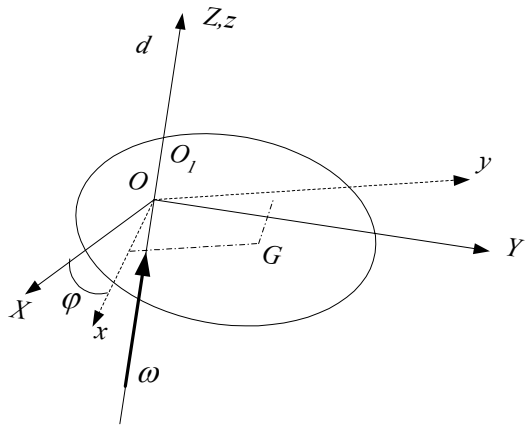
PROBLEMES PARTICULIERS DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE

- **Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe**
- **Mouvement d'un solide autour d'un point fixe**
- **Planimètre à hachette de Prytz**
- **Théorie du Cerceau**
- **Applications : gyrostats et gyroscopes**

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE (1)



- **Solide mobile autour d'une droite fixe d (support de la rotation instantanée $\overline{\omega}$)**
- **O et O_1 = deux points de la droite, $|\overline{OO_1}| = h$**
- **OXYZ = axes absolus, $OZ \equiv d$, plan OXY passe par G**
- **Oxyz= axes liés au solide**
- **Problème à un degré de liberté, coordonnée de Lagrange : $\varphi = XOx$**

$$\overline{1}_X = \cos\varphi\,\overline{1}_x - \sin\varphi\,\overline{1}_y$$

$$\overline{1}_Y = \sin\varphi\,\overline{1}_x + \cos\varphi\,\overline{1}_y$$

$$\overline{1}_Z = \overline{1}_z$$

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}\,\overline{1}_Z = \dot{\varphi}\,\overline{1}_z$$

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE (2)

- $\overline{R}_O$ et $\overline{R}_{O_1}$ = réactions de liaison de composantes (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1)
- Coordonnées du centre de masse : $(X_G, Y_G, 0)$, $(x_G, y_G, 0)$
- Résultante cinétique (axes OXYZ) :

$$\overline{R} = M\,\overline{v}_G$$

$$\overline{v}_G = \overline{GO} \times \overline{\omega} = -\omega Y_G\,\overline{1}_X + \omega X_G\,\overline{1}_Y$$

$$\overline{R} = -M\omega Y_G\,\overline{1}_X + M\omega X_G\,\overline{1}_Y$$

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{F}_e + \overline{R}_O + \overline{R}_{O_1}$$

$$-M\frac{d}{dt}(\omega Y_G) = F_X + X + X_1$$

$$M\frac{d}{dt}(\omega X_G) = F_Y + Y + Y_1$$

$$0 = F_Z + Z + Z_1$$

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE (3)

➔ **Moment cinétique au point fixe O :**

$$\overline{M}_o = \overline{\overline{I}}_o \overline{\omega}$$

$$\overline{M}_o = \omega(I_{13}\overline{1}_x + I_{23}\overline{1}_y + I_{33}\overline{1}_z) \qquad (\text{axes } Oxyz)$$

$$\overline{M}_o = \omega(J_{13}\overline{1}_X + J_{23}\overline{1}_Y + J_{33}\overline{1}_Z) \qquad (\text{axes } OXYZ)$$

$$I_{33} = J_{33} = Cte = I_d$$

$$\frac{d\overline{M}_o}{dt} = \overline{m}_{e,o} \qquad \text{s'énonce dans les axes absolus}$$

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE (4)

➔ **Dans les axes absolus :**

$$\overline{m}_{e,o} = \overline{M}_{e,o} + \overline{M}_{R,o} + \overline{M}_{R_1,o}$$

$$\overline{M}_{e,o} = M_X \overline{1}_X + M_Y \overline{1}_Y + M_Z \overline{1}_Z$$

$$\overline{M}_{R,o} = 0$$

$$\overline{M}_{R_1,0} = \overline{OO}_1 x \overline{R}_1 = -hY_1 \overline{1}_X + hX_1 \overline{1}_Y$$

$$\frac{d}{dt}(J_{13}\omega) = \frac{d}{dt}(-P_{XZ}\omega) = M_X - hY_1$$

$$\frac{d}{dt}(J_{23}\omega) = \frac{d}{dt}(-P_{YZ}\omega) = M_Y + hX_1$$

$$\frac{d}{dt}(J_{33}\omega) = \frac{d}{dt}(I_Z\omega) = M_Z$$

$$\boxed{I_d \frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_{e,d}}$$

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE (5)

➔ **Dans les axes liés au solide : équations d'Euler**

$$\overline{M}_{e,o} = M_x \overline{1}_x + M_y \overline{1}_y + M_z \overline{1}_z$$

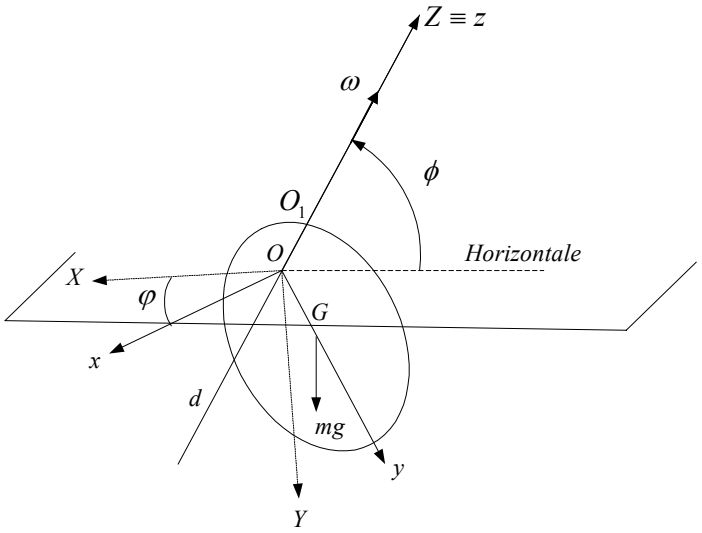
$$\overline{M}_{R_1,O} = (hX_1 \sin\varphi - hY_1 \cos\varphi)\overline{1}_x + (hY_1 \sin\varphi + hX_1 \cos\varphi)\overline{1}_y$$

