CINETIQUE DES SYSTEMES DE POINTS
CINETIQUE DU SOLIDE

- **GÉNÉRALITÉS**
- **DÉFINITION DES GRANDEURS FONDAMENTALES :**
  - la résultante cinétique du système de points
  - le moment cinétique du système
  - l'énergie cinétique
- **CALCUL DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE :**
  - moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe
  - moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un point fixe
  - moment cinétique d'un solide en son centre de masse
- **CALCUL DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE :**
  - solide en mouvement quelconque
  - solide en rotation autour d'un axe fixe
  - solide en rotation autour d'un point fixe

GENERALITES

- **Distribution discontinue de masse :** $M = \sum_{h=1}^{N} m_h$
- **Distribution continue de masse :** $M = \int_\Omega dm = \int_\Omega d\Omega \rho(P)$
- **Forces internes ≠ Forces externes**
- **n degrés de liberté** $\rightarrow$ **n coordonnées généralisées** q_α

$$\Rightarrow \bar{r}_h = \bar{\varphi}_h(q_\alpha, t) \qquad h = 1,\ldots, N$$
$$\alpha = 1,\ldots,n$$

- **n + m coordonnées généralisées si m équations de liaison :**
  - liaisons holonomes : $\phi_k(q_\alpha, t) = 0 \qquad k = 1,\ldots,m$
  - liaisons non holonomes : $\phi_k = (q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0 \qquad k = 1,\ldots,m$

DEFINITION DES GRANDEURS FONDAMENTALES

Le mouvement d'un système est complètement connu si l'on peut donner, à tout instant, pour un quelconque de ses points P_h la position $\overline{r}_h$ et la vitesse $\overline{v}_h = \dot{\overline{r}}_h \rightarrow$ il suffira de connaître, à tout instant, les n coordonnées généralisées $\dot{q}_\alpha$

$$\overline{v}_h = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial t}$$

$$\overline{a}_h = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_a + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_h}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial q_\alpha \partial t} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_h}{\partial t^2}$$

Chacun des points matériels reste soumis à la loi fondamentale de Newton de la dynamique du point :

$$\frac{d}{dt}(m_h \overline{v}_h) = \overline{F}_h$$

RESULTANTE CINETIQUE DU SYSTEME DE POINTS

➔ **Pour un système de points :** $\overline{R} = \sum_{h=1}^{N} m_h \overline{v}_h$

➔ **Si le système est continu :** $\overline{R} = \int_{\Omega} dm\ \overline{v}(P)$

➔ **En introduisant le cdm :**

puisque $\overline{OG} = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{N} m_h \overline{r}_h$ **ou** $\overline{OG} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} dm\ \overline{r}(P)$

et $\overline{v}_G = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{N} m_h \overline{v}_h$ **ou** $\overline{v_G} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} dm\ \overline{v}(P)$

$$\overline{R} = M\ \overline{v}_G$$

MOMENT CINETIQUE DU SYSTEME PAR RAPPORT A UN POINT DONNE

- Pour un système de points : $\overline{M}_A = \sum_{h=1}^{N} \overline{AP_h} \, x \, m_h \overline{v}_h$

- Pour un système continu : $\overline{M}_A = \int_\Omega dm \, \overline{AP} \, x \, \overline{v}\,(P)$

- Relation entre moments cinétiques par rapport à différents points :

$$\overline{AP}_h = \overline{AB} + \overline{BP}_h$$

$$\overline{M}_A = \sum_{h=1}^{N} \overline{AB} \, x \, m_h \overline{v}_h + \sum_{h=1}^{N} \overline{BP_h} \, x \, m_h \overline{v}_h$$

$$\overline{M}_A = \overline{AB} \, x \, \overline{R} + \overline{M}_B$$

ENERGIE CINETIQUE

- **Pour un système de points :** $$T = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} m_h v_h^2$$

