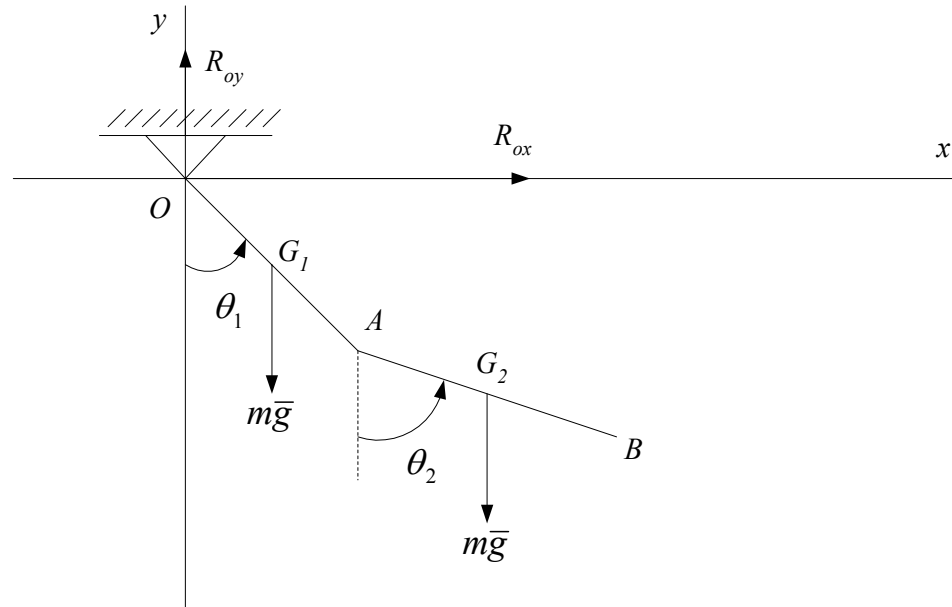


→ LE PENDULE DOUBLE

→ LE SYSTEME DE 3 BARRES

LE PENDULE DOUBLE OU COMPOSE

- Etude du mouvement, dans le plan vertical, de deux barres pesantes, homogènes, identiques, de masse m et de longueur ℓ .
- OA (solide C_1), fixée au point O
- AB (solide C_2), articulée à OA en A



- Forces extérieures agissant sur le solide C_1 : $\bar{\mathbf{R}}_o, \bar{\mathbf{R}}_{21}, m\bar{\mathbf{g}}$
- Forces extérieures agissant sur le solide C_2 : $\bar{\mathbf{R}}_{12}, m\bar{\mathbf{g}}$ ($\bar{\mathbf{R}}_{12} = -\bar{\mathbf{R}}_{21}$)
- 6 inconnues : $\mathbf{R}_{Ox}, \mathbf{R}_{Oy}, \mathbf{R}_{Ax}, \mathbf{R}_{Ay}, \theta_1, \theta_2$
- Considérons le système constitué des deux solides C_1 et C_2 :
- vitesses des centres de masses G_1 et G_2 :

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_1} = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 \bar{\mathbf{1}}_x + \sin \theta_1 \bar{\mathbf{1}}_y)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_2} = \ell \left[\left(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{\dot{\theta}_2}{2} \cos \theta_2 \right) \bar{\mathbf{1}}_x + \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{\dot{\theta}_2}{2} \sin \theta_2 \right) \bar{\mathbf{1}}_y \right]$$

→ Théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{3}{2}m\ell(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) + m\ell\left(\frac{\ddot{\theta}_2}{2} \cos \theta_2 - \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} \sin \theta_2\right) = R_{ox}$$

$$\frac{3}{2}m\ell(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) + m\ell\left(\frac{\ddot{\theta}_2}{2} \sin \theta_2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} \cos \theta_2\right) = R_{oy} - 2mg$$

→ Moments cinétiques en O des solides C_1 et C_2 :