$$I_{13}\frac{d\omega}{dt} - I_{23}\omega^2 = M_x + h(X_1 \sin\varphi - Y_1 \cos\varphi)$$

$$I_{23}\frac{d\omega}{dt} + I_{13}\omega^2 = M_y + h(X_1 \cos\varphi + Y_1 \sin\varphi)$$

$$I_{33}\frac{d\omega}{dt} + 0 = M_z (= M_d)$$

APPLICATION A UN SOLIDE PESANT (1)



➔ **Axes absolus : axe de rotation Z et plan (X,Y) où se meut le centre de masse G du solide. X est une horizontale.**

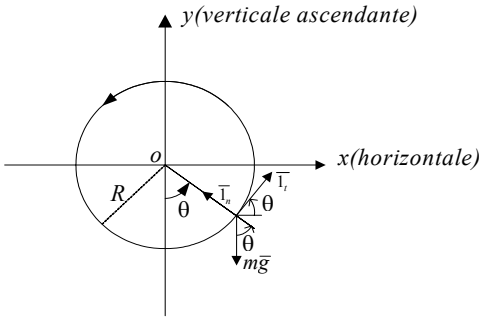
➔ **Axes relatifs : Z = z, OG = y, x perpendiculaire à y et z**

$$\overline{OG} = -a\sin\varphi\,\bar{1}_X + a\cos\varphi\,\bar{1}_Y$$

$$m\bar{g} = mg\cos\phi\,\bar{1}_Y - mg\sin\phi\,\bar{1}_Z$$

APPLICATION A UN SOLIDE PESANT (2)

➔ **Equation du mouvement :**



$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (1)$$

$$mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \qquad (2)$$

$$0 = B \qquad (3)$$

$$I_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_{e,Z}$$

$$\overline{m}_{e,o} = amg\left(-\sin\phi\cos\varphi\,\overline{1}_X - \sin\phi\sin\varphi\,\overline{1}_Y - \cos\phi\sin\varphi\,\overline{1}_Z\right)$$

$$I_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -amg\cos\phi\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{amg\cos\phi}{I_Z}\right)\sin\varphi$$

➔ **Equation du pendule simple de longueur équivalente à :**

$$\frac{I_Z}{ma} = l$$

$g\cos\phi = g$ **pour un axe de rotation horizontal**

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (1

➔ **Théorème de la résultante cinétique : (coordonnées du centre de masse dans les axes (x,y,z) liés au solide : (a,b,c))**

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = M\frac{d\overline{v}_G}{dt} = \overline{R}_0 + \overline{F}_e$$

$$\overline{R} = M\left[(cq-br)\overline{1}_x + (ar-cp)\overline{1}_y + (bp-aq)\overline{1}_z\right]$$

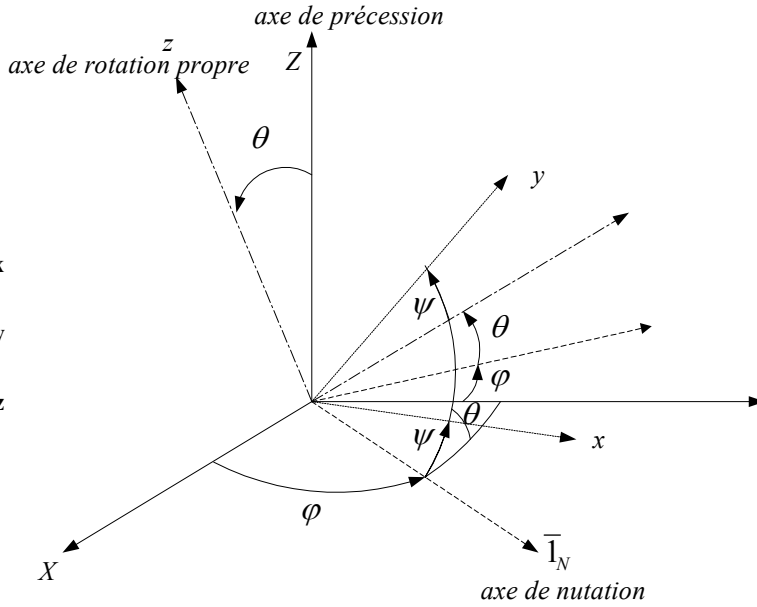
$$\begin{cases} M\left[(c\dot{q}-b\dot{r})+p(bq+cr)-a(q^2+r^2)\right] = R_{o,x}+F_{e,x} \\ M\left[(a\dot{r}-c\dot{p})+q(cr+ap)-b(r^2+p^2)\right] = R_{o,y}+F_{e,y} \\ M\left[(b\dot{p}-a\dot{q})+r(ap+bq)-c(p^2+q^2)\right] = R_{o,z}+F_{e,z} \end{cases}$$

➔ **Les équations permettent de déduire les trois composantes de la réaction de liaison** $\overline{R}_O$

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (2

➔ **Théorème du moment cinétique dans les axes principaux :**

$$\overline{\mathbf{M}}_o = Ap\,\overline{1}_x + Bq\,\overline{1}_y + Cr\,\overline{1}_z$$



