MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL A MASSE VARIABLE

- **CONSIDERATIONS GENERALES**
- **EQUATION GENERALE DES SYSTEMES A MASSE VARIABLE**
- **EXEMPLES :**
  - **mouvement d'une particule à masse relativiste**
  - **mouvement vertical d'une fusée terrestre**
  - **gouttes d'eau tombant dans une atmosphère saturée**

CONSIDERATIONS GENERALES

- Variation de masse par unité de temps : $\dot{m} = \dfrac{dm}{dt}$

- Les systèmes fermés n'échangent aucune masse avec le monde extérieur.

  - "Point matériel" contenant des réactions chimiques qui diminuent sa masse, sans échange de matière avec le monde extérieur.

  - Electron à grande vitesse, dont la masse varie suivant la "loi relativiste" : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ (c=vitesse de la lumière).

CONSIDERATIONS GENERALES

- **Les systèmes ouverts : échangent de la masse avec le monde extérieur.**

  - **Fusées éjectant des gaz.**
  - **Gouttes d'eau qui tombent et grossissent par condensation.**
  - **μ = masse cédée par le système au monde extérieur par unité de temps.**
  - **Si la variation de masse n'est due qu'à des échanges avec le monde extérieur :** $$\frac{dm}{dt} = -\mu$$

EQUATION GENERALE DES SYSTEMES A MASSE VARIABLE

- **Elle s'obtient en exprimant le bilan de la quantité de mouvement pendant un temps dt, compte tenu que, pendant ce temps :**
  - **la masse varie de dm,**
  - **une quantité de matière est éventuellement éjectée avec une vitesse relative $\overline{w}$ (positive dans le sens de $\overline{v}$).**

- **Dans les axes absolus, la qualité de mouvement vaut :**
  - **à l'instant t :** $m\overline{v}$
  - **à l'instant t+dt :** $(\overline{v}+d\overline{v})(m+dm)+\mu(\overline{v}+\overline{w}).dt$
  - **le bilan :** $\boxed{\frac{d}{dt}(m\overline{v})+\mu(\overline{v}+\overline{w})=\overline{F}}$

MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE A MASSE RELATIVISTE (1)

➔ **Système fermé dont les variations de masse sont données par :**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

v= vitesse de la particule

c= vitesse de la lumière

$\approx 3.10^8 \, m/s$

➔ **Quantité de mouvement :**

$$\overline{p} = m\overline{v} = \frac{m_0\overline{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

➔ **Loi du mouvement :**

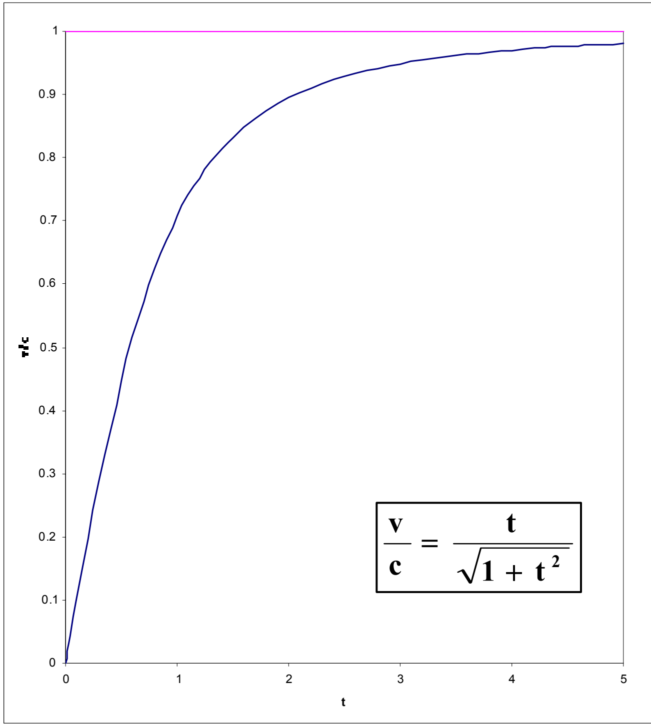
$$\frac{d}{dt}(m\overline{v}) = \overline{F}$$

MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE A MASSE RELATIVISTE (2)

- **Exemple d'une particule accélérée dans un mouvement rectiligne par une force constante F :**

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = F$$

$$\Rightarrow \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = Ft + Cte$$



- **Condition initiale : t=0, v=0 $\Rightarrow$ Cte=0**

$$\Rightarrow v = \frac{ct}{\left(T^2 + t^2\right)^{1/2}} \qquad \text{où} \qquad T = \frac{m_0 c}{F}$$

- **Le mouvement rectiligne sous l'influence d'une force constante n'est uniformément accéléré qu'au début (t<<T). Sa vitesse vaut approximativement :** $v = \frac{Ft}{m_0}$

MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE A MASSE RELATIVISTE (3)

