \pm\sqrt{\frac{R^2}{6} - \left(\frac{5}{48}\right)H^2}$ à condition que $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}} < \sqrt{\frac{8}{5}}$

Il faut en plus que en ces points le produit d'inertie $P_{xp\,z}$ soit nul aussi pour qu'on soit bien dans des axes principaux (ce qui ne semble pas être le cas)

=>Il n'existe pas de point de l'axe z qui annule le produit d'inertie dans un système d'axe parallèle à xyz, car le décalage de l'axe en x est nul =>

---

3. L'angle alpha est l'angle entre l'axe z et l'axe z'. Par la formule de changement d'axe ($\overline{1}_{z'} = (0; \sin\alpha; \cos\alpha)$)

$$I_{z'} = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha \quad \text{où} \quad \cos^2\alpha = \frac{H^2}{H^2+R^2} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha = \frac{R^2}{H^2+R^2}$$

$$=> I_{z'} = \frac{MR^2}{3}\frac{H^2}{H^2+R^2} + \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3}\right)\frac{R^2}{H^2+R^2} = \frac{R^2}{H^2+R^2}\left(MH^2 + \frac{MR^2}{6}\right)$$

4. $\overline{M_O} = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$ avec $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_{z'}$ $=> \overline{M_O} = -P_{x'z'}\omega\overline{1}_{x'} - P_{y'z'}\omega\overline{1}_{y'} + I_{z'}\omega\overline{1}_{z'}$

$$P_{y'z'} = \int (\cos\alpha y - \sin\alpha z)(\sin\alpha y + \cos\alpha z)\,dm = \cos\alpha\sin\alpha\left(I_z - I_y\right) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)P_{yz}$$

$$= \frac{HR}{H^2+R^2}\left(\frac{MR^2}{3} - \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3}\right)\right) + \left(\frac{H^2-R^2}{H^2+R^2}\right)\underbrace{P_{yz}}_{\substack{dom.sym \\ \text{en } y=>0}} = \frac{HR}{H^2+R^2}\left(\frac{MR^2}{6} - \frac{2MH^2}{3}\right)$$

$$P_{x'z'} = \int x(\sin\alpha y + \cos\alpha z)\,dm = \sin\alpha \cancel{P_{xy}} + \cos\alpha P_{xz} = \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\frac{8MRH}{9\pi}$$

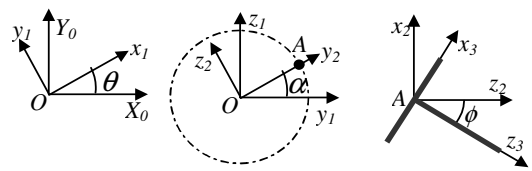
$$=> \overline{M_O} = -\frac{H\omega}{\sqrt{H^2+R^2}}\frac{8MRH}{9\pi}\overline{1}_{x'} + \frac{HR}{H^2+R^2}\left(\frac{MR^2}{6} - \frac{2MH^2}{3}\right)\omega\overline{1}_{y'} + \frac{R^2}{H^2+R^2}\left(MH^2 + \frac{MR^2}{6}\right)\omega\overline{1}_{z'}$$

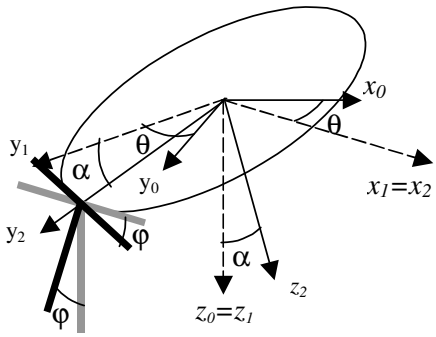
ou

$$\overline{M_O} = -P_{xz}\omega\cos\alpha\overline{1}_x + I_y\omega\sin\alpha\overline{1}_y + I_z\omega\cos\alpha\overline{1}_z$$

$$\overline{M_O} = -\frac{8MRH}{9\pi}\frac{H\omega}{\sqrt{H^2+R^2}}\overline{1}_x + \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{2MH^2}{3}\right)\frac{R\omega}{\sqrt{H^2+R^2}}\overline{1}_y + \frac{MR^2}{6}\frac{H\omega}{\sqrt{H^2+R^2}}\overline{1}_z$$

13.





=> les vecteurs de Darboux :

$$\overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1} \;;\; \overline{\omega}_{R_2/R_0} = \overline{\omega}_{R_2/R_1} + \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1}$$

$$\overline{\omega}_{R_3/R_0} = \overline{\omega}_{R_3/R_2} + \overline{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1} - \dot{\phi}\overline{1}_{y_2}$$

=> les vecteurs vitesses angulaires des solides :

$$\overline{\omega}_{Cercle} = \overline{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1} \quad \text{et} \quad \overline{\omega}_T = \overline{\omega}_{R_3/R_0} = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1} - \dot{\phi}\overline{1}_{y_2}$$

R_0 : Axe $OX_0Y_0Z_0$ fixe. ; R_1 : Axe $Ox_1y_1z_1$ tourne autour de l'axe $Z_0 = z_1$ (θ)

R_2 : Axe $Ox_2y_2z_2$ incliné d'un angle α par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, avec z_2 lié à la tige, R_2 tourne autour de l'axe z_1 (ϕ)

R_3 : Axe $Gx_3y_3z_3$ liés au cube et tourne autour de z_1 (ϕ) et z_2 ()

$$T = T^{(C)} + T^{(BC)} + T^{(AD)} \quad \text{et} \quad \overline{M}_O = \overline{M}_O{}^{(C)} + \overline{M}_O{}^{(BC)} + \overline{M}_O{}^{(AD)}$$

1. Dans les axes principaux du cercle (Repère R_2):

$$T^{(C)} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) \text{ avec } \begin{cases} A = B = \dfrac{MR^2}{2}; C = MR^2 \\ \overline{\omega}_T = \dot{\theta}\overline{1}_{z_1} = \sin\alpha\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + \cos\alpha\dot{\theta}\overline{1}_{z_2} \end{cases}$$

$$=> T^{(T)} = \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2\left(1 + \cos^2\alpha\right)$$

$$\overline{M}_O = \overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = Ap\overline{1}_{x_2} + Bq\overline{1}_{y_2} + Cr\overline{1}_{z_2}.\overline{M}_O{}^{(T)} => \overline{M}_O =$$

---

2. Dans les axes principaux du T (des tiges soudées) (Repère R_3)

$$T^{(BC)} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} \underset{G=A}{=} \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}\left(A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2\right)$$

avec
$$\begin{cases} \overline{OA} = R\bar{1}_{y_2} \Rightarrow \bar{v}_A = R\dfrac{d\bar{1}_{y_2}}{dt} = R\bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{1}_{y_2} = -R\dot{\theta}\cos\alpha\,\bar{1}_{x_2} \text{ avec } \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta}\bar{1}_{z_1} = \dot{\theta}\left(\sin\alpha\,\bar{1}_{y_2} + \cos\alpha\,\bar{1}_{z_2}\right) \\ \bar{\omega}_T = \left(\sin\alpha\dot{\theta} - \dot{\phi}\right)\bar{1}_{y_2} + \cos\alpha\dot{\theta}\bar{1}_{z_2} = \left(\sin\alpha\dot{\theta} - \dot{\phi}\right)\bar{1}_{y_3} + \cos\alpha\dot{\theta}\left(\sin\phi\bar{1}_{x_3} + \cos\phi\bar{1}_{z_3}\right) = p'\bar{1}_{x_3} + q'\bar{1}_{y_3} + r'\bar{1}_{z_3} \\ \Rightarrow p' = \sin\phi\cos\alpha\dot{\theta};\ q' = \sin\alpha\dot{\theta} - \dot{\phi}\ ;\ r' = \cos\phi\cos\alpha\dot{\theta} \quad \text{et} \quad A' = 0;\ B' = C' = I_{x_{3,A}} = \dfrac{MR^2}{12} \end{cases}$$

$$T^{(BC)} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{12}\left(\sin\alpha\dot{\theta} - \dot{\phi}\right)^2 + \frac{MR^2}{12}\cos^2\phi\cos^2\alpha\dot{\theta}^2\right)$$

$$\bar{M}_O^{(BC)} = \bar{M}_A + \overline{OA} \times \bar{R} \text{ avec } \bar{M}_A = A'p'\bar{1}_{x_3} + B'q'\bar{1}_{y_3} + C'r'\bar{1}_{z_3} \text{ car } A\text{=Centre de masse } G$$

$$\bar{M}_O^{(BC)} = -\frac{MR^2}{12}\left(\sin\alpha\dot{\theta} - \dot{\phi}\right)\bar{1}_{y_3} + \frac{MR^2}{12}\cos\phi\cos\alpha\dot{\theta}\bar{1}_{z_3} + -MR^2\dot{\theta}\cos\alpha\left(\cos\theta\bar{1}_{x_3}\right)$$

3. Dans les axes principaux du T (des tiges soudées) (Repère R_3)

$$T^{(AD)} = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_E.\bar{\omega} = \frac{1}{2}Mv_E^2 + \frac{1}{2}\left(A''p'^2 + B''q'^2 + C''r'^2\right) \text{ avec } E = \text{milieu de } AD$$

$$\bar{1}_{z_3} = \cos\psi\bar{1}_{z_2} - \sin\psi\bar{1}_{x_2}\ ;\ \bar{1}_{x_2} = \cos\psi\bar{1}_{x_3} - \sin\psi\bar{1}_{z_3}\ ;\ \bar{1}_{y_2} = \bar{1}_{y_3}\ ;\ \bar{1}_{z_2} = \cos\psi\bar{1}_{z_3} + \sin\psi\bar{1}_{x_3}\ ;$$

avec
$$\begin{cases} \bar{v}_E = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AD} \times \overline{AE} = -R\cos\alpha\dot{\theta}\bar{1}_{x_2} + \left[\left(\dot{\psi} + \sin\alpha\dot{\theta}\right)\bar{1}_{y_2} + \cos\alpha\dot{\theta}\bar{1}_{z_2}\right] \times \dfrac{R}{2}\underbrace{\left(\cos\psi\bar{1}_{z_2} - \sin\psi\bar{1}_{x_2}\right)}_{\bar{1}_{z_3}} \\ \bar{v}_E = -R\cos\alpha\cos\psi\dot{\theta}\bar{1}_{x_3} + R\cos\alpha\sin\psi\dot{\theta}\bar{1}_{z_3} + \left[\left(\dot{\psi} + \sin\alpha\dot{\theta}\right)\bar{1}_{y_3} + \cos\alpha\dot{\theta}\cos\psi\bar{1}_{z_3} + \cos\alpha\dot{\theta}\sin\psi\bar{1}_{x_3}\right] \times \dfrac{R}{2}\bar{1}_{z_3} \\ \bar{v}_E = +\left(\dfrac{R}{2}\left(\dot{\psi} + \sin\alpha\dot{\theta}\right) - R\cos\alpha\cos\psi\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_3} - \dfrac{R}{2}\cos\alpha\sin\psi\dot{\theta}\bar{1}_{y_3} + R\cos\alpha\sin\psi\dot{\theta}\bar{1}_{z_3} \\ A'' = B'' = \dfrac{MR^2}{12};\ C'' = 0 \end{cases}$$

$$T^{(AD)} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + MR^2\dot{\theta}\cos\alpha\cos\psi\left(\dot{\theta}\sin\alpha - \dot{\psi}\right) + \frac{MR^2}{6}\left(\dot{\theta}\sin\alpha - \dot{\psi}\right)^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\alpha\sin^2\psi$$

$$\bar{M}_O^{(AD)} = \bar{M}_E + \overline{OE} \times \bar{R} \text{ avec } \bar{M}_E = A''p'\bar{1}_{x_3} + B''q'\bar{1}_{y_3} + C''r'\bar{1}_{z_3}$$

$$\bar{M}_O^{(AD)} = \left[\frac{1}{3}MR^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\psi + \frac{MR^2}{2}\left(\dot{\theta}\sin\alpha - \dot{\psi}\right)\sin\psi\right]\bar{1}_{x_2}$$
$$+\left[\frac{1}{3}MR^2\left(\dot{\theta}\sin\alpha - \dot{\psi}\right) - \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\psi\right]\bar{1}_{y_2}$$
$$+\left[\frac{1}{3}MR^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin^2\psi + MR^2\dot{\theta}\cos\alpha - \frac{MR^2}{2}\left(\dot{\theta}\sin\alpha - \dot{\psi}\right)\cos\psi\right]\bar{1}_{z_2}$$

---

14. 1. Centre de masse du volant G : 9r/10 à partir de A avec r=3R/2. (r/3+r=2R). Moment cinétique en A :

$$\overline{M_A} = M\ \overline{AG} \times \bar{v}_A + \bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega} = M\left(\frac{9r}{10}\bar{1}_{z'}\right) \times \left(-v_G\bar{1}_{z'} - \frac{9r}{10}\omega_2\bar{1}_{x'}\right) + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2\bar{1}_{y'} \\ \omega_1\bar{1}_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \bar{v}_A = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \overline{GA} = -v_G\bar{1}_{z'} + \left(\omega_2\bar{1}_{y'} + \omega_1\bar{1}_{z'}\right) \times \left(-\frac{9r}{10}\bar{1}_{z'}\right) = -v_G\bar{1}_{z'} - \frac{9r}{10}\omega_2\bar{1}_{x'}$$

$$\overline{M_A} = -M\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2\bar{1}_{y'} + \left(A\omega_2\bar{1}_{y'} + C\omega_1\bar{1}_{z'}\right) = \left(A\omega_2 - M\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2\right)\bar{1}_{y'} + C\omega_1\bar{1}_{z'}$$

---

2. L'énergie cinétique :

$$T=\frac{M}{2}\,\overline{v}_G{}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}=\frac{M}{2}v_G{}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \omega_2 & \omega_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}A-M\left(9r/10\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & A-M\left(9r/10\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2-\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

$$T=\frac{M}{2}\,\overline{v}_A{}^2+M\,\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-v_G\,\overline{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\,\overline{1}_{x'}\right).\left(\left(\omega_2\,\overline{1}_{y'}+\omega_1\,\overline{1}_{z'}\right)\times\left(\frac{9r}{10}\,\overline{1}_{z'}\right)\right)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \omega_2 & \omega_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}$$

$$\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-v_G\,\overline{1}_{z'}-\frac{9r}{10}\omega_2\,\overline{1}_{x'}\right).\left(\frac{9r}{10}\omega_2\,\overline{1}_{x'}\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

$$T=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2+\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+M\left(-\omega_2{}^2\left(\frac{9r}{10}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)=\frac{M}{2}\left(v_G{}^2-\left(\frac{9r}{10}\right)^2\omega_2{}^2\right)+\frac{1}{2}\left(A\omega_2{}^2+C\omega_1{}^2\right)$$

Théorèmes généraux

Formulaire

Théorème de la résultante cinétique $\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e$

Théorème du moment cinétique calculé en A : $\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}$

avec $\overline{M_A} = \overline{M_G} + \overline{AG} \times \overline{R}$ ou $\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$ si $A \in S$

Théorème de l'énergie cinétique $\frac{d}{dt}T = \sum \overline{F}_h.\overline{v}_h$ avec $T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

1. Identification des différents états du système :

t_1 = avant le lancement de l'obus ($\dot{x}_1 = 0$; $x = 0$) ;

t_2 = Au moment du lancement ($\dot{x}_2$ = vitesse initiale du chariot ; $x = 0$) ;

t_3 = le chariot recul suite à la vitesse acquise lors du lancement de l'obus. ($\dot{x}$; x) ;

t_4 = Le chariot est à l'arrêt après un recul X ($\dot{x}_4 = 0$; $x = X$);

<u>Après le départ de l'obus</u> : Système {canon + wagon} = 1 solide entre le temps 2 et 4.

Rem : l'axe des x est dirigé vers la gauche.

$\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}$ => $M\ddot{x} = -F_{frot}$ => $\int_{\dot{x}_2^2}^{0} M\frac{d\dot{x}^2}{2} = \int_0^X -F_{frot}dx$ => $\frac{M}{2}\dot{x}_2^2 = F_{frot}X$

<u>Avant le départ de l'obus</u> Système {canon + wagon + obus} Il n'y a pas de forces extérieures suivant l'axe x.

=> il y a conservation de la résultante cinétique suivant l'axe x.

$\frac{d}{dt}R_x = 0$ jusqu'en t_2 : $R_{x\,t_1} = R_{x\,t_2}$ => $R_{x\,t_1} = 0$ et $R_{x\,t_2} = M\dot{x}_2 + mv\cos\theta\cos\phi$ => $\dot{x}_2 = -\frac{m}{M}v\cos\theta\cos\phi$

en t=0 : $X = \frac{M}{2F_{frot}}\dot{x}_2^2 = \frac{m^2v^2\cos^2\theta\cos^2\phi}{2MF_{frot}}$

---

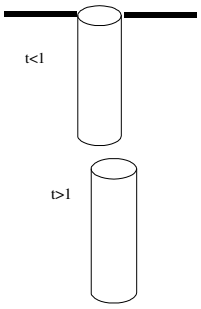
2. Par le théorème du moment cinétique : conservation du moment cinétique

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{M_0} = 0$ => $\overline{M_0}^+ = \overline{M_0}^-$ => $\frac{M_1R^2}{2}\omega_1 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega$

$\frac{M_2R^2}{6}4\omega_2 - \frac{M_2R^2}{2}\omega_2 = \frac{(M_2+3M_2)R^2}{6}\omega$ => $\omega = \frac{\omega_2}{4}$

Pourcentage de l'énergie cinétique initiale présente après la chute : $\boxed{\frac{T^+}{T^-} = \frac{\frac{(M_1+M_2)R^2}{2}\omega^2}{\frac{M_1R^2}{2}\omega_1^2 + \frac{M_2R^2}{2}\omega_2^2} = 1{,}32\,\%}$

3.



Pour le système {patineur} : $\overline{m_{e,O}} = 0$; $\overline{v_G} = 0$ => $\frac{d}{dt}\overline{M_O} = 0$ où $\overline{M_O} = \overline{\overline{I}_O}.\overline{\omega}$

t<0 : $\overline{\omega} = \omega_1 \overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \frac{m_1 r_1^2}{2} + 2\left(\underbrace{\frac{m_2 l_2^2}{12}}_{I_{zG(tige)}} + m_2 \underbrace{\left(\frac{l_2}{2} + r_1\right)^2}_{d_{zzG}}\right)$

t>0 : $\overline{\omega} = \omega_2 \overline{1_z}$ et $I_{z(t<0)} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ => $\overline{M_O} = \frac{m_3 r_3^2}{2}\omega_2 \overline{1_z}$

$$\overline{M_{O\,t<0}} = \overline{M_{O\,t>0}} \Rightarrow \left[\frac{m_1 r_1^2}{2} + 2\left(\frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2\left(\frac{l_2}{2} + r_1\right)^2\right)\right]\omega_1 = \frac{m_3 r_3^2}{2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 4{,}89 \ \ t/s$$

Attention : la conservation de l'énergie cinétique ne peut être appliquée car en bougeant les bras, le patineur modifie son énergie potentielle.

---

4. 1. $\boxed{\sum \overline{F_e} = \frac{d\overline{R}}{dt}}$ et $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \ \text{car } O \text{ est fixe}}$

Changement d'axes : $\begin{cases} \overline{1_X} = \cos\theta\,\overline{1_x} + \sin\theta\,\overline{1_y} \\ \overline{1_Y} = -\sin\theta\,\overline{1_x} + \cos\theta\,\overline{1_y} \end{cases}$ où $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

<u>En travaillant dans les axes Oxyz</u> (R2) tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\left(\cos\theta\,\overline{1_x} + \sin\theta\,\overline{1_y}\right) = \overline{\omega}_{R2/R0} = \overline{\omega}_{R1/R0}$

$$\overline{R} = -Md\omega\overline{1_z} \Rightarrow \boxed{\overline{F_e} = \frac{d\overline{R}}{dt}} = \overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{R} = -Md\omega^2\left(-\sin\theta\,\overline{1_x} + \cos\theta\,\overline{1_y}\right)$$

$$\overline{M_O} = \overline{\overline{I}_O}.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\overline{1_x} + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\overline{1_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt}} = \overline{\omega}_{R2/R0} \times \overline{M}_O = -\left(I_x\omega\cos\theta - P_{xy}\omega\sin\theta\right)\omega\sin\theta\,\overline{1_z} + \left(-P_{xy}\omega\cos\theta + I_y\omega\sin\theta\right)\omega\cos\theta\,\overline{1_z}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \left[\cos\theta\sin\theta\left(I_y - I_x\right) + P_{xy}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right]\omega^2\overline{1_z} \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = \left[\frac{2}{5}\left(I_y - I_x\right) - \frac{3}{5}P_{xy}\right]\omega^2\overline{1_z}}$$

OU <u>En travaillant directement dans les axes OXYZ</u> (R1) tournant avec la plaque : $\overline{\omega} = \omega\overline{1_X}$

$$\overline{R} = -Md\omega\overline{1_Z} \Rightarrow \overline{F_e} = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{R} = Md\omega^2\overline{1_Y}$$

$$\overline{M_O} = \overline{\overline{I}_O}.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_X & - & - \\ -P_{XY} & - & - \\ 0 & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_X\omega\overline{1_X} - P_{XY}\omega\overline{1_Y} \Rightarrow \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{M}_O \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = -P_{XY}\omega^2\overline{1_Z}}$$

où $P_{XY} = \sin\theta\cos\theta\left(-I_y + I_x\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)P_{xy} \Rightarrow \boxed{\overline{m}_{e,O} = -\left(\frac{2}{5}\left(-I_y + I_x\right) + \frac{3}{5}P_{xy}\right)\omega^2\overline{1_Z}}$

$$\Rightarrow P_{XY} = \frac{2}{5}\left(-M\frac{H^2}{3} + M\frac{H^2}{12}\right) + \frac{3}{5}M\frac{H^2}{24} = \frac{-3MH^2}{40}$$

P_{XY} a été calculé à la séance 5.

$\Rightarrow \boxed{\overline{F_e} = Md\omega^2\overline{1_Y} = Md\omega^2\left(-\sin\theta\,\overline{1_x} + \cos\theta\,\overline{1_y}\right)}$ et $\boxed{\overline{m}_{e,O} = -P_{XY}\omega^2\overline{1_Z} = \frac{3MH^2}{40}\omega^2\overline{1_Z}}$

---

2. A l'équilibre dynamique :

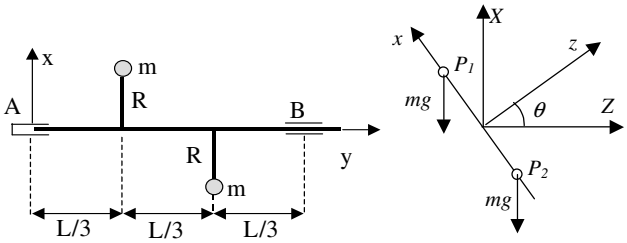
$$\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{R} = R\omega \overline{1}_Y = 0} \Rightarrow \overline{R} = \left(-Md + m_1 L - m_2 L\right)\omega \overline{1}_z = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = \frac{Md}{L}$$

$$\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{\omega}_{R1/R0} \times \overline{M}_O = -P_{XY}\omega^2 \overline{1}_Z = 0} \Rightarrow P_{XY,O} = 0$$

$$P_{XY,O} = \left[\frac{-3MH^2}{40}\right]_S + \left[m_1 \frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_1} + \left[m_2 \frac{\sqrt{5}HL}{2}\right]_{m_2} \quad \text{avec } \overline{OA'} = \left(-\frac{\sqrt{5}H}{2}, L, 0\right);\ \overline{OD'} = \left(\frac{\sqrt{5}H}{2}, -L, 0\right)$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}HL}\left[\dfrac{3MH^2}{40}\right] \\ m_2 = m_1 - \dfrac{Md}{L} \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[\frac{3MH^2}{40}\right] + \frac{Md}{2L} \text{ et } m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}HL}\left[\frac{3MH^2}{40}\right] - \frac{Md}{2L}$$

5.



Dans les axes $Axyz$ liés au système, réactions extérieures :

$$\begin{cases} \overline{R}_A(R_{A,x}(t), R_{A,y}(t), R_{A,z}(t)) \\ \overline{R}_B(R_{B,x}(t), 0, R_{B,z}(t)) \\ mg(-\cos\theta, 0, -sin\theta) \text{ en } P_1(R, \frac{L}{3}, 0) \\ mg(-\cos\theta, 0, -sin\theta) \text{ en } P_2(-R, \frac{2L}{3}, 0) \end{cases}$$

Recherche des réactions en B :

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = m\overline{v}_G \times \overline{v}_A + \overline{m}_{e,A} \underset{A \text{ fixe}}{\Rightarrow} \frac{d\overline{M}_A}{dt} = \overline{m}_{e,A}$$

$$\frac{d\overline{M}_A}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2\overline{1}_z \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} \underset{A \text{ fixe}}{=} \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} / & -P_{xy} & / \\ & I_y & \\ & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{xy}\omega^2\overline{1}_z = \overline{m}_{e,A}} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\frac{L}{3}\right) + \left(0 + m(-R)\frac{2L}{3}\right) = -m\frac{LR}{3} \\ \overline{m}_{e,A} = -LR_{B,x}\overline{1}_z + LR_{B,z}\overline{1}_x + mgR\sin\theta\overline{1}_y + mg\frac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z - mg\frac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ \qquad -mgR\sin\theta\overline{1}_y + mg\frac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z - mg\frac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ \Rightarrow \overline{m}_{e,A} = \left(LR_{B,z} - mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(mgL\cos\theta - LR_{B,x}\right)\overline{1}_z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x : LR_{B,z} - mgL\sin\theta = 0 \Rightarrow R_{B,z} = mg\sin\theta \\ z : mgL\cos\theta - LR_{B,x} = -m\dfrac{LR}{3}\omega^2 \quad \text{avec} \Rightarrow R_{B,x} = m\left(g\cos\theta + \dfrac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

Recherche des réactions en A :

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt} \underset{B \text{ fixe}}{=} \overline{m}_{e,B}$$

$$\frac{d\overline{M}_B}{dt} = -P_{xy}\omega\frac{d\overline{1}_x}{dt} = P_{xy}\omega^2\overline{1}_z \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{M}_B \underset{B \text{ fixe}}{=} \overline{\overline{I}}_B.\overline{\omega} = -P_{xy}\omega\overline{1}_x + I_y\omega\overline{1}_y \\ P_{yz} = 0 \text{ car } z = 0 \text{ pour tout le système} \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{xy}\omega^2\overline{1}_z = \overline{m}_{e,B}} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} P_{xy} = P_{xy,P_1} + P_{xy,P_2} = \left(0 + mR\left(-\frac{2L}{3}\right)\right) + \left(0 + m(-R)\left(-\frac{L}{3}\right)\right) = -m\frac{1}{3}LR \\ \overline{m}_{e,B} = -LR_{A,z}\overline{1}_x + LR_{A,x}\overline{1}_z + mgR\sin\theta\overline{1}_y - mg\frac{2L}{3}\cos\theta\overline{1}_z + mg\frac{2L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ \qquad - mgR\sin\theta\overline{1}_y - mg\frac{L}{3}\cos\theta\overline{1}_z + mg\frac{L}{3}\sin\theta\overline{1}_x \\ => \overline{m}_{e,B} = \left(-LR_{A,z} + mgL\sin\theta\right)\overline{1}_x + \left(-mgL\cos\theta + LR_{A,x}\right)\overline{1}_z \end{array} \right.$$

$$=> \begin{cases} -LR_{A,z} + mgL\sin\theta = 0 => R_{A,z} = mg\sin\theta \\ -mgL\cos\theta + LR_{A,x} = -m\frac{LR}{3}\omega^2 \quad \text{avec} \quad => R_{A,x} = m\left(g\cos\theta - \frac{R}{3}\omega^2\right) \end{cases}$$

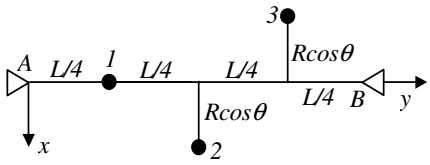
---

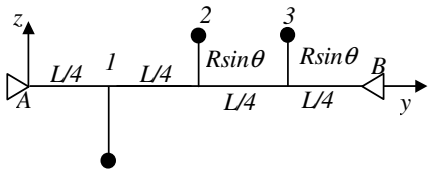
6. Système {système complet } : Théorème du moment cinétique en A : (Système d'axe tournant avec la barre)

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G} \times \overline{v_A} + \sum \overline{m}_{e,A} = \sum \overline{m}_{e,A} \quad \text{où} \quad \overline{\omega} = 40\pi \ rad/s \ \overline{1}_y$$

$$\begin{cases} -P_{xy}\dot{\omega} - P_{zy}\omega^2 = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_x \\ I_y\dot{\omega} = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_y \\ -P_{zy}\dot{\omega} + P_{xy}\omega^2 = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_z \end{cases} \quad => \text{ avec } \omega \text{ const } : \begin{cases} -P_{zy}\omega^2 = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_x \\ 0 = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_y \\ P_{xy}\omega^2 = \sum \overline{m}_{e,A}\Big|_z \end{cases}$$

$$P_{xy} = 0 + m.\frac{L}{2}.R\cos 30 + m.\frac{3L}{4}.(-R\cos 30) = 0,6(0,4.0,13 - 0,6.0,13) = -0,0156 \ \text{kg m}^2$$





$$P_{zy} = m.\frac{L}{4}.(-R) + m.\frac{L}{2}.R\sin 30 + m.\frac{3L}{4}.(R\sin 30) = 0,6(-0,2.0,15 + 0,4.0,075 + 0,6.0,075) = 0,027 \ \text{kg m}^2$$

$$=> \begin{cases} -0,027(40\pi)^2 = LZ_B \\ -0,0156(40\pi)^2 = -LX_B \end{cases} => \begin{cases} Z_B = -533 \ N \\ X_B = 308 \ N \end{cases}$$

Système {système complet } : Théorème de la résultante cinétique:

$\overline{v_G} = 0 \ => \ X_A = -X_B = -308 \ N \ ; \ Z_A = -Z_B = 533 \ N$

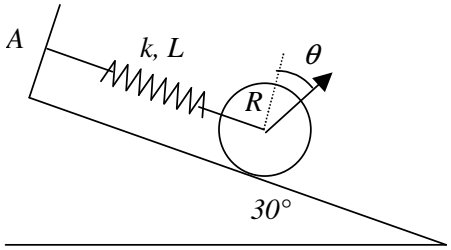
---

7. Force en présence

Force du ressort : $\overline{F} = -k\left(x-L\right)\overline{1}_x$

Poids de la roue : $\overline{P} = mg\left(\sin\alpha\,\overline{1}_x - \cos\alpha\,\overline{1}_z\right)$

Réaction du sol : $\overline{R}_I = -T\,\overline{1}_x + N\,\overline{1}_z$



Théorème de la résultante cinétique {masse (m)} :

$\overline{R} = m\dot{x}\,\overline{1}_x$

$$\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_{\overline{1}_x} = \sum \overline{F}_e\Big|_{\overline{1}_x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k\left(x-L\right) + mg\sin\alpha - T \quad (1)$$

Théorème de la résultante cinétique en G :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \cancel{m\overline{v_G}\times\overline{v_G}} + \sum \overline{m}_{e,G} = \sum \overline{m}_{e,G} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \begin{pmatrix} \diagup & 0 & \diagup \\ & I_y & \\ \diagup & 0 & \diagup \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = I_y\omega\,\overline{1}_y$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = \boxed{I_y\dot{\omega}\,\overline{1}_y = \sum \overline{m}_{e,G}} \underbrace{\Rightarrow}_{I_y=\frac{MR^2}{2}} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = RT \quad (3)$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I nous donne :

$$\overline{v}_I = 0 = \overline{v}_G + \overline{\omega}\times\overline{GI} \Rightarrow \dot{x}\,\overline{1}_x + \dot{\theta}\,\overline{1}_y \times\left(-R\,\overline{1}_z\right) \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$(4)->(3) \;:\; \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}}{R} = RT \Rightarrow T = \frac{m}{2}\ddot{x} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} (5)->(1) \;:\; m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{m}{2}\ddot{x} - k\left(x-L\right) \\ \boxed{\frac{3m}{2}\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\left(x-L\right)} \\ \ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2g}{3}\sin\alpha + \frac{2k}{3m}L \quad (6) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Solution de l'équation différentielle non homogène

SP : $x(t) = L + \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$

SGENH : $x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$

A et B seront fixé par les conditions initiales et la pulsation est $\Omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$.

