

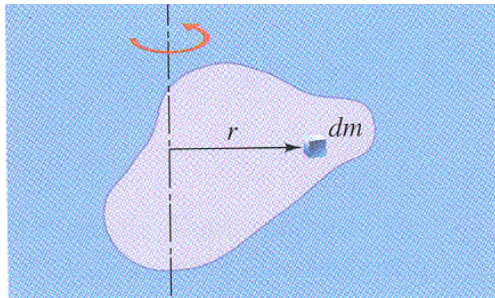
→ Moment d'ordre n :

→ Ordre 0 : $M = \int_D dm$ Masse totale du système

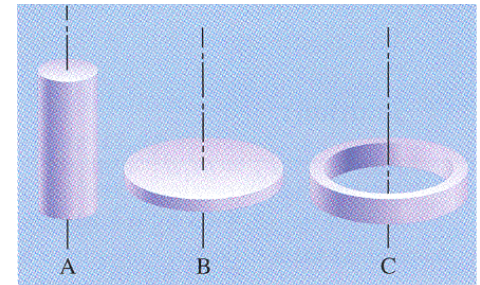
→ Ordre 1 : $Mx_G^i = \int_D x^i dm$ Coordonnées du centre de masse

→ Ordre 2 : $\int_D r^2 dm$ Etude de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE



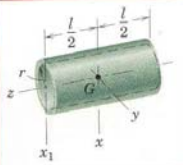
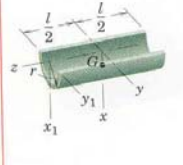
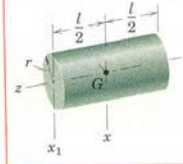
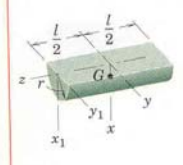
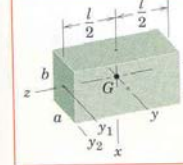
$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad \text{avec} \quad v = \omega r \\
 &= \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 I_d
 \end{aligned}$$



MOMENTS D'INERTIE (TABLE 1)

TABLE D/4 PROPERTIES OF HOMOGENEOUS SOLIDS

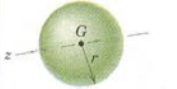
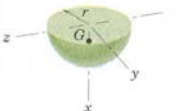
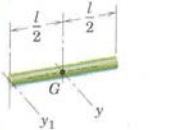
(m = mass of body shown)

BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Circular Cylindrical Shell	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Half Cylindrical Shell	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
 Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 Semicylinder	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Rectangular Parallelepiped	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$

MOMENTS D'INERTIE (TABLE 2)

TABLE D/4 PROPERTIES OF HOMOGENEOUS SOLIDS *Continued*

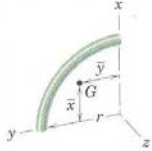
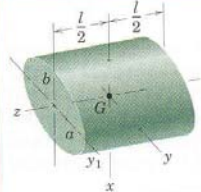
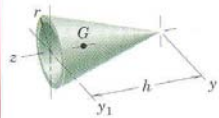
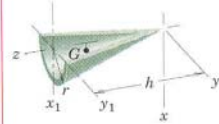
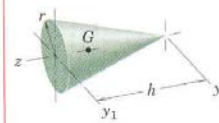
(m = mass of body shown)

BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Spherical Shell	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
 Hemispherical Shell	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
 Sphere	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
 Hemisphere	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
 Uniform Slender Rod	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

MOMENTS D'INERTIE (TABLE 3)

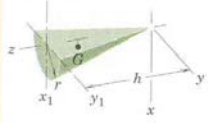
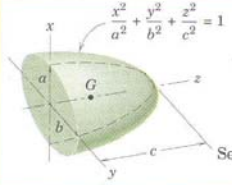
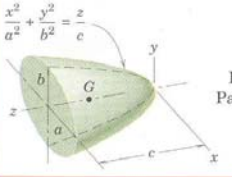
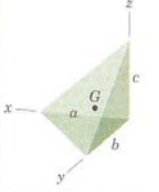
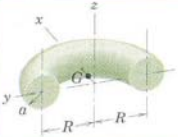
TABLE D/4 PROPERTIES OF HOMOGENEOUS SOLIDS *Continued*

