

Delhayé Quentin

Dumont Arnaud

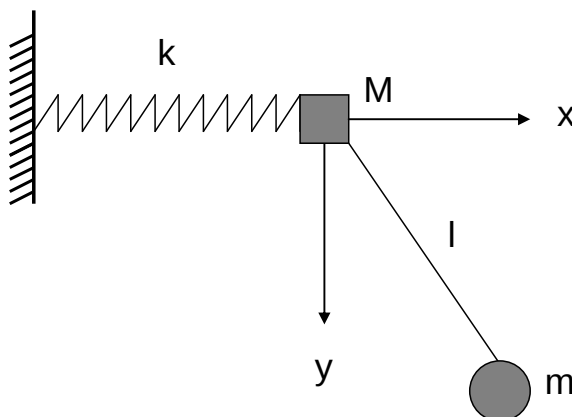
Projet Matlab

Enoncé

1. Un pendule est constitué d'une masse ponctuelle m à l'extrémité d'une barre sans masse de longueur l . L'autre extrémité de cette barre est attachée à une masse ponctuelle M qui peut se mouvoir horizontalement et qui est solidaire d'un ressort de longueur nulle au repos et de constante de rappel k . Ce ressort peut s'étendre indifféremment dans les deux sens. L'extrémité du ressort non solidaire de la masse M peut avoir un mouvement imposé $A \cdot \sin(\omega t)$

On demande

1. d'écrire les équations du mouvement en fonction des paramètres m , M , k , A et ω
2. d'écrire la valeur de l'énergie du système. Est-elle constante ?
3. d'étudier avec Matlab le mouvement en faisant varier les paramètres m , M , k en considérant $A = 0$
4. d'étudier avec Matlab le mouvement en faisant varier les paramètres m , M , k en considérant A différent de 0



1) Équations du mouvement :

Pour étudier le mouvement du système et l'influence des paramètres sur celui-ci, il a d'abord fallu mettre le mouvement sous forme d'équations.

Nous avons donc décomposé les forces agissant sur le système, à savoir :

- La force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k \cdot x \vec{1}_x$
- La force de pesanteur : $\vec{F}_p = -m \cdot g \vec{1}_y = -m \cdot g \cdot (\cos(\theta) \vec{1}_r + \sin(\theta) \vec{1}_\theta)$
- La force de tension dans le câble : $\vec{T} = T \vec{1}_r$

Où $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$ forment les axes cartésiens fixes classiques, et $\vec{1}_r$ et $\vec{1}_\theta$ les axes polaires liés au pendule.

De plus, nous devons considérer l'apport d'un éventuel mouvement forcé : $x_A = A.\sin(\omega t)$

Grâce à ça, nous avons pu utiliser le théorème du moment cinétique pour dégager trois équations liées entre elles par la force de tension $\bar{T}$, en considérant $\dot{r}$ et $\dot{r}$ comme nuls :

$$m(\ddot{x}\sin(\theta) - r\dot{\theta}^2) = mg\cos(\theta) - T$$

$$m(\ddot{x}\cos(\theta) + r\ddot{\theta}) = -mg\sin(\theta)$$

$$M\ddot{x} = T\sin(\theta) - kx - A\omega^2\sin(\omega t)$$

En isolant T et en le réinjectant dans la dernière équation, on arrive à deux équations différentielles à deux inconnues $x(t)$ et $\theta(t)$:

$$\ddot{x} = \frac{mg\cos(\theta)\sin(\theta) - kx - A\omega^2\sin(\omega t) + mr\dot{\theta}^2\sin(\theta)}{m\sin^2(\theta) + M}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g\sin(\theta)}{r} - \frac{\cos(\theta)}{r} \cdot \frac{mg\cos(\theta)\sin(\theta) - kx - A\omega^2\sin(\omega t) + mr\dot{\theta}^2\sin(\theta)}{m\sin^2(\theta) + M}$$

