THEOREMES GENERAUX

- **THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE**
- **THEOREME DU MOMENT CINETIQUE**
- **THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE**

INTRODUCTION (1)

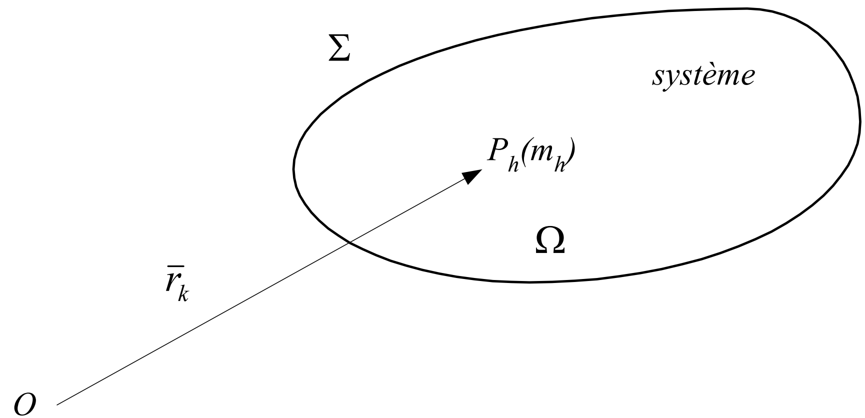
- **Pour un point P, on a :**
  - **quantité de mouvement** $m\overline{v}$
  - **moment en un point O de la quantité du mouvement :** $\overline{OP} \times m\overline{v}$
  - **l'énergie cinétique** $\frac{m}{2} v^2$
  - **l'équation du mouvement** $m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}$

INTRODUCTION (2)

- **Pour un solide, il y a une infinité de points, donc une infinité d'équations de Newton : les équations doivent être remplacées par les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique.**

- **Dans la suite, on considère un point P_h quelconque du système :**

  - **masse m_h**
  - **position $\overline{r}_h$**
  - **vitesse $\overline{v}_h$**
  - **accélération $\overline{a}_h$**
  - **soumis à la résultante $\overline{F}_h = \overline{F}_{e,h} + \overline{R}_{e,h} + \overline{F}_{i,h} + \overline{R}_{i,h}$**



THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE

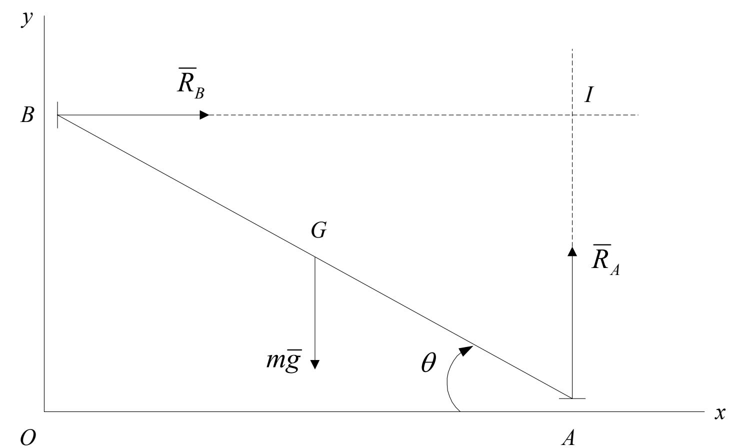
➔ **Pour un système de points :**

$$\frac{d}{dt}\overline{R} = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h$$

$$M\overline{a}_G = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_{e,h} + \sum_{h=1}^{N} \overline{R}_{e,h}$$

➔ **Le centre de masse se meut comme un point matériel muni de la masse totale du système et soumis à la résultante des forces extérieures.**

EXEMPLE



➔ **Nous avons :**

$$\overline{\mathbf{r}}_G = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\overline{1}_x + \sin\theta\,\overline{1}_y)$$

$$\overline{\mathbf{v}}_G = \frac{l}{2}(-\dot{\theta}\sin\theta\,\overline{1}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\overline{1}_y)$$

