CINEMATIQUE

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Distribution des vitesses : } \bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BA} \\ \text{Distribution des accélérations : } \bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\varepsilon} \times \overline{BA} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{BA}\right)\end{array}}$$

$\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{\omega}$ et $\overline{BA}$ sont des valeurs absolues qui peuvent être exprimées dans le repère relatif de son choix.

Vitesse angulaire et accélération angulaire

Pour calculer la **vitesse angulaire** d'un solide, on recherche le vecteur de Darboux associé au repère final R_f complètement lié au solide. $\boxed{\bar{\omega}_{solide} = \bar{\omega}_{R_f/R_0}}$. Cette vitesse angulaire caractérise l'ensemble des rotations subies par le solide.

L'accélération angulaire est la dérivée absolue de la vitesse angulaire :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left.\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right|_{R_i} + \underbrace{\bar{\omega}_{R_i/R_0}}_{\substack{\text{vecteur de Darboux} \\ \text{pour dériver les axes}}} \times \underbrace{\bar{\omega}}_{\substack{\text{vecteur vitesse} \\ \text{angulaire du solide}}}$$

Si le vecteur vitesse angulaire est exprimé dans le repère R_i

$$\bar{\varepsilon} = \left.\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right|_{R_i} + \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \left(\bar{\omega}_{R_f/R_i} + \bar{\omega}_{R_i/R_0}\right) = \left.\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right|_{R_i} + \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \bar{\omega}_{R_f/R_i} + \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \bar{\omega}_{R_i/R_0} = \left.\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right|_{R_i} + \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \bar{\omega}_{R_f/R_i}$$

Calcul de la vitesse angulaire

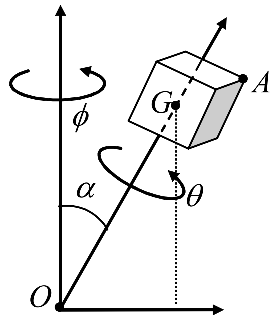
1. Définir le repère fixe
2. Définir chaque repère i exprimant une rotation (R_i) en 2D
3. Chaque repère est dextrogyre
4. Définir pour chaque R_i le vecteur de Darboux caractérisant la rotation : $\boxed{\bar{\omega}_{R_i/R_0} = \bar{\omega}_{R_i/R_{i-1}} + \bar{\omega}_{R_{i-1}/R_0}}$. Attention : tenir compte du sens de rotation, la vitesse angulaire peut être négative.
5. Définir chaque vecteur de Darboux dans son repère
6. Vérifier quel repère est le plus présent et exprimer tous les termes dans ce repère

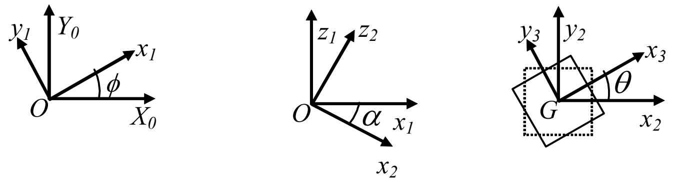
=> Les repères en 2D seront utilisés pour exprimer les changements de bases pour les transformations de repères

Rappel : le vecteur de Darboux est utilisé pour dériver des axes :

$$\frac{d\bar{1}_{x_i}}{dt} = \underbrace{\left.\frac{d\bar{1}_{x_i}}{dt}\right|_{R_i}}_{=0} + \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \bar{1}_{x_i} \Rightarrow \boxed{\frac{d\bar{1}_{x_i}}{dt} = \bar{\omega}_{R_i/R_0} \times \bar{1}_{x_i}}$$