Voici la fonction Matlab à intégrer dans la fonction ode45 de Matlab :

```
function dy = foncPendule(t,y)
global k l m M g A w
dy=zeros(4,1);
dy(1) = y(2); % \dot{x}
dy(3) = y(4); % \dot{\theta}
% \ddot{x} :
dy(2) = (m*g*cos(y(3))*sin(y(3)) + m*l*sin(y(3))*y(4)^2 - k*(y(1)) - w^2 *
A*sin(w*t)) / (M+m*sin(y(3))^2);
% \ddot{\theta} :
dy(4) = (-g*sin(y(3)))/l - (cos(y(3))*(m*g*cos(y(3))*sin(y(3)) +
m*l*sin(y(3))*y(4)^2 - k*y(1) - w^2 * A*sin(w*t))) / (M*l +
m*l*sin(y(3))^2);
```

Et le code permettant la simulation du mouvement des masses :

```
global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.1:300],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);

N=11;h=0.1;lbloc=0.1;
x1=zeros(N+1,1);y1=zeros(N+1,1);
x1bis=zeros(1,1);y1bis=zeros(1,1);% position bout du pendule
x1bloc=zeros(2,1);y1bloc=zeros(2,1);% bloc

for i=2:max(size(t1))

    %Modele 1
```

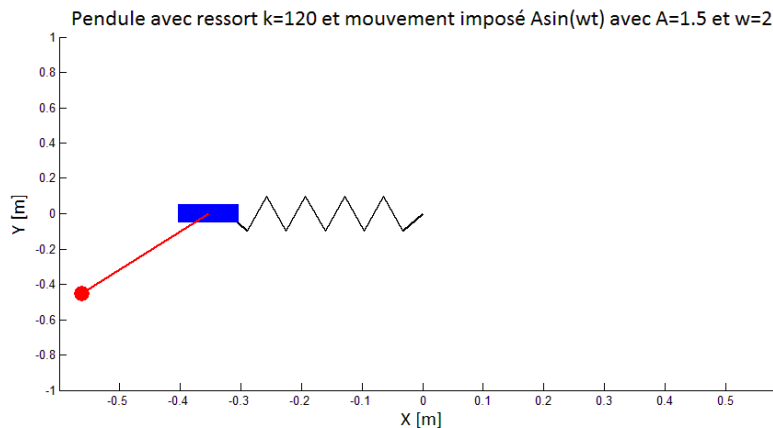
```

for j=1:N+1 %ressort
    x1(j)=teta1(i,1)*(j-1)/(N); %teta1(i,1) = x
    y1(j)=h*(-1)^(j+1);
end
y1(1)=0;y1(end)=0;y1(end-1)=0;
x1bis=x1(end)+l*sin(teta1(i,3));
y1bis=-l*cos(teta1(i,3)); %teta1(i,3) = theta
x1bloc(1)=x1(end)-lbloc/2;x1bloc(2)=x1(end)+lbloc/2;

subplot(1,1,1,'replace');
title(['Pendule avec ressort - k=',num2str(k),' avec mouvement impose
de Asin(wt) avec A=',num2str(A),' et w=',num2str(w)]);
xlabel('X [m]');
ylabel('Y [m]');
axis([-2*x10 2*x10 -2*l 2*l]);
%Trace modele 1
line(x1,y1,'Color','k','LineWidth',1.5);
line([x1bloc(1) x1bloc(2)],[0 0], 'LineWidth',15);
%epaississement de la ligne pour simuler un bloc
line([x1(end) x1bis],[y1(end) y1bis], 'Color','r','LineWidth',2);
line([x1bis],[y1bis], 'Marker','.', 'MarkerSize',40, 'Color','r');

drawnow;
end

```



2) Énergie

Ayant résolu numériquement nos deux équations, intéressons-nous à la valeur de l'énergie du système. Celle-ci est donnée par la somme des énergies cinétiques et potentielles de chacun des deux objets massiques composant le système.