L'énergie cinétique est donnée par : $\boxed{T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 \underset{\dot{x}=R\dot{\theta}}{=} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m}{4}\dot{x}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle : $V = \frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2 - mgx\sin\alpha$ avec le point A comme référence.

La force de frottement ne dérive pas d'un potentiel, mais sa puissance est nulle car il y a roulement sans glissement, la vitesse du point matériel sur lequel s'applique cette force est nulle.

L'énergie s'écrit donc : E=$T+V = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2 - mgx\sin\alpha$

$$\dot{E} = \frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + k\left(x-L\right)\dot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha = \left(\frac{3}{2}m\ddot{x} + k\left(x-L\right) - mg\sin\alpha\right)\dot{x} = 0 \quad (=6)$$

L'énergie mécanique totale est donc conservée. => E=$T+V$ est une intégrale première

8. a) Pour le système {bloc + balle}:

$$\frac{d}{dt}R_x = 0 \;\Rightarrow\; \Delta R_x = 0 \;:\; mv_0 = mv_1 + Mv \;\Rightarrow\; v = \frac{m}{M}\left(v_0 - v_1\right)$$

Rem : Toutes les forces internes au système ne sont pas prises en compte. On considère la variation de résultante cinétique entre l'instant t<0 où la balle n'a pas encore touché le bloc et l'instant t=0 où la balle a transpercé le bloc et lui a donné une vitesse initiale (v). Entre ces deux instants, on considère que le bloc ne bouge pas et donc les forces de frottements n'interviennent pas.

b) Pour le bloc seul (t>0), après le passage de la balle qui lui a donné une certaine vitesse initiale (v) :

$$U = \Delta T \;\text{ car }\; F = ma = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dx} \;\Rightarrow\; \int_{s_i}^{s_f} F_x dx = \Delta\left(\frac{m}{2}v^2\right)$$

$$-fMg(s-0) = \frac{M}{2}(0 - v^2) \;\Rightarrow\; f = \frac{v^2}{2gs}$$

AN : $v = 4m/s$ et $f = 0.302$

---

9. Origine de l'axe x : position de m lorsque le ressort a sa longueur libre.

Système {M, m} : $\frac{d}{dt}\bar{R} = \sum \bar{F}_e$ => suivant x : $M\ddot{X}+m(\ddot{X}+\ddot{x})=-(M+m)g\sin\alpha$ (1)

Système {m} : $\frac{d}{dt}\bar{R} = \sum \bar{F}_e$ => suivant x : $m(\ddot{X}+\ddot{x})=-mg\sin\alpha - kx$ (2)

$$\begin{cases} (1) \;\Rightarrow\; \ddot{X}=-\ddot{x}-g\sin\alpha - \frac{k}{m}x \\ (2) \text{ dans } (1) \;\Rightarrow\; \ddot{x}+\frac{k}{M}\left(\frac{M}{m}+1\right)x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d\cos\sqrt{\frac{k}{M}\left(\frac{M}{m}+1\right)}\,t \\ X = X_0 + d\frac{m}{m+M} - \frac{gt^2}{2}\sin\alpha - d\frac{m}{m+M}\cos\sqrt{\frac{k}{M}\left(\frac{M}{m}+1\right)}\,t \end{cases}$$

Le wagon commence par monter la pente si $\ddot{X}$ (t=0)>0, càd k d > M g sinα

---

10. <u>Les forces extérieures :</u> dans le repère $Oxyz$

Réaction en I du sol sur le disque : $\bar{R}_I(R_{Ix}, R_{Iy}, R_{Iz})$

Réaction en O du sol sur la tige : $\bar{R}_O(R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz})$

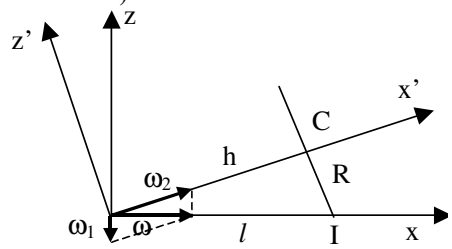
Poids : $m\bar{g} = (0, 0, -mg)$

<u>Théorème de la résultante cinétique :</u>

$$\bar{R} = m\bar{v}_G = -mh\cos\alpha\omega_1\bar{1}_{y'}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_z = \left(\bar{R}_e\right)_z \;\Rightarrow\; 0 = R_{Oz} + R_{Iz} - mg$$

Considérons les axes Ox'y'z' attaché au centre du disque tournant autour de l'axe z. ($l^2 = R^2 + h^2$)



Le théorème du moment cinétique en O :

Rem : le vecteur de Darboux du repère R' à utiliser pour dériver les axes du repère : $\bar{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_z$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overline{M_O}\right)_y \underbrace{=}_{O \text{ fixe}} \left(\bar{m}_{e,O}\right)_y}$$

avec
$$\left|\begin{array}{l} \bar{\omega}_{R'/R_0} = -\omega_1 \bar{1}_z \text{ avec } tg\alpha = \dfrac{\omega_1}{\omega} = \dfrac{R}{h} \Rightarrow \bar{\omega}_{R'/R_0} = -\,\omega.tg\alpha\,\bar{1}_z \\ \overline{M_O} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ 0 \\ -\omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'}\omega\cos\alpha \\ 0 \\ -I_{z'}\omega\sin\alpha \end{pmatrix} = I_{x'}\omega\cos\alpha\,\bar{1}_{x'} - I_{z'}\omega\sin\alpha\,\bar{1}_{z'} = M_{Ox'}\bar{1}_{x'} + M_{Oz'}\bar{1}_{z'} \end{array}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = \bar{\omega}_{R'/R_0} \times \overline{M_O} = \left(\omega_1 \sin\alpha M_{Oz'} - \omega_1 \cos\alpha M_{Ox'}\right)\bar{1}_y$$

avec
$$\left| \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}};\ \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}};\ \omega_1 = \frac{R\omega}{h} \right.$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = -\omega^2 \sin\alpha\left(I_{x'}\cos\alpha + I_{z'}\sin\alpha.tg\alpha\right)\bar{1}_y = -\omega^2 \frac{R}{R^2+h^2}\left(I_{x'}.h + I_{z'}.\frac{R^2}{h}\right)\bar{1}_y$$

avec
$$\left|\begin{array}{l} I_{x'} = \dfrac{mR^2}{2};\ I_{y'} = I_{z'} = \underbrace{I_{tige}}_{=0(m=0)} + \underbrace{I_{disque}}_{=I_{diamètre}+M\|\overline{OC}\|^2} = m\dfrac{R^2}{4} + mh^2 \\ \left(\overline{M_O} = \dfrac{mR^2}{2}\omega\cos\alpha\,\bar{1}_{x'} + \left(\dfrac{mR^2}{4} + mh^2\right)\left(-\omega\sin\alpha\right)\bar{1}_{z'}\right) \\ \left(\bar{m}_{e,O}\right)_y = mg\dfrac{h^2}{l} - lR_{Iz} \end{array}\right.$$

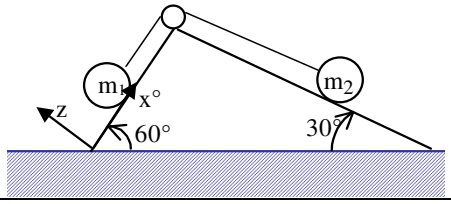
$$\boxed{\left(\frac{d\overline{M_O}}{dt}\right)_y = \left(\bar{m}_{e,O}\right)_y} \Rightarrow -m\omega^2 \frac{R^3}{h\left(R^2+h^2\right)}\left(\frac{3h^2}{2} + \frac{R^2}{4}\right) = mg\frac{h^2}{l} - lR_{Iz}$$

$$R_{Iz} = mg\frac{h^2}{l^2} + m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right) \text{ et } R_{Oz} = mg - \left(mg\frac{h^2}{l^2} + m\omega^2\frac{R^3}{hl^3}\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} R_{Iz} = mg\dfrac{h^2}{l^2} + m\omega^2\dfrac{R^3}{hl^3}\left(\dfrac{3}{2}h^2 + \dfrac{R^2}{4}\right) > 0 & \text{pas de décollement en I} \\ R_{Oz} = mg\left(1 - \dfrac{h^2}{l^2}\right) - m\omega^2\dfrac{R^3}{hl^3}\left(\dfrac{3}{2}h^2 + \dfrac{R^2}{4}\right) \geq 0 & \text{pour garder le contact en O} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega^2_{\lim} = g\frac{lh}{R\left(\frac{3}{2}h^2 + \frac{R^2}{4}\right)}$$

---

11. dans les axes liés à la pente inclinée à 60 °
(x vers la poulie et z perpendiculaire à la pente)



Le corps m_1, Variable (φ,x)

$$\begin{cases} \text{Les forces extérieures :} \\ \text{Tension de la corde : } \bar{F}_1(F_1,0,0) \\ \text{Poids : } \bar{P}(-m_1 g\sin 60, 0, -m_1 g\cos 60) \\ \text{Contact : } \bar{R}_{I1}\left(-T_1,0,N_1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_x = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_x \Rightarrow m_1\ddot{x} = -\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3} + F_1 - T_1 \quad (1) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_z = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_z \Rightarrow 0 = -\frac{m_1 g}{2} + N_1 \quad (2) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y = \left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \frac{m_1 R^2}{2}\ddot{\varphi}_1 = RT_1 \quad (3) \end{cases}$$

Le corps m_2, Variable (φ,z)

$$\begin{cases} \text{Les forces extérieures :} \\ \text{Tension de la corde : } \bar{F}_2(0,0,F_2) \\ \text{Poids : } \bar{P}(-m_2 g\cos 30, 0, -m_2 g\sin 30) \\ \text{Contact : } \bar{R}_{I2}\left(N_2,0,T_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_z = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_z \Rightarrow -m_2\ddot{z} = -\frac{m_2 g}{2} + F_2 + T_2 \quad (4) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_x = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_x \Rightarrow 0 = -\frac{m_2 g}{2}\sqrt{3} + N_2 \quad (5) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y = \left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \frac{m_2 R^2}{2}\ddot{\varphi}_2 = RT_2 \quad (6) \end{cases}$$

Le corps m_3, Variable (θ)

$$\begin{cases} \text{Les forces extérieures :} \\ \text{Tension de les cordes : } \bar{F}(-F_1,0,-F_2) \\ \text{Poids : } \bar{P}(-mg\cos 30, 0, -mg\sin 30) \\ \text{Contact : } \bar{R}_C\left(X,0,Z\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_x = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_x \Rightarrow 0 = -\frac{mg}{2}\sqrt{3} + X - F_1 \quad (7) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{R}\right)_z = \left(\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{e}\right)_z \Rightarrow 0 = -\frac{m_2 g}{2} + Z - F_2 \quad (8) \\ \left(\frac{d}{dt}\bar{M}_G\right)_y = \left(\bar{m}_{\mathrm{e},G}\right)_y \Rightarrow \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = r\left(F_2 - F_1\right) \quad (9) \end{cases}$$

Condition de roulement sans glissement : $\dot{x} = R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z} = R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x} = r\dot{\theta} = \dot{z}$ (10)

(10)–>(3) : $T_1 = \frac{m_1 R}{2}\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1}{2}\ddot{x}$; +(1) : $m_1\ddot{x} = -\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3} + F_1 - \frac{m_1}{2}\ddot{x} \Rightarrow \frac{3}{2}m_1\ddot{x} = -\frac{m_1 g}{2}\sqrt{3} + F_1$ (11)

(10)–>(6) : $T_2 = \frac{m_2 R}{2}\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_2}{2}\ddot{z}$; +(4) : $-m_2\ddot{z} = -\frac{m_2 g}{2} + F_2 + \frac{m_2}{2}\ddot{z} \Rightarrow \frac{3}{2}m_2\ddot{z} = \frac{m_2 g}{2} - F_2$ (12)

(11) − (12) et ($\ddot{x} = \ddot{z}$) : $\frac{3}{2}\left(m_1 + m_2\right)\ddot{x} = \frac{g}{2}\left(m_2 - m_1\sqrt{3}\right) + \left(F_1 - F_2\right)$ (13)

$\left(F_2 - F_1\right) \underset{(9)}{=} \frac{mr}{2}\ddot{\theta} \underset{(10)}{=} \frac{m}{2}\ddot{x}$ dans (13) => $\frac{3}{2}\left(m_1 + m_2\right)\ddot{x} = \frac{g}{2}\left(m_2 - m_1\sqrt{3}\right) - \frac{m}{2}\ddot{x}$

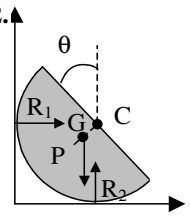
=> Equation du mouvment : $\ddot{x} = \frac{\left(m_2 - m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)}g$

On trouve donc les tensions dans la corde :

$$F_1 = \frac{m_1 g}{2}\sqrt{3} + m_1\ddot{x} + T_1 \underset{T_1 = \frac{m_1}{2}\ddot{x}}{=} \frac{m_1 g}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}m_1\frac{\left(m_2 - m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)}g$$

$$F_2 = \frac{m_2 g}{2} - m_2\ddot{z} - T_2 \underset{T_2 = \frac{m_2}{2}\ddot{z}}{=} \frac{m_2 g}{2} - \frac{3}{2}m_2\frac{\left(m_2 - m_1\sqrt{3}\right)}{\left(3m_1 + 3m_2 + m\right)}g$$

12.



1ere phase du mouvement : rotation autour de C :

$$\bar{v}_G = \underbrace{\bar{v}_C}_{=0} + \bar{\omega}\times\overline{CG} = \dot{\theta}\bar{1}_z \times \frac{3}{8}R\left(-\cos\theta\bar{1}_x - \sin\theta\bar{1}_y\right) = \frac{3}{8}R\left(\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x - \cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right)$$

Th. de la résultante cinétique

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\Big|_x : \; m\ddot{x}_G = R_1 \Rightarrow \dfrac{3}{8}mR\left(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right) = R_1 \quad (1) \\ \dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\Big|_y : \; m\ddot{y}_G = R_2 - mg \Rightarrow \dfrac{3}{8}mR\left(\sin\theta\dot{\theta}^2 - \cos\theta\ddot{\theta}\right) = R_2 - mg \end{cases}$$

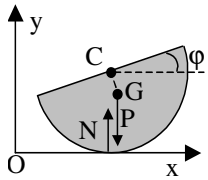
<u>Th du moment cinétique en C</u>

$$\frac{d\bar{M}_C}{dt} = m\bar{v}_G \times \underbrace{\bar{v}_C}_{=0} + \bar{m}_{e,C} = \bar{m}_{e,C}\Big|_z : \; \frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta} = \overline{CG}\times m\bar{g} = \frac{3}{8}mgR\cos\theta$$

avec $I_{C,z} = \frac{2}{5}mR^2$ (formule de la sphère entière avec la masse de la demi sphère, voir S4E2)

$$\Rightarrow \text{ avec } \ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} : \; \frac{1}{5}mR^2 d\dot{\theta}^2 = \frac{3}{8}mgR\cos\theta d\theta \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{15}{8}\frac{g}{R}\sin\theta \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow R_1 = \frac{135}{128}mgR\sin\theta\cos\theta \quad \text{s'annule pour } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } v_G(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{15gR}{2}}$$



2eme phase du mouvement :
Th. résultante cinétique

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\Big|_x : \; m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \dot{x}_G = Const \Rightarrow \dot{x}_G = \dfrac{3}{16}\sqrt{\dfrac{15gR}{2}} \quad (1) \\ \dfrac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e\Big|_y : \; m\ddot{y}_G = R_2 - mg \end{cases}$$

<u>Conservation de l'énergie</u>

$$T+V=E_0 \Rightarrow I_G = \frac{2}{5}MR^2 - M\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{320}MR^2$$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = mgy_G = -mg\frac{3}{8}R\cos\varphi \text{ avec C comme référence}$$

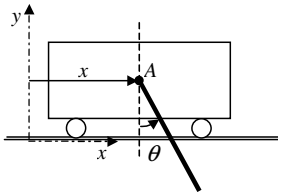
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}^2 - mg\frac{3}{8}R\cos\varphi = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{G0}{}^2 + \dot{y}_{G0}{}^2) + \frac{1}{2}\frac{83}{320}mR^2\dot{\varphi}_0{}^2 - mg\frac{3}{8}R$$

$$\text{avec } \dot{y}_G = \frac{3}{8}R\sin\varphi\dot{\varphi};\; \dot{y}_{G0} = 0;\; \varphi_0 = 0;\; \dot{\varphi}_0{}^2 = \frac{15}{8}\frac{g}{R} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = 0 \text{ pour } \cos\varphi = \frac{45}{128}$$

---

13. Réactions : Réaction en A (X_A Y_A), le poids Mg, les réactions aux roues (2N).

Système = {Barre } :



Théorème de la résultante cinétique : $\dfrac{d\bar{R}}{dt} = \sum F_e$

$$\bar{v}_G = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\overline{AG} = \dot{x}\bar{1}_x + \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos\theta\bar{1}_x + \sin\theta\bar{1}_y\right)$$

$$m\left(\ddot{x}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\bar{1}_x+m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)\bar{1}_y=X_A\,\bar{1}_x+\left(-mg+Y_A\right)\bar{1}_y$$

$$=>\begin{cases}X_A=m\left(\ddot{x}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) & (1)\\ Y_A=m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)+mg & (2)\end{cases}$$

Pour supprimer la variable x de l'équation, il faut trouver une équation supplémentaire (liant X_A et x) Nous avons plusieurs possibilités :

Le théorème de la résultante sur le chariot
Le théorème du moment cinétique en A sur la barre
Le théorème de la résultante sur l'ensemble
Lagrange (qui sera vu dans les prochain TPs)

<u>Le théorème de la résultante</u> - **Système = {Chariot } :**

$$\left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x=\left.\bar{F}_e\right|_x=>\boxed{M\ddot{x}=-X_A}\quad(3)$$

dans (1) : $X_A=m\left(-\frac{X_A}{M}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)=>X_A=\frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

<u>Le théorème du moment cinétique en A sur la barre - **Système = {Barre} :**</u>

$$\bar{M}_A=m\overline{AG}\times\bar{v}_A+\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}=\left(m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{x}+\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\right)\bar{1}_z$$

$$\frac{d\bar{M}_A}{dt}=m\bar{v}_G\times\bar{v}_A+\bar{m}_{e,A}$$

$$\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}+m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{x}+\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\right)\bar{1}_z=-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\dot{x}\bar{1}_z-\frac{L}{2}\sin\theta mg\,\bar{1}_z\quad=>\ddot{x}=-\frac{2L}{3\cos\theta}\ddot{\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}g\quad(4)$$

=> dans (1) : $X_A=m\left(\left(\frac{L}{2}\cos\theta-\frac{2L}{3\cos\theta}\right)\ddot{\theta}-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}g\right)$

<u>Le théorème de la résultante sur l'ensemble - **Système = {Chariot+Barre} :**</u>

$\left.\bar{F}_e\right|_x=0$ => Conservation de la résultante cinétique suivant x

$$\left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x=M\ddot{x}+m\left(\ddot{x}+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)=0\quad=>\ddot{x}=\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta-\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

dans (3) : $X_A=\frac{mM}{m+M}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

=> dans (1) : $X_A=m\left(\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\left(\dot{\theta}^2\sin\theta-\ddot{\theta}\cos\theta\right)+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right)=\frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

<u>Par Lagrange, on verra que cela revient à ceci</u> - **Système = {Chariot+Barre} :**

A exprimer en fonction de θ, θ et $\ddot{\theta}$. Cherchons la relation $\ddot{x}=f\left(\theta,\theta,\ddot{\theta}\right)$ = équation du mouvement

$$T=T_{chariot}+T_{Tige}=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right]_{chariot}+\left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2+\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{Tige}\quad\text{et}\quad V=C-mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0\ :\ (M+m)\ddot{x}+\frac{m}{2}\left(L\cos\theta\ddot{\theta}-L\sin\theta\dot{\theta}^2\right)=0\quad=th\ \left.\bar{R}\right|_x\ \text{(barre+chariot)}\\ \qquad=>\ \ddot{x}=-\frac{m}{M+m}\left(\frac{L}{2}\left(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2\right)\right)\quad\text{Equation du mouvement 1}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\ :\ \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}+\frac{m}{2}L\cos\theta\ddot{x}\right)+mg\frac{L}{2}\sin\theta=0\quad=th\ \left.\bar{M}_A\right|_z\ \text{(barre)}\quad\text{Equation du mouvement 2}\end{cases}$$

$$=> \boxed{\left(\frac{1}{3}+\frac{m}{M+m}\frac{\cos^2\theta}{4}\right)L\ddot{\theta}-\frac{L}{4}\frac{m}{M+m}\frac{\sin 2\theta}{2}\dot{\theta}^2+\frac{g}{2}\sin\theta=0}$$

$$\boxed{=> X_A=\frac{mM}{M+m}\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad \text{et} \quad Y_A=m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right)+mg}$$

14. 1. 2 degré de liberté :
3 coordonnées / solide = 9 coordonnées
- 3 rotule = 3*2 réactions de liaison
- 1 glissière = 1 réactions de liaison
=2 ddl

2. 2 ddl : angle θ_1 et θ_2 définis respectivement entre les tiges OA et AB avec l'horizontale
Réaction de liaison en O : X_O et Y_O
Réaction de liaison en C : Y_C
Réaction interne en A : X_A et Y_A
Réaction interne en B : X_B et Y_B

3. **Par les théorèmes généraux :**
S1+S2+S3 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur tout le système : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et Y_C
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , θ_2, et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur tout le système projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , θ_2, Y_C et Y_O
S1 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1 : 1 équation liant θ_1 et X_A et Y_A
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 , X_A et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 , Y_A et Y_O
S1+S2 : =>3 équations, 5 inconnues
Théorème du moment cinétique en O sur S1+S2 : 1 équation liant θ_1 θ_2, , X_B et Y_B
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur x : 1 équation liant θ_1 θ_2, X_B et X_O
Théorème de la résultante cinétique sur S1 projeté sur y : 1 équation liant θ_1 θ_2, Y_B et Y_O

9 équations, 9 inconnues

4. **<u>Théorème de la résultante cinétique</u> sur tout le système:**

$$\frac{d}{dt}\overline{R}=\overline{F}_e \text{ avec } \begin{cases} \overline{R}=\sum_i \overline{R_i} \text{ avec } \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i} \\ \text{et la contrainte : } L\sin\theta_1+L\sin s\theta_2=L\sin\theta_3 \\ \overline{F}_e=\overline{R}_O+\overline{R}_C-3m\overline{g} \end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{v}_{G1}=\overline{v}_O+\dot{\theta}_1\overline{1}_z\times\overline{OG_1}=\frac{L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1 \text{ avec } \overline{OG_1}=\frac{L}{2}\left(\cos\theta_1\overline{1}_x+\sin\theta_1\overline{1}_y\right)$$

$$\overline{v}_{G2}=\overline{v}_A+\dot{\theta}_2\overline{1}_z\times\overline{AG_2}=L\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2$$

$$\overline{v}_{G3}=\overline{v}_B-\dot{\theta}_3\overline{1}_z\times\overline{BG_3}$$

$$=L\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+L\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3$$

$$=> \overline{R}\left(S_1+S_2+S_3\right)=m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\overline{1}_x+\cos\theta_1\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\overline{1}_y-\sin\theta_2\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2 + \frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\overline{1}_y+\sin\theta_3\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]$$

$$\begin{cases} m\left[\frac{5L}{2}\left(-\sin\theta_1\,\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(-\sin\theta_2\,\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(+\sin\theta_3\,\overline{1}_x\right)\dot{\theta}_3\right]=X_O \\ m\left[\frac{5L}{2}\left(+\cos\theta_1\,\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_1+\frac{3L}{2}\left(\cos\theta_2\,\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_2+\frac{L}{2}\left(-\cos\theta_3\,\overline{1}_y\right)\dot{\theta}_3\right]=Y_O+Y_C-3mg \end{cases}$$

<u>Théorème du moment cinétique en O</u> sur tout le système : 1 équation liant θ_1 et θ_2 et Y_C

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O}=\overline{m}_{e,O} \text{ avec } \overline{M_O}=\sum_i\overline{M_{O_i}} \text{ où } \overline{M_{O_i}}=\overline{M_{G_i}}+\overline{OG_i}\times\overline{R_i} \text{ où } \begin{cases}\overline{M_{G_i}}=\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i=\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}_i\,\overline{1}_z \\ \overline{R_i}=m\overline{v}_{G_i}\end{cases}$$

les axes sont fixes : seules les composantes seront dérivées;

$$\overline{m}_{e,O}=\sum_i\overline{OG_i}\times m\overline{g}+\overline{OC}\times\overline{R}_C$$

15.

