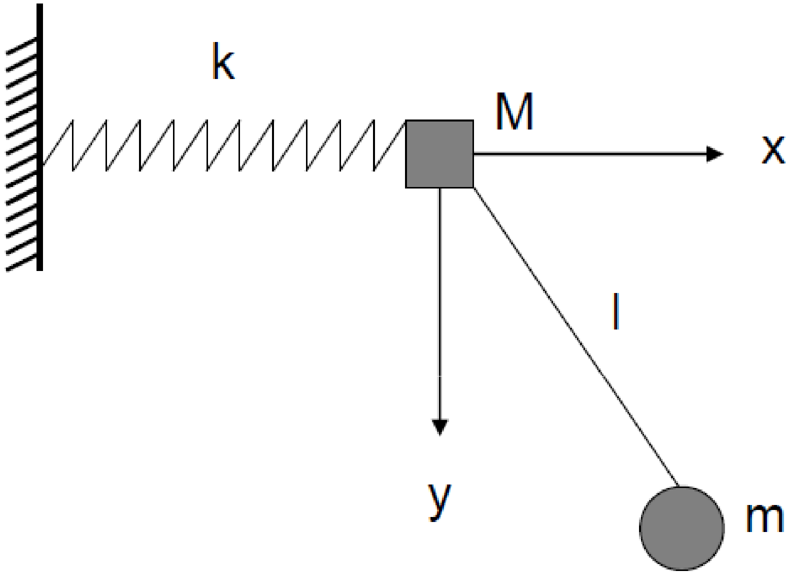
ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

Projet n°2
Mécanique rationnelle

Delhaye Quentin
Dumont Arnaud

1) Equations du mouvement :



-La force de rappel du ressort :

$$\overline{F_k} = -k.x.\overline{1_x}$$

-La force de pesanteur :

$$\overline{F_p} = -m.g.\overline{1_y} = -m.g.(\cos(\theta).\overline{1_r} + \sin(\theta).\overline{1_\theta})$$

- La force de tension dans le câble : $\overline{T} = T.\overline{1_r}$

$$m(\ddot{x}\sin(\theta) - r\dot{\theta}^2) = mg\cos(\theta) - T$$

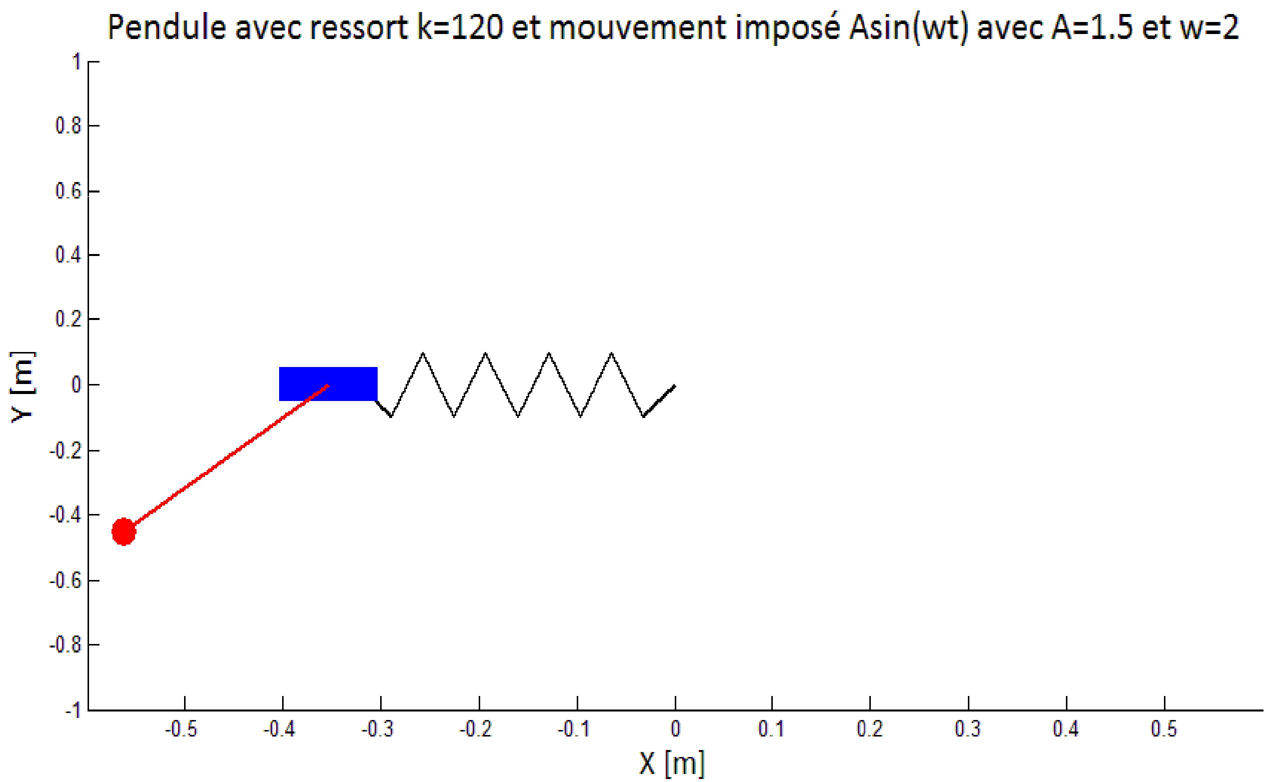
$$\longrightarrow \quad m(\ddot{x}\cos(\theta) + r\ddot{\theta}) = -mg\sin(\theta)$$