➔ **Equations d'Euler :**

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = m_{e,o,x} \\ B\dot{q} + (A-C)pr = m_{e,o,y} \\ C\dot{r} + (B-A)pq = m_{e,o,z} \end{cases}$$

➔ **En fonction des angles d'Euler :**

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ q = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ r = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

➔ **Ces équations permettent de déduire le mouvement du solide. On se propose de déterminer p, q, r et ensuite les angles d'Euler θ,φ,ψ.**

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (3

- **Théorème de l 'énergie cinétique :** $T + mgz_G = Cte$

- **Si point fixe = centre de masse :**

  - **Théorème de la résultante cinétique :**

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = M\frac{d\overline{v}_G}{dt} = \overline{F}_e + \overline{R}_O$$

$$\overline{R}_O = -\overline{F}_e$$

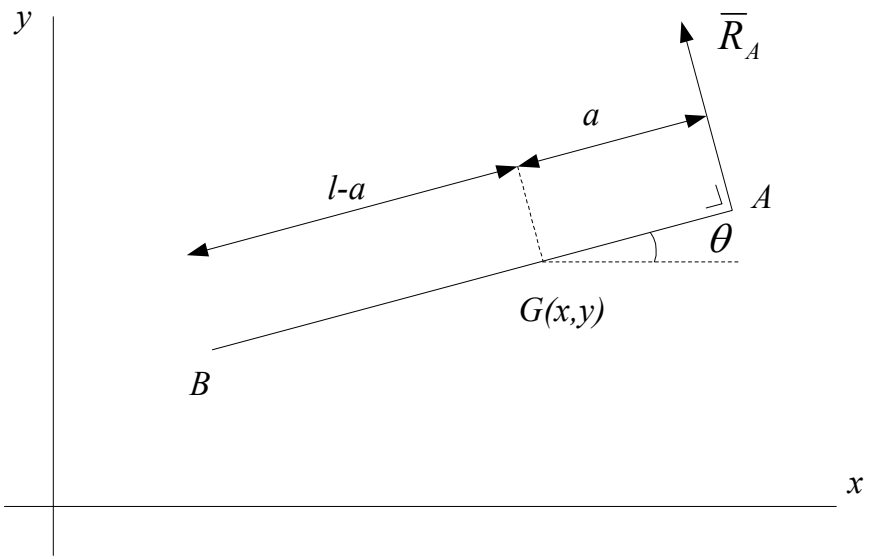
  - **Théorème de l 'énergie cinétique :**

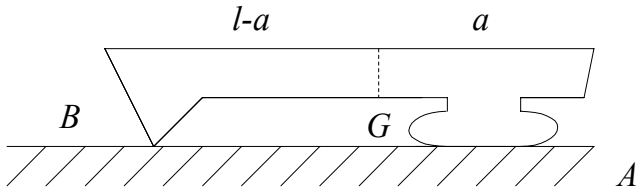
$$z_G = 0$$

$$T = cte = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

PLANIMETRE A HACHETTE DE PRITZ (1)

- **Solide plan de masse m**
  - **schématisé par une barre rectiligne AB**
  - **pouvant se déplacer dans son plan horizontal x,y**
  - **la vitesse de A est constamment parallèle au vecteur AB**





LE PLANIMETRE A HACHETTE DE PRITZ (2)

➔ **Coordonnées de Lagrange : coordonnées (x,y) du centre de masse G et l'angle θ entre la barre et l'axe x.**

➔ **Coordonnées pas indépendantes :** $\overline{\mathbf{v}}_A = \lambda \overline{\mathbf{BA}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - a\dot{\theta}\sin\theta = \lambda \ell \cos\theta \\ \dot{y} + a\dot{\theta}\cos\theta = \lambda \ell \sin\theta \end{cases}$$

➔ **Contrainte non holonome :**

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta - a\dot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

PLANIMETRE A HACHETTE : THEOREMES GENERAUX

- **R_A= composante horizontale de la réaction de liaison en A et k le rayon de giration du solide par rapport à son axe central perpendiculaire au plan x,y**

- **Théorème de la résultante cinétique :**

$$m\ddot{x} = -R_A \sin\theta \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = R_A \cos\theta \qquad (3)$$

- **Théorème du moment cinétique :**

$$mk^2\ddot{\theta} = a\,R_A \qquad (4)$$

PLANIMETRE A HACHETTE : MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

➔ **(1) peut s'écrire sous la forme :** $\delta x \sin\theta - \delta y \cos\theta - a\,\delta\theta$

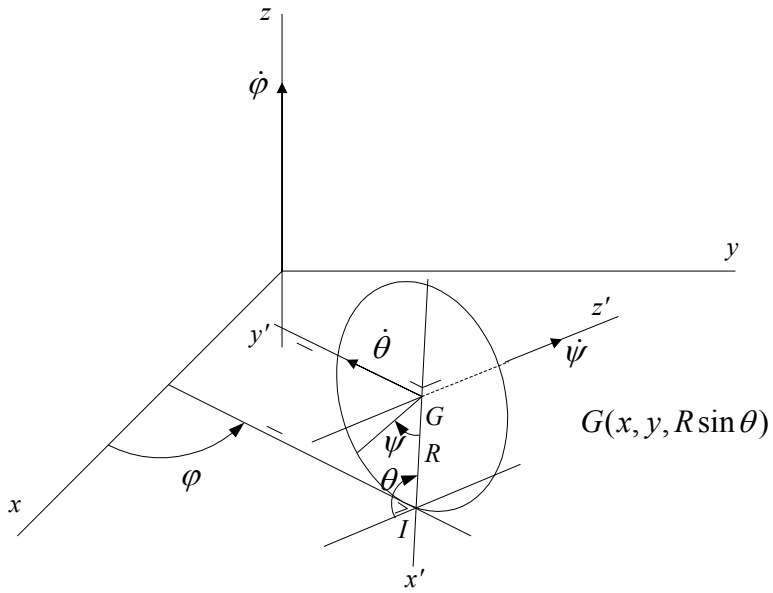
➔ **L'énergie cinétique est :** $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{mk^2}{2}\dot{\theta}^2$