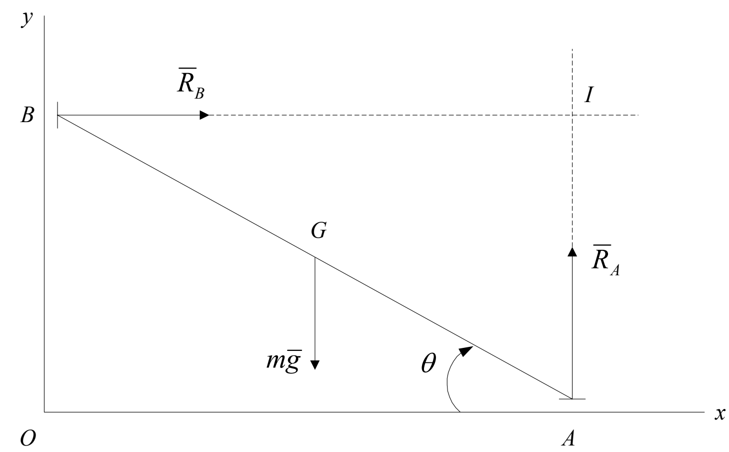
$$\overline{\mathbf{a}}_G = \frac{l}{2}\left[\ddot{\theta}(-\sin\theta\,\overline{1}_x + \cos\theta\,\overline{1}_y) + \dot{\theta}^2(-\cos\theta\,\overline{1}_x - \sin\theta\,\overline{1}_y)\right]$$

➔ **Théorème de la résultante cinétique :**

$$-\frac{ml}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = R_B$$

$$\frac{ml}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = R_A - mg$$

EXEMPLE



➔ **Théorème du moment cinétique :**

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_I = mg\frac{l}{2}\cos\theta\,\overline{1}_z$$

$$\overline{M}_I = \overline{M}_G + m\overline{IG}x\overline{v}_G = -\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\,\overline{1}_z$$

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_A = \sum_{h=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\overline{AP_h}\right) x\, m_h \overline{v}_h + \sum_{h=1}^{N}\overline{AP_h}\ x\,(m_h \overline{a}_h)$$

avec $m_h \overline{a}_h = \overline{F}_h + \overline{R}_h$

$$\overline{AP_h} = \overline{AO} + \overline{OP_h}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\overline{M}_A = \sum_{h=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\overline{AO}\right) x\, m_h \overline{v}_h + \sum_{h=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\overline{OP_h}\right) x\, m_h \overline{v}_h + \sum_{h=1}^{N}\overline{AP_h}\ x\,(\overline{F}_{e,h} + \overline{R}_{e,h})$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_A = M\overline{v}_G\ x\ \overline{v}_A + \overline{m}_{e,A}}$$

➔ **La dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point A est égale à la somme vectorielle du moment total, en A, des forces extérieures et du produit vectoriel de la quantité de mouvement du centre de masse par la vitesse du point A considéré.**

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE APPLIQUE A UN SOLIDE

- Au cdm du solide :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{M}_G = \overline{m}_{e,G}} \qquad \text{avec} \qquad \overline{M}_G = \overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}$$

- Equations d'Euler : dans les axes principaux GXYZ

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = \overline{m}_{e,G} \qquad \text{avec} \qquad \overline{M}_G = Ap\overline{1}_X + Bq\overline{1}_Y + Cr\overline{1}_Z$$

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_G = A\dot{p}\overline{1}_X + B\dot{q}\overline{1}_Y + C\dot{r}\overline{1}_Z + \overline{\omega}x\overline{M}_G$$

$$= A\dot{p}\overline{1}_X + B\dot{q}\overline{1}_Y + C\dot{r}\overline{1}_Z + (C-B)qr\overline{1}_X + (A-C)pr\overline{1}_Y + (B-A)pq\overline{1}_Z$$

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= m_{e,G,X} \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= m_{e,G,Y} \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= m_{e,G,Z} \end{aligned}}$$

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE (1)