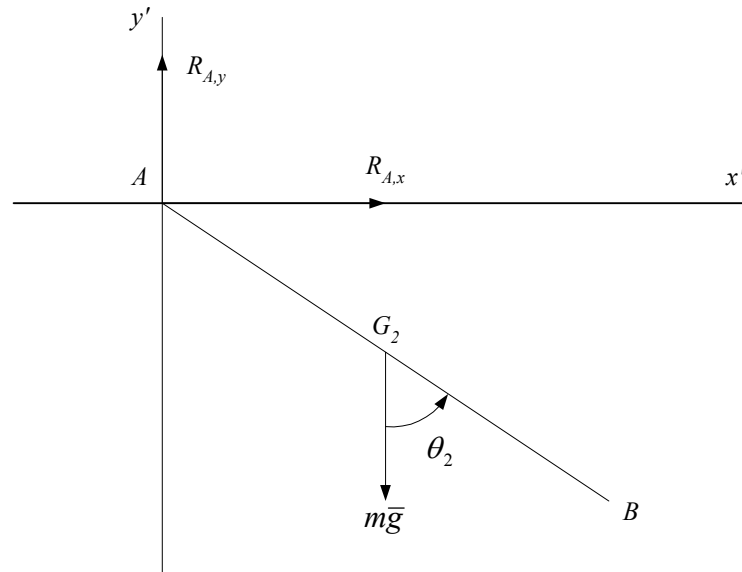
$$\overline{M}_{O,C_1} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta}_1 \overline{1}_z$$

$$\overline{M}_{O,C_2} = m\ell^2 \left[\dot{\theta}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + \dot{\theta}_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] \overline{1}_z$$

→ Théorème du moment cinétique

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}_1 + m\ell^2\left(\ddot{\theta}_1\left(1 + \frac{1}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\right) = -\frac{3}{2}mg\ell\sin\theta_1 - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta_2$$

→ Considérons le système constitué uniquement du solide C_2



→ Théorème de la résultante cinétique

$$\begin{aligned} m\ell \left(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \frac{\ddot{\theta}_2}{2} \cos \theta_2 - \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} \sin \theta_2 \right) &= R_{Ax} \\ m\ell \left(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \frac{\ddot{\theta}_2}{2} \sin \theta_2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} \cos \theta_2 \right) &= R_{Ay} - mg \end{aligned}$$

→ Moment cinétique en A

$$\overline{M}_A = \frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta}_2 \overline{\mathbf{1}}_z + \frac{m\ell^2}{2} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \overline{\mathbf{1}}_z$$

→ Théorème du moment cinétique

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta}_2 + \frac{m\ell^2}{2} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta_2$$

→ Fonction de Lagrange

$$L = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{3}{2}mg\ell\cos\theta_1 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta_2$$

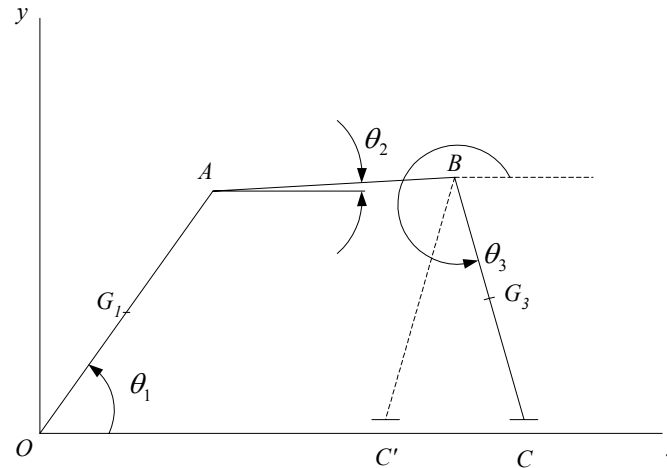
→ Equations de Lagrange

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m\ell^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{3}{2}mg\ell\sin\theta_1 = 0$$

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m\ell^2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}mg\ell\sin\theta_2 = 0$$

LE SYSTEME DES 3 BARRES (1)

→ Considérons 3 tiges pesantes, homogènes, rectilignes, de masse m , de longueur ℓ



→ Nous n'avons que 2 degrés de liberté indépendants entre eux : θ_1 et θ_2

→ Par exemple :

$$\sin \theta_3 = -\sin \theta_1 - \sin \theta_2$$

$$\cos \theta_3 = (\pm) \sqrt{1 - (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)^2}$$

→ Utilisons 7 coordonnées de Lagrange généralisées : $\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_2, y_2, x_3, y_3$

LE SYSTEME DES 3 BARRES (2)

➔ Il y a 5 restrictions, holonomes :