➔ **Les équations de Lagrange modifiées par le paramètre λ sont :**

$$m\ddot{x} = \lambda \sin\theta$$
$$m\ddot{y} = -\lambda \cos\theta$$
$$mk^2\ddot{\theta} = -a\lambda$$

DISQUE ROULANT SANS GLISSER SUR LE PLAN (1)

- Soit un disque :
  - homogène
  - pesant
  - lié au plan horizontal Oxy



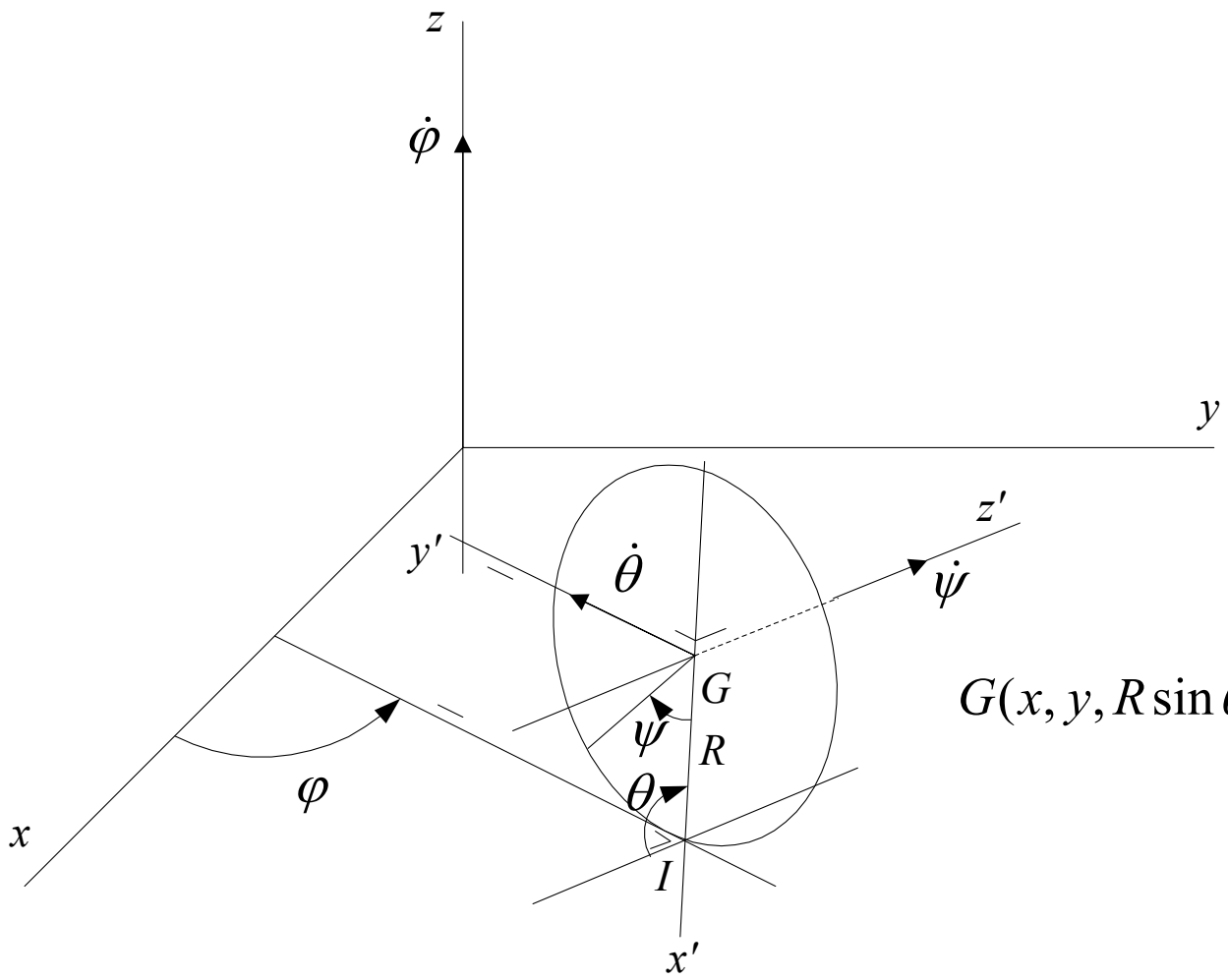
- Cinq coordonnées généralisées : $x, y, \varphi, \theta, \psi$

$$\overline{1}_{x'} = \cos\theta\,(-\sin\varphi\,\overline{1}_x + \cos\varphi\,\overline{1}_y) - \sin\theta\,\overline{1}_z$$

$$\overline{1}_{y'} = -\cos\varphi\,\overline{1}_x - \sin\varphi\,\overline{1}_y$$

$$\overline{1}_{z'} = \sin\theta\,(-\sin\varphi\,\overline{1}_x + \cos\varphi\,\overline{1}_y) + \cos\theta\,\overline{1}_z$$

RELATIONS ENTRE Gx'y'z' et Oxyz



$$G(x, y, R\sin\theta)$$

DISQUE ROULANT SANS GLISSER SUR LE PLAN (2)

- Les axes G x' y' z' ne sont pas liés au solide

- Nous avons : $\overline{\omega} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\overline{1}_{x'} + \dot{\theta}\,\overline{1}_{y'} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\,\overline{1}_{z'}$