Théorème de la résultante cinétique : $\boxed{\frac{d}{dt}R_x=\sum F_{e,x}}$

Avant le départ des obus Système {canon + wagon + obus} $\overline{R}_{t<0}=-\left(m_1+2m_2\right)v_0\overline{1_x}$

Au moment du départ de l'obus : Système {canon + wagon + obus}: $\overline{R}_{t>0}=-m_1v\overline{1_x}+2m_2(v_r-v)\overline{1_x}$

Il n'y a pas de force extérieure suivant l'axe x => $\frac{d}{dt}R_x=0 \;=>\; R_x=const$: $\overline{R}_{t>0}=\overline{R}_{t<0}$

$$-m_1v+2m_2(v_r-v)=-\left(m_1+2m_2\right)v_0 \;=>\; v=\frac{2m_2v_r+\left(m_1+2m_2\right)v_0}{m_1+2m_2} \;=>\; \overline{v}=-24,7\ m/s\ \overline{1_x}$$

---

16. a) Pour le système {barge A (MA) + voiture (m)}: Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$$\frac{d}{dt}R_x=\sum F_e\big|_x=0 \;=>\; R_x=Const \;:\; \left(M_A+m\right).0=-M_Av_{Ax}+mv \text{ avec } v=\underbrace{50\cos\alpha}_{v_{refl\,x}}\underbrace{-v_{Ax}}_{v_{entr}} \;=>\; v_{Ax}=\frac{m50\cos\alpha}{M_A+m}$$

Rem : Les forces de frottement de l'eau sont négligées. On considère la variation de résultante cinétique entre l'instant t1 où le système est immobile et l'instant t2 où la voiture a atteint la vitesse de 50 km/h (par rapport au bateau = vrel) à la sortie du tremplin.

b) Pour le système {barge B (MB) + voiture (m)}: Etude du mouvement entre t3 (avant que la voiture n'arrive sur la barge B) et l'arrêt de la voiture sur la barge B en t4. Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$$\frac{d}{dt}R_x=\sum F_e\big|_x=0 \;=>\; R_x=Const \;:\; mv+M_B.0=\left(M_B+m\right)v_{Bx} \text{ avec } v=50\cos\alpha-v_{Ax}$$

$$=>\; v_{Bx}=\frac{m50\cos\alpha\left(1-\frac{m}{M_A+m}\right)}{\left(M_B+m\right)}=\frac{mM\,50\cos\alpha}{\left(M+m\right)^2} \text{ car } M_A=M_B=M$$

---

17. En régime, l'angle θ est constant

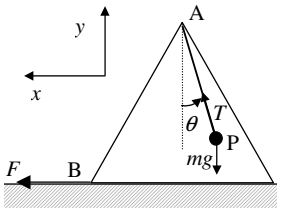
Pour le système {Triangle+pendule=M+m} :

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}=\sum\overline{F}_e\right)_x \;=>\; (M+m)\ddot{x}=F \qquad (1)$$

Pour le système {pendule=m} :

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{R}=\sum\overline{F}_e\right)_x \;=>\; m\ddot{x}=T\sin\theta \text{ et } 0=mg-T\cos\theta \;=>\; \ddot{x}=g\ tg\theta \qquad (2)$$

(1) + (2) => $\theta=arctg\frac{F}{g\left(M+m\right)}$



On peut aussi utiliser le théorème du moment cinétique sur le pendule pour calculer la deuxième équation :

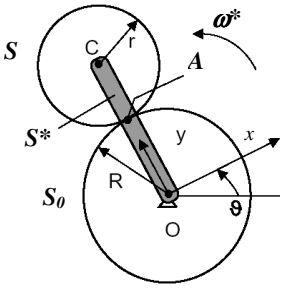
$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}} \text{ avec } \overline{v_G} // \overline{v_A}$$

$$\overline{M_A} = \overline{M_G} + m\overline{AG}\times\overline{v_G} = ml\cos\theta\dot{x}\,\overline{1_z} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = 0 \text{ car } m \text{ est une masse ponctuelle.}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = ml\cos\theta\ddot{x}\,\overline{1_z} = \overline{m}_{e,A} = \overline{AG}\times m\overline{g} = lmg\sin\theta\,\overline{1_z} \quad => \ddot{x} = g\ \mathrm{tg}\,\theta$$

---

18. Pour le système {disque S} :



$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum\overline{F}_e \quad \text{où } \overline{R} = m\overline{v_{C\in S}} = m\overline{v_{C\in S^*}} = -m(R+r)\dot{\theta}\,\overline{1_x} => \sum\overline{F}_e = -m(R+r)\left(\ddot{\theta}\,\overline{1_x} + \dot{\theta}^2\,\overline{1_y}\right)$$

Pour le système { disque S } :

$$\boxed{\overline{m_{e,O}} = \frac{d}{dt}\overline{M_O} - \underbrace{m\overline{v_G}}_{\overline{R}}\times\underbrace{\overline{v_O}}_{=0}}$$

$$\overline{M_O} = \overline{M_C} + m\overline{OC}\times\overline{v_C}$$

$$\overline{M_C} = I_{z_C}\omega_S\,\overline{1_z} \quad \text{où} \quad I_{z_C} = \frac{mr^2}{2}$$

$$\omega_S : \overline{v_{C\in S^*}} = -(R+r)\dot{\theta}\,\overline{1_x} = \overline{v_{C\in S}} = \overline{v_A} + \overline{\omega_S}\times\overline{AC} = -\omega r\,\overline{1_x} \quad => \overline{\omega_S} = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}\,\overline{1_z}$$

$$=> \overline{M_O} = \frac{mr(R+r)}{2}\dot{\theta}\,\overline{1_z} + m(R+r)^2\,\dot{\theta}\,\overline{1_z} = m(R+r)\left(\frac{3r}{2}+R\right)\dot{\theta}\ \overline{1_z}$$

$$\overline{m_{e,O}} = \frac{d}{dt}\overline{M_O} = m(R+r)\left(\frac{3r}{2}+R\right)\ddot{\theta}\ \overline{1_z}$$

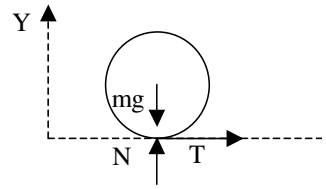
On peu aussi utiliser le théorème du moment cinétique sur le pendule pour calculer la deuxième équation :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_A} = m\overline{v_G}\times\overline{v_A} + \overline{m}_{e,A}} \text{ avec } \overline{v_G} // \overline{v_A}$$

$$\overline{M_A} = \overline{M_G} + m\overline{AG}\times\overline{v_G} = ml\cos\theta\dot{x}\,\overline{1_z} \quad \text{où} \quad \overline{M_G} = 0 \text{ car } m \text{ est une masse ponctuelle.}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_A} = ml\cos\theta\ddot{x}\,\overline{1_z} = \overline{m}_{e,A} = \overline{AG}\times m\overline{g} = lmg\sin\theta\,\overline{1_z} \quad => \ddot{x} = g\ \mathrm{tg}\,\theta$$

19.



$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum\overline{F}_e \quad => \Delta\overline{R} = \int\sum\overline{F}_e dt : \ m(v-0) = fmgt$$

$$=> \ v = fgt \ \text{ et } \ s = \frac{1}{2}fgt^2 \ \left(= \frac{1}{2}\dot{v}t^2\right) \ \text{ d'où } \ t = \sqrt{\frac{2s}{fg}}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = \overline{m}_{e,G} \quad => \Delta\overline{M}_G = \int\overline{m}_{e,G}dt \ : \ \frac{1}{2}mr^2\omega = fmgrt$$

$$=> \ \omega = \frac{2fgt}{r} = \frac{2fg}{r}\sqrt{\frac{2s}{fg}} = \frac{2}{r}\sqrt{2sfg}$$

---

20. 1. Deux méthodes sont possibles : théorème du moment cinétique et la conservation de l'énergie. Nous utiliserons la première.

Résultante cinétique : $\bar{R} = m\bar{v}_G = m\omega r\,\bar{1}_x$

Moment cinétique en G : $\bar{M}^i_G = \bar{\bar{I}}^i_G.\bar{\omega} = I^i_{Gy}\dot{\theta}\,\bar{1}_y$ => $\dfrac{d\bar{M}^i_G}{dt} = \bar{\bar{I}}^i_G.\dot{\bar{\omega}} = I^i_{Gy}\ddot{\theta}\,\bar{1}_y$

Moment cinétique en I : $\bar{M}^i_I = \bar{\bar{I}}^i_G.\bar{\omega} + \bar{R}\times\overline{GI} = \left(I^i_{Gy} + mr^2\right)\dot{\theta}\,\bar{1}_y$ $\left(= m\overline{IG}\times\bar{v}_I + \bar{\bar{I}}^i_I.\bar{\omega}\right.$ avec $\left.\bar{v}_I = 0\right)$

Moment des force appliquées au solide : $\bar{m}_{e,I} = \left(m_1 + m_2\right) g r_1 \sin\alpha\,\bar{1}_y$

Théorème du moment cinétique en I : $\dfrac{d\bar{M}^1_I}{dt} + \dfrac{d\bar{M}^2_I}{dt} = \dfrac{d\left(\left(I^1_{Gy} + I^2_{Gy} + m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2\right)\dot{\theta}\,\bar{1}_y\right)}{dt} = \bar{m}_{e,I}$

$I^1_{Gy} = \dfrac{m_1\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{2}$ et $I^2_{Gy} = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$.

Or $\ddot{\theta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ => $\left(\dfrac{m_1\left(r_1^2 + r_2^2\right) + m_2 r_2^2}{2} + m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2\right)\dot{\theta}^2 = 2\left(m_1 + m_2\right) g r_1 \sin\alpha\theta$

On trouve donc $\dot{\theta}^2 = K\theta$ avec $K = \dfrac{2g\sin\alpha}{r_1}\dfrac{\delta\gamma^2 + 1 - \gamma^2}{\dfrac{3}{2} + \delta\left(\dfrac{\gamma^4}{2} + \gamma^2\right) - \left(\dfrac{\gamma^4}{2} + \gamma^2\right)}$ après avoir posé $\delta = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ et $\gamma =$

2. $r_1 = r_1{}^*;\ \rho_1 = \rho_2{}^*;\ \rho_2 = \rho_1{}^*$ => $\delta = \dfrac{1}{\delta^*}$ cherchons $r_1\gamma = r_2 = f\left(\gamma^* r_1 = r_2{}^*\right)$

$$\frac{1 + \delta\gamma^2 - \gamma^2}{\dfrac{3}{2} + \delta\dfrac{\gamma^4}{2} + \delta\gamma^2 - \dfrac{\gamma^4}{2} - \gamma^2} = \frac{1 + \dfrac{1}{\delta}\gamma^{*2} - \gamma^{*2}}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\gamma^{*4}}{2} + \dfrac{1}{\delta}\gamma^{*2} - \dfrac{\gamma^{*4}}{2} - \gamma^{*2}}$$

$$\left(1 + \delta\gamma^2 - \gamma^2\right)\left(3\delta + \gamma^{*4} + 2\gamma^{*2} - \delta\gamma^{*4} - 2\delta\gamma^{*2}\right) = \left(\delta + \gamma^{*2} - \delta\gamma^{*2}\right)\left(3 + \delta\gamma^4 + 2\delta\gamma^2 - \gamma^4 - 2\gamma^2\right)$$

$$\left(\delta - \left(1 + \delta\right)\gamma^2\right)\gamma^2 - 5\gamma^{*2} + \left(1 - \delta\right)\left(\gamma^{*2} - \gamma^2\right)\gamma^2\gamma^{*2} = 0$$

$$\left[5r_2{}^4 - \left(1 - \delta\right)r_1{}^4\right]r_2{}^{*2} + \left[\left(\delta r_2{}^2 r_1^2 - \left(1 + \delta\right)r_1^2\right)\right]r_2{}^{*4} + \left[-\left(1 - \delta\right)r_2{}^2 r_1{}^4\right] = Ar_2{}^{*4} + Br_2{}^{*2} + C = 0$$

$$\Rightarrow r_2{}^{*2} = \frac{-2\left[\left(\delta r_2{}^2 r_1^2 - \left(1 + \delta\right)r_1^2\right)\right] \pm \sqrt{\left[\left(\delta r_2{}^2 r_1^2 - \left(1 + \delta\right)r_1^2\right)\right]^2 - 4\left[5r_2{}^4 - \left(1 - \delta\right)r_1{}^4\right]\left[-\left(1 - \delta\right)r_2{}^2 r_1{}^4\right]}}{2\left[5r_2{}^4 - \left(1 - \delta\right)r_1{}^4\right]}$$

Le rapport entre les rayons r_2 et r_{2*} doit satisfaire cette dernière équation pour que les deux cylindres arrivent en même temps en bas.

3. Si le cylindre est homogène, K devient $K = \dfrac{4g\sin\alpha}{3r_1}$ qui est indépendant de la masse du cylindre

---

21. $\dfrac{d\bar{M}_O}{dt} = \bar{m}_{e,O}$ avec $\bar{M}_O = -P_{xz}\omega\,\bar{1}_x - P_{yz}\omega\,\bar{1}_y - I_z\omega\,\bar{1}_z$

$\dfrac{d\bar{M}_O}{dt} = -P_{xz}\omega^2\,\bar{1}_y + P_{yz}\omega^2\,\bar{1}_x$ avec $P_{xz} = 0$

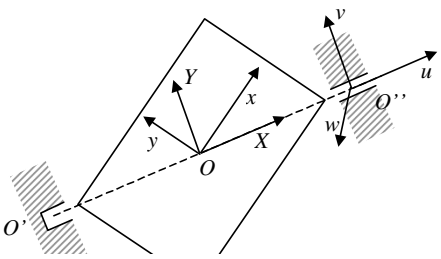
$P_{yz}{}^{(1)} = 0$; $P_{yz}{}^{(2)} = \rho(-b)\left(\dfrac{b^2}{2}\right)$; $P_{yz}{}^{(3)} = \rho(b)\left(\dfrac{-3b^2}{2}\right)$; $P_{yz}{}^{(4)} = 0$;

$P_{yz}{}^{(2)} = \rho(-b)\left(-\dfrac{5b^2}{2}\right)$; $P_{yz}{}^{(3)} = \rho(-3b)\left(\dfrac{b^2}{2}\right)$ => $P_{yz} = 2\rho b^3$

$\bar{m}_{e,O} = 2\rho b^3\omega^2\,\bar{1}_x$

---

22. Les réactions sont définies dans les axes fixes O''uvw :
FO' =(UO',VO',WO') et FO'' =(0,VO'',WO'')



$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = m\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=0}\times\overline{v_{O'}} + \overline{m_{e,O'}}}$$

$$\overline{m_{e,O'}} = \overline{O'O}\times m\overline{g} + \overline{O'O''}\times\overline{R_{O''}} = \frac{L}{2}mg\overline{1_v} - LW_{O''}\overline{1_v} + LV_{O''}\overline{1_w}$$

$$\overline{M_{O'}} = \overline{M_O} + m\overline{O'O}\times\underbrace{\overline{v_G}}_{v_G=v_O=0} = I_X\omega\overline{1_X} - P_{XY}\omega\overline{1_Y}$$

Axes O''uvw fixe,

Axes OXYZ lié à la plaque, $\overline{\omega} = \omega\,\overline{1_X}$

$$\frac{d}{dt}\overline{M_{O'}} = I_X\dot{\omega}\overline{1_X} - P_{XY}\dot{\omega}\overline{1_Y} - P_{XY}\omega^2\overline{1_Z}$$

$$\begin{cases}\overline{1_X} = \overline{1_u}\\ \overline{1_Y} = \cos\omega t\,\overline{1_v} + \sin\omega t\,\overline{1_w}\\ \overline{1_Z} = -\sin\omega t\,\overline{1_v} + \cos\omega t\,\overline{1_w}\end{cases}$$

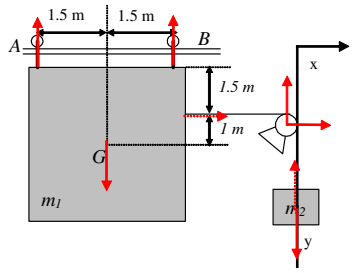
$$\begin{cases}\overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0\\ \overline{1_v} : -P_{XY}\dot{\omega}\cos\omega t + P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''}\\ \overline{1_w} : -P_{XY}\dot{\omega}\sin\omega t - P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''}\end{cases} \Rightarrow \omega \text{ constant} : \begin{cases}\overline{1_u} : I_X\dot{\omega} = 0\\ \overline{1_v} : P_{XY}\omega^2\sin\omega t = \frac{L}{2}mg - LW_{O''}\\ \overline{1_w} : -P_{XY}\omega^2\cos\omega t = LV_{O''}\end{cases} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum\overline{F_e} \quad \text{où} \quad \overline{v_G} = 0}$$

$$\begin{cases}\overline{1_u} : U_{O'} = 0\\ \overline{1_v} : V_{O'} + V_{O''} = 0\\ \overline{1_w} : W_{O'} + W_{O''} - mg = 0\end{cases} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \begin{cases}U_{O'} = 0\\ V_{O'} = \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O'} = \frac{mg}{2} + \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}V_{O''} = -\frac{P_{XY}\omega^2}{L}\cos\omega t\\ W_{O''} = \frac{mg}{2} - \frac{P_{XY}\omega^2}{L}\sin\omega t\end{cases}$$

23.



Système {Porte (m1)} : Théorème de la résultante cinétique suivant x :

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_x = \sum\left.\overline{F_e}\right|_x \Rightarrow m_1\ddot{x} = F \quad (1)$$

Système {Contrepoids (m2)} : Théorème de la résultante cinétique suivant y :

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_y = \sum\left.\overline{F_e}\right|_y \Rightarrow m_2\ddot{y} = -F + m_2 g \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (m_1 + m_2)a = m_2 g \quad \text{avec} \quad \ddot{x} = \ddot{y} = a$$

! : Système {(m1+m2)} : Théorème de la résultante cinétique :

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_y = m_1\ddot{x} = \sum \left.\overline{F}_e\right|_y \left(X_O\right)$$

$$\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_y = m_2\ddot{x} = \sum \left.\overline{F}_e\right|_y \left(R_A,\ R_B,\ m_1 g,\ m_2 g, Y_O\right)$$

=> Pas intéressant.

Système {Porte (m1)} :

Théorème de la résultante cinétique suivant y : $\left.\frac{d}{dt}\overline{R}\right|_y = \sum \left.\overline{F}_e\right|_y \Rightarrow\ 0 = -R_A - R_B + m_1 g$ (3)

Théorème du moment cinétique en G : (en un autre point P, le terme $m\overline{v}_G \times \overline{v}_P$ ne sera pas nul)

$$\frac{d}{dt}\overline{M_G} = m\overline{v}_G \times \overline{v}_G + \sum \overline{m}_{e,G} \Rightarrow 0 = R_A.1,5 - R_B.1,5 + F.1 \ \text{ car } \ \overline{\omega} = 0 \qquad (4)$$

(3) + (4) : $R_B = \frac{m_1 g}{2} + \frac{F}{3} = m_1 g\left(\frac{8}{15}\right) = 2354,4\ N$ et $R_A = 2060,1\ N$

Remarque : Nous pouvons dire que la force de tension dans le câble est la même de part et d'autre de la poulie car la poulie est sans masse. Cela se vérifie en appliquant le théorème du moment cinétique sur la poulie seule.

---

24. P l'intersection de la barre uniforme avec l'axe AB : Px'y'z' = repère lié à la barre avec x' suivant la barre.

$$\boxed{\frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O} \ \text{ avec } \ \overline{M}_O = \overline{M}_P + \overline{OP} \times \overline{R}}$$

$\overline{M}_P = -P_{x'z'}.\omega\overline{1}_{z'} - P_{y'z'}.\omega\overline{1}_{z'} + I_{z'}.\omega\overline{1}_{z'}$ avec $\overline{\omega} = \dot{\theta}\overline{1}_z$ et $P_{x'z'} = P_{y'z'} = 0$ car $z' = 0$

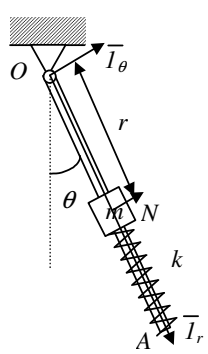
$\Rightarrow \overline{M}_P = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_{z'}$ et $\overline{R} = m\frac{d\overline{OG}}{dt} = m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{y'}$; $\overline{OP} = -b\overline{1}_{z'}$ => $\overline{M}_O = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z + mb\frac{L}{2}\dot{\theta}\overline{1}_{x'}$

$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt} = \overline{m}_{e,O}$: $m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\overline{1}_{y'} = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x \Rightarrow m\frac{bL}{2}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_y - \sin\theta\overline{1}_x\right) = cR_{Bx}\overline{1}_y - cR_{By}\overline{1}_x$

$\Rightarrow R_{Bx} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\cos\theta$ et $R_{By} = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\sin\theta \Rightarrow \overline{R}_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right)$ avec $R_B = m\frac{bL}{2c}\dot{\theta}^2$

---

25. 1.



Système {masse (m)} : Théorème de la résultante cinétique suivant 1r :

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \left.\overline{F}_e\right|_{\overline{1}_r} \Rightarrow m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \underbrace{-k\left(r - r_0\right)}_{-k\left((L-r)-(L-r_0)\right)(-\overline{1}_r)} + mg\cos\theta \qquad (1)$$

Système {Tige (M) + masse (m)} : Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G} \times \underbrace{\overline{v_O}}_{=0} + \sum \overline{m}_{e,O} \quad \text{où} \quad \overline{M_O} = \overline{M_{O\,(m)}} + \overline{M_{O\,(M)}}$$

$$\overline{M_{O\,(M)}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}\,\overline{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{M_{O\,(m)}} = \underbrace{\overline{M_G}}_{\substack{=0 \text{ masse} \\ \text{ponctuelle}}} + \overline{OG} \times m\overline{v_G} = mr^2\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ML^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - mgr\sin\theta \qquad (2)$$

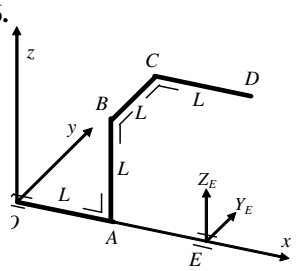
2. Système {Tige (M)} : Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G} \times \underbrace{\overline{v_O}}_{=0} + \sum \overline{m}_{e,O} \Rightarrow \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta Mg - rN \qquad (3) \Rightarrow \quad N = -ML\frac{\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{g}{2}\sin\theta}{r}$$

OU Système {masse (m)} : Théorème de la résultante cinétique suivant 1θ :

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum \overline{F}_e \Big|_{\overline{1}_\theta} \Rightarrow m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = N - mg\sin\theta \Rightarrow N = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) + mg\sin\theta \underset{(2)}{=} -\frac{\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta Mg}{r}$$

26.



Système {système complet (4m)} : Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d}{dt}\overline{M_O} = m\overline{v_G}\times\overline{v_O} + \sum \overline{m}_{e,O} \text{ où } \overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{1}_x \text{ et } \overline{M_O} = I_x\dot{\theta}\,\overline{1}_x - P_{xy}\dot{\theta}\,\overline{1}_y - P_{xz}\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

$$\sum \overline{m}_{e,O} = \overline{OE}\times(\overline{Y}_E + \overline{Z}_E) + \overline{OG_1}\times m\overline{g} + \overline{OG_2}\times m\overline{g} + \overline{OG_3}\times m\overline{g} + \overline{OG_4}\times m\overline{g}$$

Dans le système d'axe Oxyz lié au solide :

$$\overline{OG_1}\left(\frac{L}{2},0,0\right);\ \overline{OG_2}\left(L,0,\frac{L}{2}\right);\ \overline{OG_3}\left(L,\frac{L}{2},L\right);\ \overline{OG_4}\left(L+\frac{L}{2},L,L\right);$$

$$m\overline{g} = -mg\,\overline{1}_Z = -mg\left(\sin\theta\,\overline{1}_y + \cos\theta\,\overline{1}_z\right)$$

$$I_x = \underbrace{0}_{OA} + \underbrace{\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{AB} + \underbrace{\frac{mL^2}{12} + m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2\right]}_{BC} + \underbrace{0 + m\left[L^2 + L^2\right]}_{CD} = \frac{11}{3}mL^2$$

$$P_{xy} = \underbrace{m.\frac{L}{2}.0}_{OA} + \underbrace{m.L.0}_{AB} + \underbrace{m.L.\frac{L}{2}}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 2mL^2 \quad \text{et} \quad P_{xz} = \underbrace{m.\frac{L}{2}.0}_{OA} + \underbrace{m.L.\frac{L}{2}}_{AB} + \underbrace{m.L.L}_{BC} + \underbrace{m.\frac{3L}{2}.L}_{CD} = 3mL^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}mL^2\ddot{\theta} = \frac{5}{2}mLg\sin\theta - \frac{3}{2}mLg\cos\theta & (1) \\ -2mL^2\ddot{\theta} + 3mL^2\dot{\theta}^2 = -2LZ_E + 4mLg\cos\theta & (2) \\ -3mL^2\ddot{\theta} - 2mL^2\dot{\theta}^2 = 2LY_E - 4mLg\sin\theta & (3) \end{cases}$$

1) : $\dot{\theta}^2 = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(5\left(-\cos\theta+1\right) - 3\left(\sin\theta - 0\right)\right) = \frac{3}{11}\frac{g}{L}\left(-3\sin\theta - 5\cos\theta + 5\right)$ (4)

1)+(2)+(4) : $Z_E = \frac{mg}{22}\left(42\sin\theta + 80\cos\theta - 45\right)$

1)+(3)+(4) : $Y_E = \frac{mg}{44}\left(79\sin\theta + 87\cos\theta - 60\right)$

---

27. 1. $\boxed{\sum \overline{F}_e = \frac{d\overline{R}}{dt} = 0 \text{ car } \overline{R} = 0}$ et $\boxed{\sum \overline{m}_{e,O} = \frac{d\overline{M}_O}{dt} \text{ car } O \text{ est un point fixe}}$

$$\overline{M}_O = \begin{pmatrix} \frac{mH^2}{12} & 0 & - \\ 0 & \frac{mB^2}{12} & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\,\overline{1}_X + \frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\,\overline{1}_Y$$

Dans les axes OXYZ liés à la plaque

$$\frac{d\overline{M}_O}{dt}=\frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\frac{d\overline{1}_X}{dt}+\frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\frac{d\overline{1}_Y}{dt}=\frac{mH^2}{12}\omega\sin\theta\left(-\omega\cos\theta\overline{1}_Z\right)+\frac{mB^2}{12}\omega\cos\theta\left(+\omega\sin\theta\overline{1}_Z\right)$$

$$=\left(-\frac{mH^2}{24}\omega^2\sin 2\theta+\frac{mB^2}{24}\omega^2\sin 2\theta\right)\overline{1}_Z=\frac{m}{24}\omega^2\sin 2\theta\left(B^2-H^2\right)\overline{1}_Z=\sum\overline{m}_{e,O}$$

Ou directement dans les Oxyz tournant avec la plaque :

$$\overline{M}_O=\begin{pmatrix}- & -P_{xy} & -\\ - & I_y & -\\ - & 0 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{pmatrix}=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y \quad \text{et} \quad \begin{cases}\overline{1}_x=\cos\theta\overline{1}_X-\sin\theta\overline{1}_Y\\ \overline{1}_y=\sin\theta\overline{1}_X+\cos\theta\overline{1}_Y\end{cases} \quad ; \; I_X=\frac{mH^2}{12} \quad ; \; I_Y=\frac{mB^2}{12}$$

$$\begin{cases}I_{y,plaque}=\sin^2\theta I_X+\cos^2\theta I_Y-2\sin\theta\cos\theta P_{XY}=\sin^2\theta\dfrac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\dfrac{mB^2}{12}\\ P_{xy,plaque}=\sin\theta\cos\theta\left(I_Y-I_X\right)=\left(\dfrac{mB^2}{12}-\dfrac{mH^2}{12}\right)\dfrac{\sin 2\theta}{2}\end{cases}$$

$$\overline{M}_O=-\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega\overline{1}_x+\left(\sin^2\theta\frac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\frac{mB^2}{12}\right)\omega\overline{1}_y \Rightarrow \frac{d\overline{M}_O}{dt}=\left(\frac{mB^2}{12}-\frac{mH^2}{12}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}\omega^2\overline{1}_z$$

2. Dans les axes *Oxyz*.

$$\boxed{\sum\overline{m}_{e,O}=\frac{d\overline{M}_O}{dt} \quad \text{car } O \text{ est un point fixe}} \quad \text{avec} \quad \overline{M}_O=-P_{xy}\omega\overline{1}_x+I_y\omega\overline{1}_y$$

$P1\left(X_1,d\right);P2\left(-X_2,d\right)$

$$\begin{cases}I_y=I_{y,plaque}-I_{y,r1}-I_{y,r2}=\sin^2\theta\dfrac{mH^2}{12}+\cos^2\theta\dfrac{mB^2}{12}-\left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4}+\rho\pi r^2X_1{}^2\right)-\left(\dfrac{\rho\pi r^4}{4}+\rho\pi r^2X_2{}^2\right)\\ P_{xy}=P_{xy,plaque}-P_{xy,r1}-P_{xy,r2}=\left(\dfrac{mB^2}{12}-\dfrac{mH^2}{12}\right)\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\left(0+\rho\pi r^2X_1d\right)-\left(0+\rho\pi r^2X_2d\right)\end{cases}$$

$$\overline{M}_O=\left(-\frac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega\overline{1}_x+\left(\frac{m}{12}\left(H^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta\right)-\rho\pi r^2\left(\frac{r^2}{2}+X_1{}^2+X_2{}^2\right)\right)\omega\overline{1}_y$$

A l'équilibre statique et dynamique :

$$\boxed{\sum\overline{m}_{e,Oz}=0} \Rightarrow -\left(-\rho\pi r^2gX_1\right)-\left(\rho\pi r^2gX_2\right)=0 \Rightarrow X_1=X_2 \quad \left(// \quad \sum\overline{F}_{e,O}=\frac{d\overline{R}}{dt}=0\right)$$

De plus, $\boxed{\sum\overline{m}_{e,O}=\dfrac{d\overline{M}_O}{dt}=0}=\left(-\dfrac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega\dfrac{d\overline{1}_x}{dt}$

$$\Rightarrow -\left(-\frac{m}{24}\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta+\rho\pi r^2\left(X_1+X_2\right)d\right)\omega^2\overline{1}_z=0$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{m}{48}\frac{\left(B^2-H^2\right)\sin 2\theta}{\rho\pi r^2d}$$

28.

$$\bar{M}_A = \overline{\overline{I}}_A \bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & & \\ -P_{xy} & & \\ -P_{xz} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_x \omega_x \bar{1}_x - P_{xy} \omega_x \bar{1}_y - P_{xz} \omega_x \bar{1}_z$$

$$Avec \begin{cases} I_{x,total} = I_{x_G,0} - (I_{x,1} + I_{x,2} + I_{x,3} + I_{x,4} + I_{x,5} + I_{x,6}) \\ P_{xy} = P_{xy_0} - (P_{xy_1} + P_{xy_2} + P_{xy_3} + P_{xy_4} + P_{xy_5} + P_{xy_6}) \\ P_{xz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{x_G,0} = \sigma L l \dfrac{l^2}{12} \\ I_{x_G,1} = \sigma \pi R^2 \dfrac{R^2}{4} \Rightarrow I_{x,1} = \sigma \pi R^2 (\dfrac{R^2}{4} + a^2) \\ I_{x_G,2} = I_{x_G,3} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \Rightarrow I_{x,2} = I_{x,3} = \sigma d^2 (\dfrac{d^2}{12} + a^2) \\ I_{x_G,4} = I_{x,4} = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} (\cos^2 45° + \sin^2 45) = \sigma d^2 \dfrac{d^2}{12} \\ I_{x,5} + I_{x,6} = 2 \dfrac{\sigma \pi r^2}{2} \dfrac{r^2}{4} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_{xy} = P_{xy_0} - (\underbrace{P_{xy_1}}_{0 - \frac{\sigma \pi R^2}{2} ab} + \underbrace{P_{xy_2}}_{0 - \sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_3}}_{0 + \sigma a^4} + \underbrace{P_{xy_4}}_{0} + \underbrace{P_{xy_5}}_{0 - \frac{\sigma \pi r^2}{4} ac} + \underbrace{P_{xy_6}}_{0 - \frac{\sigma \pi r^2}{4} ac}) \\ P_{xy} = \frac{\sigma \pi R^2}{2} ab + \frac{\sigma \pi r^2}{2} ac = \frac{\sigma \pi a}{2} (bR^2 + cr^2) \end{cases}$$

2.