$$M\ddot{x} = T\sin(\theta) - kx - A\omega^2\sin(\omega t)$$

Slide 1

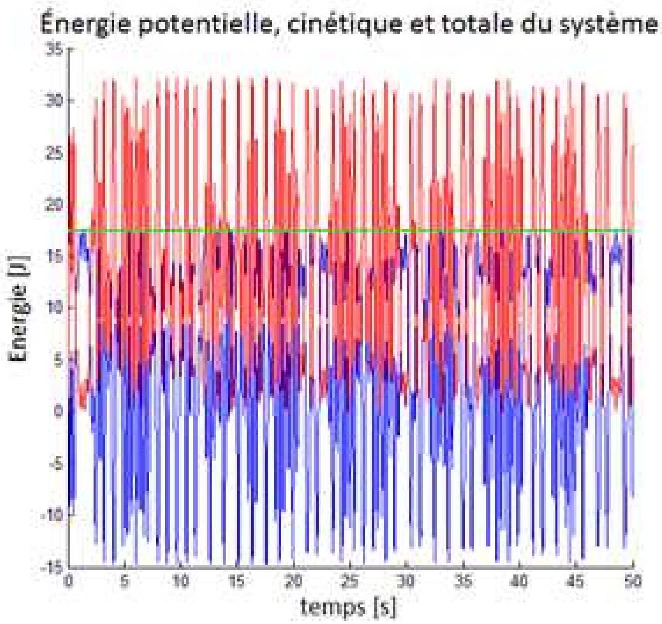
1) Equations du mouvement :

→ Résolution par la fonction ode45 de Matlab



Slide 2

2) Calcul de l'énergie



- Energie cinétique

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

$$E_c = \frac{M\dot{x}_1^{\,2}}{2} + \frac{m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2}$$

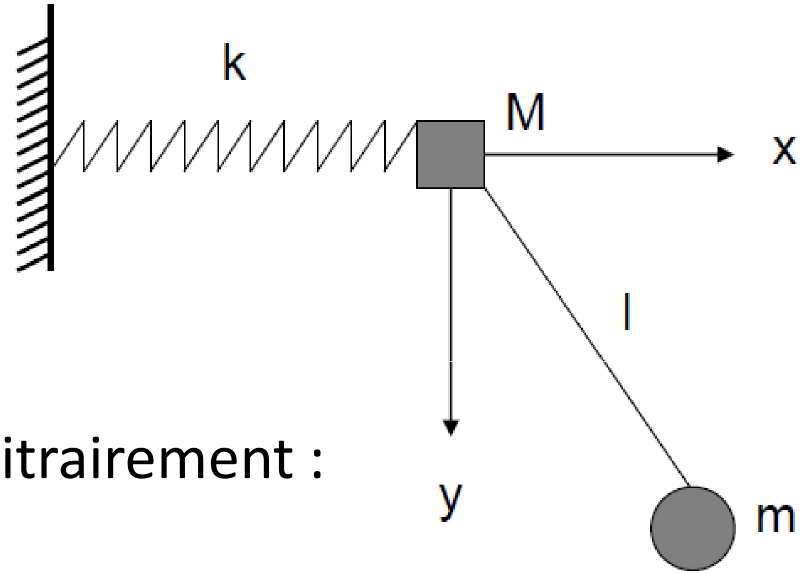
$$E_c = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2}{2}$$