- I est le C.I.R. : $\overline{v}_I = 0$

  - Deux liaisons non holonomes :

$$\dot{x} - R\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\cos\varphi + R\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{y} - R\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\sin\varphi - R\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

  - Il faut introduire les 2 multiplicateurs de Lagrange λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1\left(\delta x - R\cos\varphi(\delta\psi + \cos\theta\delta\varphi) + R\sin\theta\sin\varphi\delta\theta\right) = 0$$

$$\lambda_2\left(\delta y - R\sin\varphi(\delta\psi + \cos\theta\delta\varphi) - R\sin\theta\cos\varphi\delta\theta\right) = 0$$

DISQUE ROULANT SANS GLISSER SUR LE PLAN (3)

➔ **La fonction de Lagrange est :**

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}C\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - mgR\sin\theta$$

➔ **Nous obtenons les 5 équations de Lagrange :**

$$m\ddot{x} - \lambda_1 = 0 \qquad (3)$$

$$m\ddot{y} - \lambda_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(A\dot{\varphi}\sin^2\theta + C\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\right) + \lambda_1 R\cos\theta\cos\varphi + \lambda_2 R\cos\theta\sin\varphi = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}\cos^2\theta + A\dot{\theta}) + mR^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - A\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + C\dot{\varphi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$$
$$+ mgR\cos\theta - \lambda_1 R\sin\theta\sin\varphi + \lambda_2 R\sin\theta\cos\varphi = 0 \qquad (6)$$

$$C\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) + \lambda_1 R\cos\varphi + \lambda_2 R\sin\varphi = 0 \qquad (7)$$

➔ **Les 7 équations (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7) constituent un système à 7 inconnues** $x, y, \varphi, \theta, \psi, \lambda_1$ **et** λ_2

PLANIMETRE A HACHETTE : MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

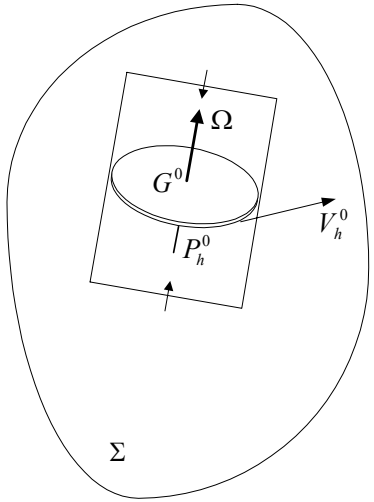
➔ **(1) peut s'écrire sous la forme :** $\delta x \sin\theta - \delta y \cos\theta - a\delta\theta = 0$

➔ **L'énergie cinétique est :** $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{mk^2}{2}\dot{\theta}^2$

➔ **Les équations de Lagrange modifiées par le paramètre λ sont :**

$$m\ddot{x} = \lambda \sin\theta$$
$$m\ddot{y} = -\lambda \cos\theta$$
$$mk^2\ddot{\theta} = -a\lambda$$

GYROSTATS (1)



- gyrostat : solide de révolution, en rotation autour de son axe central principal d'inertie de révolution.
- $\overline{\Omega}$: vitesse angulaire constante du gyrostat par rapport au solide.
- $\overline{\mathbf{v}_h^0}$: vitesse d'un point $\mathbf{P}_h^0$ du gyrostat due à sa rotation par rapport au solide.

$$\overline{\mathbf{v}_h^0} = \overline{\mathbf{P}_h^0\mathbf{G}^0} \times \overline{\Omega}$$

GYROSTATS (2)

➔ **Résultante cinétique et moment cinétique dus uniquement à la rotation gyrostatique par rapport au solide :**

$$\overline{\mathbf{R}}_0 = \int_{(gyro)} dm^0 \overline{v}^0_h = M^0 \overline{v}_{G^0} = 0$$

$$\overline{\mathbf{M}}_0 = \int_{(gyro)} \overline{G^0 P^0_h} \; x \; (dm^0 \overline{v}^0_h) = \Gamma \overline{\Omega}$$

➔ **où Γ est le moment central d'inertie du gyroscope par rapport à l'axe Ω**

➔ **Résultante cinétique de tout le système :**

$$\overline{\mathbf{R}} = \int \overline{v}_h dm + \int_{(gyro)} \overline{v}^0_h dm^0 = \int \overline{v}_h dm$$

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}_0$$

➔ **La résultante cinétique est donc la même que le gyro tourne ou ne tourne pas.**

GYROSTATS (3)

➔ **Moment cinétique de tout le système au centre de masse G :**

$$\overline{\mathbf{M}}_G = \int \overline{\mathbf{GP}}_h \times \overline{\mathbf{v}}_h \, dm + \int_{(gyro)} \overline{\mathbf{GP}}^0_h \times \overline{\mathbf{v}}^0_h \, dm^0$$

$$\int_{(gyro)} \overline{\mathbf{GP}}^0_h \times \overline{\mathbf{v}}^0_h \, dm^0 = \int_{(gyro)} \overline{\mathbf{GG}}^0 \times \overline{\mathbf{v}}^0_h \, dm^0 \int_{(gyro)} \overline{\mathbf{G}}^0\overline{\mathbf{P}}^0_h \times \overline{\mathbf{v}}^0_h \, dm^0 = \Gamma\overline{\Omega}$$

➔ **Le système de vecteurs $\overline{\mathbf{v}}^0_h$ dus à la rotation du gyrostat est équivalent à un couple constant $\Gamma\overline{\Omega}$**

$$\overline{\mathbf{M}}_G = \overline{\mathbf{M}}_{G,0} + \Gamma\overline{\Omega}$$

où $\overline{\mathbf{M}}_{G,0}$ représente le moment cinétique de tout le système lorsque le gyrostat est immobile $(\overline{\Omega} = 0)$