On a, pour l'énergie cinétique :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

$$E_c = \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2}$$

$$E_c = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2}{2}$$

Et pour l'énergie potentielle :

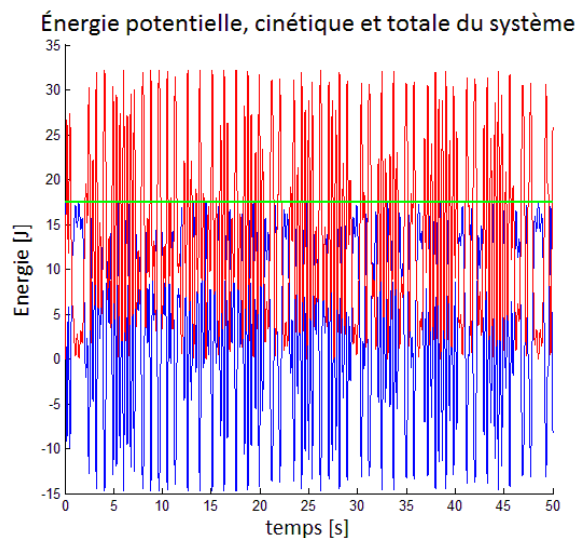
$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_p = \frac{k(x - A \sin(\omega t))^2}{2} + mgl \cos \theta$$

En sommant les deux, on a l'énergie totale du système et on peut vérifier la validité de notre résolution numérique. En effet, le système étant conservatif, l'énergie totale doit rester constante, et ce même en cas de mouvement chaotique.

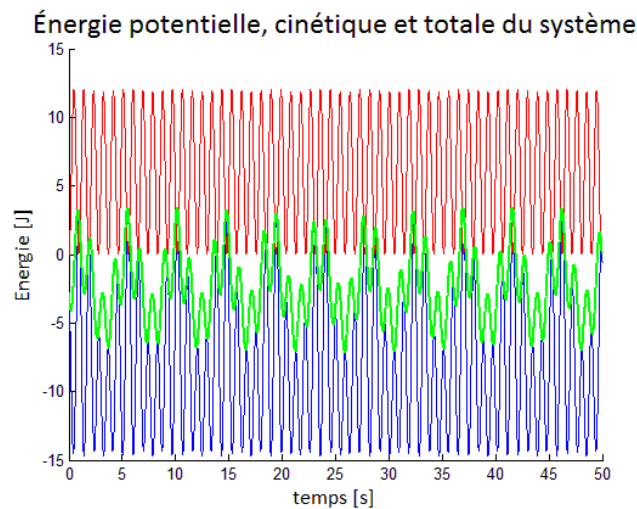
```
global k l m M g A w
k=620; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.05:50],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);

for i=1:size(t1)
    T(i) = 1/2 * teta1(i,2)^2 * (M+m) + m * l * teta1(i,2) * teta1(i,4) *
cos(teta1(i,3)) + 1/2 * m * l^2 * teta1(i,4)^2;
    V(i) = 1/2 * k * (teta1(i,1)-A*sin(w*t1(i)))^2 - m * g * l *
cos(teta1(i,3));
end
hold on
plot(t1(:),V)
plot(t1(:),T, 'Color','r')
plot(t1,V+T, 'Color','g')
title('Energies potentielle, cinétique et totale du système')
xlabel('temps [s]')
ylabel('Energie [J]')
```



La somme de l'énergie potentielle (bleu) et cinétique (rouge) donne une fonction constante, représentée en vert, malgré la forte instabilité des deux énergies.

Si l'on ajoute un mouvement imposé périodique, on observe une énergie qui varie périodiquement. Par exemple, pour $k = 170$, $A = 0.1$ et $w = 2$:



3) Étude du mouvement pour $A = 0$

Tout d'abord, nous avons choisi nos conditions initiales et notre paramètre d'étude. En tant qu'étudiants ingénieurs, il nous a semblé intéressant de travailler avec des paramètres plausibles, pouvant caractériser une situation réelle. Comme nous avons travaillé dans le Système International d'unités, nous avons pris des masses de l'ordre du kilogramme, et des elongations de l'ordre du demi-mètre.

