LAGRANGE

Rem : $\frac{\partial mx}{\partial x} = m$; $\frac{\partial mx}{\partial \dot{x}} = 0$; $\frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} = 0$; $\frac{dm\dot{x}}{dx} = \frac{dm\dot{x}}{dt} \frac{dt}{dx} = m \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

Avec n-p degré de liberté :

Lagrangien : $L = T - V$ avec $T = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \bar{I}_{G_i} \bar{\omega}_i \right)$

n coordonnée de Lagrange $\Rightarrow$ n équation de Lagrange ($i = 1, \dots, n$)

$$Q_i = \sum_h \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad \delta \bar{r}_h = \sum_i \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$$

Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ avec $Q_i = Q_i^*_{(\text{Force dérivant d'un potentiel})} + Q_i_{(\text{Force dérivant d'un potentiel})}$

Pour les forces dérivent d'un potentiel : $\delta r = -\delta V$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_h \bar{F}_h \cdot \delta \bar{r}_h}_{\delta r} = \underbrace{\sum_i \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i}_{\delta V} = \sum_i Q_i \delta q_i = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \Rightarrow Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^*_{(\text{Force dérivant d'un potentiel})} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^* \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Si les variables ne sont pas indépendantes, on a p relations holonomes : $\phi_j(q_i, t) = 0$

avec p facteurs λ_j correspondants

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \right) \cdot \lambda_j$$

Equation de Lagrange modifiée : $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}$

Attention : Des termes sont souvent oubliés dans la deuxième dérivée partielle ainsi que dans la dérivée totale..