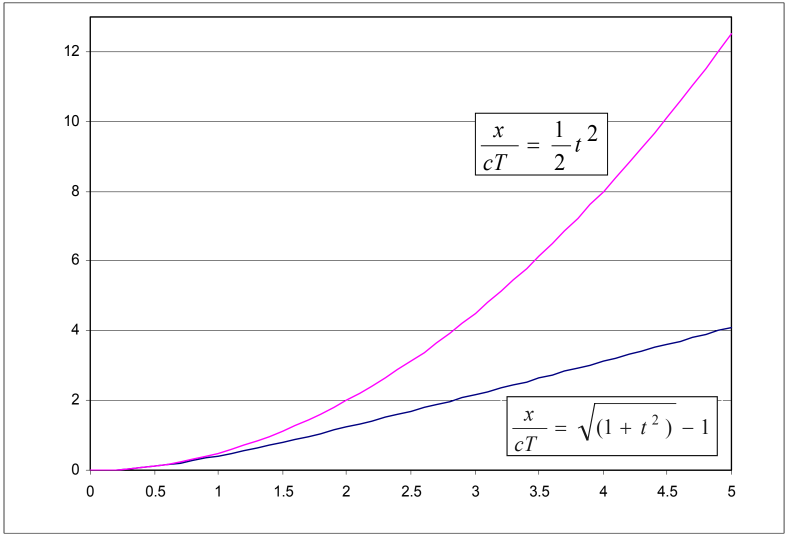
- Espace parcouru entre les instants 0 et t (on suppose que le point part de l'origine).

$$x = c\sqrt{T^2 + t^2} - Tc$$

- Le diagramme de l'espace parcouru en fonction du temps se présente comme une hyperbole, passant par 0, au lieu de la parabole classique.

- Pour t<<T :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m_0}\right)t^2$$



MOUVEMENT VERTICAL D'UNE FUSEE TERRESTRE (1)

- **Système ouvert où la variation de masse provient uniquement de gaz éjectés avec une vitesse w par rapport à la fusée.**

$$\frac{dm}{dt} = -\mu$$

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}w - mg$$

- **La pesanteur peut être négligée :** $m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}w$

$$\Rightarrow v = v_0 + w \ln\frac{m}{m_0}$$

$$w \approx 2\,\mathrm{km/s}$$

Vitesse de satellisation $\approx 8\,\mathrm{km/s}$

$$\Rightarrow m \approx m_0 e^{-4} \approx \frac{m_0}{55}$$

MOUVEMENT VERTICAL D'UNE FUSEE TERRESTRE (2)

➔ **La pesanteur ne peut être négligée, adoptons une loi de variation exponentielle de la masse :**

$$\frac{dm}{dt} = -\mu = -\lambda m \qquad m = m_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow v = v_0 + (-\lambda w - g)t$$

➔ **Le mouvement est bien uniformément accéléré. Pour que la vitesse augmente, il faut que :**

$$\lambda |w| > g \quad \text{ou} \quad \frac{\mu}{m} > \frac{g}{|w|} \approx \frac{1}{200}$$

GOUTTES D'EAU TOMBANT DANS UNE ATMOSPHERE SATUREE (1)

- **Gouttelettes sphériques dans une atmosphère saturée :**
  - **de masse m**
  - **sous l'influence d'une force mg**

- **La condensation produit une augmentation de masse, proportionnelle à la surface :**

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = -\kappa 4\pi r^2$$

$$m = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\Rightarrow r = \frac{\kappa}{\rho} t + r_0$$

GOUTTES D'EAU TOMBANT DANS UNE ATMOSPHERE SATUREE (2)

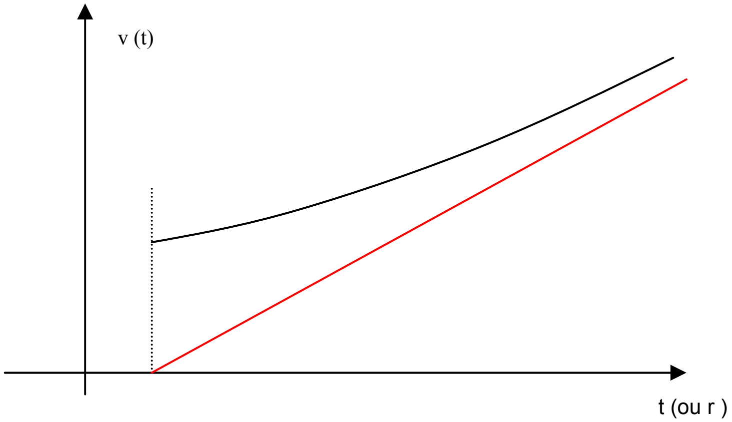
- **Equation du mouvement :**

  - **Le milieu envisagé se compose de vapeur saturée et est supposé immobile.**
  - **La vitesse relative de la matière w est -v**

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \mu\bar{v} + m\bar{g}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3\kappa}{\rho}.\frac{v}{r} + g$$

$$r = \frac{\kappa}{\rho}t + r_0$$



  - **Supposons que, pour t=0,** $v = v_0$

$$v = \frac{\rho g}{4\kappa}r + \left(v_0 - \frac{\rho g}{4\kappa}r_0\right)\frac{r_0^3}{r^3}$$