$$\left. \frac{d\bar{M}_A}{dt} \right|_{y,z} = \left(\bar{m}_{e,A} \right)_{y,z}$$

$$\Rightarrow P_{xy} (-\dot{\omega}_x \bar{1}_y + \omega_x^2 \bar{1}_z) = \frac{L}{2} N_{P_y} \bar{1}_z - \frac{L}{2} N_{P_z} \bar{1}_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_{P_y} = -\dfrac{\dot{\omega}_x \sigma \pi a (bR^2 + cr^2)}{L} \\ N_{P_z} = -\dfrac{\omega_x^2 \sigma \pi a (bR^2 + cr^2)}{L} \end{cases}$$

Lagrange

Formulaire

Lagrangien : $\boxed{L = T - V}$ avec $T = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \overline{\overline{I}}_{G_i}\overline{\omega}_i\right)$

n coordonnée de Lagrange => n équation de Lagrange ($i = 1,....,n$)

$\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$ avec $\delta \overline{r_h} = \sum_i \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i$

Equation de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$ avec $Q_i = Q^*_{i(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel})} + Q_{i(\text{Force dérivant d'un potentiel})}$

Pour les forces dérivent d'un potentiel : $\delta\tau = -\delta V$

$$=> \underbrace{\sum_h \overline{F}_h . \delta \overline{r_h} = \sum_i \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i}_{\delta\tau} = -\underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i}_{\delta V} => \boxed{Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}}$$

$$=> \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* => \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*}$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

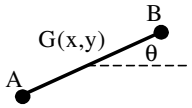
$$=> \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} => \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 => \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Rem : $\frac{\partial m x}{\partial x} = m$; $\frac{\partial m x}{\partial \dot{x}} = 0$; $\frac{\partial m \dot{x}}{\partial x} = 0$; $\frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx} = m\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

1. Les réponses <u>correctes</u> sont :

1.a ($T = T_1 + T_2$)
1.e ($T = T_1 + T_2$ avec les T_i calculés au point O)
2.b
3.b et 3.e
4.a ($T+V=E_0$ est une intégrale première)
4.c (c'est une intégrale première)
4.d (c'est la condition pour avoir 4.c)
5.b (ssi toutes les forces dérivent d'un potentiel) et 5.e

2. 3 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ)
Dans un plan horizontal (V=0) : formule de l'énergie cinétique appliquée à un **solide.**



Rem :

$\frac{\partial m x}{\partial x} = m$; $\frac{\partial m x}{\partial \dot{x}} = 0$; $\frac{\partial m \dot{x}}{\partial x} = 0$; $\frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx} = m\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

a.

$$L = T = \left(\frac{M}{2}v_G{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{solide}} = \frac{2.m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & I_z(A) + I_z(B) \end{pmatrix}.\overline{\omega}$$

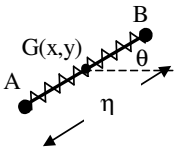
$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad I_z(A) = I_{z'}(A) + md^2 = m\frac{l^2}{4} \quad (z' \text{ passant par } A).$$

Or le moment d'inertie d'un point (masse ponctuelle) est nul, donc il ne reste que le terme de Steiner md^2 :

$$\begin{cases} x: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{x}_0 \Rightarrow x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{y} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} = \dot{y}_0 \Rightarrow y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique peut aussi se trouver par la formule ci-dessous pour un système de points, en exprimant les coordonnées des deux points et en les dérivant.

b. 4 degrés de liberté (les coordonnées de Lagrange : x, y, θ, η)
Dans un plan horizontal : Energie cinétique appliquée à un **système de points.**



$$L = T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2\right) + \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt}\right)^2\right)$$

avec $\mathrm{A}(x_G - \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G - \frac{\eta}{2}\sin\theta)$ et $\mathrm{B}(x_G + \frac{\eta}{2}\cos\theta; y_G + \frac{\eta}{2}\sin\theta)$

$$\bar{v}_\mathrm{A}(\dot{x} - \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta + \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} - \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta - \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta}) \ \text{ et } \ \bar{v}_\mathrm{B}(\dot{x} + \frac{\dot{\eta}}{2}\cos\theta - \frac{\eta}{2}\sin\theta\dot{\theta}; \dot{y} + \frac{\dot{\eta}}{2}\sin\theta + \frac{\eta}{2}\cos\theta\dot{\theta})$$

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4}\left(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(\eta - l)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: \ \ddot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y: \ \ddot{y} = 0 \ \Rightarrow \ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ \theta: \ \dfrac{m}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\eta^2\dot{\theta}\right) = 0 \ \Rightarrow \eta^2\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta} = 0 \ \text{ et } \ \dfrac{m}{2}\eta^2\dot{\theta} = C \\ \eta: \ \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{m}{2}\eta\dot{\theta}^2 + k(\eta - l) = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{m}{2}\ddot{\eta} - \dfrac{2C^2}{m\eta^3} + k(\eta - l) = 0 \end{cases}$$

La 4ième équation peut aussi s'obtenir avec le théorème de la conservation de l'énergie : $T + V = E_0$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) + \frac{m}{4}\left(2\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\eta\dot{\eta}\dot{\theta}^2 + 2\eta^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + k(\eta - l)\dot{\eta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\ddot{\eta} - m\eta 2\left(\frac{C}{m\eta^2}\right)^2 + k(\eta - l) = 0$$

c. Si on a une tige de longueur l : $L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$ => Mouvement inchangé.

d. Dans le plan vertical, on doit rajouter le terme du potentiel dans le Lagrangien

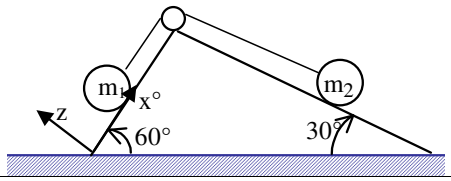
$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 - 2mgy \qquad \text{avec} \qquad y: \ \ddot{y} = -g \ \Rightarrow \ \dot{y} = -gt + \dot{y}_0 \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0$$

---

3. Condition de roulement sans glissement :

$\dot{x} = R\dot{\varphi}_1$; $\dot{z} = R\dot{\varphi}_2$; $\dot{x} = r\dot{\theta} = \dot{z}$ (1)

5 paramètres de positions :
4 équations liant ces paramètres dépendants
=> 1 ddl = 1 coordonnée généralisée



Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0}$

avec
$$\begin{cases} T=\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}_i\bar{\bar{I}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right)=\left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2+\frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2\right)+\left(\frac{m_2}{2}\dot{z}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2\right)+\left(0+\frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\ T=\left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2+\frac{m_1R^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right)+\left(\frac{m_2}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2R^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right)+\left(0+\frac{mr^2}{4}\frac{\dot{x}^2}{r^2}\right)=\frac{3}{4}\left(m_1+m_2+\frac{m}{3}\right)\dot{x}^2 \\ V=m_1gx\sin 60+m_2g\left(L\sin 60-z\sin 30\right)\underbrace{=}_{\substack{z=C-(L-x)\\ C=\text{longueur du cable}}}m_1gx\frac{\sqrt{3}}{2}-m_2g\frac{1}{2}x+Const\ \ (\text{réf=Sol}) \\ \Rightarrow \boxed{L=T-V}=\frac{3}{4}\left(m_1+m_2+\frac{m}{3}\right)\dot{x}^2-gx\left(\frac{\sqrt{3}m_1}{2}-\frac{m_2}{2}\right)+Const \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\left(3m_1+3m_2+m\right)\ddot{x}+g\left(\frac{\sqrt{3}m_1}{2}-\frac{m_2}{2}\right)=0 \Rightarrow \ddot{x}=\frac{\left(m_2-\sqrt{3}m_1\right)}{\left(3m_1+3m_2+m\right)}g$$

OU par la méthode des <u>multiplicateurs de Lagrange</u>. 5 coordonnées généralisées et 1 ddl.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\sum_i \lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}}$

avec
$$\begin{cases} T=\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{G_i}{}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}_i\bar{\bar{I}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right)=\left(\frac{m_1}{2}\dot{x}^2+\frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2\right)+\left(\frac{m_2}{2}\dot{z}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2\right)+\left(0+\frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\ V=m_1gx\sin 60+m_2g\left(L\sin 60-z\sin 30\right)+Const\underbrace{=}_{z=C-(L-x)}m_1gx\frac{\sqrt{3}}{2}-m_2g\frac{1}{2}x+Const\ \ (\text{Réf=Sol}) \\ \Rightarrow \boxed{L=T-V}=\frac{m_1}{2}\dot{x}^2+\frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}\dot{z}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}_2^2+\frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2-m_1gx\frac{\sqrt{3}}{2}+m_2g\frac{1}{2}z+Const \end{cases}$$

4 Contraintes : $\dot{x}=R\dot{\varphi}_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x-R\delta\varphi_1=0\right)$; $\dot{z}=R\dot{\varphi}_2 \Rightarrow \lambda_2\left(\delta z-R\delta\varphi_2=0\right)$; $\dot{x}=r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_3\left(\delta x-r\delta\theta=0\right)$;
$\dot{z}=r\dot{\theta} \Rightarrow \lambda_4\left(\delta z-r\delta\theta=0\right)$

=> 5 coordonnées généralisées => 5 Equations de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=\sum_i\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi_1}:\ \frac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}_1=-R\lambda_1\ \ (1) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=\sum_i\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi_2}:\ \frac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}_2=-R\lambda_2\ \ (2) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum_i\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial x}:\ m_1\ddot{x}+g\frac{\sqrt{3}m_1}{2}=\lambda_1+\lambda_3\ \ (3) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=\sum_i\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial z}:\ m_2\ddot{x}-g\frac{m_2}{2}=\lambda_2+\lambda_4\ \ (4) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\sum_i\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \theta}:\ \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=-r\lambda_3-r\lambda_4\ \ (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1):\lambda_1=-\frac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1 \\ (2):\lambda_2=-\frac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2 \\ (3)+(1):m_1\ddot{x}+g\frac{\sqrt{3}m_1}{2}=-\frac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1+\lambda_3 \\ (4)+(2):m_2\ddot{x}-g\frac{m_2}{2}=-\frac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2+\lambda_4 \end{cases}$$

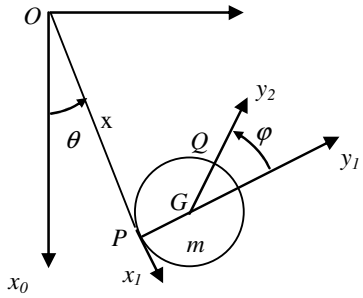
(1),(2),(3),(4)->(5) : $\frac{mr}{2}\ddot{\theta}=-m_1\ddot{x}-g\frac{\sqrt{3}m_1}{2}-\frac{m_1R}{2}\ddot{\varphi}_1-m_2\ddot{x}+g\frac{m_2}{2}-\frac{m_2R}{2}\ddot{\varphi}_2$

$\Rightarrow mr\ddot{\theta}+2m_1\ddot{x}+m_1R\ddot{\varphi}_1+2m_2\ddot{x}+m_2R\ddot{\varphi}_2=gm_2-g\sqrt{3}m_1$

Si on fait les remplacements en fonction de *x*, grâce aux 4 equations de contraintes, on obtient :

$m\ddot{x}+2m_1\ddot{x}+m_1\ddot{x}+2m_2\ddot{x}+m_2\ddot{x}=gm_2-g\sqrt{3}m_1 \Rightarrow \boxed{\left(3m_1+3m_2+m\right)\ddot{x}=\left(m_2-\sqrt{3}m_1\right)g}$

4.



$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0}$$

$$\bar{\omega}=\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\bar{1}_z \;;\; \overline{OG}=x\bar{1}_{x_1}+R\bar{1}_{y_1} \;\Rightarrow\; \bar{v}_G=\left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_1}+x\dot{\theta}\bar{1}_{y_1}$$

$$T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}=\frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)^2+x^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2$$

$$V=-mg\left(x\cos\theta-R\sin\theta\right)$$

Condition de roulement sans glissement : $\bar{v}_{P\in\text{corde}}=\bar{v}_{P\in\text{disque}} \Rightarrow \boxed{\dot{x}=-R\dot{\varphi}}$

avec où
$$\begin{cases}\bar{v}_{P\in\text{corde}}=x\dot{\theta}\bar{1}_{y_1}\\ \bar{v}_{Q\in\text{disque}}=\dfrac{d\left(x\bar{1}_{x_1}+R\bar{1}_{y_1}+R\bar{1}_{y_2}\right)}{dt}=\left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)\bar{1}_{x_1}+x\dot{\theta}\bar{1}_{y_1}-R\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\bar{1}_{x_2}\underset{\substack{\text{quand}\\ Q=P}}{=}\left(\dot{x}+R\dot{\varphi}\right)\bar{1}_{x_1}+x\dot{\theta}\bar{1}_{y_1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L=T-V}\underset{\dot{x}=-R\dot{\varphi}}{=}\frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}-R\dot{\theta}\right)^2+x^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}-\frac{\dot{x}}{R}\right)^2+mg\left(x\cos\theta-R\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases}x: m\left(\ddot{x}-R\ddot{\theta}\right)-\dfrac{mR}{2}\left(\ddot{\theta}-\dfrac{\ddot{x}}{R}\right)-mx\dot{\theta}^2=mg\cos\theta \Rightarrow \dfrac{3}{2}\ddot{x}-\dfrac{3}{2}R\ddot{\theta}-x\dot{\theta}^2=g\cos\theta\ \left(=\text{th}\,\bar{R}\big|_x+\text{th}\,\bar{M}_G\big|_x\right)\\ \theta: m\left(x^2\ddot{\theta}+2x\dot{x}\dot{\theta}-R\left(\ddot{x}-R\ddot{\theta}\right)\right)+\dfrac{mR^2}{2}\left(\ddot{\theta}-\dfrac{\ddot{x}}{R}\right)=-mgx\sin\theta-mgR\cos\theta \Rightarrow x\ddot{\theta}+2\dot{x}\dot{\theta}-R\dot{\theta}^2=-g\sin\theta\\ \left(=\text{th}\,\bar{R}\big|_y\right)\end{cases}$$

Condition initiale **pour que la corde reste verticale :**

$\theta(0)=0$ et $\dot{\theta}(0)=0 \Rightarrow \ddot{x}=\dfrac{2}{3}g$

---

5. Les axes centraux principaux : // à $A\xi\eta\zeta$ en G. Les produits d'inertie sont tous nuls.

$$I_{\zeta G}=\frac{mR^2}{2};\; I_{\xi G}=I_{\eta G}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} \text{ et } \bar{\omega}=\dot{\theta}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{1}_{\xi G}+\bar{1}_{\zeta G}\right);\; v_G{}^2=\dot{z}^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{z}^2+\frac{1}{2}\left(R+\frac{h}{2}\right)^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\left(\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}\right)\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) \quad \text{et} \quad V=mgz+C$$

A fixe : $T=\dfrac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2$ avec l constante => on a une rotation uniforme $\theta=\theta_0+\dot{\theta}_0 t$

a) A mobile $\boxed{L=T-V}=\dfrac{m}{2}\dot{z}^2+m\dfrac{l^2}{2}\dot{\theta}^2-mgz$ (2 degrés de liberté)

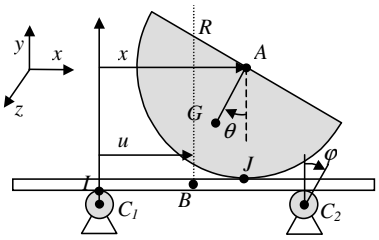
$z:\ \ddot{z}+g=0 \Rightarrow z=-g\dfrac{t^2}{2}+\dot{z}_0 t+\dot{z}_0$ et $\theta:\ \ddot{\theta}=0$

$\Rightarrow \dot{\theta}=\dot{\theta}_0 t+\theta_0 \quad \left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\text{constante} \Rightarrow \text{intégrale première}\right)$

$T+V=E_o$ est une deuxième intégrale première.

---

6. Coordonnées généralisées :



u : détermine la position du centre de masse de la planche (S_3) (suivant x)

φ : détermine la rotation des deux rouleaux (S_1 et S_2)

il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et la planche donc on peut écrire φ en fonction de u.

$\bar{v}_{I\in C_1} = r\dot{\varphi}\bar{1}_x = \bar{v}_{I\in P} = \dot{u}\bar{1}_x \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{u}/r$

θ : détermine la rotation du demi-disque autour de A. (S_4)

x : détermine la position de A (suivant x)

=> il n'y a pas de glissement entre le demi-disque et la planche donc on peut écrire x en fonction de u.

$\bar{v}_{J\in S_3} = \dot{u}\bar{1}_x = \bar{v}_{J\in S_4} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{S_4}\times\overline{AJ} = \dot{x}\bar{1}_x - R\dot{\theta}\bar{1}_x \Rightarrow \boxed{\dot{u} = \dot{x} - R\dot{\theta}}$

Degré de liberté = 2 .Les paramètres u et θ détermine entièrement la position du demi-disque.

Calculons les équations du mouvement par Lagrange.

Considérons le système complet = {2 rouleaux (m) + planche (m) + demi-disque (M)}

$$\boxed{T = T_{S_1} + T_{S_2} + T_{S_3} + T_{S_4}}$$

$$T_{S_1} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{S_1}.\bar{\bar{I}}_{C_1}.\bar{\omega}_{S_1} = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2} \quad (\text{avec } \bar{v}_{C_1} = 0);$$

$$T_{S_2} = T_{S_1} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{S_2}.\bar{\bar{I}}_{C_2}.\bar{\omega}_{S_2} = \frac{1}{2}\frac{m\dot{u}^2}{2}; (\text{avec } \bar{v}_{C_2} = 0);$$

$$T_{S_3} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_{S_3}.\bar{\bar{I}}_B.\bar{\omega}_{S_3} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 \quad (\text{avec } \bar{\omega}_{S_3} = 0)$$

$$T_{S_4} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_{S_4}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}_{S_4} \quad \text{avec} \begin{cases} \bar{\omega}_{S_4} = -\dot{\theta}\bar{1}_z \\ I_{z_G} = \dfrac{MR^2}{2} - Ma^2 \\ \overline{JG} = (-a\sin\theta)\bar{1}_x + (R - a\cos\theta)\bar{1}_y \\ \bar{v}_G = \bar{v}_J + \bar{\omega}_{S_4}\times\overline{JG} = (\dot{u} + R\dot{\theta} - a\cos\theta\dot{\theta})\bar{1}_x + (a\sin\theta\dot{\theta})\bar{1}_y \\ \text{ou } \bar{v}_G = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{S_4}\times\overline{AG} = \dot{x}\bar{1}_x + \dot{\theta}a\sin\theta\bar{1}_y - a\cos\theta\bar{1}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{S_4} = \frac{M}{2}\left(\dot{u}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - 2a\cos\theta R\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{V = V_{S_1} + V_{S_2} + V_{S_3} + V_{S_4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{S_1} = V_{S_2} = 0 \;\; ; \;\; V_{S_3} = rmg \\ V_{S_4} = (R - a\cos\theta)Mg \end{array}\right\} \Rightarrow V = C - aMg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V} = \frac{1}{2}(2m + M)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u} - Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2 + aMg\cos\theta$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel => $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$:

$$\frac{d\left(\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}+MR\dot{u}-Ma\cos\theta\dot{u}-2Ma\cos\theta R\dot{\theta}\right)}{dt}-Ma\sin\theta\dot{\theta}\dot{u}-Ma\sin\theta R\dot{\theta}^2+aMg\sin\theta=0$$

$$\left(\frac{3M}{2}R^2-2Ma\cos\theta R\right)\ddot{\theta}+2Ma\sin\theta R\dot{\theta}^2+M\left(R-a\cos\theta\right)\ddot{u}+\cancel{Ma\sin\theta\dot{\theta}\dot{u}}$$

$$-\cancel{Ma\sin\theta\dot{\theta}\dot{u}}-Ma\sin\theta R\dot{\theta}^2+aMg\sin\theta=0$$

$$\boxed{MR\left(\frac{3R}{2}-2a\cos\theta\right)\ddot{\theta}+M\left(R-a\cos\theta\right)\ddot{u}+MRa\sin\theta\dot{\theta}^2+aMg\sin\theta=0}$$

$$=>\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}-\frac{\partial L}{\partial u}=0:\ \frac{d\left(\left(2m+M\right)\dot{u}+MR\dot{\theta}-Ma\cos\theta\dot{\theta}\right)}{dt}=0$$

$$\boxed{\left(2m+M\right)\ddot{u}+M\left(R-a\cos\theta\right)\ddot{\theta}+Ma\sin\theta\dot{\theta}^2=0}$$

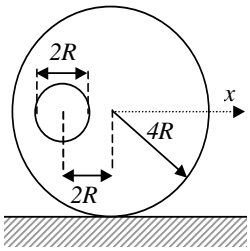
Intégrales premières :

$\boxed{T+V=E_0}$: $\frac{1}{2}\left(2m+M\right)\dot{u}^2+\frac{1}{2}\frac{3M}{2}R^2\dot{\theta}^2+MR\dot{\theta}\dot{u}-Ma\cos\theta\dot{\theta}\dot{u}-Ma\cos\theta R\dot{\theta}^2+C-aMg\cos\theta=E_0$

$\boxed{\frac{\partial L}{\partial u}=0}$ => $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}=0$ => $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}=Const$: $\left(2m+M\right)\dot{u}+M\left(R-a\cos\theta\right)\dot{\theta}=Const$

---

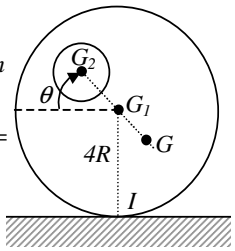
7. 1.

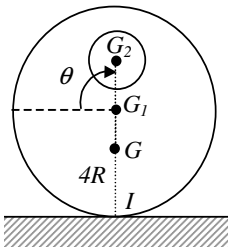


$m=m_1-m_2=15\rho\pi R^2$

$=>\ m_1=\frac{16}{15}m\ ;\ m_2=\frac{1}{15}m$

$\left\|\overline{G_1G}\right\|=\frac{m_1.0-m_2.(-2R)}{m_1-m_2}=$





$L=T-V$ avec $V=-mg\frac{2}{15}R\sin\theta=V_1-V_2=0-m_2g2R\sin\theta$ (point de référence : G_1)

$T=T_1-T_2$ où $T_i=\frac{1}{2}Mv_I^2+M\overline{v}_I.\left(\overline{\omega}\times\overline{IG}\right)+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{I_i}.\overline{\omega}=\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{I_i}.\overline{\omega}=\frac{1}{2}I_{y_{I_i}}\omega^2$

$=>T=\frac{1}{2}\left(I_{y_{I_1}}-I_{y_{I_2}}\right)\omega^2=\frac{1}{2}I_{y_I}\omega^2=\frac{mR^2}{30}\left(16.24-\frac{41}{2}-16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2$ car

$$I_{y_I}=\frac{m_1\left(4R\right)^2}{2}+m_1\left(4R\right)^2-\left(\frac{m_2R^2}{2}+m_2\left(\left(4R+2R\sin\theta\right)^2+\left(2R\cos\theta\right)^2\right)\right)=\frac{mR^2}{15}\left(16.24-\frac{41}{2}-16\sin\theta\right)$$

$$L=\frac{mR^2}{30}\left(16.24-\frac{41}{2}-16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2+mg\frac{2}{15}R\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\ =>\ \frac{mR^2}{15}\left(16.24-\frac{41}{2}-16\sin\theta\right)\ddot{\theta}+\frac{mR^2}{15}16\cos\theta.\dot{\theta}^2-mg\frac{2}{15}R\cos\theta=0$$

2. Intégrale première :

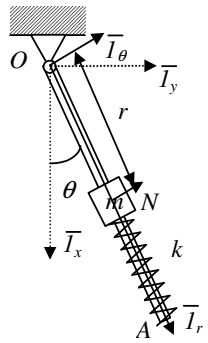
$$T+V=\frac{mR^2}{30}\left(16.24-\frac{41}{2}-16\sin\theta\right)\dot{\theta}^2-mg\frac{2}{15}R\sin\theta=Const$$

3. $\left(T+V\right)_{\theta=0,\dot{\theta}=0}=\left(T+V\right)_{\theta=\pi/2}\ =>\ 0=\frac{mR^2}{30}\left(16.24-\frac{73}{2}\right)\dot{\theta}^2-mg\frac{2}{15}R\ =>\ \dot{\theta}^2_{\max}=\frac{8g}{\left(32.24-73\right)R}=\frac{8g}{695R}$

$AN: R=0,075\ m => \omega=1,227\ s^{-1}$

---

8. 1.



Système avec 2 ddl : r et θ.

Système {Tige (M) + masse (m)} : Théorème de Lagrange :

$$T = T_m + T_M \quad \text{où} \quad T_M = \frac{1}{2}Mv_O^2 + M\overline{v}_O.\left(\overline{\omega}\times\overline{OG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}$$

$$T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + M\overline{v}_G.\left(\overline{\omega}\times\overline{GG}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{I_G=0\text{ (masse ponctuelle)}} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k\left(r - r_0\right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; mr^2\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgr\sin\theta = 0 \quad (2)$$

Système {Tige (M)} : (m est au point P)

$$T = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad Q_\theta = \overline{N}.\frac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta} + M\overline{g}.\frac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta} = rN - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\text{où}\begin{cases} \overline{N} = N\overline{1}_\theta \;\text{ et }\; \overline{OP} = r\overline{1}_r;\; \delta\overline{OP} = \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r}\delta r + \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta}\delta\theta = \delta r\overline{1}_r + r\delta\theta\overline{1}_\theta \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial r} = \overline{1}_r \;\text{ et }\; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_P}{\partial\theta} = r\overline{1}_\theta \\ M\overline{g} = Mg\overline{1}_x \;\text{ et }\; \overline{OG} = \dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\overline{1}_x + \sin\theta\overline{1}_y\right);\; \delta\overline{OP} = \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r}\delta r + \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta}\delta\theta = \dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x + \cos\theta\overline{1}_y\right)\delta\theta \\ \Rightarrow\; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial r} = 0 \;\text{ et }\; \dfrac{\partial\overline{\varphi}_G}{\partial\theta} = \dfrac{L}{2}\left(-\sin\theta\overline{1}_x + \cos\theta\overline{1}_y\right) \end{cases}$$

L'équation de Lagrange $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta \;\Rightarrow\; \dfrac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = rN - \dfrac{L}{2}\sin\theta Mg$

$\Rightarrow$ $N = ML\dfrac{\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{g}{2}\sin\theta}{r}$ Cette méthode est beaucoup plus lourde que les théorèmes généraux. Il est préférable d'utiliser les théorèmes généraux pour trouver les réactions de liaison

---

9. 2 degrés de liberté (x, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.
Axes centrés en A : z = verticale descendante, x = horizontale dirigée de B vers C => vitesse angulaire positive suivant y.

$$T = T_M + T_m \quad \text{avec} \quad T_M = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \underbrace{M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}}_{=0\ (\omega=0)} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad \text{car le triangle ne tourne pas.}$$

Pour le point matériel de masse m : $T_m = \dfrac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\dfrac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{=0\text{ (point matériel, }\overline{\overline{I}}_G=0)}$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AP} = \left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)\overline{1}_x - \ell\dot{\theta}\sin\theta\overline{1}_z \;\Rightarrow\; T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$V = -mg\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;:\; \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = A \text{ est une intégrale première : } M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \ell\cos\theta\dot{\theta}\right) = A$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;:\; \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \quad \text{(ou directement avec } T + V = E_0\text{)}$$

---

10. Système à un seul degré de liberté (θ)=> 1 coordonnée de Lagrange => 1 équation de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel mais avec un couple extérieur => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.

$\overline{v}_B = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta$; $\overline{v}_D = L\dot{\theta}\overline{1}_\theta$ => $\overline{v}_B = \overline{v}_D = \overline{v}_G$ => Le solide 2 est en translation curviligne : $\omega_2 = 0$

$$T = 2T_{tigeAB}\,2.\left(\frac{1}{2}mv_{G_1}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1.\overline{\overline{I}}_{G_1}.\overline{\omega}_1\right) + \left(\frac{M}{2}v_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2.\overline{\overline{I}}_{G_2}.\overline{\omega}_2\right)$$

$$T = 2.\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{M}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\cos\theta = -\left(m+M\right)gL\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\frac{2L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}L^2\dot{\theta}^2 + \left(m+M\right)gL\cos\theta$$

Le travail du couple C : $\delta\tau$=C$\delta\theta$

- $\delta\tau\left(\text{Force ne dérivant pas d'un potentiel}\right) = Q^*_\theta\delta\theta$ => $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q^*_\theta}$ avec $Q^*_\theta = C$

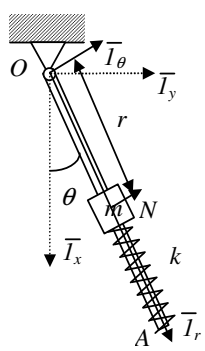
  $$=> m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} + \left(m+M\right)gL\sin\theta = C$$

- $\delta\tau\left(\text{Toutes les forces}\right) = Q_\theta\delta\theta$ => $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta}$ avec $Q_\theta = Q^*_\theta - \frac{\partial V}{\partial\theta} = C - \left(m+M\right)gL\sin\theta$

  $$=> m\frac{2L^2}{3}\ddot{\theta} + ML^2\ddot{\theta} = C - \left(m+M\right)gL\sin\theta$$

---

11. 1.



2 degrés de liberté (r, θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et Q_i=0.