Exemple : avec l'angle α constant





R_0 : Axe $Ox_0y_0z_0$ fixe.
R_1 : Axe $Gx_1y_1z_1$ tourne autour de l'axe $Z_0 = z_1$ (ϕ)
R_2 : Axe $Gx_2y_2z_2$ incliné d'un angle α par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, avec z2 lié à la tige, tourne autour de l'axe z_1 (ϕ)
R_3 : Axe $Gx_3y_3z_3$ liés au cube et tourne autour de z_1 (ϕ) et z_2 (θ)
=> les vecteurs de Darboux :

$$\bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} \;;\; \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \bar{\omega}_{R_2/R_1} + \bar{\omega}_{R_1/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} \;;\; \bar{\omega}_{R_3/R_0} = \bar{\omega}_{R_3/R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} = \dot{\phi}\bar{1}_{z_1} + \dot{\theta}\bar{1}_{z_2}$$

Vitesse d'un point

Calcul de la vitesse d'un point A du solide :

Par la formule de distribution des vitesses $\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BA}$

1. Choisir deux points du solide
2. Définir la vitesse angulaire du solide
3. Définir chaque vecteur de la manière la plus simple possible dans son repère
4. Vérifier quel repère est le plus présent et exprimer tous les vecteurs dans ce repère

Par dérivation des coordonnées : Calculer la dérivée absolue

$$\bar{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \left.\frac{d\overline{OA}}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{OA}$$

1. Choisir un point fixe
2. Dériver les axes si le repère utilisé est relatif
3. A ne pas utiliser en instantané !

<u>Exemple</u> :
avec $\overline{OA} = a\bar{1}_{x_2} + b\bar{1}_{y_2}$ =>

$$\frac{d\overline{OA}}{dt} = \dot{a}\bar{1}_{x_2} + a\left.\frac{d\bar{1}_{x_2}}{dt}\right|_{R_2} + \dot{b}\bar{1}_{y_2} + b\left.\frac{d\bar{1}_{y_2}}{dt}\right|_{R_2} = \dot{a}\bar{1}_{x_2} + \dot{b}\bar{1}_{y_2} + a.\bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{1}_{x_2} + b.\bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \bar{1}_{y_2}$$

$$= \dot{a}\bar{1}_{x_2} + \dot{b}\bar{1}_{y_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \left(a\bar{1}_{x_2} + b\bar{1}_{y_2}\right) = \dot{a}\bar{1}_{x_2} + \dot{b}\bar{1}_{y_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{OA} = \left.\frac{d\overline{OA}}{dt}\right|_{R_2} + \bar{\omega}_{R_2/R_0} \times \overline{OA}$$

Vitesse relative

Quand un point est animé d'une vitesse relative :

1. Définir la variable de longueur qui varie
2. Définir la vitesse relative (dérivée de la variable de longueur dans les axes relatifs)
3. Calculer la vitesse d'entrainement : si le point est fixé dans son repère relatif, la vitesse d'entrainement est calculée par la formule de distribution des vitesses entre le point P et l'origine du repère relatif (par exemple)

Si le vecteur OA est exprimé dans un repère relatif, ne pas oublier de dériver les axes :

Accélération d'un point

Par la formule de distribution des accélérations $\overline{a}_A = \overline{a}_B + \overline{\varepsilon} \times \overline{BA} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{BA}\right)$

1. Définir chaque vecteur de la manière la plus simple possible dans son repère
2. Vérifier quel repère est le plus présent et exprimer tous les vecteurs dans ce repère

Par dérivation des coordonnées : Calculer la dérivée absolue $\overline{a}_A = \dfrac{d\overline{v}_A}{dt}$

Si le vecteur OA est exprimé dans un repère relatif, ne pas oublier de dériver les axes comme pour la vitesse

Vitesse et accélération instantanée

Pour le calcul de vitesse et accélération instantanée, seule la méthode de distribution de vitesses et des accélérations peut être utilisée. Etant donné que la vitesse est calculée à un instant donné, sa valeur est un scalaire. Donc la dérivée de cette vitesse ne donnera jamais l'accélération instantanée.

