LES CHOCS DANS LES SYSTEMES DE SOLIDES

PROPRIETES GENERALES

- Définition de la percussion et de la répercussion.
- Théorèmes généraux.
- L'explosion et le choc mou entre deux solides.

APPLICATIONS

- Choc élastique entre deux sphères rigides.
- Choc mou. Pendule balistique.
- Solide tournant autour d'un axe fixe.
- Solide mobile autour d'un point fixe et soumis à une percussion.

PROPRIETES GENERALES (1)

- Les chocs entre solides résultent de forces s'exerçant pendant des temps très courts en certains points des solides.
- Soit, $\overline{f}_h$ la force totale s'exerçant au point P_h, la percussion en ce point
- P_h à l'instant t est définie par : $\overline{\pi}_h = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \overline{f}_h dt$
- Durant le choc, nous supposons que les points ne se déplacent pas, seules les vitesses changent : $q_i^+ = q_i^-$ et $\dot{q}_i^+ \neq \dot{q}_i^-$
- On suppose le mouvement connu avant le choc, en particulier les coordonnées de Lagrange et les vitesses généralisées, on se propose de calculer les vitesses généralisées immédiatement après le choc.
- L'établissement brusque de certaines liaisons introduit en outre des variations de réactions de liaisons existantes qui figureront parmi les inconnues du problème : ce sont les <u>répercussions de liaison</u>.

PROPRIETES GENERALES (2)

- En chaque point P_h, on a : $m_h \overline{v}_h^+ - m_h \overline{v}_h^- = \overline{\pi}_h$ **(1)**

$$\Rightarrow \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Delta(m\overline{v}) = \int (\overline{F} + \overline{R})\Delta t$$

$$\Rightarrow \overline{R}_\alpha^+ - \overline{R}_\alpha^- = M_\alpha (\overline{V}_{G\alpha}^+ - \overline{V}_{G\alpha}^-) = \overline{\pi}_\alpha + \overline{\pi}_\alpha^{'}$$

- Théorème de la résultante cinétique pour chaque solide α du système.

- $\overline{\pi}_\alpha$ = résultante des percussions extérieures données agissant sur le solide S_α

- $\overline{\pi}_{\alpha'}$ = résultante des répercussions agissant sur le solide S_α

PROPRIETES GENERALES (3)

- Pour chaque solide α, la variation du moment cinétique calculée en un point fixe O_α ou en leur centre de masse :

$$\overline{\mathbf{M}}^{+}_{O\alpha} - \overline{\mathbf{M}}^{-}_{O\alpha} = \overline{\mu}_{O\alpha} + \overline{\mu}_{O\alpha'}$$

- $\overline{\mu}_{O\alpha}$ = moment au point O_α de toutes les percussions extérieures données agissant sur le solide S_α

- $\overline{\mu}_{O\alpha'}$ = moment au point O_α de toutes les répercussions de liaison agissant sur le solide S_α

PROPRIETES GENERALES (3)

- **Energie cinétique**

- **Dans une système continu, l'énergie cinétique s'obtient en multipliant l'équation du mouvement $m_h d\bar{v}_h = \bar{f}_h dt$ scalairement par $\bar{v}_h$ et en sommant sur tout le système.**

- **Multiplions scalairement les deux membres de (1) par $\bar{v}_h^+$ (respectivement par $\bar{v}_h^-$) et en sommant sur tous les points P_h :**

$$\sum_h m_h(\bar{v}_h^+ - \bar{v}_h^-).\bar{v}_h^+ = \sum_h \bar{\pi}_h.\bar{v}_h^+$$

$$\sum_h m_h(\bar{v}_h^+ - \bar{v}_h^-).\bar{v}_h^- = \sum_h \bar{\pi}_h.\bar{v}_h^-$$

$$\frac{1}{2}\sum m\bar{v}^{+2} - \frac{1}{2}\sum m\bar{v}^{-2} + \frac{1}{2}\sum m(\bar{v}^+ - \bar{v}^-)^2 = \sum \bar{\pi}.\bar{v}^+$$

$$\frac{1}{2}\sum m\bar{v}^{+2} - \frac{1}{2}\sum m\bar{v}^{-2} - \frac{1}{2}\sum m(\bar{v}^+ - \bar{v}^-)^2 = \sum \bar{\pi}.\bar{v}^-$$

PROPRIETES GENERALES (4)