Voici les conditions initiales que nous nous sommes données :

- La masse M : 8kg
- La masse m : 3kg
- La longueur du pendule : 0,5m
- L'élongation initiale du ressort : 0,3m
- L'angle de départ du pendule : $\pi / 4$ rad

Pour notre paramètre d'étude, la constante de raideur k , nous avons travaillé sur des valeurs de l'ordre de la dizaine et de la centaine de N/m.

Tout d'abord, nous avons étudié la périodicité du mouvement du système pour différentes valeurs de k , à l'aide du plan des phases, qui est ici une représentation de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de l'angle θ .

```
global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.02:300],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);
```

```

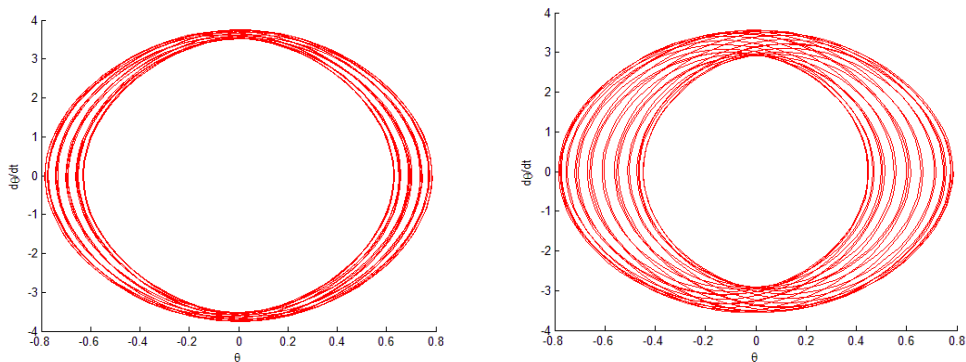
for i=2:max(size(t1))

    subplot(1,1,1);
    %plan des phases : \theta(d\theta/dt)
    ylabel('d\theta/dt');
    xlabel('\theta');
    line([teta1(i-1,3) teta1(i,3)], [teta1(i-1,4) teta1(i,4)], 'Color', 'r');
    drawnow;
end

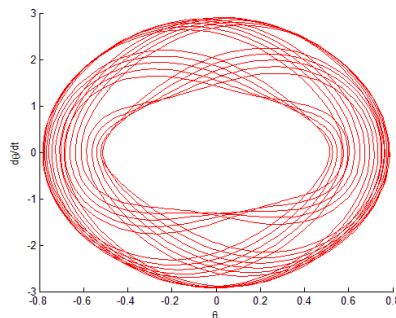
```

Dès l'introduction d'un ressort très peu rigide, on observe une démultiplication assez rapide de la période.

Plans des phases pour $k = 20, 40$:



On observe un doublement de la période, et, pour $k=140$, on constate que le mouvement, même s'il reste non chaotique, tend à devenir de plus en plus imprévisible :



Nous confirmons cette tendance vers le chaos avec une section de Poincaré où nous superposons deux conditions initiales très légèrement différentes pour pouvoir constater la présence ou non d'une caractéristique majeure du chaos : la sensibilité aux conditions initiales. Nous modifierons la valeur de l'élongation initiale du ressort en lui ajoutant 10^{-5} m.

```

global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=2;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
x20=0.30001; x_dot20=0; teta20=pi/4; teta_dot20=0;
p = pi*sqrt(l/g); %periode d'echantillonnage
options=odeset('RelTol',1e-4);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:p:300*p],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);
[t2,teta2] = ode45('foncPendule',[0:p:300*p],[x20 x_dot20 teta20
teta_dot20],options);

