TENSEUR d'INERTIE

Element du tenseur d'inertie : $I^{\alpha\beta} = \int_{système} \left(x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta \right) dm$

Changement d'axe : $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$

Axes principaux : $tg 2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$

Steiner : $I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2 \delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)$

Tenseur

Tenseur par rapport au point O dans le système d'axe $Oxyz$: $\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$

Moment d'inertie par rapport au point O : $I_O == \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right)$

Moment d'inertie par rapport au plan xy : $I_{xy} = \int z^2 dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe z : $I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$

Produit d'inertie par rapport à x et y : $P_{xy} = \int xydm$

Un <u>moment d'inertie</u> n'est jamais <u>nul</u> à l'exception :

- du moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe de la tige
- des moments d'inertie d'une masse ponctuelle qui n'a pas de volume

Un <u>produit d'inertie</u> est <u>nul</u> si :

- une des coordonnées est nulles pour tout poiont du solide (par ex. une plaque mince en xy, aura z=0 pour tous les point de la plaque. Donc P_{xz} et P_{yz} seront nuls.)
- il existe un plan de symétrie découpant un domaine d'intégration en deux parties complètement symétriques : triangle isocèle avec un plan de symétrie yz, le domaine d'intégration de x est symétrique et va annuler les produits d'inertie P_{xy} et P_{xz}. L'intégrale d'une puissance impaire sur un domaine symétrique est nulle.

Attention : seule une symétrie orthogonale entrainera la nullité du produit d'inertie contenant l'axe perpendiculaire au plan de symétrie.

<u>Rayon de giration</u> par rapport à l'axe y :

$I_y = mr_{gy}^2 \Rightarrow r_{gy} = \sqrt{\dfrac{I_y}{m}}$: distance à laquelle il faut mettre une masse ponctuelle (égale à la masse du solide étudié) pour obtenir le même moment d'inertie. Par ex. pour une plaque rectangulaire : $I_y = \dfrac{ML^2}{12} = Mr_{gy}^2 \Rightarrow r_{gy} = \sqrt{\dfrac{L^2}{12}}$

3D : $I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = I_x + I_y - 2I_{xy} \underbrace{=}_{z = \text{axe de révolution}} 2I_x - 2I_{xy} \Rightarrow I_x = \dfrac{I_z}{2} + I_{xy}$

2D : $I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \underbrace{=}_{\text{2D}(z=0)} I_x + I_y \underbrace{=}_{z = \text{axe de révolution}} 2I_x$

Steiner

$$\boxed{\text{Steiner : } I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right)}$$

Démonstration :

$\overline{OG}\left(a_x;a_y;a_z\right) \Rightarrow x_i = X_i + a_i$ avec X_i les coordonnées du point P dans le système d'axe centré en G

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(x_i\, x_i\, \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha\, x_\beta\right) dm = \int \left(\left(X_i + a_i\right)\left(X_i + a_i\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(X_\alpha + a_\alpha\right)\left(X_\beta + a_\beta\right)\right) dm =$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} + a_i a_i \delta_{\alpha\beta} + 2X_i a_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta - X_\alpha a_\beta - X_\beta a_\alpha - a_\alpha a_\beta\right) dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = \int \left(X_i X_i \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta\right) dm + \int \left(a_i a_i \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) dm + 2\int X_i a_i \delta_{\alpha\beta} dm - \int X_\alpha a_\beta dm - \int X_\beta a_\alpha dm$$

$$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right) + 2a_i\delta_{\alpha\beta}\underbrace{\int X_i dm}_{m\overline{GG}_i} - a_\beta\underbrace{\int X_\alpha dm}_{m\overline{GG}_\alpha} - a_\alpha\underbrace{\int X_\beta dm}_{m\overline{GG}_\beta} \Rightarrow \boxed{I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + m\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right)}$$

Par définition du centre de masse $\overline{OG} = \dfrac{\int \overline{OP}dm}{m} \Rightarrow mOG_i = \int OP_i dm \Rightarrow mX_i = \int x_i dm \Rightarrow 0 = \int X_i dm$

Donc dans les axes aux centre de masse, les coordonnées de ce centre de masse valent $(0,0,0)$

Calcul de P_{xy} par Steiner:

$$\begin{cases} x = x_G + a_{x_G} \\ y = y_G + a_{y_G} \end{cases} \Rightarrow \overline{OG}\left(a_{x_G}, a_{y_G}, a_{z_G}\right)$$

$$P_{xy} = \int xy dm = \int \left(x_G + a_{x_G}\right)\left(y_G + a_{y_G}\right) dm = P_{x_G y_G} + m a_{x_G} a_{y_G} + a_{x_G}\underbrace{\int y_G dm}_{=0} + a_{y_G}\underbrace{\int x_G dm}_{=0}$$

ou

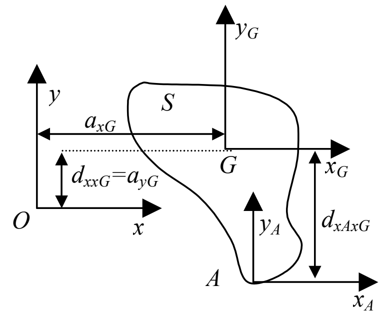
$$I_O^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M\left(a^2\delta^{\alpha\beta} - a^\alpha a^\beta\right) \Rightarrow -P_{xy} = -P_{x_G y_G} - M a_{x_G} a_{y_G} \quad \Rightarrow P_{xy} = P_{x_G y_G} + m a_{x_G} a_{y_G}$$