<u>Système {Tige (M) + masse (m)}</u> : *Théorème de Lagrange.* Dans les axes polaires r θ

$$T = T_m + T_M \quad \text{où} \quad \begin{cases} T_M = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_O^2 + M\overline{v}_O.\left(\overline{\omega}\times\overline{OG}\right)}_{O\text{ fixe}} + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ T_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}}_{I_G=0\text{ (masse ponctuelle, }\overline{\overline{I}}_G=0)} = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

$$=> T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgr\cos\theta + \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$=> L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}\left(r - r_0\right)^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \;:\; m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k\left(r - r_0\right) = 0 \quad (1) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;:\; mr^2\ddot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgr\sin\theta = 0 \quad (2) \end{cases}$$

---

2. Système {Tige (M)} : (m est au point P) *Théorème de Lagrange*

$$T = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

- $\boxed{Q_\theta = \overline{N}.\frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial \theta} + M\overline{g}.\frac{\partial \overline{\varphi}_G}{\partial \theta}} = -rN - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$

  où
  $$\overline{N} = -N\,\overline{1}_\theta \text{ et } \overline{OP} = r\,\overline{1}_r;\ \delta\overline{OP} = \frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial r}\delta r + \frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial \theta}\delta\theta = \delta r\,\overline{1}_r + r\delta\theta\,\overline{1}_\theta \ \Rightarrow\ \frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial r} = \overline{1}_r \text{ et } \frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial \theta} = r\,\overline{1}_\theta$$
  $$M\overline{g} = Mg\,\overline{1}_x \text{ et } \overline{OG} = \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y\right);\ \delta\overline{OG} = \frac{\partial \overline{\varphi}_G}{\partial r}\delta r + \frac{\partial \overline{\varphi}_G}{\partial \theta}\delta\theta = \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right)\delta\theta$$
  $$\Rightarrow\ \frac{\partial \overline{\varphi}_G}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial \overline{\varphi}_G}{\partial \theta} = \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y\right)$$

- $\boxed{Q_\theta = Q_\theta^* - \frac{\partial V}{\partial \theta}} = \overline{N}.\frac{\partial \overline{\varphi}_P}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} = -rN - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$

L'équation de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta} \ \Rightarrow\ \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -rN - \frac{L}{2}\sin\theta Mg \Rightarrow N = -ML\frac{\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{g}{2}\sin\theta}{r}$$

OU en utilisant directement ce qui a été calculé précédemment :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^*} \text{ avec } L = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \ \Rightarrow\ \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{L}{2}\sin\theta Mg = -rN$$

Il est préférable d'utiliser les théorèmes généraux pour trouver les réactions de liaison (voir TP 8)

---

12. 1 degré de liberté (θ) => 1 coordonnées de Lagrange => 1 équations de mouvement
Il y a une force extérieure ne dérivant pas d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et Q^*_i.

Axes : $Axyz$ avec x dans le sens de F et z est la verticale ascendante. $\overline{\omega} = \omega\overline{1}_z$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^*}$$

Il y a roulement sans glissement en O $\left(\overline{v}_O = 0\right)$: $\overline{v}_G = \dot{x}\,\overline{1}_x = \overline{\omega}\times\overline{OG} = -r\dot{\theta}\,\overline{1}_x \Rightarrow \dot{x} = -r\dot{\theta}$

$$L = T - V \quad \text{avec} \quad V = Const \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 m\,i_z^{\,2}$$

Avec O' l'origine du repère $O'xy$

$$\boxed{Q_\theta^* = \sum_h F_h\frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial \theta}} = \overline{F}.\frac{\partial \overline{\varphi}_A}{\partial \theta} = Q_\theta^* = \left(R - r\right)F$$

Les axes $x'y'$ sont les axes lié à la poulie et qui coincide avec xy à l'instant étudié.

- pour un petit déplacement $\delta\theta$, on a $\overline{O'A} = x\,\overline{1}_x - R\,\overline{1}_{y'} \Rightarrow \delta\overline{OA} = \delta x\,\overline{1}_x - R\delta\,\overline{1}_{y'} = \delta x\,\overline{1}_x + R\delta\theta\,\overline{1}_{x'}$

  Or on a vu que $\dot{x} = -r\dot{\theta}$ donc $\delta x = -r\delta\theta \Rightarrow \delta\overline{O'A} = \left(R - r\right)\delta\theta\,\overline{1}_x = \frac{\partial \overline{\varphi}_A}{\partial \theta}\delta\theta$

- le déplacement peut aussi se calculer à partir de O qui a une vitesse nulle :

  $\overline{OA} = -\left(R - r\right)\overline{1}_{y'} \Rightarrow \delta\overline{OA} = \left(R - r\right)\delta\theta\,\overline{1}_{x'} = \frac{\partial \overline{\varphi}_A}{\partial \theta}\delta\theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta^* :\ m\left(r^2 + i_z^{\,2}\right)\ddot{\theta} = \left(R - r\right)F \ \Rightarrow\ \ddot{\theta} = \frac{F\left(R - r\right)}{m\left(r^2 + i_z^{\,2}\right)}$$

La poulie va reculer avec une accélération : $\ddot{x} = -\frac{Fr\left(R - r\right)}{m\left(r^2 + i_z^{\,2}\right)}$

---

13. Le seul degré de liberté est θ (Φ=rθ/R). ω(cercle)= $\dot{\phi}$-$\dot{\theta}$ car défini la vitesse angulaire relative du cercle $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ défini la vitesse angulaire d'entrainement du cercle.

$$y_C = R-(R-r)\cos\phi;\ v_C{}^2 = (R-r)^2\dot{\phi}^2;\ I_{z,C} = \frac{mr^2}{2}\ ;\quad V = -mg(R-r)\cos\phi$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\left(R-r\right)^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\dot{\phi}-\dot{\theta}\right)^2 = \frac{3}{4}m\left(R-r\right)^2\dot{\phi}^2\ ;\ L = T-V = \frac{3}{4}m\left(R-r\right)^2\dot{\phi}^2 + mg(R-r)\cos\phi$$

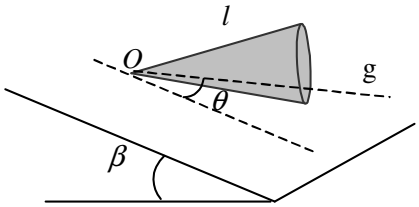
$T+V=E_o$ est une intégrale première.

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\phi}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial\phi} = -mg(R-r)\sin\phi \ \Rightarrow\ \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\phi}+g\sin\phi = 0$$

Pour de petits mouvements : $\ddot{\phi}+\omega^2\phi = 0$ avec $\omega^2 = \dfrac{2g}{3(R-r)}$ => oscillateur harmonique

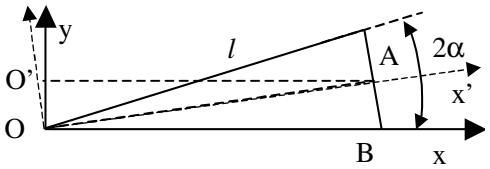
---

14. Le seul degré de liberté est θ. O est un point fixe du solide. I_g est le moment d'inertie du cône par rapport à la génératrice de contact g. ω = la vitesse instantanée de rotation.
Dans le plan de symétrie du cône passant par g, on a :



$$OA = l\cos\alpha\ ;\ \overline{OA} = l\cos^2\alpha\,\overline{1}_x + l\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_y\ ;\ \overline{\omega} = \omega\overline{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{v}_A &= \overline{v}_O + \overline{AO}\times\overline{\omega} = l\omega\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_z\\ \overline{v}_A &= AO'\dot{\theta}\,\overline{1}_z = l\cos^2\alpha\dot{\theta}\,\overline{1}_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \dot{\theta}\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$



$$I_{x'} = \frac{3MR^2}{10};\ I_{y'} = \frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5};$$

$$I_g = \int(y^2+z^2)dm = \int((x'\sin\alpha - y'\cos\alpha)^2+z^2)dm = \int(x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)z^2)dm$$

$$= \cos^2\alpha I_{x'} - 2\cos\alpha\sin\alpha P_{x'y'} + \sin^2\alpha I_{y'} = \frac{h^2}{l^2}\frac{3MR^2}{10}+\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5}\right) = \frac{3MR^2}{20(R^2+h^2)}(R^2+6h^2)$$

avec $R = l\sin\alpha$; $h = l\cos\alpha$ => $I_g = \dfrac{3M}{20}\sin^2\alpha l^2(1+5\cos^2\alpha)$

$$V = -Mgz_G = -Mg\frac{3}{4}l\cos^2\alpha\cos\theta\sin\beta;\ T = \frac{1}{2}\frac{3M}{20}l^2\sin^2\alpha\,\mathrm{cotg}^2\alpha\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

$$L = T-V \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \ \Rightarrow l(1+5\cos^2\alpha)\ddot{\theta}+5g\sin\theta\sin\beta = 0$$

Intégrale première : $T+V = E_0$ => $l(1+5\cos^2\alpha)\dot{\theta}^2 - 10g\cos\theta\sin\beta = -10g\cos\theta_0\sin\beta$

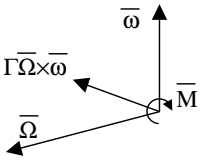
Effet gyroscopique

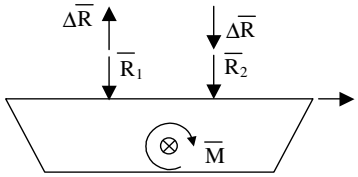
Formulaire

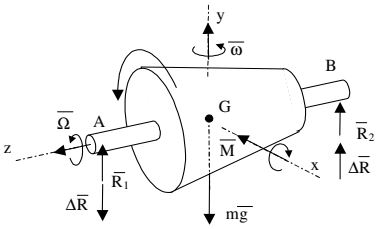
Couple gyroscopique : $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$

=> Théorème du moment cinétique en G : $\dfrac{d\overline{M_G}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$

1.





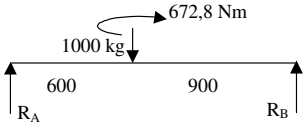


$M = \Gamma\Omega\omega$ où $\Gamma = mR^2 = 40$ kgm²; $\Omega = 523,6\ \text{s}^{-1}$; $\omega = \dfrac{v}{R} = 0,032125\ \text{s}^{-1}$

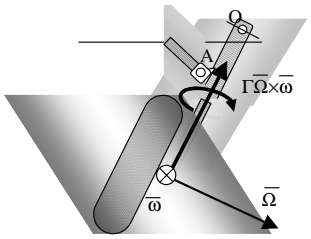
=> $M = 672,8\ Nm$ tend à faire descendre l'avant du bateau.

$$\left.\begin{array}{l} 0,6R_A + 672,8 - 0,9R_B = 0 \\ R_A + R_B = 9810 \end{array}\right\} \Rightarrow R_A = 5437 \text{ et } R_B = 4372$$

La réaction en B est plus élevée que si le rotor était à l'arrêt.

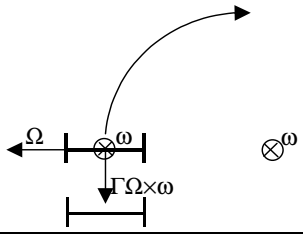


2. L'axe OA subit un moment de torsion de $\Gamma\Omega\omega$ où Γ=2,97 kgm² ; Ω = 148,15 s^{-1} ; ω= 0,5 s^{-1} => C = 220 *Nm*

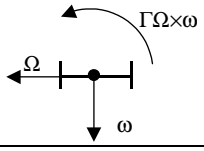


3. Gyrostat : $\Gamma\overline{\Omega}\times\overline{\omega}$
les roues droites de la voiture ont tendance à décoller.

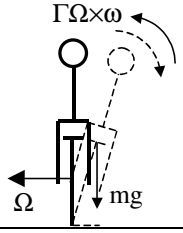
Vue de haut



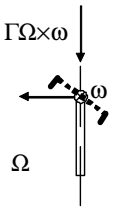
Vue de derrière



4. a. Vue de derrière



Vue de haut



Si le cycliste se penche vers la droite, la force de pesanteur génère un moment qui a tendance à faire basculer le cycliste. Pour ne pas tomber, il doit générer un moment opposé qui le ramène en position verticale. En tournant son guidon vers la droite (du côté où il penche), il crée un effet gyroscopique qui le ramène dans sa position verticale.

b. Roue = 60 cm de diamètre ;
Γ=0,6.(0,3)²
$v = \Omega\, R \;\; => \;\; 8 = \Omega.0,3 \;\; => \;\; \Omega = 8/0,3 \;\; rad/s$

$\bar{m}_{e,C} = \overline{CG} \times m\bar{g} = 0,03.80.9,81$

$\Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega} = 0,6.(0,3)^2 \dfrac{8}{0,3}\omega$

Pour retrouver l'équilibre :

$\dfrac{d}{dt}\bar{M}_C = m_{e,C} + \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

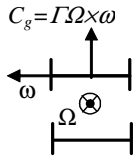
$=> \;\; 0 = 0,03.80.9,81 - 0,6.(0,3)^2 \dfrac{8}{0,3}\omega$

$\omega = 16,35$ rad/s

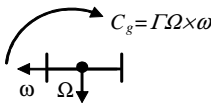
---

5. Gyrostat : $\Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}$
Le bus aura tendance à basculer vers la droite.

Vue de haut



Vue de derrière



---

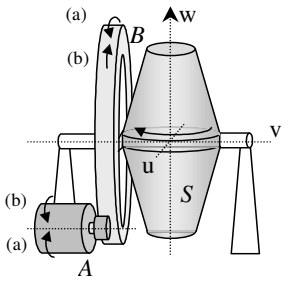
6. $\dfrac{d}{dt}\bar{M}_O = \sum \bar{m}_{e,O} + \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}$ avec $\bar{\omega}$ constant $=> 0 = \sum \bar{m}_{e,O} + \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

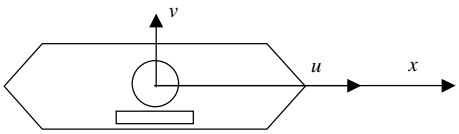
1. A l'équilibre (ω=0, Ω=0) : 0=$\sum \bar{m}_{e,O}$ => $\sum \bar{m}_{e,O} = \bar{m}_{e,O}(m_A) + \bar{m}_{e,O}(M) = 0,18.m_A g\,\bar{1}_x + C_e\,\bar{1}_x$=0
   avec C_e = couple qui équilibre le moment généré par la masse A => $\bar{C}_e = -0,18.m_A g\,\bar{1}_x$
2. Pendant le mouvement : $0 = \bar{m}_{e,O}(m_A) + \bar{m}_{e,O}(M) + \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}$

$0 = b.m_A g\,\bar{1}_x - 0,18.m_A g\,\bar{1}_x - \left(2,2\,.\,0,06^2\right).\left(\dfrac{1725}{60}.2\pi\right).(0,2)\,\bar{1}_x$

$=> b - 0,18 = 0,0364 \;\; => \;\; b = 0,216\ m$

7.





Vue de haut.
C_e = couple extérieur créé par le roulis ($\bar{C}_e = \pm C_e\,\bar{1}_x$).
Le couple gyroscopique doit contrer ce roulis. Dans les axes liés au gyroscope, le couple gyroscopique sera suivant l'axe u $\left(\bar{1}_w \times \bar{1}_v\right)$. Donc on placera le gyroscope tel que son axe u soit parallèle à l'axe longitudinal du bateau (x).

$\bar{C}_{gyr}\big|_a = \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}_a = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right) \times \bar{1}_v\right) = \Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $-C_e\,\bar{1}_u$

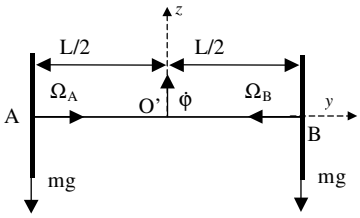
$\bar{C}_{gyr}\big|_b = \Gamma\bar{\Omega} \times \bar{\omega}_b = \Gamma\Omega\omega\left(\left(-\bar{1}_w\right) \times \left(-\bar{1}_v\right)\right) = -\Gamma\Omega\omega\bar{1}_u$ compensera le couple extérieur $+C_e\,\bar{1}_u$

Grâce au gyroscope, le bateau sera stabilisé et le couple C_e sera compensé. Il n'y aura plus de rotation du bateau suivant l'axe x, et donc le roulis ne génère pas de couple gyroscopique supplémentaire suivant l'axe v.

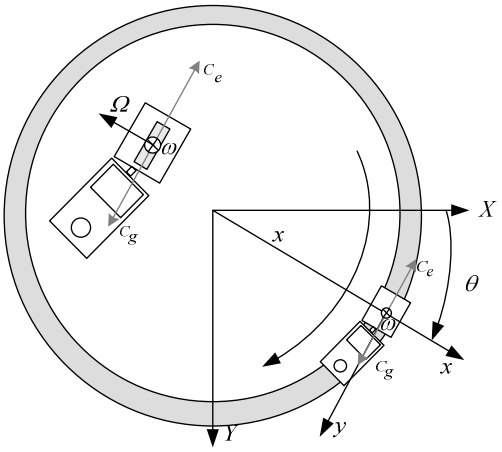
---

8. $\bar{C}_{gyr} = \Gamma\left(\Omega_A - \Omega_B\right)\dot{\varphi}\;\bar{1}_x$

La somme des moments extérieurs en O' est nulle car O' est le centre de masse du système. Mettre le système en rotation va créer un couple supplémentaire (Cgyr).Ce couple vient déséquilibrer le système vers la gauche ou vers la droite en fonction de la différence $\Omega_A - \Omega_B$ (positive ou négative). Si le système était entièrement fixé en O' et que seul la rotation autour de l'axe OO' était possible, la barre AB subirait un moment de flexion qui la ferrait fléchir vers le bas.



9.



Le train tourne à vitesse constante => conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\overline{M_{G,0}}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g$$

$\overline{\omega} = \omega \overline{1}_z$ avec ω constant

le couple extérieur à contrer : $\overline{m}_{e,G} = -C_e \overline{1}_y$

Pour contrer ce couple, le couple gyroscopique doit etre

$\overline{C}_g = C_g \overline{1}_y = \Gamma\overline{\Omega} \times \omega \overline{1}_z$

=> Le moment cinétique du gyroscope ($\Gamma\overline{\Omega}$) doit etre suivant l'axe $-\overline{1}_x$ => $\overline{M}_{G,gyr} = -\Gamma\Omega\overline{1}_x$

Donc on va placer une roue sur le wagon de manière à avoir son axe de révolution suivant l'axe x. On la ferra tourner de manière à avoir le vecteur de rotation propre de la roue vers le centre des rails.

---

10. Forces : mg en C, centre du disque

Couples : $\begin{cases} \text{couple dû au poids : } mgh\sin\psi \text{ sortant de la feuille} \\ \text{couple gyroscopique : } \overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega} \times \overline{\omega} \end{cases}$

Le couple gyroscopique s'oppose au couple dû à la pesanteur => la seule rotation provoquant ce couple est une rotation autour de l'axe z dans le sens négatif.
Le disque précessione autour de l'axe z, avec une vitesse angulaire égale à

$\overline{\Omega} = -\omega\overline{1}_d$ sur le dessin et $\Gamma = I$ => $\overline{C}_g = \Gamma\overline{\Omega} \times \overline{\omega} = -mgh\sin\psi\,\overline{1}_y$ => $\overline{\omega} = -\dfrac{mgh}{I\omega}\overline{1}_z$

Dynamique des systèmes

1. 2 paramètre de position dépendant $(\theta,\ \varphi)$: $\pi-\theta=2\varphi \Rightarrow 1\ ddl$

Lagrangien $\boxed{L=T-V}$

$$\boxed{T=\left[\frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{\bar{I}}_O\bar{\omega}\right]_{OA}+\left[\frac{1}{2}mv_{G_2}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{\bar{I}}_{G_2}\bar{\omega}\right]_{AB}}$$

avec

$$\bar{v}_{G_1}=-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_{G_2}=\bar{v}_A+\bar{\omega}\times\overline{AG_2}=-L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x-L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y+L\cos\varphi\dot{\varphi}\bar{1}_y-L\sin\varphi\dot{\varphi}\bar{1}_x$$

$$\underset{\dot{\varphi}=-\frac{\dot{\theta}}{2}}{=}\left(-L\sin\theta\dot{\theta}+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_x+\left(-L\cos\theta\dot{\theta}-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_y$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}2m\left(L^2\dot{\theta}^2+L^2\frac{\dot{\theta}^2}{2}-L^2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2+L^2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{2m4L^2}{12}\left(-\frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2$$

$$T=ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boxed{V=V_{OA}+V_{AB}+V_\Gamma}$$

avec

$$V_{OA}=-mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad V_{AB}=2mg\left(-L\sin\theta+L\sin\varphi\right)=2mg\left(-L\sin\theta+L\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Le couple est constant donc il dérive d'un potentiel : $V(\Gamma)$

Comme l'angle φ diminue lorsque le moment Γ travail, le travail est négatif.

$$\boxed{dV=-d\tau}=-(M(\varphi)d\varphi)=-(-\Gamma d\varphi)=-(\Gamma\frac{d\theta}{2})$$

$$\Rightarrow V=-mgl\left(\frac{5}{2}\sin\theta-2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\Gamma\frac{\theta}{2}$$

<u>Thérorème de Lagrange</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0}\ :\ ml^2\frac{3}{2}\ddot{\theta}-2ml^2\ddot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\cos\frac{\theta}{2}-\frac{5}{2}mgl\cos\theta-mgl\sin\frac{\theta}{2}-\frac{\Gamma}{2}=0$$

<u>Autre méthode</u> : Par les Q_i :

avec

Sur base de $\bar{v}_{G_1}$: $\delta\overline{OG_1}=\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\bar{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\bar{1}_y\right)\delta\theta$

Sur base de $\bar{v}_{G_2}$: $\delta\overline{OG_2}=\left(-L\sin\theta+L\cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\bar{1}_x+\left(-L\cos\theta-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)\delta\theta\bar{1}_y$

le travail du couple : $\delta\tau=-\Gamma\delta\varphi$ avec $d\theta=-2d\varphi \Rightarrow \delta\tau=-\Gamma\delta\varphi=\Gamma\frac{\delta\theta}{2}$

$$Q_\theta=\sum_h\bar{F}_h.\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_y}=(-mg).\left(-\frac{L}{2}\cos\theta\right)+(-2mg).\left(-L\cos\theta-L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)+\frac{\Gamma}{2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta}\ :\ ml^2\frac{3}{2}\ddot{\theta}-2ml^2\ddot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\cos\frac{\theta}{2}=\frac{5}{2}mgl\cos\theta+mgl\sin\frac{\theta}{2}+\frac{\Gamma}{2}$$

2. Le point C est au niveau de la glissière
R_C (1 composante inconnue) : Th. mom. cinétique en O pour l'ensemble du système

$$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt}\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) \underbrace{=}_{\bar{v}_O=0} \bar{m}_{e,O}\left(\Gamma, \underline{\underline{R_C}}, mg\right)}$$

$$\boxed{\bar{M}_O = \bar{M}_{O,OA} + \bar{M}_{O,AB}}$$

- $\bar{M}_{O,OA} = \bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega} = -\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\bar{1}_z$;
- $\bar{M}_{O,AB} = \bar{M}_{G_2,AB} + \overline{OG_2}\times\bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{2m4L^2}{12}\dot{\varphi} - 2m\left(\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(L\cos\theta + L\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot{\theta} \\ -\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\right)L^2\dot{\theta} \end{bmatrix}\bar{1}_z$

$$= \left[\frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi} + 2m\begin{pmatrix} -\cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ -\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}L^2\dot{\theta}\right]\bar{1}_z$$

$$\bar{M}_{O,AB} = \left[-\frac{2mL^2}{3}\frac{\dot{\theta}}{2} + 2m\left(-1 + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)L^2\dot{\theta}\right]\bar{1}_z$$

$$=> \bar{M}_O = \left[-\frac{8}{3} + 2\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\right]mL^2\dot{\theta}\bar{1}_z$$

$\boxed{\frac{d\bar{M}_O}{dt} \underbrace{=}_{\bar{v}_O=0} \bar{m}_{e,O}}$ en projetant sur l'axe z : une seule inconnue (R_C)

$$m\left[-\frac{33}{24} + \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right]L^2\ddot{\theta} + m\left[\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right]L^2\dot{\theta}^2$$

$$= -\Gamma + LR_c\cos\varphi - \frac{L}{2}\cos\theta mg - \left(L\cos\theta + L\cos\varphi\right)2mg = -\Gamma + LR_c\cos\varphi - \left(\frac{5}{2}\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}2\right)Lmg$$

$=> R_C$

(Autre possibilité : Th. mom. cinétique en A pour la tige AB seule.)

R_O (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique et connaissant R_C

$$\boxed{\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{F}_e} => \begin{cases} \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \bar{F}_e\big|_x\left(\underline{\underline{R_{O,x}}}, R_C\right) \\ \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_y\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \bar{F}_e\big|_y\left(\underline{\underline{R_{O,y}}}, R_C, mg\right) \end{cases}$$

$$\bar{R} = m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right] + 2m\left[\left(-L\sin\theta\dot{\theta} + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_x + \left(-L\cos\theta\dot{\theta} - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\bar{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x + 2m\left(-L\sin\theta\dot{\theta} + L\cos\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt} = R_{O,x} - R_C\sin\frac{\theta}{2} => R_{O,x}$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + 2m\left(-L\cos\theta\dot{\theta} - L\sin\frac{\theta}{2}\frac{\dot{\theta}}{2}\right)\right)}{dt} = R_{O,y} - mg - 2mg + R_C\cos\frac{\theta}{2} => R_{O,y}$$

R_A (2 composantes inconnues) : Th. rés. cinétique pour OA seule (avec R_O connue)

$$\frac{d\bar{R}}{dt}=\bar{F}_e \begin{cases} \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_x (\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})=\bar{F}_e|_x\left(R_{O,x},\underline{\underline{R_{A,x}}}\right) \\ \left.\frac{d\bar{R}}{dt}\right|_y (\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})=\bar{F}_e|_y\left(R_{O,y},\underline{\underline{R_{A,y}}},mg\right) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{R}=m\left[-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y\right]$$

$$\frac{d\left(-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}_x\right)}{dt}=R_{O,x}+R_{A,x} \Rightarrow R_{A,x} \quad \text{et} \quad \frac{d\left(-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)}{dt}=R_{O,y}+R_{A,y}-mg \Rightarrow R_{A,y}$$

Energie cinétique : $T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}$

$$\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\omega\cos\theta & \omega\sin\theta & \dot{\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & m\frac{l^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & m\frac{l^2}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\omega\cos\theta\\ \omega\sin\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{12}\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta\right)$$

$$\bar{AG}=\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{4}\sin\theta\right)\bar{1}_x-\frac{l}{4}\cos\theta\bar{1}_y$$

$$\bar{v}_G=\bar{v}_{rel}+\bar{v}_{entr}=\frac{l}{4}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_x+\frac{l}{4}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_y+\bar{\omega}\times\bar{AG} \Rightarrow v_G^2=\frac{l^2}{16}\dot{\theta}^2+\frac{l^2}{4}\omega^2\left(1+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$T=\frac{7}{48}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{24}ml^2\omega^2\sin^2\theta+m\omega^2\frac{l^2}{8}\left(1+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2$$

Energie potentielle : $V=-mg\frac{l}{4}\cos\theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{7}{96}ml^2\ddot{\theta}-\frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta-m\omega^2\frac{l^2}{8}\left(1+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\cos\theta+mg\frac{l}{4}\sin\theta=0$$

Lorsque CD est en équilibre relatif, $\theta=\text{constante}$ et $\dot{\theta}=0$

$$\frac{7}{12}ml\omega^2\sin\theta\cos\theta+m\omega^2\frac{l}{2}\cos\theta=mg\sin\theta$$

---

1. 1 degré de liberté mais 2 coordonnées de Lagrange : θ_1,θ_2
   liées par la condition (avec u suivant BC et v perpendiculaire à BC)

   $$\bar{v}_C=\bar{v}_B+\bar{\omega}\times\overline{BC}=\lambda\overline{BC}=L\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\bar{1}_u+\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2\right)\bar{1}_v$$

   $$\Rightarrow L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0 \Rightarrow \underline{\text{Contrainte}} : \delta\theta_2+\cos(\theta_2-\theta_1)\delta\theta_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_2}\delta\theta_2+\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_1}\delta\theta_1=0 \ (\lambda)$$

   => Théorème de Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}}$

$$\boxed{T=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}\right)}$$

$$T=\left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_1^{\,2}\right)+\left(\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{L^2}{4}\dot{\theta}_2^{\,2}+L^2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}_2^{\,2}\right)$$

$$=> T=\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}_2^{\,2}+\frac{mL^2}{2}\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_h.\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i Q_i\delta q_i} => Q_i$$

$$\overline{OG_1}\Big|_y=\frac{L}{2}\cos\theta_1 => \delta\overline{OG_1}\Big|_y=-\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1=\frac{\partial\bar{\varphi}_1}{\partial\theta_1}\delta\theta_1 \text{ et } \bar{F}_{G_1}=mg\,\bar{1}_y$$

$$\overline{OG_2}\Big|_y=L\cos\theta_1+\frac{L}{2}\cos\theta_2 => \delta\overline{OG_2}\Big|_y=-L\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2=\frac{\partial\bar{\varphi}_2}{\partial\theta_1}\delta\theta_1+\frac{\partial\bar{\varphi}_2}{\partial\theta_1}\delta\theta_2 \text{ et } \bar{F}_{G_2}=mg\,\bar{1}_y$$

En tenant compte du couple M appliqué à la barre AB, le travail virtuel du couple pour un déplacement virtuel $\delta\theta_1$ vaut $M\,\delta\theta_1$

$$=> \begin{cases} Q_{\theta_1}=mg\,\bar{1}_y.\left(-\frac{L}{2}\sin\theta_1\,\bar{1}_y\right)+mg\,\bar{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\,\bar{1}_y\right)=-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M \\ Q_{\theta_2}=mg\,\bar{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\,\bar{1}_y\right)=-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2 \end{cases}$$

=>2 équations + l'équation de contrainte

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}+\lambda\cos(\theta_2-\theta_1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}+\lambda \\ L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \left(\frac{4mL^2}{3}\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_2-\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_2\right)-\left(+\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \\ \qquad =-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+M+\lambda\cos(\theta_2-\theta_1) \quad (1) \\ \left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_1-\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_1\right)-\left(-\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \\ \qquad =-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2+\lambda \quad (2) \\ L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2=0 \ (3) \ => \ \cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_1=\sin(\theta_2-\theta_1)(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2 \quad (3) \end{cases}$$

En résolvant ce système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(2):\left(\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}_2+\frac{mL^2}{2}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_1+\frac{mL^2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2\right)+\frac{L}{2}mg\sin\theta_2=+\lambda$$

$$(2)->(1):\frac{mL^2}{2}\left(\left(\frac{8}{3}-\cos^2(\theta_2-\theta_1)\right)\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_2-\sin(\theta_2-\theta_1)\left(\dot{\theta}_2^2+\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2\right)\right)$$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-3\sin\theta_1\right)\quad(1)$$

et avec (3) : $\left[\frac{mL^2}{3}\left(4-\cos^2(\theta_2-\theta_1)\right)\right]\ddot{\theta}_1-\left[\frac{mL^2}{3}\frac{\sin 2(\theta_2-\theta_1)}{2}\left(1+\cos(\theta_2-\theta_1)\right)\right]\dot{\theta}_1^2$

$$=M+\frac{L}{2}mg\left(\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-3\sin\theta_1\right)$$

2. $$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_1}=Q_{\theta_1}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_2}=Q_{\theta_2}\end{cases}$$

$\delta\overline{OG_1}\Big|_y=-\frac{L}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1$ et $\overline{F}_{G_1}=mg\,\overline{1}_y$

$\delta\overline{OG_2}\Big|_y=-L\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{L}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2$ et $\overline{F}_{G_2}=mg\,\overline{1}_y$

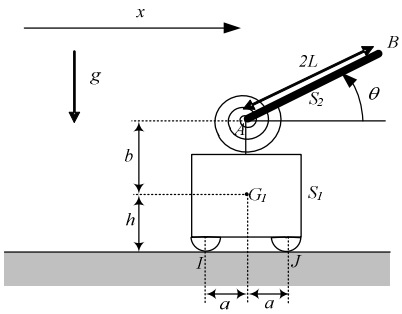
$L\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\overline{1}_u+\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1+L\dot{\theta}_2\right)\overline{1}_v=>\delta\overline{OC}\Big|_{v\perp BC}=\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\delta\theta_1+L\delta\theta_2\right)\overline{1}_\perp$ et $\overline{F}_C=F\,\overline{1}_\perp$

$$=>\begin{cases}Q_{\theta_1}=mg\,\overline{1}_y.\left(-\frac{L}{2}\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+mg\,\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_1\overline{1}_y\right)+F\,\overline{1}_\perp.\left(L\cos(\theta_2-\theta_1)\right)\overline{1}_\perp\\ \qquad=-\frac{3L}{2}mg\sin\theta_1+FL\cos(\theta_2-\theta_1)\\ Q_{\theta_2}=mg\,\overline{1}_y.\left(-L\sin\theta_2\overline{1}_y\right)+F\,\overline{1}_\perp.\left(+L\overline{1}_\perp\right)=-\frac{L}{2}mg\sin\theta_2+FL\end{cases}$$

Nous retrouvons les mêmes équations qu'au point (5.1) où λ est remplacé par *FL*.