➔ **La rotation du gyrostat ajoute donc le terme $\Gamma\overline{\Omega}$ au moment cinétique du système à gyrostat immobile.**

GYROSTATS (4)

➔ **Théorème du moment cinétique :**

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = \frac{d}{dt}\overline{M}_{G,0} + \frac{d}{dt}\Gamma\overline{\Omega} = \overline{m}_{G,e}$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma\overline{\Omega} = \frac{d}{dt}\overline{OH} = \overline{\omega}x\overline{OH} = \overline{\omega}x\Gamma\overline{\Omega}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overline{M}_{G,0}}{dt} = \overline{m}_{G,e} + \Gamma\overline{\Omega}\ x\ \overline{\omega}}$$

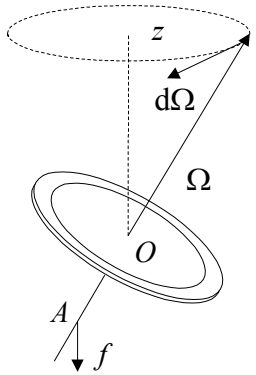
➔ **Lorsque dans le mouvement d'un système, le gyrostat est mis en mouvement, tout se passe comme s'il s'ajoutait aux forces extérieures un couple fictif (c-à-d, non réalisé par des forces extérieures données) :**

le <u>couple gyrostatique</u> :

$$\Gamma\overline{\Omega}x\overline{\omega}$$

GYROSCOPE

➔ **Solide suspendu de manière à pouvoir s'orienter librement en tournant à grande vitesse autour d'un axe principal d'inertie.**

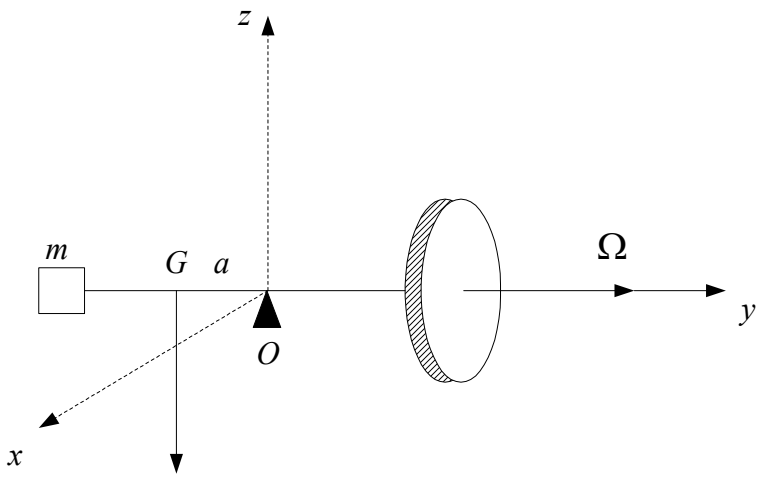


➔ **Soit un gyrostat tournant librement autour d'un axe à la vitesse angulaire $\overline{\Omega}$ passant par le point fixe O et on lui applique au point A de l'axe, une force $\overline{f}$ constante**

$$\frac{d\overline{M}_o}{dt} = \overline{m}_{e,O} = \overline{OA} x \overline{f}$$

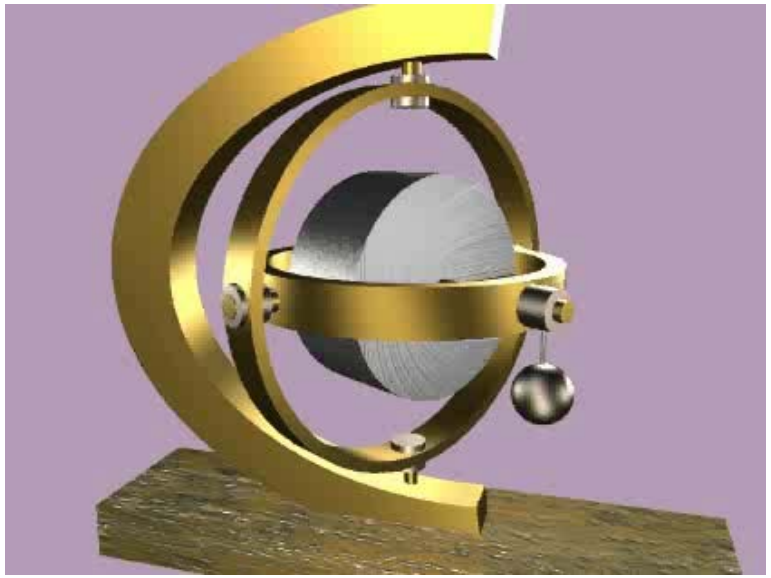
➔ **Axe de rotation $\overline{\Omega}$ tourne autour de l'axe OZ dans le sens du moment de $\overline{f}$**