(m = mass of body shown)

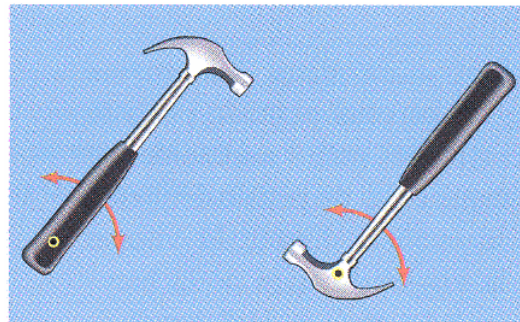
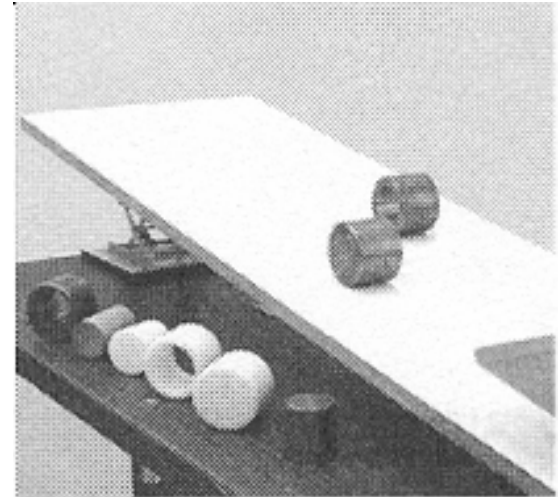
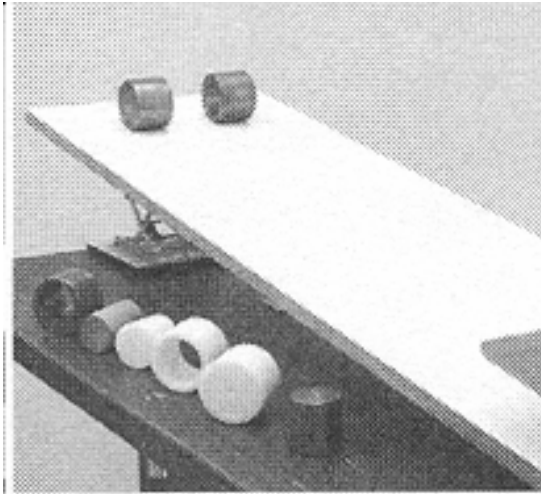
BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Quarter-Circular Rod	$\bar{x} = \bar{y}$ $= \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Elliptical Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
 Conical Shell	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
 Half Conical Shell	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Right-Circular Cone	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{8}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$

MOMENTS D'INERTIE (TABLE 4)

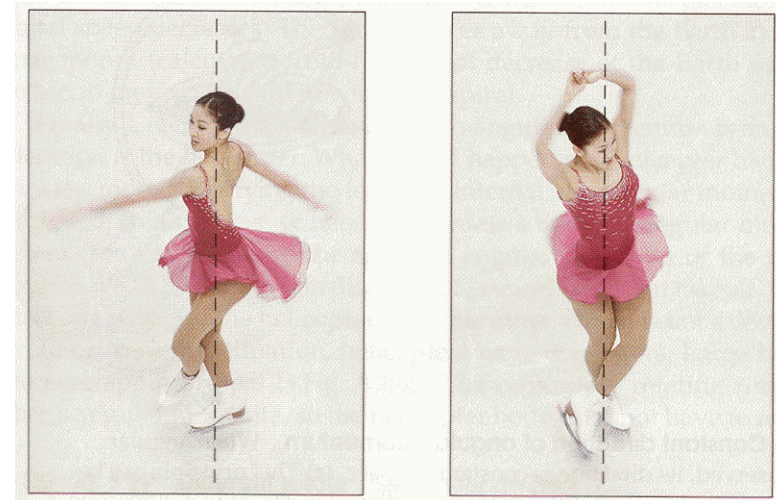
TABLE D/4 PROPERTIES OF HOMOGENEOUS SOLIDS *Continued*
(m = mass of body shown)