```

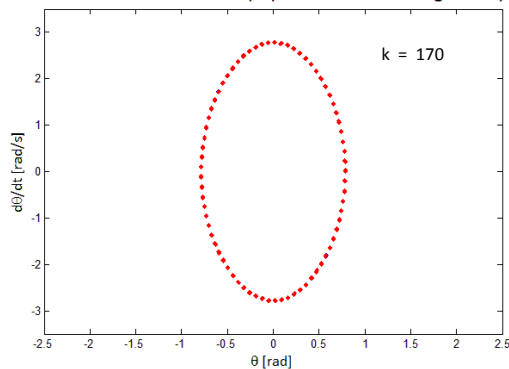
```
teta_dot20],options);
box on; hold on
axis([-2.5 2.5 -5 5]);

for i=1:1:size(t1)
    line(teta1(i,3), teta1(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 5)
    line(teta2(i,3), teta2(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 5, 'Color',
'r')
    drawnow
end

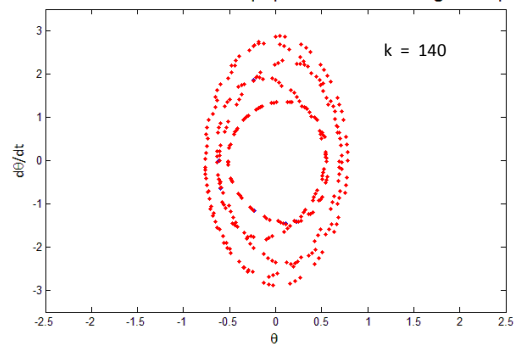
title('Section de Poincare stroboscopique - echantillonnage:
2.\pi/\omega')
xlabel('\theta')
ylabel('d\theta/dt')
```

Pour $k = 170$, nous observons un phénomène notable de retour de périodicité simple. La section de Pointcarré pour une telle valeur donne une courbe ellipsoïdale comme le suggère la première figure. La deuxième image, illustrant la section de Poincaré pour $k = 140$, montre un comportement beaucoup moins prévisible. Cependant, la superposition des deux solutions aux conditions initiales différentes écarte le chaos.

Section de Poincare stroboscopique - échantillonnage: $\pi \cdot \sqrt{l/g}$

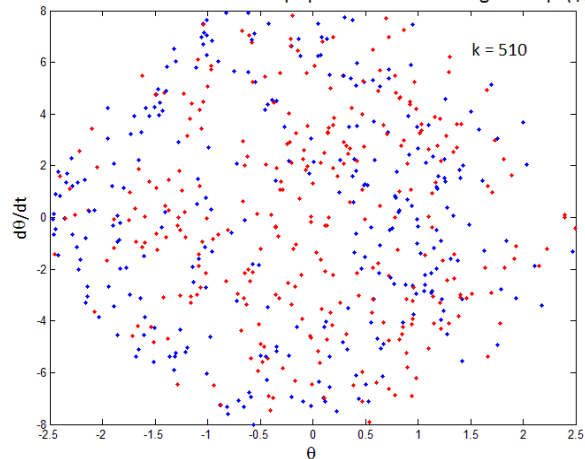


Section de Poincare stroboscopique - échantillonnage: $\pi \cdot \sqrt{l/g}$



De plus, nous pouvons donner l'exemple d'un comportement chaotique pour $k = 510$, où les deux solutions s'écartent l'une de l'autre assez rapidement :