En pratique :

$\overline{OG}\left(a_x, a_y, a_z\right) \Rightarrow I_x = I_{x_G} + m\left(a_y^2 + a_z^2\right)$ et $P_{xy} = P_{x_G} + m\left(a_x a_y\right)$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I}}_O = \overline{\overline{I}}_G + m\begin{pmatrix} \left(a_y^2 + a_z^2\right) & -a_x a_y & -a_x a_z \\ -a_x a_y & \left(a_x^2 + a_z^2\right) & -a_y a_z \\ -a_x a_z & -a_y a_z & \left(a_x^2 + a_y^2\right) \end{pmatrix}$$

Exemple en 2D :



Pour calculer le moment d’inertie du solide S par rapport à l’axe x passant par O : (avec le tenseur connu en G)

$I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2$

Parfois, il est plus facile de calculer le moment d’inertie par rapport à un axe ne passant pas par G : (avec le tenseur connu en A)

$I_{x_A} = I_{x_G} + md_{x_A x_G}^2 \Rightarrow I_{x_G} = I_{x_A} - md_{x_A x_G}^2$

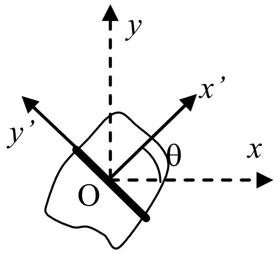
$\Rightarrow I_x = I_{x_G} + md_{xx_G}^2 = I_{x_A} + m\left(d_{xx_G}^2 - d_{x_A x_G}^2\right)$

Changement d'axes

Changement d'axe : $I'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu I^{ij}$
Axes principaux : $tg2\theta = \dfrac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$

Exemple de calcul de changement d'axe.

Rotation autour de l'axe z (Utilisation pratique du changement d'axe utilisable seulement en 2D):



$$I_x \underset{\substack{\text{Décomposition}\\ \text{par la}\\ \text{définition}}}{=} \int y^2 dm \underset{\substack{\text{Application}\\ \text{du chgmt}\\ \text{d'axe}}}{=} \int \left(\cos\theta y' + \sin\theta x'\right)^2 dm$$

$$= \int \left(\cos^2\theta y'^2 + \sin^2\theta x'^2 + 2\cos\theta\sin\theta x' y'\right) dm$$

$$= \cos^2\theta \int y'^2 dm + \sin^2\theta \int x'^2 dm + 2\cos\theta\sin\theta \int x' y' dm$$

$$\underset{\substack{\text{Retour à la}\\ \text{définition}\\ \text{ds les axes'}}}{=} \cos^2\theta I_{x'} + \sin^2\theta I_{y'} + 2\cos\theta\sin\theta P_{x'y'}$$

La même décomposition peut se faire pour le moment d'inertie par rapport à y et pour le produit d'inertie P_{xy}.

$$I_y \underset{\substack{\text{Décomposition}\\ \text{par la}\\ \text{définition}}}{=} \int x^2 dm \underset{\substack{\text{Application}\\ \text{du chgmt}\\ \text{d'axe}}}{=} \int \left(\cos\theta x' - \sin\theta y'\right)^2 dm$$

$$= \cos^2\theta I_{y'} + \sin^2\theta I_{x'} - 2\cos\theta\sin\theta P_{x'y'}$$

$$P_{xy} = \int xy dm = \int \left(\cos\theta x' - \sin\theta y'\right)\left(\cos\theta y' + \sin\theta x'\right) dm$$

$$= \cos^2\theta P_{x'y'} - \sin^2\theta P_{x'y'} + \cos\theta\sin\theta\left(I_{y'} - I_{x'}\right)$$

Axes principaux

Les axes principaux sont les axes pour lesquelles les produits d'inertie sont nuls.
Il faut faire un changement de base de manière à trouver l'angle θ dont on doit tourner le repère pour annuler les produits d'inertie.

Exemple de recherche d'axe principaux

Dans l'exemple précédent, si on suppose que les termes d'inertie sont connus dans le système d'axe *Ox'y'*, on annule le terme P_{xy}. En annulant ce produit d'inertie, on trouve l'angle θ duquel il faut tourner le repère pour trouver les axes principaux en un point *O*.
Dans l'exemple précédent, pour une rotation du repère d'un angle θ vers la droite

$$P_{xy} = \cos^2\theta P_{x'y'} - \sin^2\theta P_{x'y'} + \cos\theta\sin\theta\left(I_{y'} - I_{x'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta P_{x'y'} + \frac{\sin 2\theta}{2}\left(I_{y'} - I_{x'}\right) = 0 \Rightarrow tg2\theta = -\frac{2P_{x'y'}}{I_{y'} - I_{x'}}$$