- **Pour un système continu :** $$T = \frac{1}{2}\int_{\Omega} dm\ v_p^2$$

- **Energie cinétique du système en fonction de celle du centre de masse:**

$$\overline{OP}_h = \overline{OG} + \overline{GP}_h$$

$$\Rightarrow \overline{v}_h = \overline{v}_G + \frac{d}{dt}\overline{GP}_h = \overline{v}_G + \overline{v}'_h$$

$$\Rightarrow v_h^2 = v_G^2 + 2\overline{v}_G.\overline{v}'_h + v_h'^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{h=1}^{N} m_h\right)v_G^2 + \overline{v}_G.\sum_{h=1}^{N} m_h\overline{v}'_h + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} m_h v_h'^2 \quad = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \overline{v}_G.\frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{N} m_h\overline{GP}_h + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} m_h v_h'^2$$

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} m_h v_h'^2$$

MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE

- En un point quelconque : $\overline{M}_A = \int_\Omega dm\ \overline{AP} \times \overline{v}_p$

- Si le point appartient au solide : $\overline{M}_A = \int_\Omega dm\ \overline{AP} \times (\overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AP})$

$$= m\ \overline{AG} \times \overline{v}_A + \int_\Omega dm\ \overline{AP} \times (\overline{\omega} \times \overline{AP})$$

$$I^{\alpha\beta} = \int_{(\text{système})} (x^i x^i \delta^{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta)\, dm$$

$$\overline{M}_A = m\overline{AG} \times \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE - SIMPLIFICATIONS

- **Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, par rapport à un point de cet axe :**

$$\overline{M}_A = m\overline{AG} x \overline{v}_A + \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

$$\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

$$\overline{M}_A = -P_{xz}\omega\overline{1}_x - P_{yz}\omega\overline{1}_y + I_z\omega\overline{1}_z$$

Dans les axes principaux : $\overline{M}_A = C\omega\overline{1}_z$

- **Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un point fixe A :**

$$\overline{M}_A = \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

Dans les axes principaux d'inertie : $\overline{M}_A = Ap\overline{1}_x + Bq\overline{1}_y + Cr\overline{1}_z$

- **Moment cinétique d'un solide en son centre de masse :**

$$\overline{M}_G = \overline{\overline{I}}_G . \overline{\omega}$$

ENERGIE CINETIQUE DU SOLIDE (1)

- **Mouvement quelconque :** $$T = \frac{1}{2}\int_\Omega dm\ \overline{v}_p^2$$

- **A appartient au solide :** $$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AP}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_\Omega dm\left[\overline{v}_A^2 + (\overline{\omega} x \overline{AP}).(\overline{\omega} x \overline{AP}) + 2\overline{v}_A.(\overline{\omega} x \overline{AP})\right]$$

$$T = \frac{M}{2}\overline{v}_A^2 + M\overline{v}_A.(\overline{\omega} x \overline{AG}) + \frac{1}{2}\int_\Omega dm(\overline{\omega} x \overline{AP}).(\overline{\omega} x \overline{AP})$$

$$\int_\Omega dm(\overline{\omega} x \overline{AP}).(\overline{\omega} x \overline{AP}) = \overline{\omega}.\int_\Omega dm\left[\overline{AP} x(\overline{\omega} x \overline{AP})\right]$$

$$= \overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$T = \frac{M}{2}\overline{v}_A^2 + M\overline{v}_A.(\overline{\omega} x \overline{AG}) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

ENERGIE CINETIQUE DU SOLIDE (2)

$$T = \frac{M}{2}\overline{v}_A^2 + M\overline{v}_A.(\overline{\omega} x \overline{AG}) + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_A.\overline{\omega}$$

$$T = \frac{M}{2}\overline{v}_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}.\overline{\overline{I}}_G.\overline{\omega}$$

➔ **Dans les axes principaux :**

$$T = \frac{M}{2}\overline{v}_G^2 + \frac{1}{2}(I_{G,x}p^2 + I_{G,y}q^2 + I_{G,z}r^2)$$

ENERGIE CINETIQUE DU SOLIDE (3)

- **Rotation autour d'un axe fixe d :**

$$T = \frac{1}{2}\,\omega\overline{1}_d . \overline{\overline{I}}_A . \omega\overline{1}_d$$

$$T = \frac{1}{2} I_d \omega^2$$

- **Rotation autour d'un point fixe A :**

$$T = \frac{1}{2}\,\overline{\omega} . \overline{\overline{I}}_A . \overline{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$