- Energie potentielle

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_p = \frac{k(x - A.\sin(wt))^2}{2} + mgl\cos\theta$$

3) Etude du mouvement sans force extérieure



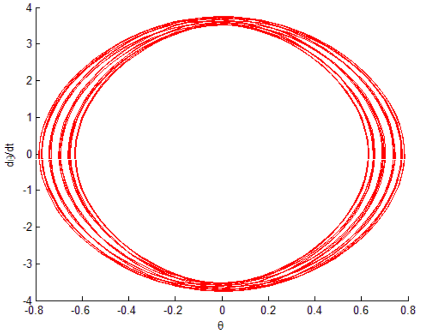
Conditions initiales fixées arbitrairement :

- La masse M : 8kg
- La masse m : 3kg
- La longueur du pendule : 0,5m
- L'élongation initiale du ressort : 0,3m
- L'angle de départ du pendule : $\pi / 4$ rad

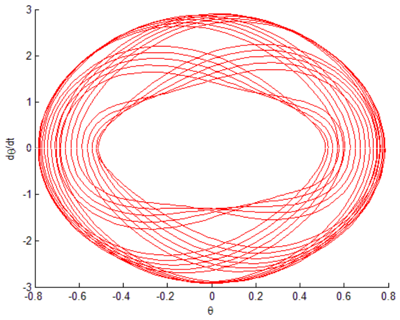
3) Etude du mouvement sans force extérieure