Section de Poincaré stroboscopique - échantillonnage: $\pi \cdot \sqrt{l/g}$

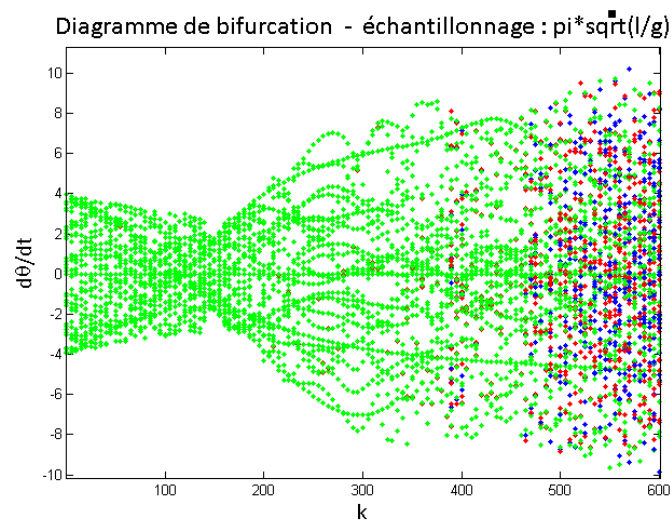


Enfin, nous pouvons étudier l'influence globale de k sur la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ mesurée à intervalles de temps réguliers grâce au diagramme de bifurcation.

```
global k l m M g A w
l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
x20=0.30001; x_dot20=0; teta20=pi/4; teta_dot20=0;
x30=0.29999; x_dot30=0; teta30=pi/4; teta_dot30=0;
options=odeset('RelTol',1e-4);
p = pi*sqrt(l/g); %periode d'echantillonnage

box on; hold on

for k = 0:5:600
    [t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x10 x_dot10 teta10
    teta_dot10],options);
    [t2,teta2] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x20 x_dot20 teta20
    teta_dot20],options);
    [t3,teta3] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x30 x_dot30 teta30
    teta_dot30],options);
    for i=1:1:size(t1)
        line(k, teta1(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8)
        line(k, teta2(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8, 'Color', 'r')
        line(k, teta3(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8, 'Color', 'g')
    end
    drawnow;
end
title('Diagramme de bifurcation - echantillonnage: pi*sqrt(l/g)')
xlabel('k')
ylabel('d\theta/dt')
```



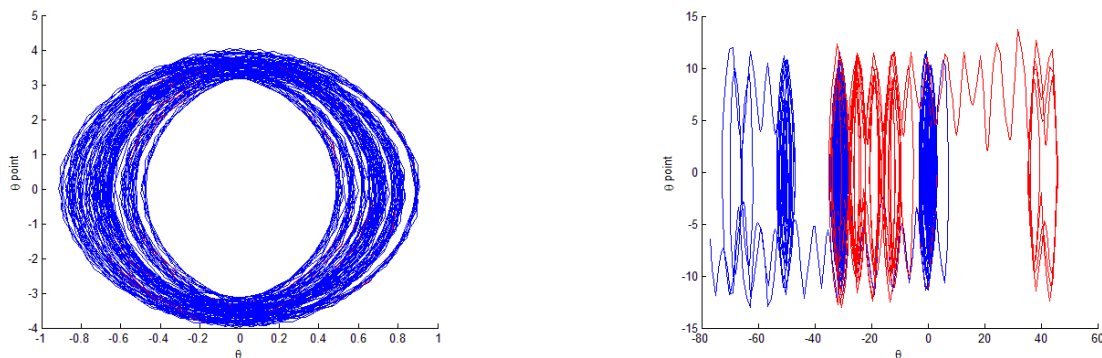
De nouveau, nous pouvons étudier la sensibilité aux conditions initiales du mouvement dû à plusieurs valeurs du paramètre k . Ici, nous pouvons en outre noter divers comportements de façon plus globale. Ainsi, nous voyons que vers $k = 390$, le mouvement devient plus sensible aux conditions initiales, puis se stabilise jusqu'à $k = 450$, pour, finalement, devenir chaotique. Nous pouvons dire que la zone proche de $k = 460$ représente une transition vers le chaos. En effet, à partir de ces valeurs, les solutions aux conditions initiales proches divergent, ce qui se traduit par un écart notable entre les points de couleurs différentes.