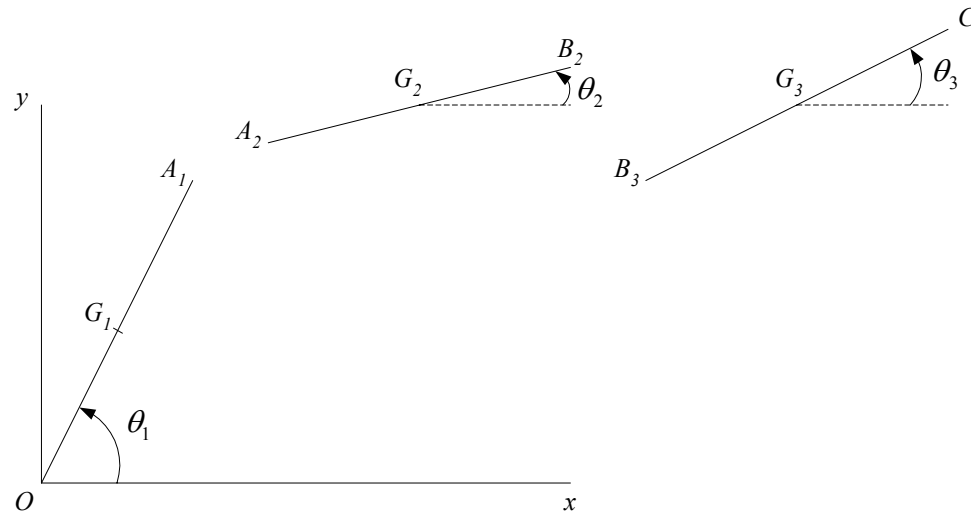
$$\ell \cos \theta_1 = x_2 - \frac{\ell}{2} \cos \theta_2$$

$$\ell \sin \theta_1 = y_2 - \frac{\ell}{2} \sin \theta_2$$

$$x_2 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_2 = x_3 - \frac{\ell}{2} \cos \theta_3$$

$$y_2 + \frac{\ell}{2} \sin \theta_2 = y_3 - \frac{\ell}{2} \sin \theta_3$$

$$y_3 + \frac{\ell}{2} \sin \theta_3 = 0$$



APPLICATION : LE SYSTEME DES 3 BARRES (3)

→ Nous devons introduire 5 multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$:

$$\lambda_1 \left(-\ell \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \delta x_2 - \frac{\ell}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 \right) = 0$$

$$\lambda_2 \left(\ell \cos \theta_1 \delta \theta_1 - \delta y_2 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_2 \delta \theta_2 \right) = 0$$

$$\lambda_3 \left(\delta x_2 - \frac{\ell}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 - \delta x_3 - \frac{\ell}{2} \sin \theta_3 \delta \theta_3 \right) = 0$$

$$\lambda_4 \left(\delta y_2 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_2 \delta \theta_2 - \delta y_3 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_3 \delta \theta_3 \right) = 0$$

$$\lambda_5 \left(\delta y_3 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_3 \delta \theta_3 \right) = 0$$

→ L'énergie cinétique et l'énergie potentielle deviennent :

$$T = \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} \dot{\theta}_3^2$$

$$V = \frac{mg\ell}{2} \sin \theta_1 + mg y_2 + mg y_3$$

➔ 12 équations à 12 inconnues beaucoup plus simples, plus courtes
... que les 2 équations à 2 inconnues pour les 2 degrés de liberté !

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}_1 = -\frac{mg\ell}{2}\cos\theta_1 - \lambda_1\ell\sin\theta_1 + \lambda_2\ell\cos\theta_1$$

$$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta}_2 = -\lambda_1\frac{\ell}{2}\sin\theta_1 + \lambda_2\frac{\ell}{2}\cos\theta_2 - \lambda_3\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 + \lambda_4\frac{\ell}{2}\cos\theta_2$$

$$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta}_3 = -\lambda_3\frac{\ell}{2}\sin\theta_3 + \lambda_4\frac{\ell}{2}\cos\theta_3 + \lambda_5\frac{\ell}{2}\cos\theta_3$$

$$m\ddot{x}_2 = -\lambda_1 + \lambda_3$$

$$m\ddot{x}_3 = -\lambda_3$$

$$m\ddot{y}_2 = -mg - \lambda_2 + \lambda_4$$

$$m\ddot{y}_3 = -mg - \lambda_4 + \lambda_5$$