- Plans des phases

k = 20

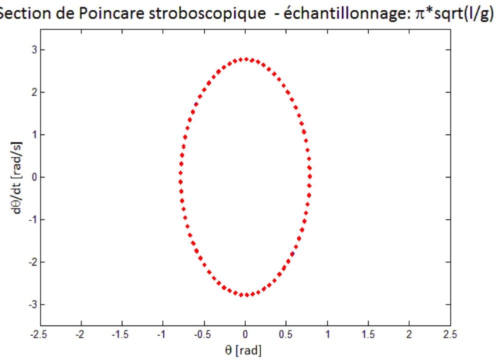


k = 140

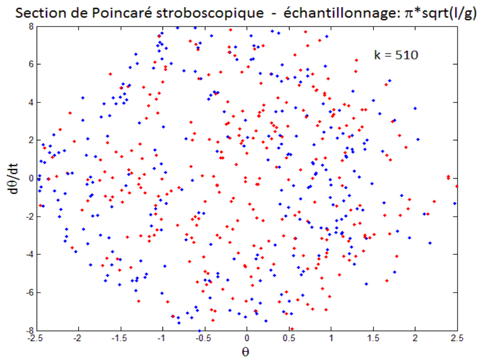


- Sections de Poincaré

k = 170



k = 510

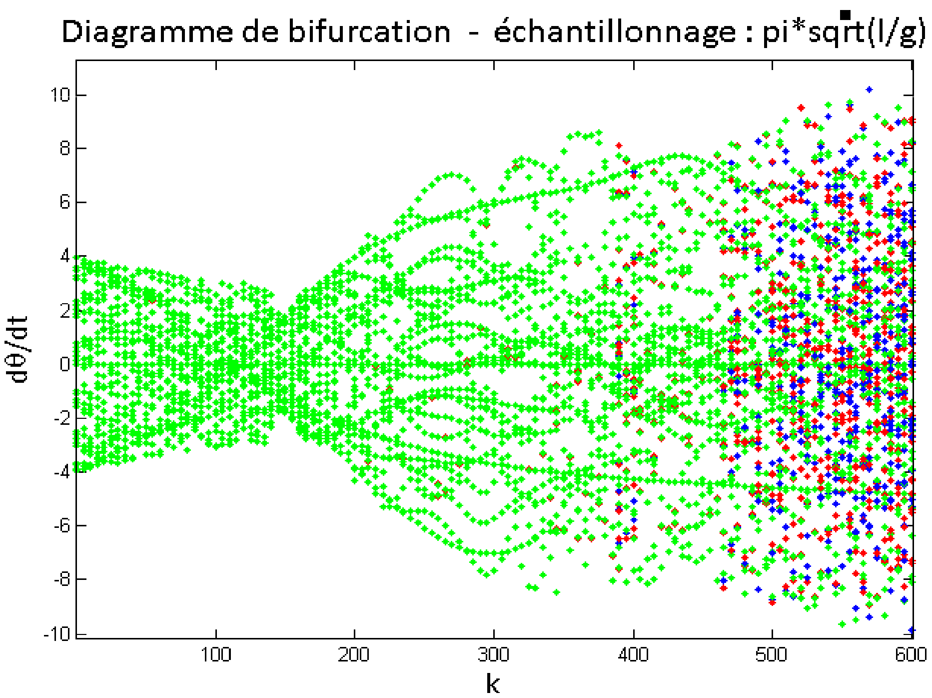


Slide 5

3) Etude du mouvement sans force extérieure

Test global des différentes valeurs de k

➔ Diagramme de bifurcation

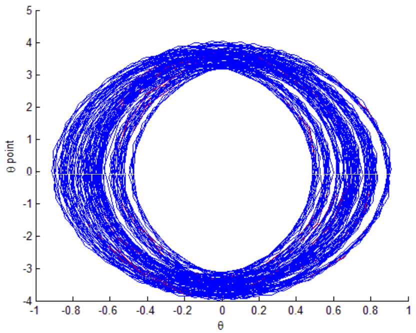


Slide 6

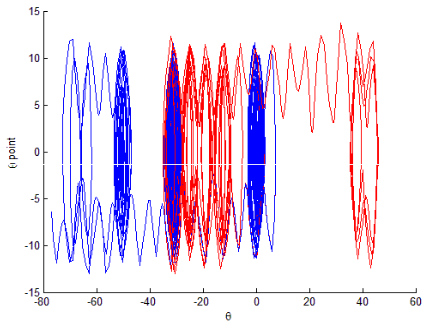
4) Etude du mouvement avec force extérieure

