METHODES GENERALES DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMES - EQUATIONS DE LAGRANGE

- METHODE DES TRAVAUX VIRTUELS
- EQUATIONS DE LAGRANGE
- EXEMPLE : LE PENDULE SPHERIQUE
- MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

METHODE DES TRAVAUX VIRTUELS (1)

- **Equation du mouvement en chaque point** P_h

$$m_h \overline{a}_h = \overline{F}_h = \overline{F}_{e,h} + \overline{R}_{e,h} + \overline{F}_{i,h} + \overline{R}_{i,h} \Leftrightarrow \overline{F}_h - m_h \overline{a}_h = 0$$

- **Appliquons à ces conditions d'équilibre généralisées la méthode des travaux virtuels :**

  - **On associe à tout point** $P_h(\overline{r}_h = \overline{\varphi}_h(q_1 ..., q_n, t))$ **un déplacement virtuel**

$$\delta \overline{r}_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$$

  - **On choisit ces déplacements en respectant les liaisons pour que les forces inconnues ne travaillent pas**

METHODE DES TRAVAUX VIRTUELS (2)

➔ On calcule le travail virtuel : $\delta\tau = \sum_{h=1}^{N}(\overline{F}_h - m_h\overline{a}_h).\delta\overline{r}_h = 0$

➔ On exprime ce travail virtuel en fonction des coordonnées généralisées

$$\delta\tau = \sum_{h=1}^{N}(\overline{F}_h - m_h\overline{a}_h)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{N}(\overline{F}_h - m_h\overline{a}_h)\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0$$

➔ On déduit pour les n coordonnées indépendantes q_i les n relations

$$\sum_{h=1}^{N}(\overline{F}_h - m_h\overline{a}_h).\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i} = 0$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^{N} m_h\overline{a}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N}\overline{F}_h.\frac{\partial\overline{\varphi}_h}{\partial q_i}}$$

METHODE DES TRAVAUX VIRTUELS (3)

$$Q_i = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

➔ Q_i est le coefficient de δq_i dans le travail élémentaire effectué par les forces lors d'une variation de δq_i

➔ Si les forces dérivent d'un potentiel :

$$\delta\tau = -\delta V$$

$$\delta\tau = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h \delta\overline{r}_h = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\Rightarrow Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

EQUATIONS DE LAGRANGE (1)

➔ **Méthode des travaux virtuels :**

$$\sum_{h=1}^{N} m_h \bar{a}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N} \bar{F}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

$$\sum_{h=1}^{N} m_h \bar{a}_h \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_i} = Q_i$$

➔ **Energie cinétique du système :**

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h \cdot \dot{\bar{r}}_h$$

où $$\bar{r}_h = \bar{\varphi}_h (q_1, \ldots, q_n, t)$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\bar{r}}_h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial t}$$

EQUATIONS DE LAGRANGE (2)

➔ **Calculons l'expression :** $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h . \dot{\bar{r}}_h$$

$$\dot{\bar{r}}_h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h . \frac{\partial \dot{\bar{r}}_h}{\partial q_i}$$

où $$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_h}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h . \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial t} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h . \frac{\partial \dot{\bar{r}}_h}{\partial \dot{q}_i}$$

avec $$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_h}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

EQUATIONS DE LAGRANGE (3)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h \cdot \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \ddot{\bar{r}}_h \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} + \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial t} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \dot{\bar{r}}_h \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_i \partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{h=1}^{N} m_h \ddot{\bar{r}}_h \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i}$$

$$\sum_{h=1}^{N} m_h \bar{a}_h \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$$

EQUATIONS DE LAGRANGE (4)