4) Étude du mouvement pour $A \neq 0$

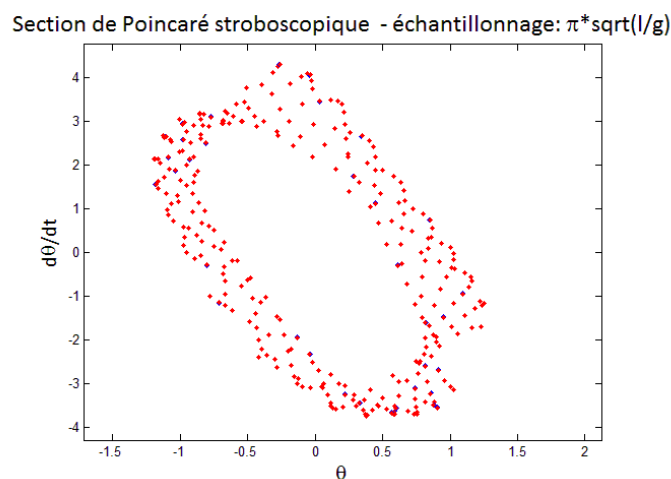
L'étude du mouvement avec mouvement imposé sera similaire à l'étude précédente, et nous prendrons, pour garder une possibilité de comparaison, les mêmes conditions initiales. Comme $A \sin(\omega t)$ est un mouvement imposé, ses unités sont le mètre. Notre élongation initiale du ressort étant toujours de 30 cm, nous prendrons des valeurs de l'amplitude A du même ordre. Pour la pulsation, nous la fixerons arbitrairement à $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$. L'étude se basera essentiellement sur l'influence de la valeur de A .

Tout d'abord, étudions l'influence de A sur des mouvements périodiques déjà considérés, comme pour $k = 20$, en observant les diagrammes des phases pour différents A . Pour pouvoir observer la sensibilité aux conditions aux limites, nous avons superposé deux solutions issues d'élongations initiales différant d'un centième de millimètre

Plans des phases pour $k = 20$, $A = 1.5$ (à gauche), et $A = 15$ (à droite)

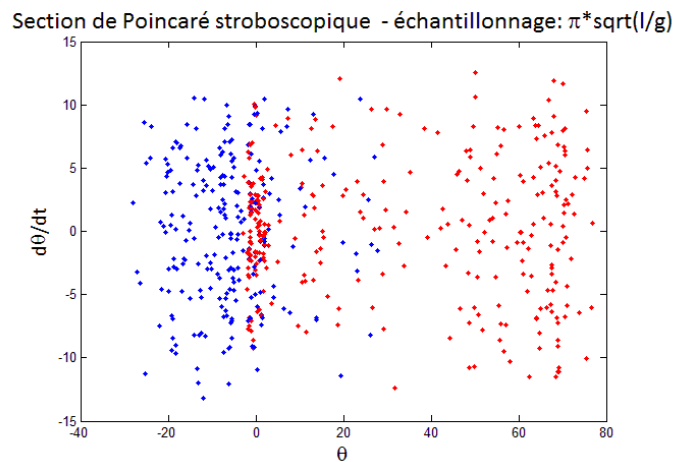


Nous voyons donc qu'un A élevé influe beaucoup sur le mouvement et tend à le rendre plus chaotique. Confirmons cette intuition avec une section de Poincaré, cette fois-ci pour $k = 170$, en gardant $A = 15$:



Nous constatons ici le peu d'influence d'un A petit devant k , car contrairement au cas précédent, le mouvement ne devient pas chaotique.