- **Energie cinétique totale après le choc :** $\varepsilon^{+} = \frac{1}{2}\sum m(\overline{\mathbf{v}}^{+})^{2}$
- **Energie cinétique totale avant le choc :** $\varepsilon^{-} = \frac{1}{2}\sum m(\overline{\mathbf{v}}^{-})^{2}$
- **Energie cinétique des vitesses perdues ou gagnées :** $\varepsilon_{\Delta} = \frac{1}{2}\sum m(\overline{\mathbf{v}}^{+} - \overline{\mathbf{v}}^{-})$

$$\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-} + \varepsilon_{\Delta} = \sum \overline{\pi}.\overline{\mathbf{v}}^{+}$$

$$\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-} - \varepsilon_{\Delta} = \sum \overline{\pi}.\overline{\mathbf{v}}^{-}$$

$$\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-} = \frac{1}{2}\sum \overline{\pi}.(\overline{\mathbf{v}}^{+} + \overline{\mathbf{v}}^{-})$$

CAS PARTICULIERS

- **Explosion : avant le choc, les vitesses sont nulles en tout point,** $\overline{\mathbf{v}}^{-} = \mathbf{0}$

$$\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-} - \varepsilon_{\Delta} = \mathbf{0}$$

- **L'énergie cinétique totale ne peut avoir diminué après l'explosion.**

- **Choc mou de deux solides : s'il n'y a pas d'autres forces présentes :**

$$\sum_{\mathbf{h}} \overline{\pi}.\overline{\mathbf{v}}^{+} = \mathbf{0}$$

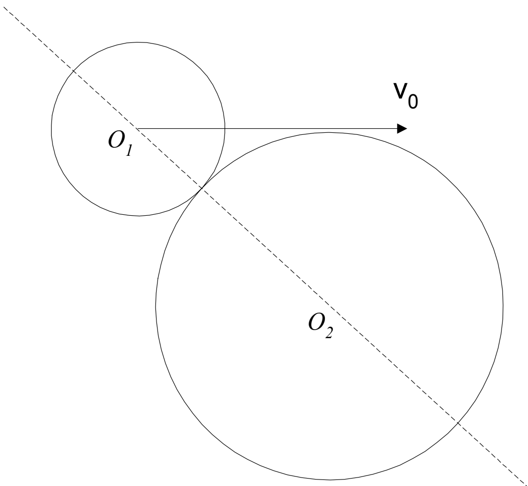
$$\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-} = -\varepsilon_{\Delta} < \mathbf{0}$$

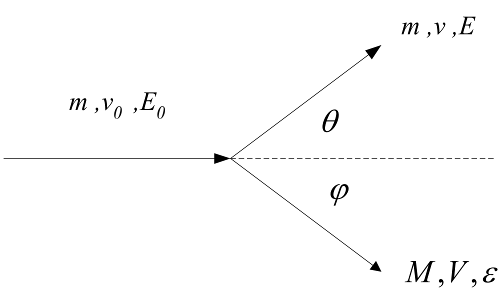
- **Lors d'une explosion ou d'un choc mou, le gain (la perte) d'énergie cinétique est égal à l'énergie cinétique des vitesses gagnées (ou perdues).**

CHOC ELASTIQUE ENTRE DEUX SPHERES RIGIDES (1)

- **Soient deux sphères rigides, de masses respectives m et M.**
- **Une sphère est fixée, l'autre (particule incidente) possède la vitesse de translation $\overline{v}_0$. On suppose les deux sphères polies.**

- **Les percussions s'exercent dans la direction O_1O_2 de la droite des centres; d 'où, les variations de vitesses produites par le choc seront également dirigées suivant $O_1\ O_2$.**





CHOC ELASTIQUE ENTRE DEUX SPHERES RIGIDES (2)

➔ CALCUL DE LA VARIATION D'ÉNERGIE CINÉTIQUE

➔ Conservation de l 'énergie cinétique :

$$mv_0^2 = mv^2 + MV^2 \qquad (1)$$

➔ Conservation de la quantité de mouvement suivant la direction de la particule incidente :

$$mv_0 = mv\cos\theta + MV\cos\varphi \qquad (2)$$

➔ Conservation de la quantité de mouvement suivant la direction perpendiculaire à la direction de la particule incidente :

$$0 = mv\sin\theta - MV\sin\varphi \qquad (3)$$

CHOC ELASTIQUE ENTRE DEUX SPHERES RIGIDES (3)

(2) et (3) : $$m^2 v_0^2 - 2mMv_0 V\cos\varphi + M^2V^2 = m^2v^2 \qquad (3')$$

(1) et (3') : $$\frac{MV^2}{2} = \frac{4mM}{(m+M)^2}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)\cos^2\varphi$$

En posant : $$E_0 = \frac{mv_0^2}{2},\ E = \frac{mv^2}{2},\ \varepsilon = \frac{MV^2}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi\, E_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = E_0\left[1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\varphi\right]}$$

CHOC ELASTIQUE ENTRE DEUX SPHERES RIGIDES (4)

- **Valeurs extrêmes que peut prendre l'énergie de la sphère incidente après le choc :**

- $\varphi = 0$ **(choc de plein fouet)** $\quad \underline{E} = E_0 \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 = pE_0$

  (où p est le paramètre de ralentissement).