- Plans des phases

k = 20
A = 1,5

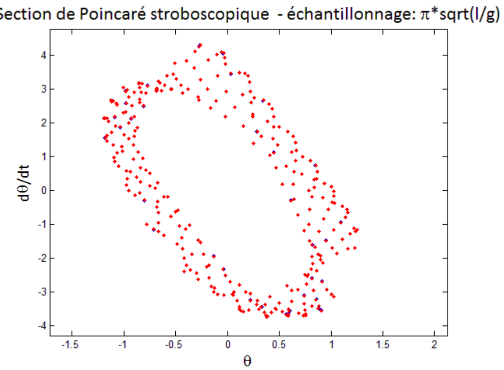


k = 20
A = 15

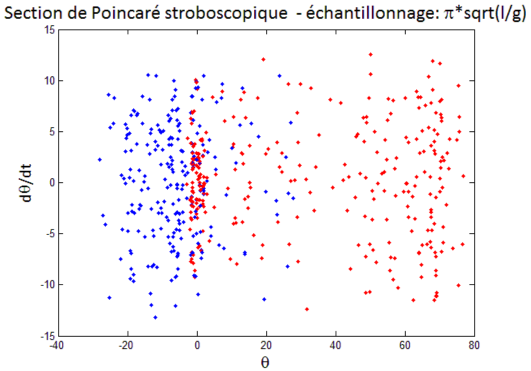


- Sections de Poincaré

k = 170
A = 15



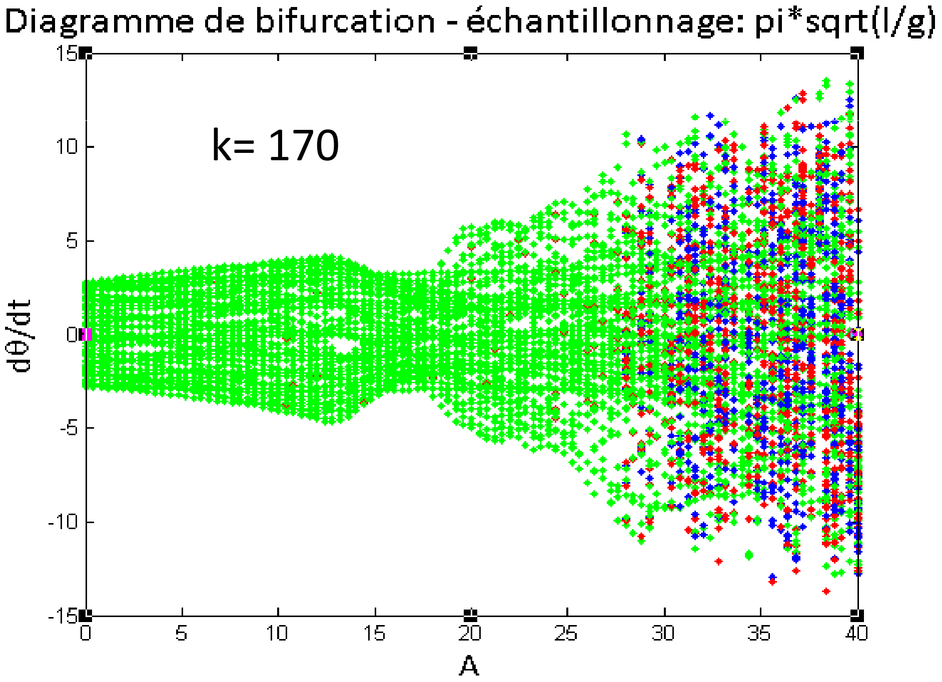
k = 170
A = 30



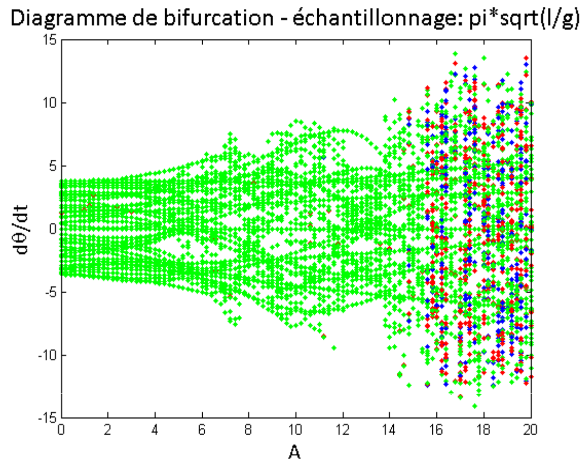
Slide 7

4) Etude du mouvement avec force extérieure

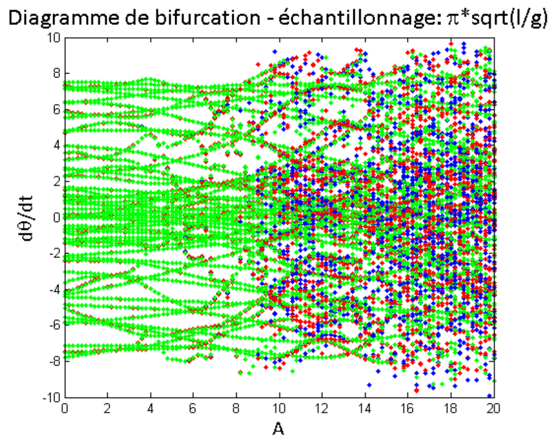
Diagrammes de bifurcations pour différents k



k= 20



k= 450



5) Conclusions

- Conservation de l'énergie

- Étude du chaos :

  - Valeurs limites, valeurs stables sans mouvement forcé

  - Influence du mouvement forcé

Annexe : codes matlab

1) Équations différentielles à résoudre avec ode45

```
function dy = foncPendule(t,y)
global k l m M g A w
dy=zeros(4,1);
dy(1) = y(2); % \dot{x}
dy(3) = y(4); % \dot{\theta}
% \ddot{x} :
dy(2) = (m*g*cos(y(3))*sin(y(3)) + m*l*sin(y(3))*y(4)^2 - k*(y(1)) - w^2 *
A*sin(w*t)) / (M+m*sin(y(3))^2);
% \ddot{\theta} :
dy(4) = (-g*sin(y(3)))/l - (cos(y(3))*(m*g*cos(y(3))*sin(y(3)) +
m*l*sin(y(3))*y(4)^2 - k*y(1) - w^2 * A*sin(w*t))) / (M*l +
m*l*sin(y(3))^2);
```

Annexe : codes matlab

2) Affichage dynamique de la solution

```
global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.1:300],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);

N=11;h=0.1;lbloc=0.1;
x1=zeros(N+1,1);y1=zeros(N+1,1);
x1bis=zeros(1,1);y1bis=zeros(1,1);% position bout du pendule
x1bloc=zeros(2,1);y1bloc=zeros(2,1);% bloc

for i=2:max(size(t1))

    for j=1:N+1 %ressort
        x1(j)=teta1(i,1)*(j-1)/(N); %teta1(i,1) = x
        y1(j)=h*(-1)^(j+1);
    end
    y1(1)=0;y1(end)=0;y1(end-1)=0;
    x1bis=x1(end)+l*sin(teta1(i,3));
    y1bis=-l*cos(teta1(i,3)); %teta1(i,3) = theta
    x1bloc(1)=x1(end)-lbloc/2;x1bloc(2)=x1(end)+lbloc/2;

    subplot(1,1,1,'replace');
    title(['Pendule avec ressort - k=',num2str(k),' avec mouvement impose
de Asin(wt) avec A=',num2str(A),' et w=',num2str(w)]);
    xlabel('X [m]'); ylabel('Y [m]');
    axis([-2*x10 2*x10 -2*l 2*l]);
    line(x1,y1,'Color','k','LineWidth',1.5);
    line([x1bloc(1) x1bloc(2)],[0 0], 'LineWidth',15);
    %épaississement de la ligne pour simuler un bloc
    line([x1(end) x1bis],[y1(end) y1bis],'Color','r','LineWidth',2);
    line([x1bis],[y1bis],'Marker','.','MarkerSize',40,'Color','r');
    drawnow;
end
```