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} = 0$$

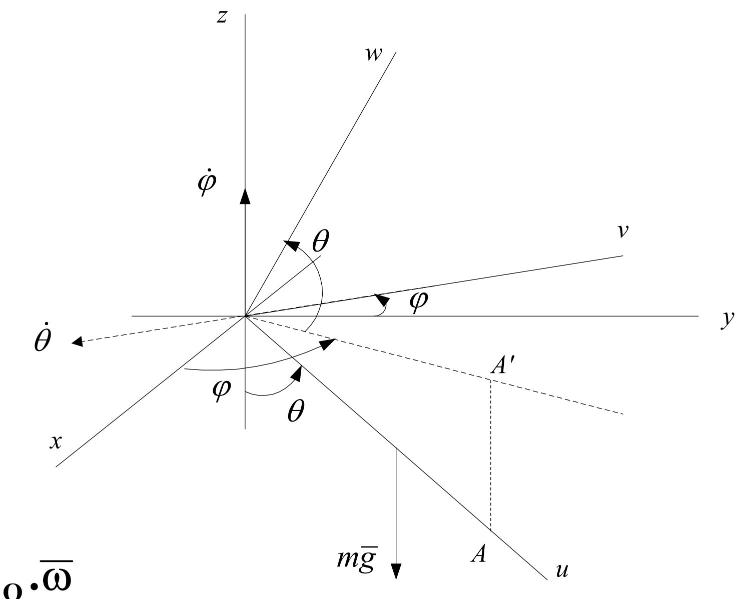
car $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$

➔**Si les forces dérivent d'un potentiel :**

$$\boxed{L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j)} \quad j = 1,\ldots$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

EXEMPLE : LE PENDULE SPHERIQUE (1)

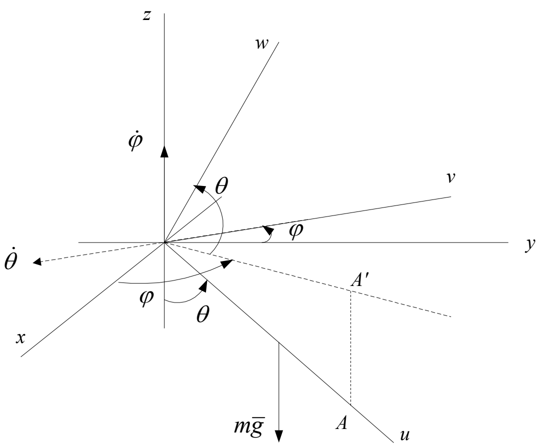


➔ **L'énergie cinétique de la tige :** $\mathbf{T = \frac{1}{2}\overline{\omega}.I_O.\overline{\omega}}$

➔ **Dans les axes principaux d'inertie u, v, w :** $\mathbf{\overline{\omega} = -\dot{\varphi}\cos\theta\overline{1}_u - \dot{\theta}\overline{1}_v + \dot{\varphi}\sin\theta\overline{1}_w}$

$$\mathbf{I_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}}$$

EXEMPLE : LE PENDULE SPHERIQUE (2)



$$\Rightarrow T = \frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

$$V = -mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow L = \frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

➔ **Equations de Lagrange en φ :**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}\sin^2\theta = A$$

EXEMPLE : LE PENDULE SPHERIQUE (3)

- **Equation de Lagrange en θ :**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{6} 2\dot\theta\right) - \frac{ml^2}{6}\dot\varphi^2 2\sin\theta\cos\theta + \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{3}\ddot\theta - \frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot\theta - \frac{A^2}{\sin^3\theta}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- **Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\frac{ml^2}{6}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) - \frac{mgl}{2}\cos\theta = E$$

$$\boxed{\dot\theta^2 + \frac{A^2}{\sin^2\theta} - 3\frac{g}{l}\cos\theta = \frac{6}{ml^2}E}$$

MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE (1)

➔ Les équations de Lagrange ne sont plus valables quand il existe p relations holonomes entre les n coordonnées généralisées :

$$\phi_i(q_1,\ldots,q_n,t) = 0 \qquad i = 1,\ldots,p$$

➔ Différencions 'virtuellement' ces équations :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \qquad i = 1,\ldots,p$$

➔ Multiplions chacune de ces équations par un multiplicateur λ_i correspondant et sommons sur l'indice i :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0$$

➔ Comme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0$$

MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE (2)

➔ On obtient :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\delta q_j=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0$$

➔ Les équations de Lagrange modifiées deviennent :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}}$$

➔ Dans le cas où les forces dérivent d'un potentiel :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}}$$

➔ qui constituent avec les p relations, un système de (n+p) équations à (n+p) inconnues $q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$

MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE (3)

➔ **Cette méthode peut aussi être appliquée pour des liaisons non-holonomes mais linéaires en les $\dot{q}_j$**

➔ **Au lieu de** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \qquad i = 1,\ldots,p$

➔ **Nous avons** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta q_j = 0 \qquad i = 1,\ldots,p$

➔ **Nous obtenons des équations analogues à celles qui précèdent sauf qu'ici :**

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \rightarrow a_{ij}$$