LA BALANCE GYROSTATIQUE



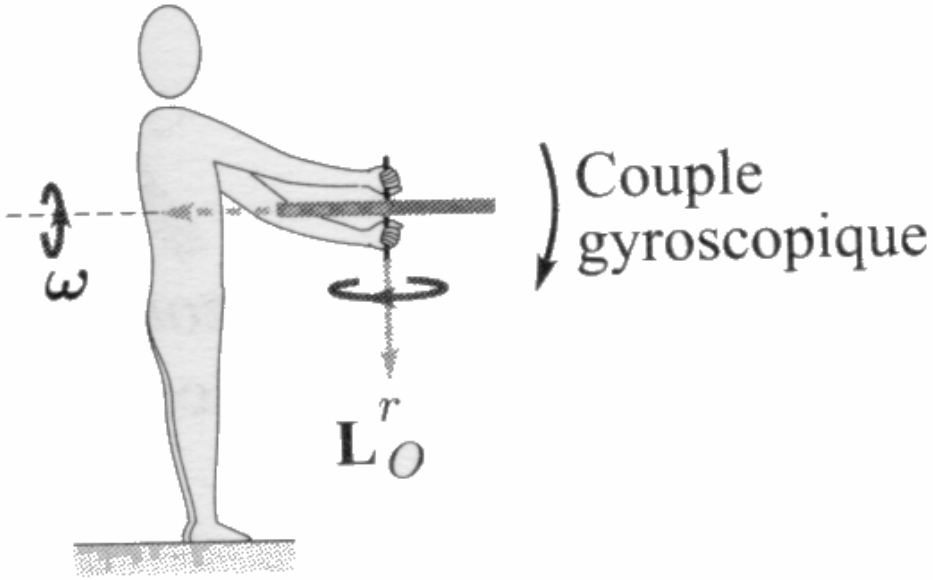
$$\Gamma\Omega\omega = \mathbf{Mga}$$

$$\omega = \frac{\mathbf{Mga}}{\Gamma\Omega}$$

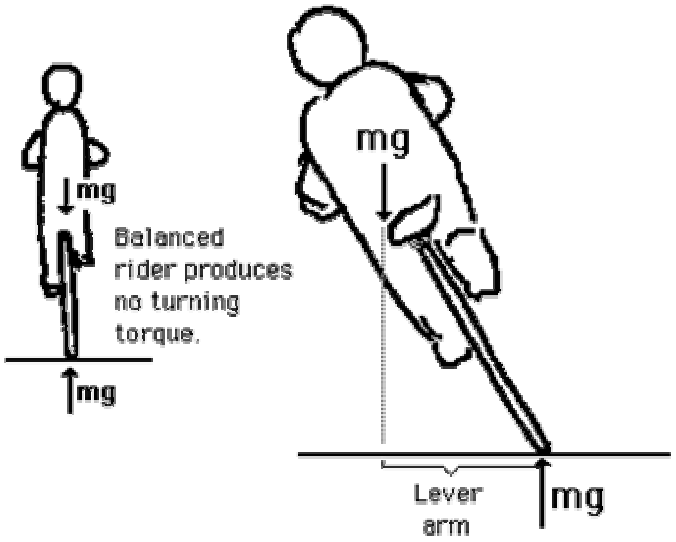


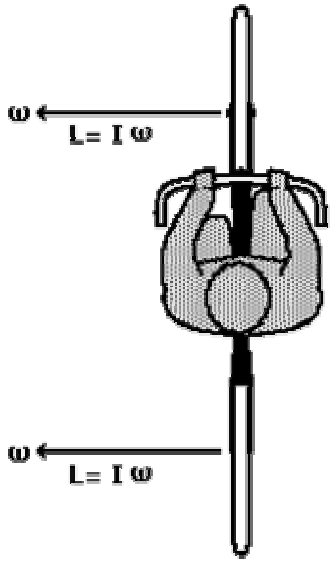
COUPLE GYROSTATIQUE (1)

COUPLE GYROSTATIQUE (2)

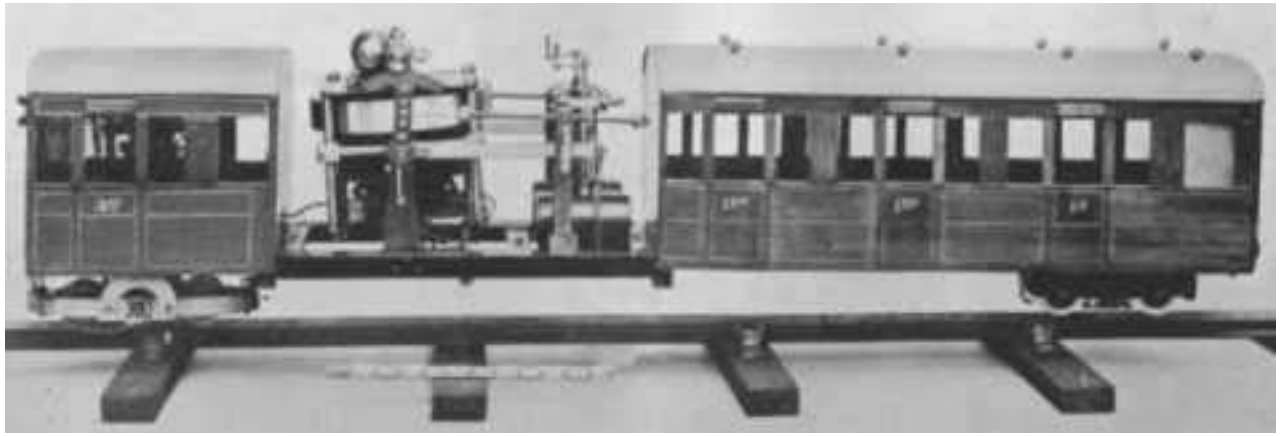


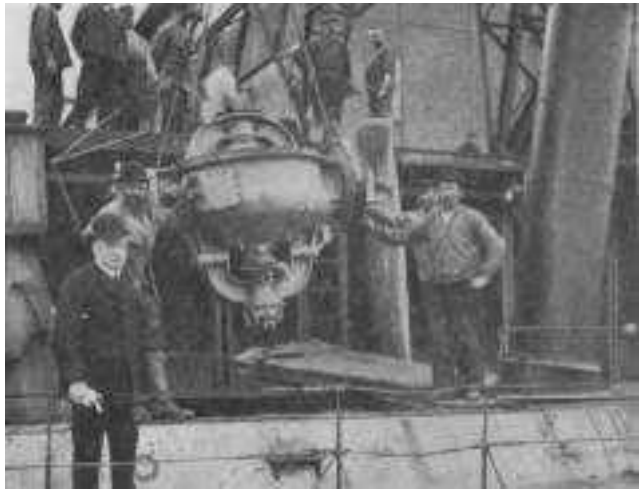
COUPLE GYROSTATIQUE (3)