- Pour un système de points : $\dfrac{d}{dt} m_h \overline{v}_h = \overline{F}_h$

$$\Rightarrow \overline{v}_h \cdot \frac{d}{dt} m_h \overline{v}_h = \overline{v}_h . \overline{F}_h$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} T = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h . \overline{v}_h}$$

- La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance totale développée par toutes les forces appliquées au système.

$$dT = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_h . d\overline{r}_h$$

$$\boxed{T - T_0 = \sum_{h=1}^{N} \int_{P_{oh} P_h} d\overline{r}_h . \overline{F}_h}$$

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE (2)

- **Liaisons fixes et polies :** $\overline{R}_{e,h}.\overline{v}_h = \overline{R}_{i,h}.\overline{v}_h = 0$

- **Si, de plus, les forces extérieures et intérieures dérivent d'un potentiel :**

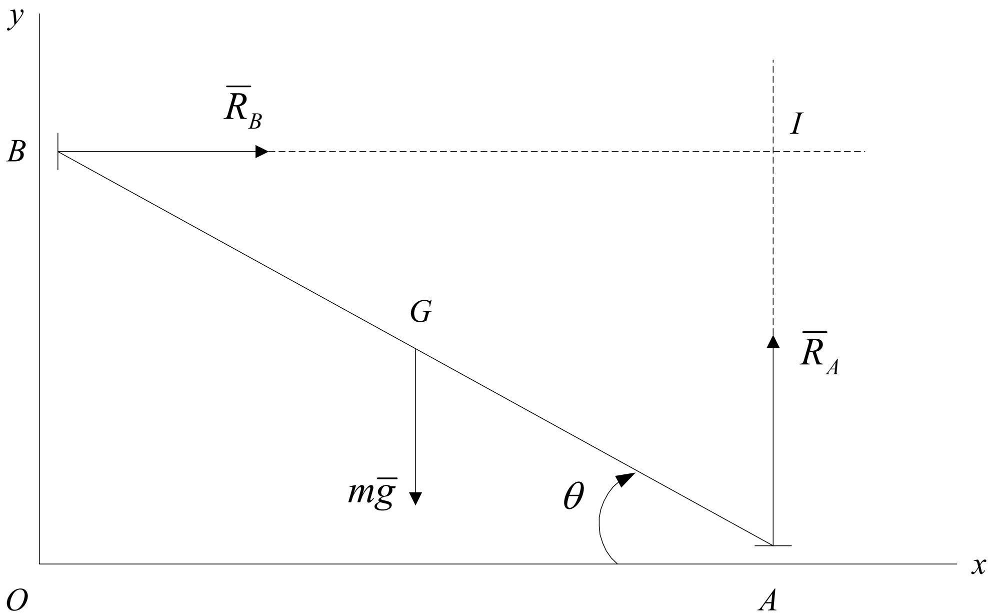
$$\boxed{T + V = T_0 + V_0 = E_0} \qquad \text{où} \qquad V = V_e + V_i = -\sum_{h=1}^{N} \int_{P_{oh}P_h} d\overline{r}_h.\overline{F}_{e,h} - \sum_{h=1}^{N} \int_{P_{oh}P_h} d\overline{r}_h.\overline{F}_{i,h}$$

- **Pour un solide, la puissance des forces intérieures est nulle :**

$$\sum_{h=1}^{N} \overline{F}_{i,h}.\overline{v}_h = \sum_{h=1}^{N} \overline{F}_{i,h}.(\overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AP_h}) \qquad (A \in \text{solide})$$

$$= \overline{v}_A.(\sum_{h=1}^{N} \overline{F}_{i,h}) + \overline{\omega}.(\sum_{h=1}^{N} \overline{AP_h} x \overline{F}_{i,h}) = 0$$

EXEMPLE



$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_G . \overline{\omega} = \frac{ml^2}{6} \dot{\theta}^2$$

$$V = mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{6} \dot{\theta}^2 + mg \frac{l}{2} \sin\theta = E_0$$