Une autre méthode peut être appliquée :

Calculer la vitesse du point P du solide dans son mouvement global $\overline{v}_P$

Se placer dans le cas instantané (par exemple, quand P est en *A*) et calculer la vitesse $\overline{v}_{A_{\text{instantané}}} = \overline{v}_{P(P\equiv A)}$

Dériver $\overline{v}_P$ pour trouver l'accélération absolue d'un point P du solide : $\overline{a}_P$

Et calculer $\overline{a}_P$ à l'instant donné où *P* est en *A*. $\overline{a}_{A_{\text{instantané}}} = \overline{a}_{P(P\equiv A)}$

Etude du mouvement

Calcul de l'invariant scalaire avec la vitesse d'un point quelconque du solide $\boxed{\overline{v}_C.\overline{\omega}}$.

Si $\overline{v}_C.\overline{\omega} \neq 0$, le mouvement est un mouvement hélicoïdal instantané (mouvement de translation et de rotation de vecteur vitesse angulaire à définir). Il faut dans ce cas préciser l'axe hélicoïdal par rapport à un point du solide.

$$\overline{CQ} = -\frac{\overline{\omega} \times \left(\overline{v}_Q - \overline{v}_C\right)}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega} \quad \text{avec} \quad \overline{v}_Q = \frac{\overline{\omega}.\overline{v}_C}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}\overline{\omega}$$

Si $\overline{v}_C.\overline{\omega} = 0$, il faut étudier le mouvement cas par cas :

1. rotation instantanée si à un instant donné on peut définir un $\overline{\omega}$ autour d'un axe de rotation // à $\overline{\omega}$.
2. rotation continue si le $\overline{\omega}$ est identique tout au long du mouvement : si l'axe de rotation est fixe
3. rotation continue uniforme, si la rotation est continue et que le $\overline{\omega}$ est constant.

Contraintes de roulement sans glissement

Si il y a roulement sans glissement entre le solide S_1 et S_2 , la vitesse instantanée au point de contact D sera équivalente pour les deux solides : $\overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_{D\in S_2}$

Cette équation donne en général une condition liant les vitesses angulaires des deux solides.
Si le solide S_1 est le sol immobile, la vitesse instantanée du point de contact sera nulle => relation entre la translation et la rotation du solide S_2.

Exemple :

R1 lié à S1, R2 lié à AB et R3 lié à S3,

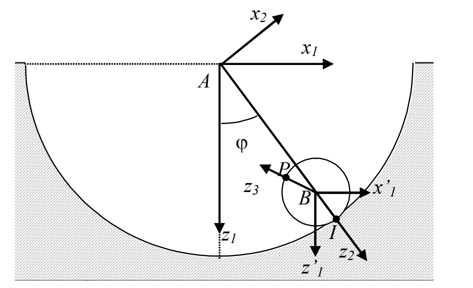
$\overline{\omega}_d = -\dot{\theta}\overline{1}_{y_2}$ avec $\dot{\theta}$ représentant la rotation absolue du disque par rapport à R1.

$\overline{v}_{I\in S_1} = 0$ et $\overline{v}_{I\in S_2} = \overline{v}_{B\in S_2} + \overline{\omega}_d \times \overline{BI}$

$\overline{v}_{I\in S_2} = L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} - \dot{\theta}a\overline{1}_{x_2}$ avec $\overline{v}_{B\in S_2} = \overline{v}_{B\in S_1} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_{AB} \times \overline{AB}$

$\Rightarrow L\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0$

Ou par dérivation des coordonnées absolues :



$$\overline{v}_{I\in S_2} = \frac{d\overline{OI}}{dt} = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right|_{P=I} = \left.\frac{d\left(x\overline{1}_{x_1} + L\overline{1}_{z_2} + a\overline{1}_{z_3}\right)}{dt}\right|_{P=I} = L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} - a\dot{\theta}\overline{1}_{x_3}\Big|_{P=I(z_3=z_2)} = L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} - a\dot{\theta}\overline{1}_{x_2}$$