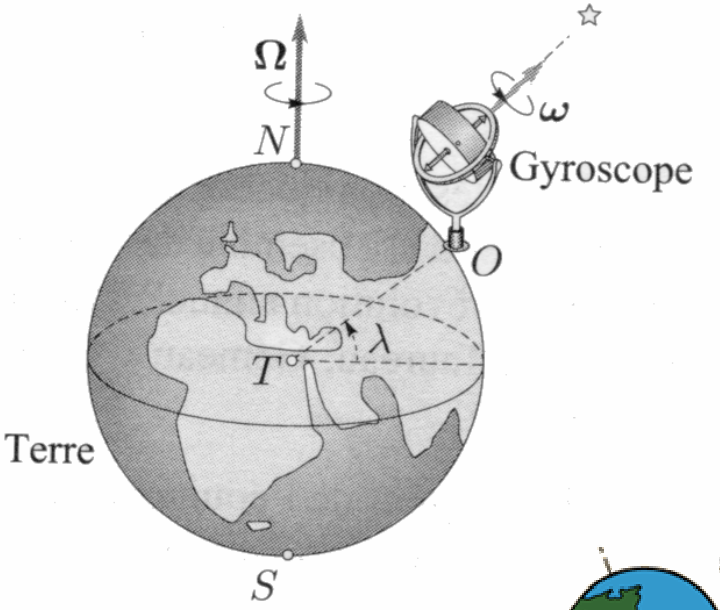


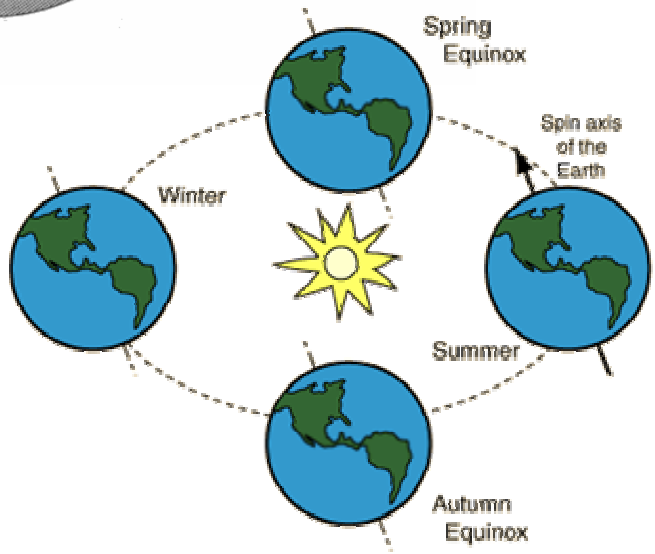
LE GYROSCOPE COMME STABILISATEUR

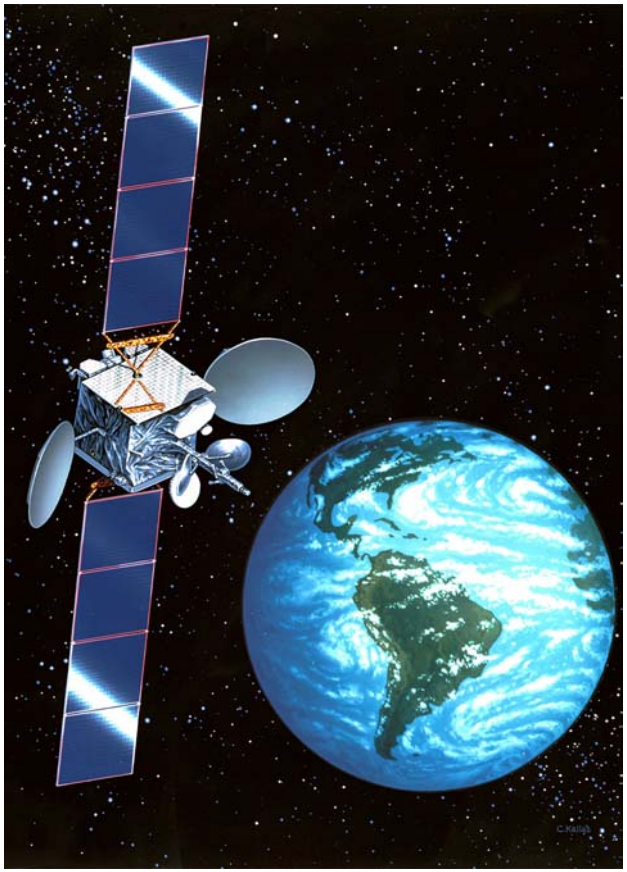
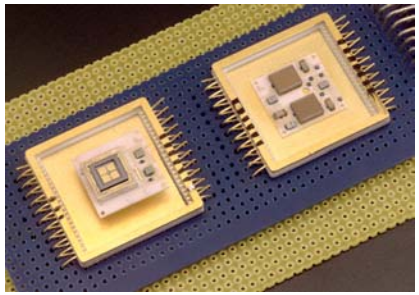
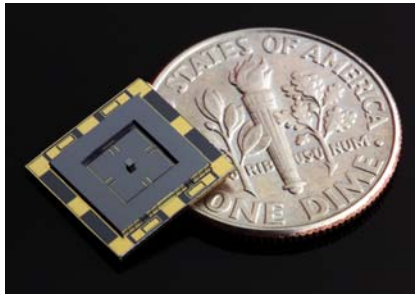




LE GYROSCOPE COMME AXE DE REFERENCE





LE SEGWAY

LE GYROSCOPE DANS LE FUTUR