

GYROSCOPE

Démonstration

Théorème du moment cinétique en G : $\frac{d\overline{M}_G}{dt} = \overline{m}_{e,G}$

Système constitué d'un solide S dans lequel un gyroscope (solide de révolution) g^0 est en rotation.

Rotation du solide S : $\overline{\omega}$; Rotation propre du gyroscope autour de son axe de révolution : $\overline{\Omega}$

=> Le gyroscope subit donc une double rotation : $\overline{\omega} + \overline{\Omega}$

Vitesse des points appartenant au gyroscope par rapport au solide : $\overline{v}_h^0 = \overline{\Omega} \times \overline{G^0 P_h^0}$

Résultante cinétique (relative) du gyroscope $\overline{R}^0 = \int \overline{v}_h^0 dm^0 = m^0 \overline{v}_{G^0} = 0$ (centre de masse du gyroscope

fixe dans son repère relatif)

Moment cinétique (relatif) du gyroscope par rapport à son centre de masse :

$$\overline{M}_G^0 = \int \overline{G^0 P_h^0} \times (\overline{v}_h^0 dm^0) = \int \overline{G^0 P_h^0} \times (\overline{\Omega} \times \overline{G^0 P_h^0}) dm^0 = \int \left[(\overline{G^0 P_h^0} \cdot \overline{G^0 P_h^0}) \overline{\Omega} - (\overline{G^0 P_h^0} \cdot \overline{\Omega}) \overline{G^0 P_h^0} \right] dm^0$$

=> $\boxed{\overline{M}_G^0 = \Gamma \overline{\Omega}}$ avec Γ = moment d'inertie central du gyroscope autour de son axe de révolution.

$$\overline{M}_G = \int \overline{G P_h} \times (\overline{v}_h dm) + \int \overline{G P_h^0} \times (\overline{v}_h^0 dm^0) = \int \overline{G P_h} \times (\overline{v}_h dm) + \underbrace{\int \overline{G G^0} \times (\overline{v}_h^0 dm^0)}_{\substack{\overline{G G^0} \times \int \overline{v}_h^0 dm^0 \\ = \overline{G G^0} \times \overline{R}^0 = 0}} + \int \overline{G^0 P_h^0} \times (\overline{v}_h^0 dm^0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{M}_G = \overline{M}_{G,0} + \Gamma \overline{\Omega}}$$

avec $\overline{M}_{G,0}$ représentant le moment cinétique du système ($S + g^0$) quand le gyroscope est à l'arrêt.

$$\frac{d\overline{M}_G}{dt} = \frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} + \frac{d\Gamma \overline{\Omega}}{dt} = \boxed{\frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} + \overline{\omega} \times \Gamma \overline{\Omega} = \overline{m}_{e,G}} \text{ en effet, } \Gamma \text{ et } \Omega \text{ sont constants.}$$

Seul la direction de $\overline{\Omega}$ change avec ω

$$\Rightarrow \frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} = \overline{m}_{e,G} - \overline{\omega} \times \Gamma \overline{\Omega} = \overline{m}_{e,G} + \Gamma \overline{\Omega} \times \overline{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} = \overline{m}_{e,G} + \overline{C}_g} \text{ avec le couple gyroscopique : } \boxed{\overline{C}_g = \Gamma \overline{\Omega} \times \overline{\omega}}$$

En simplifier : Couple gyroscopique :

$$\frac{d}{dt} \overline{M}_O = \sum \overline{m}_{e,O} \text{ avec } \overline{M}_O = \underbrace{\overline{M}_{O,0}}_{\Sigma (\Omega=0)} + \underbrace{\overline{M}_{gyr}}_{Gyrostat} \text{ et } \overline{M}_{gyr} = \Gamma \overline{\Omega}$$

$$\frac{d\overline{M}_{gyr}}{dt} = \Gamma \underbrace{\frac{d\overline{\Omega}}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{xyz,rel}}} + \overline{\omega} \times \overline{M}_{gyr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\overline{M}_{O,0}}{dt} = \sum \overline{m}_{e,O} + \underbrace{\Gamma \overline{\Omega} \times \overline{\omega}}_{\text{couple gyroscopique}}}$$