---

1. Deux degrés de liberté $\{x,\theta\}$
   Deux coordonnées généralisées $\{x,\theta\}$



2. $\overline{R}=m_1\overline{v}_{G_1}+m_2\left(\overline{v}_A+\overline{\omega}\times\overline{AG_2}\right)=m_1\dot{x}\overline{1}_x+m_2\left(\dot{x}\overline{1}_x+L\dot{\theta}\overline{1}_{y_1}\right)=\left((m_1+m_2)\dot{x}-m_2L\dot{\theta}\sin\theta\right)\overline{1}_x+m_2L\dot{\theta}\cos\theta\overline{1}_y$

3. $\overline{M_A}=\left[m_1\overline{AG_1}\times\overline{v}_A\right]+\left[m_2\overline{AG_2}\times\overline{v}_A+\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]=m_1b\dot{x}\overline{1}_z-m_2L\sin\theta\dot{x}\overline{1}_z+\frac{m_2 4L^2}{3}\dot{\theta}\overline{1}_z$

4. $\overline{R}_I=-T_1\overline{1}_x+N_1\overline{1}_y$; $\overline{R}_J=-T_2\overline{1}_x+N_2\overline{1}_y$; $\overline{R}_A=X_A\overline{1}_x+Y_A\overline{1}_y$; $\overline{F}_{G_1}=-m_1g\overline{1}_y$; $\overline{F}_{G_2}=-m_2g\overline{1}_y$; $\overline{C}_A=-C\theta\overline{1}_z$

5. 6 inconnues de réactions + 2 degrés de libertée => 8 équations pour tout identifier

Th. résultante cinétique sur $\{S_1+S_2\}$: $\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-T_1-T_2 & (1)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=N_1+N_2-(m_1+m_2)g & (2)\end{cases}$

Th. résultante cinétique sur $\{S_2\}$: $\begin{cases}m_2\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=X_A & (3)\\ m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2=Y_A-m_2g & (4)\end{cases}$

ou $\left[\text{Th. résultante cinétique sur } \{S_1\} : \begin{cases}m_1\ddot{x}=-X_A-T_1-T_2 & (5) = (3)-(1)\\ 0=N_1+N_2-Y_A-m_1g & (6) = (4)-(2)\end{cases}\right]$

Th. moment cinétique en A sur $\{S_1\}$: $m_1b\ddot{x}=-aN_1+aN_2+C\theta-(b+h)(T_1+T_2)$ (7)

Th. moment cinétique en A sur $\{S_2\}$: $\frac{d}{dt}\overline{M_A}=m\overline{v_G}\times\overline{v_A}+\overline{m}_{e,A}$

$$=> -m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-C\theta-L\cos\theta m_2g \quad (8)$$

ou $\left[\begin{array}{l}\text{Th. moment cinétique en } A \text{ sur } \{S_1+S_2\} : \frac{d}{dt}\overline{M_A}=m\overline{v_G}\times\overline{v_A}+\overline{m}_{e,A}\\ => m_1b\ddot{x}-m_2L\sin\theta\ddot{x}-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}\\ \qquad =-m_2L\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}-L\cos\theta m_2g-aN_1+aN_2-(b+h)(T_1+T_2) \quad (9)=(7)+(8)\end{array}\right]$

=> 6 équations indépendantes (1,2,3,4,7,8) + équations de Coulomb $(T_1=fN_1 \quad (10))$ et $(T_2=fN_2 \quad (11))$

6. 2 équations de mouvement : l'équation (8) ainsi que la résolution de l'équation (1) et (2) avec la (10) et (11)

$$=>\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g & (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=-f\left(m_2L\cos\theta\ddot{\theta}-m_2L\sin\theta\dot{\theta}^2+(m_1+m_2)g\right) & (12)\end{cases}$$

=>Dans le cas d'un frottement nul :

$$\boxed{\begin{cases}-m_2L\sin\theta\ddot{x}+\frac{m_2 4L^2}{3}\ddot{\theta}=-C\theta-L\cos\theta m_2g & (8)\\ (m_1+m_2)\ddot{x}-m_2L\ddot{\theta}\sin\theta-m_2L\dot{\theta}^2\cos\theta=0 & (12)\end{cases}}$$

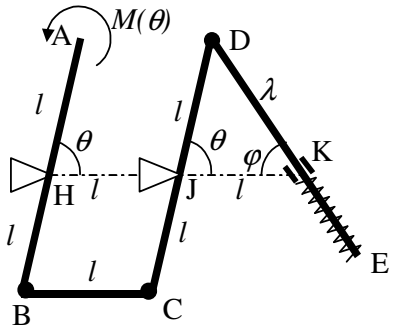
7. par le théorème de Lagrange :

$$T=\left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2+L^2\dot{\theta}^2-2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\frac{m_2 4L^2}{12}\dot{\theta}^2\right] \text{ et } V=m_2gL\sin\theta \Rightarrow L=T-V$$

Couple du ressort de torsion : $\overline{C}=-C\theta\overline{1}_z$ opposé à l'accroissement $\delta\theta => \delta\tau=-C\theta\delta\theta => Q_\theta=-C\theta$

$$=>\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=Q_x \;:\; m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-L\sin\theta\ddot{\theta}-L\cos\theta\dot{\theta}^2\right)=0\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta \;:\; m_2\left(\left(\frac{4L^2}{12}+L\right)\ddot{\theta}-L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)-\left[-m_2gL\cos\theta-m_2L\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}\right]=-C\theta\\ => m_2\left(\frac{4L^2}{3}\ddot{\theta}-L\ddot{x}\sin\theta\right)+m_2gL\cos\theta=-C\theta\end{cases}$$

1. 3 Paramètre de position : $\theta,\ \varphi,\ \lambda$



2 relations : $\left|\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\theta}}{2}\\ \lambda=2L\sin\dfrac{\theta}{2} \text{ ou } L\sin\theta=\lambda\sin\varphi\end{array}\right.$ => 1 ddl.

<u>Force</u> : 2 réactions en H, 2 réactions en J, 1 réaction en K perpendiculaire à DE, Force de rappel en E, poids des 4 tiges.
Equation de mouvement : Lagrange.
Les réactions en H, J et K ne travaillent pas car les points sont fixes ou le déplacement se fait perpendiculaire <u>aux forces</u>.

Le couple extérieur appliqué en A ne dérive pas d'un potentiel => Application du théorème de Lagrange généralisé.

$$\boxed{T=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}\right)}$$

$$T=\left(\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2\right)_1+\left(\frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2\right)_2+\left(\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2\right)_3+\left(\frac{2m}{2}\frac{5}{4}l^2\dot{\theta}^2-\frac{2m}{2}l^2\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}2m\frac{(2l)^2}{12}\frac{\dot{\theta}^2}{4}\right)_4$$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{5}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)ml^2\dot{\theta}^2$$

avec
$$\begin{cases}\overline{JG_4}=\left(L\cos\theta+L\cos\varphi\right)\bar{1}_x+\left(L\sin\theta-L\sin\varphi\right)\bar{1}_y\\ \bar{v}_{G_4}=\bar{v}_D+\left(-\dot{\varphi}\bar{1}_z\right)\times\overline{DG_4}=L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\bar{1}_x+\cos\theta\bar{1}_y\right)+\dfrac{\dot{\theta}}{2}L\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\bar{1}_x+\sin\dfrac{\theta}{2}\bar{1}_y\right)=\dfrac{d\left(\overline{JG_4}\right)}{dt}\\ v_{G_4}^2=L^2\dot{\theta}^2+\dfrac{\dot{\theta}^2}{4}L^2+L^2\dot{\theta}^2\left(-\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{5}{4}L^2\dot{\theta}^2+L^2\dot{\theta}^2\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\boxed{Q_\theta=\sum\bar{F}_h\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_\theta}}=-mg\,\bar{1}_y.\frac{\partial\overline{OG_2}}{\partial\theta}-2mg\,\bar{1}_y.\frac{\partial\overline{JG_4}}{\partial\theta}+\bar{F}_r.\frac{\partial\overline{JE}}{\partial\theta}+M(\theta)$$

$$\bar{F}_r=-k\left(L-L_0\right)\bar{1}_{DE}=k2L\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_{DE}=k2L\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\bar{1}_x-\cos\frac{\theta}{2}\bar{1}_x\right)$$

avec
$$\begin{cases}\overline{OG_2}=\left(-L\cos\theta+\dfrac{L}{2}\right)\bar{1}_x-L\sin\theta\bar{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OG_2}=\left(L\sin\theta\bar{1}_x-L\cos\theta\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial\overline{OG_2}}{\partial\theta}\delta\theta\\ \overline{JG_4} \Rightarrow \delta\overline{JG_4}=\left(\left(-L\sin\theta+\dfrac{1}{2}L\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+\left(L\cos\theta+\dfrac{1}{2}L\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial\overline{JG_4}}{\partial\theta}\delta\theta\\ \overline{JE}=\left(L\cos\theta+2Lcos\varphi\right)\bar{1}_x+\left(L\sin\theta-2L\sin\varphi\right)\bar{1}_y=L\left(\cos\theta+2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+L\left(\sin\theta-2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\\ \Rightarrow \delta\overline{JE}=\left(L\left(-\sin\theta+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_x+L\left(cos\theta+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\bar{1}_y\right)\delta\theta=\dfrac{\partial\overline{JE}}{\partial\theta}\delta\theta\end{cases}$$

Autre méthode, par le calcul du potentiel :

$\boxed{Q_\theta=Q_{\theta(F\text{ dérivant de }V)}+Q_{\theta(F\text{ ne dérivant de }V)}}$ avec $Q_{\theta(F\text{ ne dérivant de }V)}=M(\theta)$

$$Q_{\theta(F\text{ dérivant de }V)}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}\quad\text{avec}\quad V=\frac{k}{2}\left(L-L_0\right)^2-mgL\sin\theta+2mg\left(L\sin\theta-L\sin\varphi\right)$$

$$Q_\theta=M-kL^2\sin\theta+mgL\cos\theta-2mg\left(L\cos\theta+\frac{L}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)=M-kL^2\sin\theta-mgL\cos\theta-mgL\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta} \Rightarrow \left(5-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\ddot\theta-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\dot\theta^2=\frac{M}{ml^2}-\frac{k}{m}\sin\theta-\frac{g}{L}\cos\theta-\frac{g}{L}\sin\frac{\theta}{2}$$

2.a. $\boxed{\frac{d}{dt}\bar M_D\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum \bar m_{e,D}+2m\bar v_G\times\bar v_D\Big|_{(\underline{\underline{R_K}},mg)}}$ pour la tige DE seule

avec
$$\boxed{\bar M_D=\bar{\bar I}_D.\bar\omega+2m\overline{DG}\times\bar v_D}=\left(\frac{4}{3}ml^2\dot\theta-2ml^2\sin\frac{\theta}{2}\dot\theta\right)\bar 1_z$$
$$\bar m_{e,D}=-2mgl\sin\frac{\theta}{2}\bar 1_z+2l\sin\frac{\theta}{2}R_K\,\bar 1_z$$

$$ml^2\ddot\theta\left(\frac{4}{3}-2\sin\frac{\theta}{2}\right)-ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2}=-2mgl\sin\frac{\theta}{2}+2l\sin\frac{\theta}{2}R_K+ml^2\dot\theta^2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow R_K=\frac{ml}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{4}{3}-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\ddot\theta-2\cos\frac{\theta}{2}\dot\theta^2\right)+mg$$

2.b. tige AB seule : $\boxed{\frac{d}{dt}\bar M_B\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum \bar m_{e,B}\Big|_{(\underline{\underline{X_H}},\underline{\underline{Y_H}},M,mg)}}$

avec $\boxed{\bar M_B=\bar{\bar I}_B.\bar\omega+2m\overline{BG}\times\bar v_B}=\frac{2m(2L)^2}{3}\dot\theta\,\bar 1_z-2mL^2\dot\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\bar 1_z=\frac{2mL^2}{3}\dot\theta\bar 1_z$

$$\Rightarrow \frac{2mL^2}{3}\ddot\theta=M-2mgL\cos\theta+Y_HL\cos\theta-X_HL\sin\theta \quad (1)$$

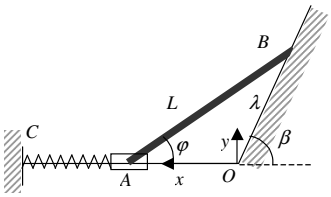
tiges AB et BC : $\boxed{\frac{d}{dt}\bar M_C\Big|_{(\theta,\dot\theta,\ddot\theta)}=\sum \bar m_{e,C}\Big|_{(\underline{\underline{X_H}},\underline{\underline{Y_H}},M,mg)}+m\bar v_G\times\bar v_C}$ avec $m_{AB}\underbrace{\bar v_{G_1}}_{=0}\times\bar v_C+m_{BC}\underbrace{\bar v_{G_2}\times\bar v_C}_{//}=0$

avec $\boxed{\bar{\bar M}_C=\bar{\bar M}_{C,AB}+\bar{\bar M}_{C,BC}}$ et
$$\boxed{\bar M_{C,BC}=\cancel{\bar{\bar I}_C.\bar\omega}+m\overline{CG_2}\times\bar v_C}=m\frac{L}{2}.L\dot\theta.\cos\theta\bar 1_z$$
$$\boxed{\bar M_{C,AB}=\bar M_{G_1,AB}+\cancel{\overline{CG_1}\times\bar R_{AB}}}=\frac{2m(2L)^2}{12}\dot\theta\bar 1_z$$

$$\Rightarrow mL^2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\ddot\theta-m\frac{L^2}{2}\sin\theta\dot\theta^2=M+2mg(L-L\cos\theta)+mg\frac{L}{2}-Y_H(L-L\cos\theta)-X_HL\sin\theta \quad (2)$$

2 équations, 2 inconnues

$$\boxed{T=\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar\omega.\bar{\bar I}_{G_i}.\bar\omega\right)}=\frac{1}{2}mv_{G_{AB}}^2+\frac{1}{2}\bar\omega.\bar{\bar I}_{G_{AB}}.\bar\omega$$



Un degré de liberté ϕ. On travaille avec une coordonnée généralisée donc la coordonnée λ doit être remplacée dans le Lagrangien avec la relation $L\sin\phi=\lambda\sin\beta$.

$$T=\frac{1}{2}m\left(L^2\frac{\cos^2(\beta-\phi)\dot\phi^2}{\sin^2\beta}+\frac{L^2}{4}\dot\phi^2-L^2\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\dot\phi^2\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot\phi^2$$

1.

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{OG}=\left(\frac{L}{2}\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y=\left(\frac{L}{2}\cos\phi-L\frac{\sin\phi\cos\beta}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y\\ \overline{OG}=\left(\frac{L}{2}\cos\phi-L\cos\phi+L\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y=\left(L\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}-\frac{L}{2}\cos\phi\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y\\ \overline{v}_G=\left(L\frac{\cos(\beta-\phi)(-\dot{\phi})}{\sin\beta}+\frac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_x+\left(\frac{L}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_y\end{cases}$$

$$=> T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}^2$$

$$\boxed{Q_i=\sum_h\overline{F}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$$

- $\overline{OG}=\left(\frac{L}{2}\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y => \delta\overline{OG}\Big|_y=\frac{L}{2}\cos\phi\delta\phi$ et $\overline{F}_G=-mg\,\overline{1}_y$
- $\overline{OA}=L\left(\frac{\sin\beta\cos\phi-\sin\phi\cos\beta}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x=L\left(\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\overline{1}_x$

$$=> \delta\overline{OA}=-L\left(\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\delta\phi \text{ et } \overline{F}_A=k\left(L-\left(L\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\right)\overline{1}_x$$

- $\overline{OB}=-\lambda\cos\beta\overline{1}_x+\lambda\sin\beta\overline{1}_y=-L\frac{\sin\phi}{\sin\beta}\cos\beta\overline{1}_x+L\sin\phi\overline{1}_y=\lambda\overline{1}_v=L\frac{\sin\phi}{\sin\beta}\overline{1}_v$

$$=> \delta\overline{OB}=L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}\delta\phi\overline{1}_v \text{ et } \overline{F}_B=N_B\overline{1}_u-T_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\overline{1}_v \text{ avec } \overline{T}_B=fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\overline{1}_v$$

$$Q_\phi=\sum_i\overline{F}_i.\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial q_\phi} => Q_\phi=-mg\frac{L}{2}\cos\phi-\frac{kL^2}{\sin^2\beta}\cos(\beta-\phi)\left(\sin\beta-\sin(\beta-\phi)\right)-fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}$$

La force de frottement dépend du sens de la vitesse. En utilisant la valeur unitaire du terme $\dot{\phi}/|\dot{\phi}|$, le sens du mouvement peut être pris en compte.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=Q_\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\left(\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\dot{\phi}+m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}\right)$$
$$-\left(m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\right)$$
$$=\left(\begin{array}{l}m\left(\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\frac{L^2}{3}\ddot{\phi}\\ +m\left(\frac{2\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\end{array}\right)$$
$$-\left(m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi-\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$= m\left(\frac{1}{3}+\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$-m\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi+\frac{1}{2}\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\cos\phi\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\phi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=Q_\phi}$$

$$m\left(\frac{1}{3}+\frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\sin\phi\right)L^2\ddot{\phi}+m\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta}-\frac{\cos(\beta-2\phi)}{2\sin\beta}\right)L^2\dot{\phi}^2$$

$$=-mg\frac{L}{2}\cos\phi-\frac{kL^2}{\sin^2\beta}\cos(\beta-\phi)\left(\sin\beta-\sin(\beta-\phi)\right)-fN_B\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}L\frac{\cos\phi}{\sin\beta}$$

Théorème de la résultante cinétique :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{R}\Big|_x=\overline{F}\Big|_x}$$

$$\frac{d}{dt}m\left(L\frac{\cos(\beta-\phi)(-\dot{\phi})}{\sin\beta}+\frac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)=k\left(L-\left(L\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\right)+fN_B\cos\beta+N_B\sin\beta$$

$$mL\left(\frac{1}{2}\sin\phi-\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\ddot{\phi}+mL\left(\frac{1}{2}\cos\phi-\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin\beta}\right)\dot{\phi}^2$$

$$=k\left(L-\left(L\cos\phi-\lambda\cos\beta\right)\right)+\left(f\cos\beta+\sin\beta\right)N_B$$

=> N_B à remplacer dans l'équation de mouvement.

2. 2 coordonnées généralisées x_A et ϕ

$$\boxed{T=\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}\right)}=\frac{1}{2}mv_{G_{AB}}^2+\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_{G_{AB}}.\overline{\omega}$$

avec $\overline{OG}=\left(x_A-\frac{L}{2}\cos\phi\right)\overline{1}_x+\frac{L}{2}\sin\phi\overline{1}_y$ => $\overline{v}_G=\left(\dot{x}_A+\frac{L}{2}\sin\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_x+\left(\frac{L}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\overline{1}_y$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+\frac{L^2}{4}\dot{\phi}^2+L\dot{x}_A\sin\phi\dot{\phi}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+L\dot{x}_A\sin\phi\dot{\phi}\right)+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\phi}^2$$

1 contrainte liant les deux coordonnées généralisées

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}}$$

$$\lambda_1:\begin{cases}\lambda\cos\beta+x_A=L\cos\varphi \text{ et } \lambda\sin\beta=L\sin\varphi \Rightarrow x_A(\varphi)\\ L\sin\varphi\cos\beta+x_A\sin\beta=L\cos\varphi\sin\beta \Rightarrow x_A\sin\beta=L\sin(\beta-\phi) \Rightarrow x_A\sin\beta-L\sin(\beta-\phi)=0\\ \Rightarrow \delta x_A\sin\beta+L\cos(\beta-\phi)\delta\phi=0\end{cases}$$

$$\boxed{Q_i = \sum_h \overline{F}_h . \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$$

- $\overline{OG} = \left(x_A - \frac{L}{2}\cos\phi \right)\overline{1}_x + \frac{L}{2}\sin\phi\,\overline{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OG}\Big|_y = \frac{L}{2}\cos\phi\,\delta\phi$ et $\overline{F}_G = -mg\,\overline{1}_y$
- $\overline{OA} = x_A\,\overline{1}_x \Rightarrow \delta\overline{OA} = \delta x_A\,\overline{1}_x$ et $\overline{F}_A = k\left(L - x_A\right)\overline{1}_x$
- $\overline{OB} = x_A\,\overline{1}_x - L\cos\phi\,\overline{1}_x + L\sin\phi\,\overline{1}_y \Rightarrow \delta\overline{OB} = \left(\delta x_A + L\sin\phi\,\delta\phi\right)\overline{1}_x + L\cos\phi\,\delta\phi\,\overline{1}_y$

$$\overline{F}_B = N_B\,\overline{1}_u - T_B\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\overline{1}_v = \left(N_B\sin\beta + T_B\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta \right)\overline{1}_x + \left(N_B\cos\beta - T_B\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin\beta \right)\overline{1}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_\phi = -mg\frac{L}{2}\cos\phi + L\sin\phi N_B\left(\sin\beta + f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta \right) + L\cos\phi N_B\left(\cos\beta - f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin\beta \right) \\ Q_{x_A} = k\left(L - x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_\phi = -mg\frac{L}{2}\cos\phi + LN_B\left(\cos(\beta-\phi) - f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin(\beta-\phi) \right) \\ Q_{x_A} = k\left(L - x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta \right) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\phi} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = Q_\phi + \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}}$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{L}{2}\ddot{x}_A\sin\phi + \frac{L}{2}\dot{x}_A\cos\phi\dot\phi + \frac{L^2}{3}\ddot\phi - \frac{L}{2}\dot{x}_A\cos\phi\dot\phi \right) = m\left(\frac{L^2}{3}\ddot\phi + \frac{L}{2}\ddot{x}_A\sin\phi \right) = \\ \qquad -mg\frac{L}{2}\cos\phi + LN_B\left(\cos(\beta-\phi) - f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\sin(\beta-\phi) \right) + \lambda_1 L\cos(\beta-\phi) \quad (1) \\ m\ddot{x}_A + \frac{1}{2}mL\sin\phi\ddot\phi + \frac{1}{2}mL\cos\phi\dot\phi^2 = k\left(L - x_A\right) + N_B\left(\sin\beta + f\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\cos\beta \right) + \lambda_1\sin\beta \quad (2) \\ x_A\sin\beta = L\sin(\beta-\phi);\ \ \dot{x}_A\sin\beta = -L\cos(\beta-\phi)\dot\phi;\ \ \ddot{x}_A\sin\beta = -L\sin(\beta-\phi)\dot\phi^2 - L\cos(\beta-\phi)\ddot\phi \quad (3) \end{cases}$$

On remplace la coordonnée x_A ainsi que ses dérivées dans les équations (1) et (2) par les équations (3)
On isole le multiplicateur de Lagrange de l'équation (2) et on le réinjecte dans l'équation (1).
On retrouve la même équation de mouvement qu'au (4).1 après quelques remplacements.

$$mL^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\cos^2(\beta-\phi)}{\sin^2\beta} - \sin\phi\frac{\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta} \right)\ddot\phi + mL^2\left(\frac{\cos(\beta-\phi)\sin(\beta-\phi)}{\sin^2\beta} - \frac{\cos(\beta-2\phi)}{2\sin\beta} \right)\dot\phi^2$$

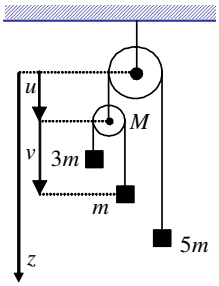
$$= -mg\frac{L}{2}\cos\phi - kL\frac{L\cos(\beta-\phi)}{\sin\beta}\left(\sin\beta - \sin(\beta-\phi)\right) - N_B Lf\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|}\frac{\cos\phi}{\sin\beta}$$

Nous avons 3 masses ponctuelles et deux solides (poulies). Soit les positions des solides S_1 (m), S_2 $(3m)$, S_5 $(5m)$, et la poulie S_4 (M) : z_1, z_2, z_3, z_4. $z_1 = u + v$; $z_2 = +u - v + C_1$; $z_3 = -u + C_2$; $z_4 = u$

2 degrés de liberté (u, v) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement

Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.

$$T = \sum_{\substack{\text{masses}\\ \text{ponctuelles}}} \left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}{}^2\right) + \sum_{solides} \left(\frac{M_i}{2} v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_i.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}_i\right) \quad \text{avec } I = 2mR^2 \text{ donc } M = 4m \text{ car } I(disque) = \frac{MR^2}{2}$$



$$T = \left(\frac{m}{2}(\dot{u}+\dot{v})^2\right)_{S_1(m)} + \left(\frac{3m}{2}(\dot{u}-\dot{v})^2\right)_{S_2(3m)} + \left(\frac{5m}{2}(-\dot{u})^2\right)_{S_3(5m)} + \left(\frac{M}{2}(\dot{u})^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2{}^2\right)_{S_4(M}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{4M(2R)^2}{2}\omega_1{}^2\right)_{S_5(4M)} \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\dot{u}}{2R} \text{ et } \omega_2 = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{m}{2}\dot{v}^2 + m\dot{u}\dot{v} + \frac{3m}{2}\dot{u}^2 + \frac{3m}{2}\dot{v}^2 - 3m\dot{u}\dot{v} + \frac{5m}{2}\dot{u}^2 + \frac{8m}{2}\dot{u}^2 + \frac{4m}{2}\dot{u}^2 + \frac{2m}{2}\dot{v}^2$$

$$T = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v}$$

$$V = -mgz_1 - 3mgz_2 - 5mgz_3 - Mgu = -3mgu + 2mgv + C \;\; => \;\; L = \frac{21m}{2}\dot{u}^2 + \frac{6m}{2}\dot{v}^2 - 2m\dot{u}\dot{v} + 3mgu - 2mgv$$

$$\begin{cases} u: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0: \;\; 21m\ddot{u} - 2m\ddot{v} - 3mg = 0 \\ v: \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0: \;\; 6m\ddot{v} - 2m\ddot{u} + 2mg = 0 \end{cases}$$

$$=> \;\; \ddot{v} = -\frac{18g}{61} \text{ et } \ddot{u} = \frac{7g}{61}$$

$$=> \;\; \ddot{z}_1 = -\frac{18g}{61} + \frac{7g}{61} = -\frac{11g}{61} \;(\uparrow); \;\; \ddot{z}_2 = \frac{7g}{61} + \frac{18g}{61} = \frac{25}{61}g \;(\downarrow); \;\; \ddot{z}_3 = -\frac{7g}{61}(\uparrow); \;\; \ddot{z}_4 = \frac{7g}{61}(\downarrow)$$

Comparer cette résolution avec une résolution par les théorèmes généraux :
- Pour ne pas tenir compte des réactions au niveau des centres des deux poulies, il faudra appliquer le théorème du moment en ces centres.
- Les forces extérieures seront : les poids des 3 masses, les poids des 2 poulies ainsi que les réactions au niveau de la liaison de la grande poulie.
- Les forces internes sont les tensions dans les câbles, la réaction au niveau du centre de la petite poulie
- Etant donné que les poulies ont une masse, donc une inertie, les tensions de part et d'autre des poulies ne seront pas équivalentes !!! (théorème du moment sur chacune des poulies prises séparément, en leur centre)

---

1 degré de liberté (θ) => 2 coordonnées de Lagrange => 2 équations de mouvement avec un multiplicateur de Lagrange λ_1.

Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$. $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_i}}$

<u>Relation entre θ et α</u> : $x = \text{AC} = 2L\sin\theta$ => $\phi_1 = x - 2L\sin\theta = 0$ => Dérivée : $\dot{x} - 2L\cos\theta\dot{\theta} = 0$

Or $\dot{x} = r\dot{\alpha}$ => $r\dot{\alpha} - 2L\cos\theta\dot{\theta} = 0$

Transformation des dérivées temporelles en dérivée infinitésimale (δ) :

Contrainte 1 à utiliser avec λ_1: $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta}\delta\theta + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \alpha}\delta\alpha = \text{r}\delta\alpha - 2L\cos\theta\delta\theta = 0$ => $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = -2L\cos\theta; \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} = r$

$\boxed{L = T - V}$

$$\begin{cases} \overline{OG_2} = \frac{3L}{2}\sin\theta\,\overline{1}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\,\overline{1}_y \Rightarrow \overline{v}_{G_2} = \frac{3L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_x - \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_y \\ T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{AB} + \left[\frac{m}{2}\left(\frac{9L^2}{4}\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right]_{BC} + \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{\text{Roue } (\dot{x}=r\dot{\alpha})} \\ T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{m}{2}2L^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right] + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2 \\ V = -2.\left(mg\frac{L}{2}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ L = \frac{1}{2}\frac{8mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mL^2\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{3mr^2}{4}\dot{\alpha}^2 + mgL\cos\theta$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha} \Rightarrow \frac{3}{2}mr^2\ddot{\alpha} = \lambda_1 r \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}mr\ddot{\alpha} = \frac{3}{2}m\left(-2L\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2L\cos\theta\ddot{\theta}\right) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} \\ \Rightarrow \frac{8mL^2}{12}\ddot{\theta} + 2mL^2\cos^2\theta\ddot{\theta} - 4mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + mgL\sin\theta = -\lambda_1 2L\cos\theta \\ \text{Contrainte : } r\dot{\alpha} - 2L\cos\theta\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Système de 3 équations à 3 inconnues : $\Rightarrow \left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \sin 2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta = \left(3\sin 2\theta\dot{\theta}^2 - 6\cos^2\theta\ddot{\theta}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{2}{3} + 8\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - 4\sin 2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

OU

Possibilité de résoudre avec 3 coordonnées de Lagrange et donc 2 multiplicateurs de Lagrange :

relation entre θ et α $(x = 2L\sin\theta)$: $x - 2L\sin\theta = 0 \Rightarrow \lambda_1 : \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha}\delta\alpha = 2L\cos\theta\delta\theta - r\delta\alpha = 0$

relation entre x et α : $\dot{x} = r\dot{\alpha} \Rightarrow \lambda_2 : \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha}\delta\alpha = \delta x - r\delta\alpha = 0$

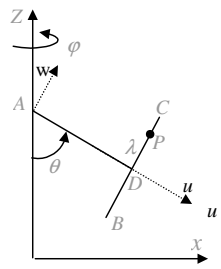
$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{AB} + \left[\frac{m}{2}2L^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]_{BC} + \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{\text{Roue } (\dot{x}=r\dot{\alpha})}$$

et $V = -2.\left(mg\frac{L}{2}\cos\theta\right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\alpha}^2 + mgL\cos\theta$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\alpha} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\alpha} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{les deux contraintes} \begin{cases} 2L\cos\theta\dot{\theta} - r\dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} - r\dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

On obtient le même résultat en résolvant ce système de 5 équations à 5 inconnues (λ_1, λ_2, x, α, θ)

1. 3 degrés de liberté (θ, φ, λ=*DP*) => 3 coordonnées de Lagrange => 3 équations de mouvement.
   Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Formule avec le Lagrangien et $Q_i=0$.



λ = distance entre le point P et le centre du T (D). AD et BC sont perpendiculaires.

$T = T_{AD} + T_{BC} + T_P$ (axes principaux uvw)

$$\bullet\ T_{AD} = \frac{1}{2}Mv_A^2 + M\overline{v}_A.\left(\overline{\omega}\times\overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

avec $\overline{\omega} = -\dot{\theta}\overline{1}_y + \dot{\phi}\overline{1}_z = -\dot{\phi}\cos\theta\overline{1}_u - \dot{\theta}\overline{1}_v + \dot{\phi}\sin\theta\overline{1}_w$

$$=> T_{AD} = \frac{1}{2}\left(I_w\omega_w^2 + I_v\omega_v^2\right) = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

On remarque que les différentes parties de l'énergie cinétique peuvent être calculée indépendamment dans le repère le plus simple (Axes principaux pour le terme avec le tenseur, uvw)

$$\bullet\ T_{BC} = \frac{1}{2}Mv_D^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_D.\overline{\omega} \text{ où } \begin{cases} \overline{\omega}_{BC} = \overline{\omega}_{AD} = -\dot{\phi}\cos\theta\overline{1}_u - \dot{\theta}\overline{1}_v + \dot{\phi}\sin\theta\overline{1}_w \\ \overline{v}_D = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\underbrace{\overline{AD}}_{\ell\overline{1}_u} = -\ell\sin\theta\dot{\phi}\overline{1}_v - \ell\dot{\theta}\overline{1}_w \end{cases} => v_D^2 = \ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)$$

$$=> T_{BC} = \frac{m\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos^2\theta\right)\{$$

$$\bullet\ T_P = \frac{1}{2}Mv_P^2 + M\overline{v}_P.\left(\overline{\omega}\times\overline{PP}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_P.\overline{\omega}}_{\overline{\overline{I}}_P=0:\text{ masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}Mv_P^2$$

avec $\overline{v}_P = \dfrac{d\overline{AP}}{dt} = \dfrac{d\left(\ell\overline{1}_u + \lambda\overline{1}_w\right)}{dt} = \ell\overline{\omega}\times\overline{1}_u + \dot{\lambda}\overline{1}_w + \lambda\overline{\omega}\times\overline{1}_w = \ell\dot{\theta}\overline{1}_w + \ell\dot{\phi}\sin\theta\overline{1}_v + \dot{\lambda}\overline{1}_w - \lambda\dot{\theta}\overline{1}_u + \lambda\dot{\phi}\cos\theta\overline{1}_v$

$$=> T_P = \frac{1}{2}M\left(\lambda^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\lambda} + \left(\ell\dot{\phi}\sin\theta + \dot{\lambda}\dot{\phi}\cos\theta\right)^2\right)$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0}$

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\dfrac{m\ell^2}{12}\left(17\dot{\theta}^2 + 16\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\phi}^2\cos^2\theta\right) + \dfrac{1}{2}M\left(\lambda^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\lambda}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\lambda} + \left(\ell\dot{\phi}\sin\theta + \lambda\dot{\phi}\cos\theta\right)^2\right) \\ V = \underbrace{-mg\dfrac{\ell}{2}\cos\theta}_{V_{AD}} - \underbrace{mg\ell\cos\theta}_{V_{BC}} + \underbrace{Mg\left(-\ell\cos\theta + \lambda\sin\theta\right)}_{V_P} = -\dfrac{3\ell}{2}mg\cos\theta + Mg\left(+\lambda\sin\theta - \ell\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$=> L = T - V = T + \frac{3\ell}{2}mg\cos\theta - Mg\left(+\lambda\sin\theta - \ell\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0}$$

$$=> \left(\frac{17m\ell^2}{12} + M\left(\lambda^2 + \ell^2\right)\right)\ddot{\theta} + M\ell\ddot{\lambda} + M2\lambda\dot{\lambda}\dot{\theta}$$

$$-\left(M\ell\lambda\cos 2\theta + \left(M\frac{\left(\ell^2 - \lambda^2\right)}{2} + \frac{5m\ell^2}{8}\right)\sin 2\theta\right)\dot{\phi}^2 + \frac{3\ell}{2}mg\sin\theta + Mg\left(\ell\sin\theta + \lambda\cos\theta\right) = 0$$

Comme toutes les forces dérivent d'un potentiel, on aurait pu écrire directement $T + V = E_0$, cette relation nous donne directement une intégrale première.

$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0}$: $\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\phi}=A$ est une intégrale première :

$$\left(m\ell^2\left(\frac{4}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{12}\cos^2\theta\right)+M\left(\ell\sin\theta+\lambda\cos\theta\right)^2\right)\dot\phi=A$$

$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\lambda}-\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0}$: $\ddot\lambda+\ell\ddot\theta-\lambda\dot\theta^2-\left(\ell\sin\theta+\lambda\cos\theta\right)\dot\phi^2\cos\theta+g\sin\theta=0$

2. $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0}$ => Identique

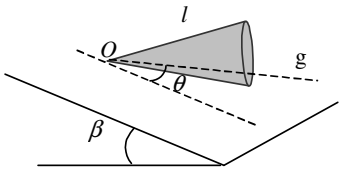
$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}-\frac{\partial L}{\partial \phi}=C}$ $\Rightarrow \frac{d\left(m\ell^2\left(\frac{15}{12}\sin^2\theta+\frac{1}{12}\right)+M\left(\ell\sin\theta+\lambda\cos\theta\right)^2\right)\dot\phi_0}{dt}=C$

$$\Rightarrow \left(m\ell^2\frac{15}{6}\sin\theta\cos\theta\dot\theta+2M\left(\left(\left(\ell^2-\lambda^2\right)\sin\theta\cos\theta+\lambda\ell\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right)\dot\theta+\left(\lambda\cos^2\theta+\ell\sin\theta\cos\theta\right)\dot\lambda\right)\right)=\frac{C}{\dot\phi_0}$$

$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\lambda}-\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0}$ => Identique

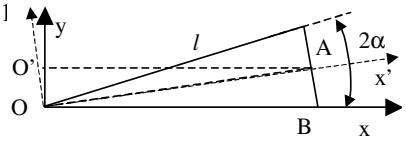
Seule l'équation en φ est modifiée. Les intégrales premières ne sont pas conservées.

Le seul degré de liberté est θ. O est un point fixe du solide. I_g est le moment d'inertie du cône par rapport à la génératrice de contact g. ω = la vitesse instantanée de rotation.
Dans le plan de symétrie du cône passant par g, on a :



$OA=l\cos\alpha$; $\overline{OA}=l\cos^2\alpha\,\overline{1}_x+l\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_y$; $\overline{\omega}=\omega\overline{1}$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v}_A=\overline{v}_O+\overline{AO}\times\overline{\omega}=l\omega\cos\alpha\sin\alpha\,\overline{1}_z\\ \overline{v}_A=AO'\dot\theta\,\overline{1}_z=l\cos^2\alpha\dot\theta\,\overline{1}_z\end{array}\right\}\Rightarrow \omega=\dot\theta\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$



$I_{x'}=\frac{3MR^2}{10}$; $I_{y'}=\frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5}$;

$$I_g=\int(y^2+z^2)dm=\int((x'\sin\alpha-y'\cos\alpha)^2+z^2)dm=\int(x'^2\sin^2\alpha+y'^2\cos^2\alpha-2x'y'\cos\alpha\sin\alpha+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)z^2)dm$$

$$=\cos^2\alpha I_{x'}-2\cos\alpha\sin\alpha P_{x'y'}+\sin^2\alpha I_{y'}=\frac{h^2}{l^2}\frac{3MR^2}{10}+\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{3MR^2}{20}+\frac{3Mh^2}{5}\right)=\frac{3MR^2}{20(R^2+h^2)}(R^2+6h^2)$$

avec $R=l\sin\alpha\ r=$; $h=l\cos\alpha$ => $I_g=\frac{3M}{20}\sin^2\alpha l^2(1+5\cos^2\alpha)$

$V=-Mgz_G=-Mg\frac{3}{4}l\cos^2\alpha\cos\theta\sin\beta$; $T=\frac{1}{2}\frac{3M}{20}l^2\sin^2\alpha\,\mathrm{cotg}^2\alpha\dot\theta^2(1+5\cos^2\alpha)$

$L=T-V$ => $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$ => $l(1+5\cos^2\alpha)\ddot\theta+5g\sin\theta\sin\beta=0$

Intégrale première : $T+V=E_0$ => $l(1+5\cos^2\alpha)\dot\theta^2-10g\cos\theta\sin\beta=-10g\cos\theta_0\sin\beta$

---

1. 1 degré de liberté , 3 coordonnées $\{z,\theta_1,\theta_2\}$

2. $T=\left[\frac{1}{2}M\dot{z}^2\right]+\left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1\omega^2+\dot{\theta}_1^2\right)\right]+\left[\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_2\omega^2+\dot{\theta}_2^2\right)\right]$ et $V=-Mgz-mgL\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$

avec $\begin{cases}\overline{v}_{m1}=\overline{\omega}_1\times\overline{OM_1} \text{ et } \overline{\omega}_1=\omega\overline{1}_z-\dot{\theta}_1\overline{1}_x \Rightarrow \overline{v}_{m1}=-L\cos\theta_1\dot{\theta}_1\overline{1}_y+L\sin\theta_1\dot{\theta}_1\overline{1}_z+L\sin\theta_1\omega\overline{1}_x\\ \overline{v}_{m2}=\overline{\omega}_2\times\overline{OM_2} \text{ et } \overline{\omega}_2=\omega\overline{1}_z+\dot{\theta}_2\overline{1}_x \Rightarrow \overline{v}_{m2}=+L\cos\theta_2\dot{\theta}_2\overline{1}_y+L\sin\theta_2\dot{\theta}_2\overline{1}_z-L\sin\theta_2\omega\overline{1}_x\end{cases}$

$\Rightarrow L=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}mL^2\left(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\right)\omega^2+\frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)+Mgz+mgL\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$

Deux contraintes : $\begin{cases}b^2=z^2+a_1^2-2a_1z\cos\theta_1 \Rightarrow \lambda_1\left(z\delta z-a_1\delta z\cos\theta_1+a_1z\sin\theta_1\delta\theta_1=0\right)\\ b^2=z^2+a_2^2-2a_2z\cos\theta_2 \Rightarrow \lambda_2\left(z\delta z-a_2\delta z\cos\theta_2+a_2z\sin\theta_2\delta\theta_2=0\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x} \;: M\ddot{z}-Mg=\lambda_1\left(z-a_1\cos\theta_1\right)+\lambda_2\left(z-a_2\cos\theta_2\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta_1} \;:\; mL^2\ddot{\theta}_1-mL^2\omega^2\sin\theta_1\cos\theta_1+mgL\sin\theta_1=\lambda_1a_1z\sin\theta_1\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta_2} \;:\; mL^2\ddot{\theta}_2-mL^2\omega^2\sin\theta_2\cos\theta_2+mgL\sin\theta_2=\lambda_2a_2z\sin\theta_2\\ z\dot{z}-a_1\cos\theta_1\dot{z}+a_1z\sin\theta_1\dot{\theta}_1=0\\ z\dot{z}-a_2\cos\theta_2\dot{z}+a_2z\sin\theta_2\dot{\theta}_2=0\end{cases}$$

3. Dans ce cas, nous n'avons plus qu'un degré de liberté : 2 équations de Lagrange avec 1 multiplicateur.

$$\begin{cases}a_1=a_2=b \Rightarrow \theta_1=\theta_2 \text{ et } \lambda_1=\lambda_2\\ z\dot{z}-b\cos\theta\dot{z}+bz\sin\theta\dot{\theta}=0\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}-\frac{\partial L}{\partial z}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x} \;: M\ddot{z}-Mg=2\lambda_1\left(z-b\cos\theta\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \;:\; mL^2\ddot{\theta}-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mgL\sin\theta=\lambda_1bz\sin\theta\end{cases}$$

$z=2b\cos\theta$; $\dot{z}=-2b\sin\theta\dot{\theta}$; $\ddot{z}=-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}$

$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta}-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mgL\sin\theta=\frac{M\ddot{z}-Mg}{2\left(z-b\cos\theta\right)}bz\sin\theta$

$=\frac{M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}\right)-Mg}{2\left(2b\cos\theta-b\cos\theta\right)}b2b\cos\theta\sin\theta=\left(M\left(-2b\cos\theta\dot{\theta}^2-2b\sin\theta\ddot{\theta}\right)-Mg\right)b\sin\theta$

$\Rightarrow\left(mL^2+2Mb^2\sin^2\theta\right)\ddot{\theta}+\left(2Mb^2\cos\theta\sin\theta\right)\dot{\theta}^2-mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+\left(mL+Mb\right)g\sin\theta=0$

1. $\boxed{T = T_1 + T_2 + T_3} = \left(\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_{G_2}.\bar{\omega}\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{G_3}^2\right)$

avec
$$\begin{cases} \bar{v}_{G_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}\times\overline{BG}_{G_2} = L\dot{\theta}\left(-\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right) - \frac{L}{2}\dot{\theta}\left(\sin\theta\bar{1}_x + \cos\theta\bar{1}_y\right) \\ = L\dot{\theta}\left(-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\bar{1}_x + L\dot{\theta}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\bar{1}_y = -\frac{3L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_y \\ \bar{v}_{G_3} = \frac{d}{dt}\left(2L\cos\theta + \frac{L}{2}\right)\bar{1}_x = -2L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_x \end{cases}$$

$$T = \left(\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\left(8\sin^2\theta + 1\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + 3mL^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_h.\frac{\partial\bar{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i Q_i\delta q_i}$$

$\delta\overline{OG}_3 = -2L\sin\theta\delta\theta\bar{1}_x$ et $\bar{F} = F(\theta)\bar{1}_x \Rightarrow \delta\tau = Q_\theta\delta\theta = M\delta\theta - 2Fl\sin\theta\delta\theta$

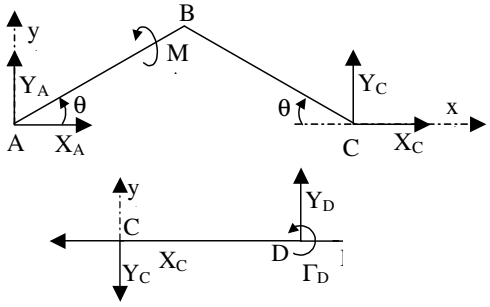
<u>Equation de Lagrange</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 6\sin^2\theta\right) + 6mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = M - 2FL\sin\theta$$

2. Théorème du moment en A sur ABC

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{M}_A = \bar{m}_{e,A}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{M}_A\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \bar{m}_{e,A}\left(M(\theta),\underline{\underline{Y_C}}\right)$$

où $\bar{M}_A = \bar{M}_{A,1} + \bar{M}_{A,2} = \left(\bar{\bar{I}}_A.\bar{\omega}\right) + \left(\bar{M}_{G2} + \overline{AG}_2\times\bar{R}_2\right)$ et $\bar{m}_{e,A} = \left(M(\theta) + 2L\cos\theta Y_C\right)\bar{1}_z$



$$\bar{M}_A = \left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\bar{1}_z\right) + \left(-\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\bar{1}_z + m\frac{3l^2}{4}\dot{\theta}\bar{1}_z\right) = ml^2\dot{\theta}\bar{1}_z$$

$$\Rightarrow Y_C = \frac{ml^2\ddot{\theta} - M(\theta)}{2l\cos\theta}$$

Théorème de la résultante en x sur CD

$$\boxed{\frac{d}{dt}R_x = \sum F_{e,x}} \quad \frac{d}{dt}R_x\left(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}\right) = \sum F_{e,x}\left(\underline{\underline{X_C}},F(\theta)\right)$$

où $R_x = mv_{G3,x} = -2mL\sin\theta\dot{\theta}$

$$\Rightarrow X_C = F(\theta) + 2mL(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)$$

<u>Forces</u> :
Force de pesanteur en G, C_1, C_2
Force de réaction normale et frottement pour empêcher le glissement en O_1 et O_2 (N_1, T_1, N_2, T_2)
Couple moteur en C sur la roue arrière
<u>Degré de liberté</u> :
3 solides en 2D => 3 x 3 paramètres cinématiques de position.
8 condition cinématique entre ces solides :
Roulement sans glissement en O_1 = 2 conditions cinématiques
Roulement sans glissement en O_2 = 2 conditions cinématiques
Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_1 = 2 conditions cinématiques
Liaison rotoïde (=de type rotule) en C_2 = 2 conditions cinématiques
9 – 8 = 1 ddl. On prend le paramètre x décrivant la position du centre de gravité G de la moto.

---

1. Théorème de la résultante cinétique sur le système complet.

$$\boxed{\frac{d\overline{R}}{dt}=\overline{F}_e}=M\overline{g}+2m\overline{g}+T_1\overline{1}_x+N_1\overline{1}_y+T_2\overline{1}_x+N_2\overline{1}_y$$

$$\begin{cases} x:(M+2m)\ddot{x}=T_1+T_2 \quad (1) \\ y:0=-Mg-2mg+N_1+N_2 \quad (2) \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en C_2 sur la roue 2 (force de liaison X_2 et Y_2)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_2}=\sum\overline{m}_{e,C_2}+m\overline{v}_G\times\overline{v}_{C_2}\underset{G=C_2}{=}\overline{m}_{e,C_2}} \quad \text{avec } \overline{\omega}=-\omega_2\overline{1}_z$$

Condition cinématique : $\overline{v}_{O_2}=0=\overline{v}_{C_2}+\overline{\omega}_2\times\overline{C_2O_2}=\dot{x}\overline{1}_x-\omega_2 r\overline{1}_x \Rightarrow \overline{\omega}_2=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z$

$$\boxed{\overline{M}_{C_2}=\overline{\overline{I}}_{C_2}.\overline{\omega}}=-mi^2\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_2}=\overline{m}_{e,C_2} \Rightarrow -mi^2\frac{\ddot{x}}{r}\overline{1}_z=rT_2\overline{1}_z \Rightarrow T_2=-m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x} \quad (3)$$

(3) dans (1) : $T_1=(M+2m)\ddot{x}+m\frac{i^2}{r^2}\ddot{x}$ (4)

2. Théorème du moment cinétique en O_1 sur la moto et les 2 roues (force de liaison X_1 et Y_1)
C est un couple moteur interne au système, donc il n'est pas pris en compte quand on travaille sur le système entier.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{O_1}=\sum\overline{m}_{e,O_1}+\overline{R}\times\overline{v}_{O_1}=\overline{m}_{e,O_1}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1=-\omega_1\overline{1}_z=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

où $\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_{O_1,M}+\overline{M}_{O_1,r1}+\overline{M}_{O_1,r2}$ et
$$\begin{cases} \overline{M}_{O_1,M}=\underbrace{\overline{M}_{G,M}}_{=0}+\overline{O_1G}\times\overline{R}=-hM\dot{x}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r1}=\overline{\overline{I}}_{O_1}.\overline{\omega}+m\overline{O_1C_1}\times\overline{v}_{O_1}=-m\left(i^2+r^2\right)\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \\ \overline{M}_{O_1,r2}=\overline{M}_{G_2,r2}+\overline{O_1G_2}\times\overline{R}_{r2}=-m\frac{i^2}{r}\dot{x}\overline{1}_z-mr\dot{x}\overline{1}_z \end{cases}$$

$$\left(-hM-m\left(i^2+r^2\right)\frac{1}{r}-m\frac{i^2}{r}-mr\right)\ddot{x}=-\frac{L}{3}Mg-Lmg+LN_2$$

$$\Rightarrow N_2=\left(\frac{M}{3}+m\right)g-\left(hM+2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L} \quad (5)$$

En réinjectant (5) dans (2), on obtient :

$$N_1=\left(\frac{2M}{3}+m\right)g+\left(hM+2m\frac{\left(i^2+r^2\right)}{r}\right)\frac{\ddot{x}}{L}$$

3. La moto démarrera en se cabrant lorsque la force verticale entre le sol et la route avant s'annule :

$$N_2=0 \Rightarrow \ddot{x}_{\max}=\frac{Lr\left(\frac{M}{3}+m\right)g}{\left(hMr+2m\left(i^2+r^2\right)\right)}$$

Théorème du moment cinétique en C_1 sur la roue arrière (force de liaison X_1 et Y_1)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_{C_1}=\sum\overline{m}_{e,C_1}+\overline{R}\times\overline{v}_{O_{C_1}}=\overline{m}_{e,C_1}} \quad \text{avec } \overline{\omega}_1=-\omega_1\overline{1}_z=-\frac{\dot{x}}{r}\overline{1}_z \text{ par la deuxième condition cinématique}$$

$$-mi^2\frac{\ddot{x}}{r}=-C+rT_1 \Rightarrow \text{ avec (4) : } C=\left(m\frac{i^2}{r^2}+(M+2m)+m\frac{i^2}{r^2}\right)r\ddot{x} \Rightarrow C_{\max}=\left(Mr+2m\left(\frac{i^2+r^2}{r}\right)\right)\ddot{x}_{\max}$$

Ou par <u>l'équation de mouvement</u> : Le couple moteur travaille et dépense de l'énergie.

$$\begin{cases} T = T_M + T_{r1} + T_{r2} = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + 2\left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{mi^2}{2}\left(-\dfrac{\dot{x}}{r}\right)^2\right) = \left(\dfrac{M}{2} + m\dfrac{r^2+i^2}{r^2}\right)\dot{x}^2 \\ V = 0 \\ Q_x \delta x = C\delta\theta = \dfrac{C}{r}\delta x \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = Q_x} \Rightarrow \left(M + 2m\frac{r^2+i^2}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{C}{r} \Rightarrow C = \left(Mr + 2m\frac{r^2+i^2}{r}\right)\ddot{x}$$

---

1. $\mu = AE; OA = L_0;\ x = DC \Rightarrow L_0 - x - H = \mu\cos\theta$ et $\mu = \dfrac{H}{\sin\theta} \Rightarrow x = L_0 - H\left(1 + \dfrac{1}{tg\theta}\right)$

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \text{ avec } \dot{x} = -\dot{\mu}\cos\theta + \mu\sin\theta\dot{\theta} = H\left(1 + \frac{1}{tg^2\theta}\right)\dot{\theta} = \frac{H}{\sin^2\theta}\dot{\theta}$$

$$V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}(x - L_0)^2 = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}H^2\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

2. <u>1 coordonnée θ</u> :

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}MH^2\left(1 + \frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\dot{\theta}^2\right] \text{ et } V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}H^2\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$L = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}MH^2\frac{1}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2\right] - \frac{L}{2}mg\sin\theta - \frac{k}{2}H^2\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ :$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + MH^2\left(1 + \frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\ddot{\theta} - 4MH^2\frac{\cot g\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 - \left[-\frac{1}{2}MH^2\dot{\theta}^2\left(-4\frac{\cot g\theta}{\sin^4\theta}\right) - \frac{L}{2}mg\cos\theta + kH^2\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta} - 2MH^2\frac{\cot g\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right) = 0$$

<u>2 coordonnée θ et x</u> :

$$T = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \text{ et } V = \frac{L}{2}mg\sin\theta + \frac{k}{2}(x - L_0)^2$$

avec une contrainte : $\delta x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1\left(\delta x - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0\right)$

$$\Rightarrow L = \left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] - \frac{L}{2}mg\sin\theta - \frac{k}{2}(x - L_0)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \ : \ \dfrac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \left[-\dfrac{L}{2}mg\cos\theta\right] = -\lambda_1\dfrac{H}{\sin^2\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \ : \ M\ddot{x} - \left[-\dfrac{k}{2}2(x - L_0)\right] = \lambda_1 \\ \dot{x} - \dfrac{H}{\sin^2\theta}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + \frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta} - 2MH^2\frac{\cot g\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}mg\cos\theta - \frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{1}{tg\theta}\right) = 0$$

---

3 coordonnée θ , x et μ :

$$T=\left[\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right] \text{ et } V=\frac{L}{2}mg\sin\theta+\frac{k}{2}\left(x-L_0\right)^2$$

avec deux contraintes : $\lambda_1\left(\delta x+\delta\mu\cos\theta-\mu\sin\theta\delta\theta=0\right)$ et $\lambda_2\left(\delta\mu\sin\theta+\mu\cos\theta\delta\theta=0\right)$

$$=>\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \;:\; \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}-\left[-\frac{L}{2}mg\cos\theta\right]=-\lambda_1\mu\sin\theta+\lambda_2\mu\cos\theta\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x} \;:\; M\ddot{x}-\left[-\frac{k}{2}2\left(x-L_0\right)\right]=\lambda_1\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial\mu}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\mu} \;:\; 0=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta\\ \dot{x}+\dot{\mu}\cos\theta-\mu\sin\theta\dot{\theta}=0 \text{ et } \dot{\mu}\sin\theta+\mu\cos\theta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$=>\left(\frac{mL^2}{3}+\frac{MH^2}{\sin^4\theta}\right)\ddot{\theta}-2MH^2\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\sin^4\theta}\dot{\theta}^2+\frac{L}{2}mg\cos\theta-\frac{kH^2}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{1}{tg\theta}\right)=0$$

---

1. 2 degrés de liberté : x (position de A) et θ (rotation du disque)
Théorème de Lagrange en utilisant les multiplicateurs de Lagrange : Utiliser un nombre de coordonnées de Lagrange supérieur (x, θ et φ : position de B par rapport à A) au nombre de degrés de liberté du système.
Toutes les forces dérivent d'un potentiel => Théorème de Lagrange avec le Lagrangien et Q_i*=0
Benne : $S_1\left(M,I\right)$ R_1=repère lié à la benne

Disque : $S_2\left(m,R,\dot{\theta}\right)$ R_3=repère lié au disque (tournant avec $\overline{\omega}_{R_3/R_0}=-\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}$)

R_2 = repère où z_2 est lié à AB (tournant avec $\overline{\omega}_{R_2/R_0}=\dot{\varphi}\overline{1}_{y_2}$)

$$\overline{OB}=x\overline{1}_{x_1}+L\overline{1}_{z_2} => \overline{v}_B=\dot{x}\overline{1}_{x_1}+L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2}=\left(\dot{x}+L\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\overline{1}_{x_1}-L\dot{\varphi}\sin\varphi\overline{1}_{z_1}$$

$$\begin{cases}T=T_{S_1}+T_{S_2}=\left[\frac{Mv_A^2}{2}\right]_{S_1}+\left[\frac{mv_B^2}{2}+\frac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2\right]_{S_2}=\left[\frac{M\dot{x}^2}{2}\right]_{S_1}+\left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+L^2\dot{\varphi}^2+2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2\right]_{S_2}\\ V=C-Lmg\cos\varphi\end{cases}$$

$$=> L=\frac{M\dot{x}^2}{2}+\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+L^2\dot{\varphi}^2+2L\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2+Lmg\cos\varphi=L\left(x,\varphi,\theta\right)$$