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **(choc rasant)** $\quad \overline{E} = E_0$

- **Energie minimale après n chocs successifs :** $\quad \underline{E}_n = p^n E_0$

- **Nombre minimal de chocs nécessaire pour ralentir une particule d'énergie initiale E_0 vers une énergie finale $\underline{E}_n$**

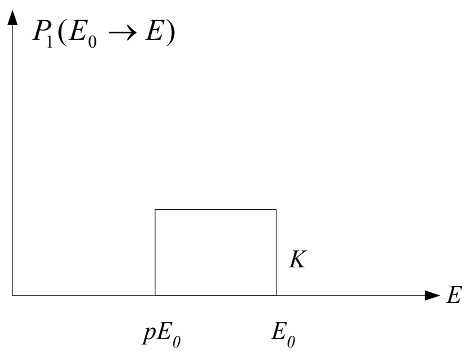
$$n \geq \frac{\ln \underline{E}_n / E_0}{\ln p}$$

- **Ralentissement des neutrons dans un modérateur.**

CHOC ELASTIQUE ENTRE DEUX SPHERES RIGIDES (4)

➔ ENERGIE MOYENNE APRÈS N CHOCS

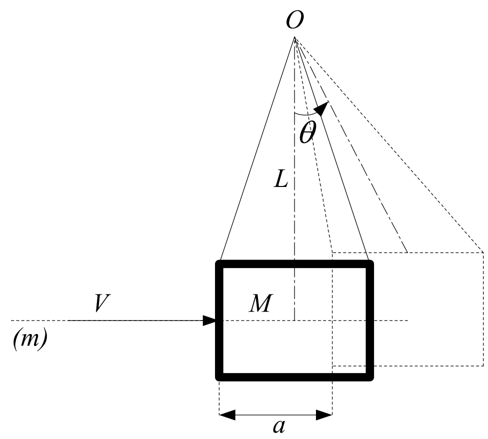
➔ **Probabilité de passer en un choc de l'énergie** E_0 à E (à dE près) $P_1(E_0 \to E)\,dE$



➔ **On suppose que dans l'intervalle** (pE_0, E_0)**, la densité de probabilité reste constante : après choc, toutes les énergies permises sont également probables :** $P_1(E_0 \to E) = K$

CHOC MOU : PENDULE BALISTIQUE (1)

- Dans la masse M d'un pendule, on envoie une balle de fusil (masse m) qui s'y logera. On se propose de déterminer la vitesse de la balle :



- Considérons le système formé par le pendule et la balle et appliquons le théorème du moment cinétique au point fixe O.

$$\mathbf{M}_z^+ - \mathbf{M}_z^- = 0$$

CHOC MOU : PENDULE BALISTIQUE (2)

➔ Après le choc : $M_z^+ = I\omega^+ + mLV^+$ où $V^+ = L\omega^+$

$$M_z^+ = (I + mL^2)\omega^+$$

$$M_z^- = mLV$$

$$\Rightarrow mLV = (I + mL^2)\omega^+ \qquad (1)$$

➔ Le mouvement étant assimilé à une rotation autour de l 'axe z, le système formé du pendule et de la balle possédera après le choc l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}(mL^2 + I)(\omega^+)^2$$

CHOC MOU : PENDULE BALISTIQUE (3)

➔ Cette énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et le pendule s'écartera d'un angle θ tel que :

$$\frac{1}{2}(mL^2 + I)\omega'^2 = (m + M)g\ell(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

(ℓ = distance du centre de masse du système pendule et balle au point O).

➔ (1) et (2) : $$V = \frac{2\sin\theta/2}{mL}\sqrt{(m + M)g\ell(mL^2 + I)}$$

➔ L'angle θ peut se déterminer à partir de l'écart horizontal du centre de masse :

$$a = \ell \sin\theta$$

CHOC MOU : PENDULE BALISTIQUE (4)