Si $\dot{\alpha}$ représente la rotation des axes R3 par rapport à R2 , $\overline{\omega}_d = \left(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\right)\overline{1}_{y_2}$

La contrainte que l'on trouvera sera alors :

$\overline{v}_{I\in S_1} = 0$ et $\overline{v}_{I\in S_2} = \overline{v}_{B\in S_2} + \overline{\omega}_d \times \overline{BI} = L\dot{\varphi}\overline{1}_{x_2} + \left(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\right)a\overline{1}_{x_2} \Rightarrow \left(L + a\right)\dot{\varphi} = a\dot{\alpha}$

Cette dernière contrainte correspond bien à la longueur de l'arc PI qui est équivalente à la longueur de l'arc OI

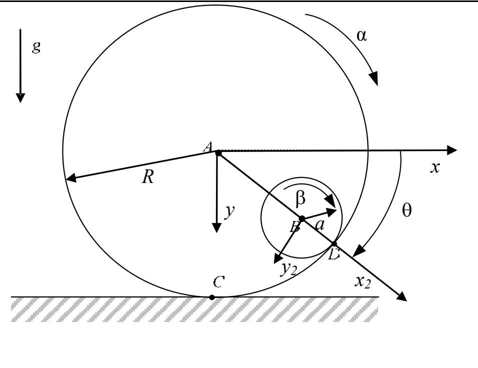
R1 lié à S1 tournant avec $\dot{\alpha}$: $\overline{\omega}_{cercle\ S1} = \dot{\alpha}\overline{1}_z$

R2 lié à AB tournant avec $\dot{\theta}$: $\overline{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\overline{1}_z$

R3 lié à S3, $\overline{\omega}_{disque\ S2} = \dot{\beta}\overline{1}_z$ avec $\dot{\beta}$ représentant la rotation absolue du disque par rapport à R1.

Roulement sans glissement sur le sol :

$\overline{v}_{I\in Sol} = \overline{v}_{I\in S_1} \Rightarrow 0 = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AI} = \dot{x}\overline{1}_x - R\dot{\alpha}\overline{1}_x \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\alpha}$



Roulement sans glissement en D

$$\overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_{D\in S_2} \begin{cases} \overline{v}_{D\in S_1} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AD} = \dot{x}\overline{1}_x + R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2} \\ \overline{v}_{D\in S_2} = \overline{v}_B + \overline{\omega}_2 \times \overline{BD} = \dot{x}\overline{1}_x + \left(R - a\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(R - a\right)\dot{\theta} + a\dot{\beta} = R\dot{\alpha}$

Ou par dérivation des coordonnées absolues :

$$\overline{v}_{D\in S_1} = \frac{d\overline{OD}}{dt} = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right|_{P=D} = \left.\frac{d\left(x\overline{1}_{x_0} + R\overline{1}_{x_1}\right)}{dt}\right|_{P=D} = \dot{x}\overline{1}_{x_0} + R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_1}\Big|_{P=D(x_1=x_2)} = \dot{x}\overline{1}_{x_0} + R\dot{\alpha}\overline{1}_{y_2}$$

$$\overline{v}_{D\in S_2} = \frac{d\overline{OD}}{dt} = \left.\frac{d\overline{OQ}}{dt}\right|_{Q=D} = \left.\frac{d\left(x\overline{1}_{x_0} + \left(R - a\right)\overline{1}_{x_2} + a\overline{1}_{y_3}\right)}{dt}\right|_{Q=D} = \dot{x}\overline{1}_{x_0} + \left(R - a\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\overline{1}_{x_3}\Big|_{Q=D(y_3=x_2)}$$

$\overline{v}_{D\in S_2} = \dot{x}\overline{1}_{x_0} + \left(R - a\right)\dot{\theta}\overline{1}_{y_2} + a\dot{\beta}\overline{1}_{y_2} \Rightarrow \left(R - a\right)\dot{\theta} + a\dot{\beta} = R\dot{\alpha}$