Contrainte de roulement sans glissement : I = point de contact entre S_1 et S_2

$$\overline{v}_{I\in S_1}=\dot{x}\overline{1}_{x_1} \quad\text{et}\quad \overline{v}_{I\in S_2}=\overline{v}_{B\in S_2}+\overline{\omega}_d\times\overline{BI} \quad\text{avec}\quad \overline{\omega}_d=-\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}$$

$$=> \dot{x}\overline{1}_{x_1}=\dot{x}\overline{1}_{x_1}+L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2}-\dot{\theta}a\overline{1}_{x_2} => \boxed{L\dot{\varphi}-\dot{\theta}a=0}$$

$$\text{ou } \overline{v}_{I\in S_2}=\left.\frac{d\overline{OQ}}{dt}\right|_{P=I}=\left.\frac{d\left(x\overline{1}_{x_1}+L\overline{1}_{z_2}+a\overline{1}_{z_3}\right)}{dt}\right|_{P=I}=\dot{x}\overline{1}_{x_1}+L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2}-a\dot{\theta}\overline{1}_{x_3}\Big|_{P=I\left(x_2=x_3\right)}=\dot{x}\overline{1}_{x_1}+\left(L\dot{\varphi}-a\dot{\theta}\right)\overline{1}_{x_2}$$

$$==> L\dot{\varphi}-a\dot{\theta}=0 \text{ ce qui nous donne comme contrainte } (\phi_1) \text{ avec } \lambda_1\text{: } \frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\delta\theta=L\delta\varphi-\mathrm{a}\delta\theta=0$$

Système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} => \left(M+m\right)\ddot{x}+mL\cos\varphi\ddot{\varphi}-mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2-0=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} => \frac{ma^2}{2}\ddot{\theta}=-\lambda_1 a\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)=\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi} => mL^2\ddot{\varphi}+mL\ddot{x}\cos\varphi\cancel{-mL\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}}+\cancel{mL\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}+mgL\sin\varphi=\lambda_1 L\\ +\text{contrainte : } L\dot{\varphi}-a\dot{\theta}=0\end{cases}$$

=> $\boxed{\lambda_1 = -\frac{ma}{2}\ddot{\theta} = -\frac{mL}{2}\ddot{\varphi}}$ => 2 équations de mouvement $\begin{cases} \frac{3mL^2}{2}\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + mL\cos\varphi\ddot{\varphi} - mL\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$

2. Réactions de liaison => Théorème généraux.

<u>Théorème de la résultante</u> appliqué à S_2 : Forces extérieures $\left(-T_2\,\overline{1}_{x_2} - N_2\,\overline{1}_{z_2} + m\overline{g}\right)$

$\overline{R} = m\overline{v}_B = m\left(\dot{x} + L\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\overline{1}_{x_1} - mL\dot{\varphi}\sin\varphi\,\overline{1}_{y_1}$

$$=> \begin{cases} m\left(\ddot{x} + L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) = -N_2\sin\varphi + T_2\cos\varphi \quad (1) \\ m\left(-mL\ddot{\varphi}\sin\varphi - mL\cos\varphi\dot{\varphi}^2\right) = mg - N_2\cos\varphi - T_2\sin\varphi \quad (2) \end{cases}$$

$(1)\sin\varphi + (2)\cos\varphi \quad : \quad m\ddot{x}\sin\varphi - mL\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - N_2 \Rightarrow N_2 = mg\cos\varphi - m\ddot{x}\sin\varphi + mL\dot{\varphi}^2$

$(1)\cos\varphi - (2)\sin\varphi \quad : \quad m\ddot{x}\cos\varphi + mL\ddot{\varphi} = T_2 - mg\sin\varphi \Rightarrow T_2 = -m\ddot{x}\cos\varphi - mL\ddot{\varphi} - mg\sin\varphi$

Ou

<u>Théorème du moment en B</u> :

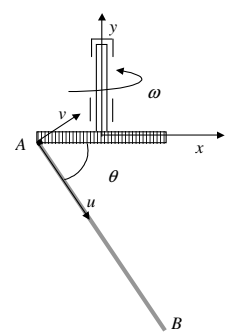
$-\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = -aT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{ma}{2}\ddot{\theta} = \frac{mL}{2}\ddot{\varphi}$

et grâce à la première équation de mouvement : $\left(\frac{mL^2}{2}\ddot{\varphi} + mL^2\ddot{\varphi} + mL\ddot{x}\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0\right)$

on obtient : $T_2 = \frac{mL}{2}\ddot{\varphi} = -mL\ddot{\varphi} - m\ddot{x}\cos\varphi - mg\sin\varphi$

---

1. Equation différentielle du mouvement => Théorème de Lagrange.
ω est une donnée du problème.
Axes $Auvw$, tel que u est suivant AB et w // z.



$T = T_{tige} + T_{disque} = \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}\right)_{\text{Disque}}$

- $T_{disque} = \frac{1}{2}\frac{m\left(L/4\right)^2}{2}\omega^2$
- $T_{tige} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{16}\omega^2 + \omega^2\cos^2\theta\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4}\omega^2\cos\theta + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos^2\theta\right)$

avec $\begin{cases} \overline{\omega} = \omega\left(-\sin\theta\,\overline{1}_u + \cos\theta\,\overline{1}_v\right) - \dot{\theta}\,\overline{1}_w \\ \overline{v}_{G_{tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}\times\overline{AG} = \frac{L}{4}\omega\overline{1}_w - \omega\cos\theta\frac{L}{2}\overline{1}_w - \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\overline{1}_v \end{cases}$

$V = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\frac{L^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{L^2}{4}m\omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega^2\sin\theta + \frac{L^2}{12}m\omega^2\cos\theta\sin\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0$

$=> \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mL^2\left(\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{8}\right)\omega^2\sin\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0$

---

2. Réactions de liaison => Théorème généraux.
   Système {tige} : Théorème de la résultante cinétique dans les axes *Oxyz*

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\sum \overline{F}_e \ : \overline{R}=m\overline{v}_G=-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_x-m\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\,\overline{1}_y+m\frac{L}{2}\omega\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)\overline{1}_z$$

$$\begin{cases}-m\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2+m\frac{L}{2}\omega^2\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)=X_A\\ -m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}+m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2=Y_A-mg\\ m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta}+m\frac{L}{2}\omega\sin\theta\dot{\theta}=Z_A\end{cases}$$

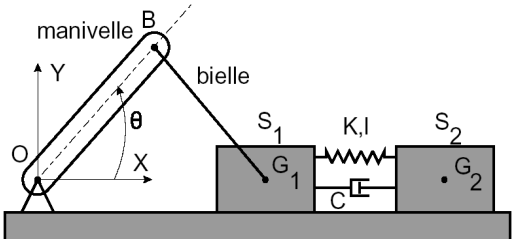
$$=>\begin{cases}X_A=m\frac{L}{2}\left(\omega^2\sin^2\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\omega^2\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)-\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\dot{\theta}^2\right)\\ Y_A=-m\frac{L}{2}\cos\theta\left(-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta\right)+m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta+mg\\ Z_A=mL\omega\sin\theta\end{cases}$$

3. AN :

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$$

$$=>\dot{\theta}^2=\left(\omega^2\cos^2\theta-\frac{3}{4}\omega^2\cos\theta+3\frac{g}{L}\sin\theta\right)-\left(\omega^2\frac{\cos^2 60}{2}-\frac{3}{4}\omega^2\cos 60+3\frac{g}{L}\sin 60\right)=-\frac{5}{8}\omega^2+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{L}$$

$$X_A=\frac{mL}{16}\omega^2\ ;\ Y_A=\frac{mL}{16}\omega^2+\frac{mg}{2}\left(5-3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ Z_A=mL\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{8}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{3g}{L}}$$



$$T=T_{tige}+T_{S_1}+T_{S_2}$$

$$\text{avec}\begin{cases}\overline{OG_1}=2L\cos\theta\,\overline{1}_x\ =>\ \overline{v}_{G_1}=-2L\sin\theta\dot{\theta}\,\overline{1}_x\\ \overline{OG_2}=x\,\overline{1}_x\ =>\ \overline{v}_{G_2}=\dot{x}\,\overline{1}_x\end{cases}$$

$$=>T=\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Force de pesanteur

$$\left\{F_g=-mg\,\overline{1}_y\ :\ V_{OB}=mg\frac{L}{2}\sin\theta\ \text{ et }\ Q_{\theta(mg)}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}=-mg\frac{L}{2}\cos\theta\right.$$

Force d'amortissement proportionnel à la vitesse

$$\begin{cases}\overline{F}_A=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\overline{1}_x\ ;\ \overline{G_1G_2}=\left(x-2L\cos\theta\right)\overline{1}_x\ =>\delta\,\overline{G_1G_2}=\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}\delta\theta=\left(\delta x+2L\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x\\ Q_\theta^*=\overline{F}_A.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)2L\sin\theta\ \text{ et }\ Q_x^*=\overline{F}_A.\frac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}=-c\left(\dot{x}+2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\end{cases}$$

Force de rappel : $\overline{F}_R = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right)\overline{1}_x$. Par le potentiel ou le travail :

$$\begin{cases} \bullet\ V_{S_1} = \dfrac{k}{2}\left(x - 2L\cos\theta - L\right)^2 \\ \text{et}\quad Q_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right)2L\sin\theta \ \text{ et } \ Q_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) \\ \bullet\ \delta\,\overline{G_1G_2} = \dfrac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta}\delta\theta = \left(\delta x + 2L\sin\theta\delta\theta\right)\overline{1}_x \\ \Rightarrow Q_x = \overline{F}_R.\dfrac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial x} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) \ \text{ et } \ Q_\theta = \overline{F}_R.\dfrac{\partial\overline{\varphi}_{G2}}{\partial\theta} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right).2L\sin\theta \end{cases}$$

<u>Méthode avec T et Q</u> :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + 4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta \\ m\dfrac{L^2}{3}\ddot{\theta} + m4L^2\sin\theta\left(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2\right) = -mg\dfrac{L}{2}\cos\theta - \left(k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) + c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\right)2L\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \ : \ m\ddot{x} = -k\left(x - 2L\cos\theta - L\right) - c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

OU

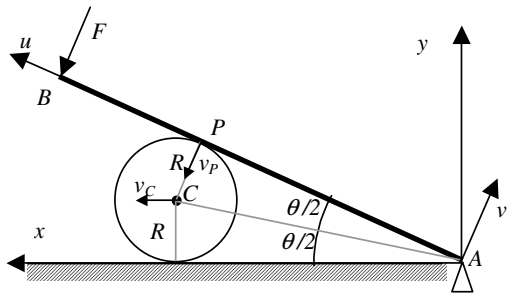
<u>Méthode avec L et Q^*</u> :

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + 4L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right) - mg\frac{L}{2}\sin\theta - \frac{k}{2}\left(x - 2L\cos\theta - L\right)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = Q_\theta^* = -c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right)2L\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = Q_x^* = -c\left(\dot{x} + 2L\sin\theta\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

---

1. Considérons le système = {tige (m) + disque (2m)}}



Intégrale première => théorème de Lagrange pour définir une équation de mouvement ou par la conservation de l'énergie.

Calcul de <u>l'énergie cinétique</u> :

$T = T_{Tige} + T_{Disque}$

$$\begin{cases} T_{Tige} = \left(\frac{1}{2}\overline{\omega}_t.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}_t\right)_{Tige} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \text{ avec } \overline{\omega}_t = \dot{\theta}\overline{1}_z \text{ (avec } \dot{\theta} < 0) \\ T_{Disque} = \left(\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_d.\overline{\overline{I}}_C.\overline{\omega}_d\right)_{Disque} \text{ avec } \overline{\omega}_d = \dot{\varphi}\overline{1}_z \text{ et } \overline{v}_C = \frac{d\overline{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)\overline{1}_x = -\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\overline{1}_x \end{cases}$$

$$=> T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

1 degré de liberté, 2 coordonnées de Lagrange => deux solutions :

- utiliser les deux coordonnées de Lagrange et un multiplicateur de Lagrange
- remplacer une des coordonnées dans l'énergie cinétique pour n'utiliser qu'une coordonnée de Lagrange.

<u>Relation entre les deux paramètres</u> :

$\dot{\varphi}$ dépend de $\dot{\theta}$ => pour déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, il faut écrire la condition de roulement sans glissement en P (dans les axes liés à la tige $Auvw$ avec u // AB)

$\overline{v}_{P\in \text{ tige}} = \overline{v}_{P\in \text{ disque}}$

$$\text{avec } \begin{cases} \overline{v}_{P\in \text{ tige}} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_t \times \overline{AP} = R\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\overline{1}_v \\ \overline{v}_{P\in \text{ disque}} = \overline{v}_C + \overline{\omega}_d \times \overline{CP} = \left(-\frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta - \dot{\varphi}R\right)\overline{1}_u + \frac{R\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta\overline{1}_v \end{cases}$$

$$=> \left(\overline{v}_{P\in \text{ disque}} = \overline{v}_{P\in \text{ tige}}\right)_{\overline{1}_u} => \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -\operatorname{cotg}\theta\frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta} = -\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$$

$$\text{donc } T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{(2m)}{2}\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(2m)R^2}{2}\operatorname{cotg}^2\theta\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2$$

Energie potentielle : $V = V_{\text{tige}} + V_{\text{disque}}$

L'intégrale première est $T + V = E_0$ car :

$$\begin{cases} m\overline{g} \text{ dérive d'une potentiel } => V = mg\frac{L}{2}\sin\theta \\ \overline{F} \text{ dérive d'un potentiel car } \overline{F} = -F\overline{1}_v = -\overline{grad}\,V = -\frac{1}{L}\frac{\partial V}{\partial\theta} \;=> V = FL\theta \\ \overline{T}_P : \text{ la force de frottement (sans glissement) en } P \text{ ne travaille pas pour un petite déplacement } \delta\theta : \\ \text{Il n'y a pas de frottement en } Q \text{ donc pas de travail.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{mR^2}{2}\operatorname{cotg}^2\theta\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta + FL\theta = E_0$$

2. Système = {disque (2m)} : Théorème du moment cinétique en C

$$\frac{d}{dt}\bar{M}_C = \sum \bar{m}_{e,C}$$

$$\bar{M}_C = \bar{\bar{I}}_C.\bar{\omega}_d = \frac{(2m)R^2}{2}\dot{\varphi}\bar{1}_z = -mR^2\text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\bar{1}_z$$

$$\frac{d}{dt}\bar{M}_C = -mR^2\text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta}\bar{1}_z + mR^2\frac{1}{\sin^2\theta}\text{cotg}\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2\bar{1}_z + mR^2\text{cotg}\,\theta\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\bar{1}_z$$

$$\bar{m}_{e,C} = RT_P\bar{1}_z \;\; => \;\; T_P = mR\left(-\text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} + \frac{\text{cotg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta}\dot{\theta}^2 + \frac{\text{cotg}\,\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2\right)$$

Système = {tige (m)} : Théorème du moment cinétique en A

$$\frac{d}{dt}\bar{M}_A = \sum \bar{m}_{e,A}$$

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -R\text{cotg}\frac{\theta}{2}N_P - LF - \frac{L}{2}\cos\theta m\,\text{g} \;\; => \;\; N_P = -\frac{mL^2}{3R}\text{tg}\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \frac{LF}{R}\text{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{Lm\,\text{g}}{2R}\cos\theta\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

---

1. 1. Système complet

$$T = \sum_{solides}\left(\frac{m_i}{2}v_{G_i}{}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_i.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\omega}_i\right)$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\frac{4L^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{2ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \text{avec } \bar{v}_{G_1} = L\cos\theta\dot{\theta}\bar{1}_x - L\sin\theta\dot{\theta}\bar{1}_z = \bar{v}_B + \bar{\omega}\times\overline{BG_1} = \frac{d\overline{OG_1}}{dt}$$

$$T_{SF} = \frac{1}{2}m\left(\left(2L\cos\theta\dot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{12}\dot{\varphi}^2 = mL\cos\theta\dot{\theta}\left(2L\cos\theta\dot{\theta} + a\cos\varphi\dot{\varphi}\right) + \frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2$$

avec $\bar{v}_{G_2} = \bar{v}_S + \bar{\omega}_2\times\overline{SG_2} = \dfrac{d\overline{OG_2}}{dt}$

$$V = Mgl\cos\theta + mg\left(Const - \frac{a}{2}\cos\varphi\right) + \frac{k}{2}(2Lsin\theta)^2 = Mgl\cos\theta - \frac{a}{2}mg\cos\varphi + \frac{k}{2}4L^2sin^2\theta$$

$$L = \frac{2ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + 2mL^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + mLa\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2 - Mgl\cos\theta + \frac{a}{2}mg\cos\varphi - \frac{k}{2}4L^2sin^2\theta$$

2. $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;:\; \frac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + 4mL^2\cos^2\theta\ddot{\theta} - 8mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + mLa\cos\theta\cos\varphi\ddot{\varphi} - mLa\cos\theta\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$-mLa\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} + 4mL^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + mLa\sin\theta\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} - Mgl\sin\theta + 4kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$=> \frac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + 4mL^2\cos\theta\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right) + mLa\cos\theta\left(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) - Mgl\sin\theta + 4kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \;:\; \frac{ma^2}{3}\ddot{\varphi} + mLa\cos\varphi\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right) + \frac{a}{2}mg\sin\varphi = 0$$

3. Il y a conservation de l'énergie étant donné que toutes les forces en présence dérive d'un potentielle et qu'il n'y a pas de frottement.

---

1. <u>Système {tige + masse}</u> : Équation différentielle => Lagrange

a.

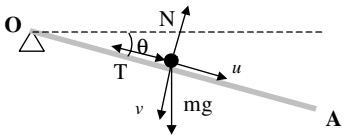
$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}}_{=0}\right)_{\text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$V = -2mg\frac{L}{2}\sin\theta \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{2}\frac{7mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + mgL\sin\theta$$

Il n'y a pas de force qui ne dérive pas d'un potentiel :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{7mL^2}{12}\ddot{\theta} - mgL\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta$$

1.
b.



$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \sum \bar{F}_e \;:$$

$$m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\bar{1}_v - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\bar{1}_u = +mg\cos\theta\bar{1}_v + mg\sin\theta\bar{1}_u - N\bar{1}_v - T\bar{1}_u$$

Théorème de la résultante cinétique sur la masse : (Si Système {tige}, on doit tenir compte des réactions en O)

$$\begin{cases} -m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \\ m\frac{L}{2}\ddot{\theta} = mg\cos\theta - N \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta - m\frac{L}{2}\frac{12g}{7L}\cos\theta = \frac{1}{7}mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2 = \frac{24g}{7L}\sin\theta \;\Rightarrow\; T = m\frac{12g}{7}\sin\theta + mg\sin\theta = \frac{19}{7}mg\sin\theta$$

2.

Glissement si $T=fN$: $\quad T = \frac{19}{7}mg\sin\theta = fN = f\frac{1}{7}mg\cos\theta \;\Rightarrow\; tg\theta = \frac{f}{19}$

Décollement si $N=0$: $\quad N = \frac{1}{7}mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}$

Il y aura glissement avant décollement

Equation de mouvement => Théorème de Lagrange sur le système complet {Bogie + Ensemble T (cabine + axe CE)} :

1. Energie cinétique : $T = T_{Bogie} + T_{Cabine}$

$$T_{Bogie} = \left(\frac{1}{2}mv_C^2\right)_{Bogie} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_T = \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}\right)_{Cabine} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{z_G}\dot{\theta}^2$$

avec $\bar{v}_G = \bar{v}_C + \bar{\omega}\times\overline{CG} = \left(\dot{x} + d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\bar{1}_x + \left(d\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}\right)\bar{1}_y$ et $I_E = I_{z_G} + Ma^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\dot{x}\right) + \frac{1}{2}\left(I_E - Ma^2\right)\dot{\theta}^2$$

2. Energie potentielle :

• Bogie

$$V_{Bogie} = mgx\sin\alpha \;\Rightarrow\; Q_{x(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg\sin\alpha \text{ et } Q_{\theta(mg)} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$$

$(y_C = x\sin\alpha\,;\, \delta y_C = \sin\alpha\delta x$ et $F_y = -mg \;\Rightarrow\; Q_{x(mg)}\delta x = -mg\sin\alpha\delta x)$

• Ensemble T

$$V_T = Mg\left(x\sin\alpha - d\cos\theta\right) \;\Rightarrow\; Q_{x(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Mg\sin\alpha \text{ et } Q_{\theta(Mg)} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -Mgd\sin\theta$$

$(y_G = x\sin\alpha - d\cos\theta\,;\, \delta y_G = \sin\alpha\delta x + d\sin\theta\delta\theta$ et $F_y = -Mg \Rightarrow Q_{x(Mg)}\delta x = -Mg\sin\alpha\delta x$ et $Q_{\theta(Mg)}\delta\theta = -Mgd\sin\theta\delta\theta)$

---

3. Forces extérieures = Couple moteur

$Q_{x(C_M)} = \dfrac{C_M}{r}$ car $\delta\tau = Q_x \delta x = C_M \delta\alpha = C_M \dfrac{\delta x}{r}$

4. Equation du mouvement : théorème de Lagrange

$$=> \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x = Q_{x(mg)} + Q_{x(Mg)} + Q_{x(C_M)} \\ => (m+M)\ddot{x} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{\theta} - Md\sin(\theta-\alpha)\dot{\theta}^2 = -(m+M)g\sin\alpha + \dfrac{C_M}{r} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = Q_{\theta(mg)} + Q_{\theta(Mg)} + Q_{\theta(C_M)} \\ => Md^2\ddot{\theta} + Md\cos(\theta-\alpha)\ddot{x} + \left(I_E - Ma^2\right)\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta \end{cases}$$

Equation de mouvement => Théorème de Lagrange avec comme coordonnée généralisée x = 1 degré de liberté

Solides : $\begin{cases} S(M) \text{ pour le cycliste} \\ S_1'(M', R', G_1', \omega_1') \text{ pour la roue arrière} \\ S_2'(M', R', G_2', \omega_2') \text{ pour la roue avant} \\ S''(0, R'', \omega'') \text{ pour le pédalier} \end{cases}$

Energie cinétique : $T = \underbrace{\dfrac{M\dot{x}^2}{2} + 0}_{cycliste} + \underbrace{\dfrac{M'\dot{x}^2}{2} + \dfrac{1}{2}M'R'^2\omega_1'^2}_{roue\ arrière} + \underbrace{\dfrac{M'\dot{x}^2}{2} + \dfrac{1}{2}M'R'^2\omega_2'^2}_{roue\ avant}$

Energie potentielle :

$V = Mg\left(x\sin\theta + H\cos\theta\right) + M'g\left(\left(x-R'\right)\sin\theta + R'\cos\theta\right) + M'g\left(\left(x+2R'\right)\sin\theta + R'\cos\theta\right)$

$=> V = \left(M + 2M'\right)gx\sin\theta + const$

Contrainte de roulement sans glissement :

$\overline{v}_{I_1} = \overline{v}_{G_1} + \overline{\omega}_1 \times \overline{G_1 I_1} => \omega_1' = \dfrac{\dot{x}}{R'}$ et $\overline{v}_{I_2} = \overline{v}_{G_2} + \overline{\omega}_2 \times \overline{G_2 I_2} => \omega_2' = \dfrac{\dot{x}}{R'} => \delta\alpha' = \dfrac{\delta x}{R'}$

Avec le rapport de rayons : $R''\omega'' = R\omega' => R''\delta\alpha'' = R\delta\alpha'$

Travail du couple : $\delta\tau = C\delta\alpha'' = C\dfrac{R}{R''}\delta\alpha' = C\dfrac{R}{R''.R'}\delta x$

Lagrangien : $L = \dfrac{1}{2}\left(M + 4M'\right)\dot{x}^2 - \left(M + 2M'\right)gx\sin\theta$

$=> \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right) = Q_x^* : \boxed{\left(M + 4M'\right)\ddot{x} + \left(M + 2M'\right)g\sin\theta = C\dfrac{R}{R''.R'}}$

$T = \sum_{solides}\left(\dfrac{m_i}{2}v_{G_i}^2 + \dfrac{1}{2}\overline{\omega}_i.\overline{\overline{I}}_{G_i}.\overline{\omega}_i\right)$ et $V = Const$ où $T_{Disque} = \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$

$T_{nacelle} = \dfrac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \dfrac{1}{2}I_z\left(\dot{\alpha} + \dot{\theta}\right)^2$ avec $I_{z_G} = \dfrac{\left(\rho\pi(2r)^2.2l\right)(2r)^2}{2} - \dfrac{\left(\rho\pi r^2 l\right)r^2}{2} = \dfrac{31}{7}m\dfrac{r^2}{2}$ avec $m = \rho\pi 7 r^2 l$

$=> T = \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 + 4.\left(\dfrac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{31}{14}mr^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\theta}\right)\right)$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 : \dfrac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + 4mL^2\ddot{\theta} + 2\dfrac{31}{7}mr^2\ddot{\theta} + 2\dfrac{31}{7}mr^2\ddot{\alpha} = M(\theta) => \left(\dfrac{MR^2}{2} + 4mL^2\right)\ddot{\theta} = M(\theta)$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 : 4\dfrac{31}{14}mr^2\ddot{\alpha} + 4\dfrac{31}{14}mr^2\ddot{\theta} = 0 => \ddot{\alpha} + \ddot{\theta} = 0$

---

24. 1.$E = T + V$

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_O.\bar{\omega}\right)_{\text{tige}} + \left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\omega}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\omega}}_{=0}\right)_{\text{masse ponctuelle}} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2$$

$$V = Mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgL\sin\theta + k\frac{(\theta - \pi/2)^2}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}(m + \frac{M}{3})L^2\dot{\theta}^2 + (\frac{M}{2} + m)Lg\sin\theta + k\frac{(\theta - \pi/2)^2}{2}$$

2. $E = E_0 = \mathrm{k}\frac{\pi^2}{8}$ est une intégrale première de l'énergie

3. Théorème de la résultante cinétique appliqué sur le projectile uniquement.

$$\frac{dR_\theta}{dt} = \sum F_{e,\theta}$$

$$mL\ddot{\theta} = N_\theta - mg\cos\theta$$

La condition pour que le projectile quitte la nacelle est donc :

$$\ddot{\theta} \leq -\frac{g}{L}\cos\theta$$

Il faut donc que la décélaration de la nacelle soit inférieure au poids de Super Canard.

4. Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, la vitesse à la sortie de la nacelle (et donc celle du projectile) vaut :

$$v_0 = L\dot{\theta}_0 = L\sqrt{\frac{\mathrm{k}\frac{\pi^2}{8} - (\frac{M}{2} + m)Lg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{k}{32}\pi^2}{\frac{1}{2}(m + \frac{M}{3})L^2}}$$

25. a) $\overline{OG_1} = x\overline{1}_x + y\overline{1}_y ; \overline{v_{G_1}} = \dot{x}\overline{1}_x + \dot{y}\overline{1}_y$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\overline{v_{G_2}} = \overline{v_{G_1}} + \dot{\theta}\overline{1}_z \times (\frac{l}{2}\sin\theta\overline{1}_x - \frac{l}{2}\cos\theta\overline{1}_y) = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\overline{1}_x + (\dot{y} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta)\overline{1}_y$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta) + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{12}\right]$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta) + \frac{h^2\dot{\theta}^2}{12}\right]$$

$$V = (m_1 + m_2 + m_3)gy - gl\cos\theta(\frac{m_2}{2} + m_3)$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2(\frac{m_2}{3} + m_3) + \frac{1}{2}l\dot{\theta}(\dot{y}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta)(m_2 + 2m_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_3\frac{h^2\dot{\theta}^2}{12} - (m_1 + m_2 + m_3)gy + gl\cos\theta(\frac{m_2}{2} + m_3)$$

Contraintes:

$$y = \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{R}{\cos\alpha}}_{\text{constant avec } tg\alpha = \frac{1}{2}} \quad => (\delta y - \frac{\delta x}{2} = 0)\lambda_1$$

Roulement sans glissement :

$$(\delta\varphi + \frac{\sqrt{5}\delta x}{2R} = 0)\lambda_2$$

$$\begin{cases} x : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\sin\theta = -\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\sqrt{5}\lambda_2}{2R} \\ y : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\cos\theta + (m_1 + m_2 + m_3)g = \lambda_1 \\ \theta : (\frac{m_2}{2} + m_3)l^2\ddot{\theta} + m_3\frac{h^2\ddot{\theta}}{12} + \frac{1}{2}l\begin{bmatrix}(m_2 + 2m_3)(\ddot{y}\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta) \\ +\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta) + gl\sin\theta\end{bmatrix} = 0 \\ \varphi : \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi} = \lambda_2 \\ \dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{5}\dot{x}}{2R} \\ \dot{y} = \frac{\dot{x}}{2} \end{cases}$$

b) Contraintes:

$y = R$

Roulement sans glissement :

$(\delta\varphi + \frac{\delta x}{R} = 0)\lambda$

Potentiel Ressort :

$V = \frac{k(x-R)^2}{2} => -\frac{\partial(-V)}{\partial q_i} = k(x-R)$

$$\begin{cases} x : (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\sin\theta + k(x-R) = \frac{\lambda}{R} \\ \theta : (\frac{m_2}{2} + m_3)l^2\ddot{\theta} + m_3\frac{L^2\ddot{\theta}}{12} + \frac{1}{2}l\begin{bmatrix}(m_2 + 2m_3)(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) \\ +\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - gl\sin\theta\end{bmatrix} = 0 \\ \varphi : \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi} = \lambda \\ \dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}}{R} \end{cases}$$