➔ **En pratique :** $\mathbf{L \approx \ell}$

$$\mathbf{I = M\ell^2}$$

$$\mathbf{V = 2\sqrt{g\ell}(1 + M/m)\sin(\theta/2)}$$

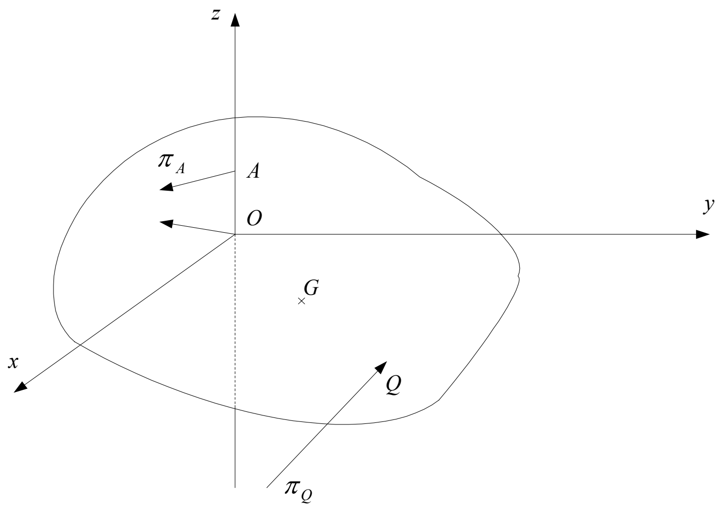
➔ **On s'arrangera pour que :** $\mathbf{M >> m}$

$$\mathbf{\theta \approx a/\ell} \qquad\qquad (\ell >> \mathbf{a})$$

$$\mathbf{V = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,a\,\frac{M}{m}}$$

SOLIDE TOURNANT AUTOUR D'UN AXE FIXE (1)

- **Solide fixé aux points O et A (OA=h).**
- **Soient $\overline{\pi}_O$ et $\overline{\pi}_A$ les répercussions de liaison en ces points.**
- **Soit $\overline{\pi}$ la percussion appliquée en un point $Q(x_0,y_0,z_0)$ du solide.**
- **Le centre de masse se meut dans le plan (x,y) : G (X,Y,0).**



SOLIDE TOURNANT AUTOUR D'UN AXE FIXE (2)

➔ Théorèmes généraux : $M(\bar{v}_G^+ - \bar{v}_G^-) = \bar{\pi}_O + \bar{\pi}_A + \bar{\pi}$ $\quad \bar{v}_G^{\pm} = \overline{GO} x \bar{\omega}^{\pm}$

$$-MY(\omega^+ - \omega^-) = \pi_{Ox} + \pi_{Ax} + \pi_x$$

$$MX(\omega^+ - \omega^-) = \pi_{Oy} + \pi_{Ay} + \pi_y$$

$$0 = \pi_{Oz} + \pi_{Az} + \pi_z$$

$$\bar{M}_O^+ - \bar{M}_O^- = \overline{OA} \, x \, \bar{\pi}_A + \overline{OQ} \, x \, \bar{\pi}$$

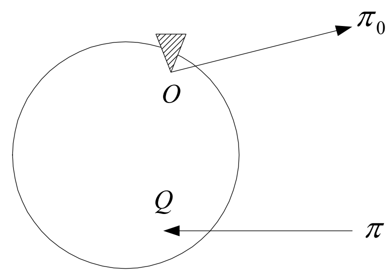
$$M_{Ox}^+ - M_{Oy}^- = -P_{xz}(\omega^+ - \omega^-) = -h\pi_{Ay} + (y_0\pi_z - z_0\pi_y)$$

$$M_{Oy}^+ - M_{Oy}^- = -P_{yz}(\omega^+ - \omega^-) = h\pi_{Ax} + (z_o\pi_x - x_o\pi_z)$$

$$M_{Oz}^+ - M_{Oz}^- = I(\omega^+ - \omega^-) = (x_o\pi_y - y_o\pi_x)$$

SOLIDE MOBILE AUTOUR D'UN POINT FIXE ET SOUMIS A UNE PERCUSSION (1)

- **Soient O le point fixe et Q le point d'application de la percussion $\overline{\pi}_x$, $\overline{\pi}_o$ la répercussion en O.**



- **Théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O :**

$$\overline{\mathbf{M}}_o^{+} - \overline{\mathbf{M}}_o^{-} = \overline{\mathbf{OQ}} \times \overline{\pi}$$

- **Projetons sur les axes principaux d'inertie du solide en O :**

$$\overline{\mathbf{M}}_o = \mathbf{Ap}\overline{\mathbf{1}}_x + \mathbf{Bq}\overline{\mathbf{1}}_y + \mathbf{Cr}\overline{\mathbf{1}}_z \qquad \overline{\mathbf{OQ}} = \mathbf{X}\overline{\mathbf{1}}_x + \mathbf{Y}\overline{\mathbf{1}}_y + \mathbf{Z}\overline{\mathbf{1}}_z$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}^{+} - \mathbf{p}^{-}) = \mathbf{Y}\pi_z - \mathbf{Z}\pi_y$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}^{+} - \mathbf{q}^{-}) = \mathbf{Z}\pi_x - \mathbf{X}\pi_z$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}^{+} - \mathbf{r}^{-}) = \mathbf{X}\pi_y - \mathbf{Y}\pi_x$$