Annexe 2

Annexe : codes matlab

3) Calcul et affichage de l'énergie du système

```
global k l m M g A w
k=620; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.05:50],[x10  x_dot10  teta10
teta_dot10],options);

for i=1:size(t1)
    T(i)  = 1/2 * teta1(i,2)^2 *  (M+m)  + m * l * teta1(i,2)  * teta1(i,4)  *
cos(teta1(i,3))  + 1/2 * m * l^2 * teta1(i,4)^2;
    V(i)  = 1/2 * k *(teta1(i,1)-A*sin(w*t1(i)))^2  - m * g * l *
cos(teta1(i,3));
end
hold on
plot(t1(:),V)
plot(t1(:),T,'Color','r')
plot(t1,V+T,'Color','g')
title('Energies potentielle, cinétique et totale du système')
xlabel('temps [s]')
ylabel('Energie [J]')
```

Annexe 3

Annexe : codes matlab

4) Plan des phases

```
global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4;  teta_dot10=0;
options=odeset('RelTol',1e-8);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:0.02:300],[x10  x_dot10  teta10
teta_dot10],options);

for i=2:max(size(t1))

    subplot(1,1,1);
    %plan des phases  : \theta(d\theta/dt)
    ylabel('d\theta/dt');
    xlabel('\theta');
    line([teta1(i-1,3)  teta1(i,3)],[teta1(i-1,4)  teta1(i,4)],'Color','r');
    drawnow;
end
```

Annexe 4

Annexe : codes matlab

5) Section de Poincaré stroboscopique

```
global k l m M g A w
k=170; l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=2;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
x20=0.30001; x_dot20=0; teta20=pi/4; teta_dot20=0;
p = pi*sqrt(l/g); %periode d'echantillonage
options=odeset('RelTol',1e-4);
[t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:p:300*p],[x10  x_dot10 teta10
teta_dot10],options);
[t2,teta2] = ode45('foncPendule',[0:p:300*p],[x20  x_dot20 teta20
teta_dot20],options);
box on; hold on
axis([-2.5 2.5 -5 5]);

for i=1:1:size(t1)
    line(teta1(i,3), teta1(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 5)
    line(teta2(i,3), teta2(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 5, 'Color',
'r')
    drawnow
end

title('Section de Poincare stroboscopique  - echantillonnage:
2.\pi/\omega')
xlabel('\theta')
ylabel('d\theta/dt')
```

Annexe 5

Annexe : codes matlab

6) Diagramme de bifurcation

```
global k l m M g A w
l=0.5; m=3; M=8; g=9.81; A=0; w=0;
x10=0.3; x_dot10=0; teta10=pi/4; teta_dot10=0;
x20=0.30001; x_dot20=0; teta20=pi/4; teta_dot20=0;
x30=0.29999; x_dot30=0; teta30=pi/4; teta_dot30=0;
options=odeset('RelTol',1e-4);
p = pi*sqrt(l/g); %periode d'echantillonage

box on; hold on

for k = 0:5:600
    [t1,teta1] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x10 x_dot10 teta10
teta_dot10],options);
    [t2,teta2] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x20 x_dot20 teta20
teta_dot20],options);
    [t3,teta3] = ode45('foncPendule',[0:p:p*30],[x30 x_dot30 teta30
teta_dot30],options);
    for i=1:1:size(t1)
        line(k, teta1(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8)
        line(k, teta2(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8, 'Color', 'r')
        line(k, teta3(i,4), 'Marker', '.', 'Markersize', 8, 'Color', 'g')
    end
    drawnow;
end
title('Diagramme de bifurcation  - echantillonnage: pi*sqrt(l/g)')
xlabel('k')
ylabel('d\theta/dt')
```

Annexe 6