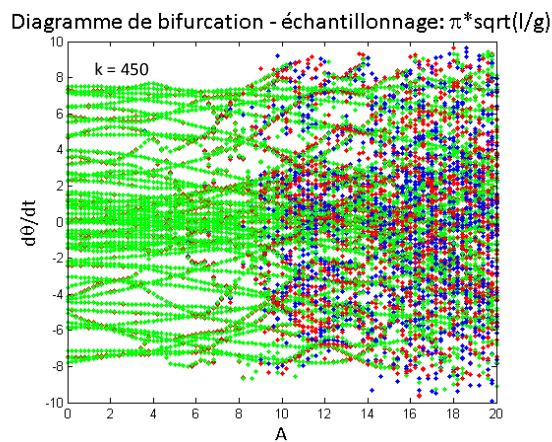
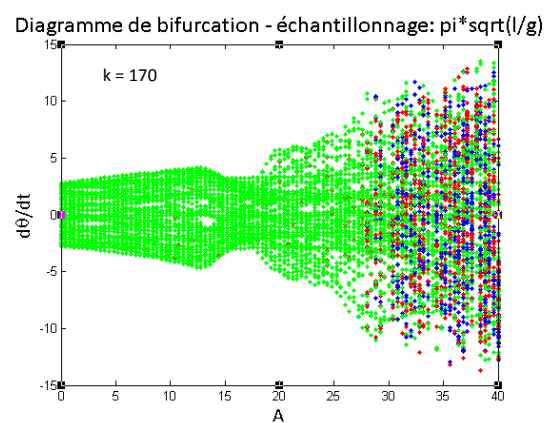
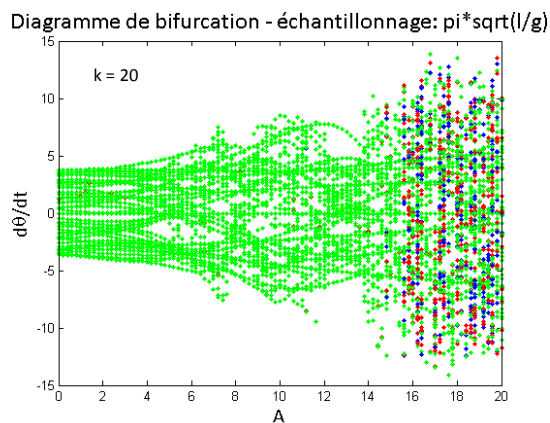
Cependant, pour $A = 30$, le chaos semble apparaître de façon évidente :



Pour conclure, nous allons dessiner 3 diagrammes de bifurcation pour 3 valeurs différentes de k , où nous ferons varier A de 0 à 20 ou 40 selon les grandeurs de k . Les valeurs de k que nous allons tester seront 20, 170, et 450.

Le code Matlab permettant de tracer ces diagrammes est très similaire à celui permettant de tracer le diagramme de bifurcation qui teste les valeurs de k .

Voici les diagrammes de bifurcation respectivement pour $k = 20$, 170 et 450 :



A l'aide de ces trois diagrammes de bifurcation, nous pouvons conclure que l'influence du mouvement forcé sur le caractère chaotique du mouvement dépend de l'intensité relative de celui-ci par rapport à k et de la stabilité du mouvement sans mouvement forcé. En effet, nous pouvons remarquer que pour $k = 170$, qui offre un mouvement très périodique sans mouvement forcé, il faut un A supérieur à 30 pour amener du chaos, alors que pour $k = 450$, un A relativement petit suffit. Ceci est facilement compréhensible puisque nous avons conclu que, sans mouvement forcé, $k = 450$ était une valeur limite de chaos.

5) Conclusion

Grâce à cette simulation Matlab, nous avons pu tout d'abord montrer la conservation de l'énergie dans le système isolé ainsi qu'une variation d'énergie dans le cas où l'on impose un mouvement longitudinal au bloc relié au ressort.

Nous avons aussi pu mettre en évidence que le système étudié, pour des masses de quelques kilogrammes et des longueurs de l'ordre du demi-mètre, présente un comportement chaotique à partir d'une constante de raideur $k = 460$ N/m. Enfin, nous avons pu voir qu'un mouvement imposé au bloc massique avait tendance à accentuer le chaos, voire à le créer pour des conditions initiales normalement stables.