CINETIQUE

Résultante cinétique

$\overline{R} = m\overline{v}_G$

Moment cinétique

$\overline{M_A} = \overline{M_B} + \overline{AB} \times \overline{R}$ entre deux point quelconque

Si A appartient au solide : $\overline{M_A} = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$

<u>Démonstration :</u>

$\overline{M_A} = \int \overline{AP} \times \overline{v}_P \, dm$ avec $P, A \in$ Solide => $\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AP}$

$$\overline{M_A} = \int \overline{AP} \times \left(\overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AP}\right) dm = \overline{M_A} = \int \overline{AP} \times \overline{v}_A \, dm + \int \overline{AP} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{AP}\right) dm =$$

$$\overline{M_A} = \left(\int \overline{AP} \, dm\right) \times \overline{v}_A + \int \overline{AP} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{AP}\right) dm = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \int \left(\overline{AP}.\overline{AP}\right)\overline{\omega} \, dm - \int \left(\overline{AP}.\overline{\omega}\right)\overline{AP} \, dm$$

or par définition :

$$\left[\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]_\alpha = I_A^{\alpha\beta}\omega_\beta = \left(\int \left(AP_i \; AP_i \; \delta_{\alpha\beta} - AP_\alpha \; AP_\beta\right) dm \right)\omega_\beta = \int \left(AP_i \; AP_i \; \delta_{\alpha\beta} \; \omega_\beta - AP_\alpha \; AP_\beta \; \omega_\beta\right) dm$$

$$\left[\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}\right]_\alpha = \int \left(AP_i \; AP_i \; \omega_\alpha - AP_\alpha \; AP_\beta \; \omega_\beta\right) dm = \int \left(AP^2 \; \omega_\alpha - \overline{AP}.\overline{\omega} \; AP_\alpha \right) dm$$

=> $\boxed{\overline{M_A} = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}}$

Rem :

$$\left[\overline{AP} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{AP}\right)\right]_i = \delta_{ijk} AP_j \left(\overline{\omega} \times \overline{AP}\right)_k = \delta_{ijk} AP_j \left(\delta_{klm}\omega_l AP_m\right) = \delta_{kij}\delta_{klm} AP_j \left(\omega_l AP_m\right) = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) AP_j \left(\omega_l AP_m\right)$$

$$= \delta_{jm} AP_j \omega_i AP_m - \delta_{jl} AP_j \omega_l AP_i = AP_j AP_j \omega_i - AP_j AP_i \omega_j = AP^2 \omega_i - \overline{AP}.\overline{\omega} \; AP_i$$

<u>Calcul du moment cinétique</u>

1. Utiliser la formule adéquate :
    a. le point appartient ou non au solide ?
    b. Le point est fixe ?
    c. Le point est le centre de masse ?
2. Calculer chacun des termes de l'équation dans le repère le plus simple
3. Projeter ensuite tous les axes dans un même et unique repère pour sommer le tout.

Energie cinétique

$$T = \frac{mv_A^2}{2} + m\overline{v}_A.\left(\overline{\omega} \times \overline{AG}\right) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

Au centre de masse G : $T = \frac{mv_G^2}{2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}$

En un point fixe O : $T = \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_O.\overline{\omega}$

L'énergie cinétique est un **scalaire** donc on a le choix des axes de travail. Chaque terme peut être calculé dans le système d'axe le plus adéquat.

<u>Démonstration :</u>

$$T=\frac{1}{2}\int dm\bar{v}_P{}^2=\frac{1}{2}\int dm\left(\bar{v}_A+\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{v}_A+\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)=\frac{1}{2}\int dm\left(\bar{v}_A.\bar{v}_A+2\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)+\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\bar{v}_A{}^2\int dm+\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times\int dm\overline{AP}\right)+\frac{1}{2}\int dm\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)$$

$$T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\int dm\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)$$

$$\bar{a}.\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}.\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\Rightarrow\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right).\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)=\bar{\varpi}.\left(\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\underbrace{\int dm\left(\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)}_{\bar{\bar{I}}_A.\bar{\varpi}}$$

On montre que :

$$\left[\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right]_i=\delta_{ijk}AP_j\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)_k=\delta_{ijk}AP_j\left(\delta_{k\alpha\beta}\omega_\alpha AP_\beta\right)=\delta_{kij}\delta_{k\alpha\beta}AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right)$$

$$=\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\right)AP_j\left(\omega_\alpha AP_\beta\right)=\delta_{i\alpha}AP_j\omega_\alpha AP_j-AP_\alpha\omega_\alpha AP_i=\underbrace{\underbrace{\left(AP_jAP_j\delta_{i\alpha}-AP_\alpha AP_i\right)}_{\int\ =I_A{}^{i\alpha}\text{ par définition du tenseur}}\omega_\alpha}_{\int\ =I_A{}^{i\alpha}\omega_\alpha=\left[\bar{\bar{I}}_A\bar{\varpi}\right]_i}$$

ou, par définition :

$$\left[\bar{\bar{I}}_A.\bar{\varpi}\right]_i=I_A^{ij}\omega_j=\left(\int\left(AP_k\ AP_k\ \delta_{ij}-AP_i\ AP_j\right)dm\right)\omega_j=\int\left(AP_k\ AP_k\ \delta_{ij}\ \omega_j-AP_i\ AP_j\ \omega_j\right)dm$$

$$=\int\left(\left(\overline{AP}.\overline{AP}\right)\omega_i-\left(\overline{AP}.\bar{\varpi}\right)AP_i\right)dm=\left[\int dm\left(\overline{AP}\times\left(\bar{\varpi}\times\overline{AP}\right)\right)\right]_i$$

$$\Rightarrow\boxed{T=\frac{m\bar{v}_A{}^2}{2}+\bar{v}_A.\left(\bar{\varpi}\times m\overline{AG}\right)+\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_A.\bar{\varpi}}$$

Au centre de masse :

$$T=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_G.\bar{\varpi}$$

Dans les axes principaux :

$$T=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\begin{pmatrix}I_{G,x}&0&0\\0&I_{G,y}&0\\0&0&I_{G,z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\frac{m\bar{v}_G{}^2}{2}+\frac{1}{2}\left(I_{G,x}p^2+I_{G,y}q^2+I_{G,z}r^2\right)$$

Système

Quand le système est composé de plusieurs solides, on calcule chaque élément séparément et on somme le tout.

$$\overline{R}=\sum_i\overline{R_i}$$

$\overline{M_O}=\sum_i\overline{M_{O_i}}$ et pour chaque solide : $\overline{M_{O_i}}=\overline{M_{G_i}}+\overline{OG_i}\times\overline{R_i}$ et $\begin{cases}\overline{M_{G_i}}=\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\varpi}_i\\ \overline{R_i}=m\bar{v}_{G_i}\end{cases}$

$$T=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}mv_{G_i}^2+\frac{1}{2}\bar{\varpi}.\bar{\bar{I}}_{G_i}.\bar{\varpi}\right)$$

Chaque terme est calculé dans le système d'axes le plus simple. On uniformise ensuite le système d'axes pour sommer tous les termes.

Pour les termes contenant le tenseur d'inertie : il est plus simple de projeter le vecteur vitesse angulaire que de projeter le tenseur.