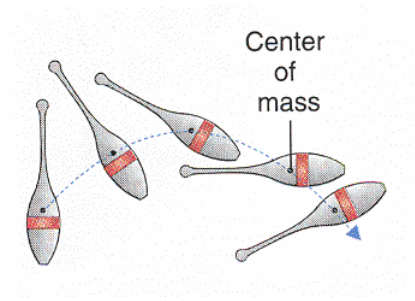
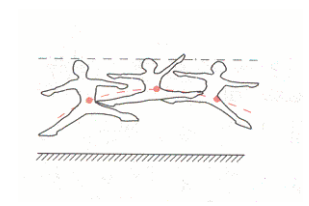
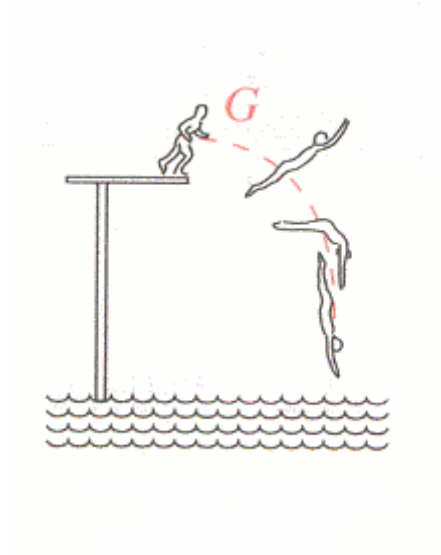
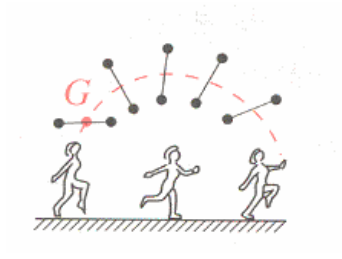
BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Half Cone	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{16}mh^2$ $I_{x_1y_1} = I_{y_1x_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{16}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2} \right) mr^2$
 Semiellipsoid	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
 Elliptic Paraboloid	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
 Rectangular Tetrahedron	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
 Half Torus	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

EFFETS DU MOMENT D'INERTIE (1)



EFFETS DU MOMENT D'INERTIE (2)





➔ Moments du second ordre par rapport aux plans de coordonnées :

$$I_{yz} = \int x^2 dm$$

$$I_{zx} = \int y^2 dm$$

$$I_{xy} = \int z^2 dm$$

➔ Moments d'inertie du système, par rapport au trois axes coordonnés:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

MOMENTS D'ORDRE 2 (2)

→ **Moment d'inertie par rapport au point 0 :** $I_O = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int OP^2 dm$

→ **Produits d'inertie :**

$$P_{xy} = \int xy dm$$

$$P_{yz} = \int yz dm$$

$$P_{zx} = \int zx dm$$

→ **Relations entre moments :**

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}$$

$$I_y = I_{yz} + I_{yx}$$

...

$$I_O = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

$$\mathbf{T}^{ij} = \int \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j dm \quad \text{mais} \quad \mathbf{I}_x = \mathbf{T}^{22} + \mathbf{T}^{33} \quad !$$

→ Tenseur d'inertie :

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \int_{(\text{système})} (\mathbf{x}^i \mathbf{x}^i \delta^{\alpha\beta} - \mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^\beta) dm$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}^{11} = \mathbf{I}_x & \mathbf{I}^{12} = -\mathbf{P}_{xy} & \mathbf{I}^{13} = -\mathbf{P}_{xz} \\ \mathbf{I}^{21} = -\mathbf{P}_{yx} & \mathbf{I}^{22} = \mathbf{I}_y & \mathbf{I}^{23} = -\mathbf{P}_{yz} \\ \mathbf{I}^{31} = -\mathbf{P}_{zx} & \mathbf{I}^{32} = -\mathbf{P}_{zy} & \mathbf{I}^{33} = \mathbf{I}_z \end{pmatrix}$$

→ Dans une autre représentation ($\mathbf{x}'$) : $\mathbf{I}'^{\lambda\mu} = \alpha_i^\lambda \alpha_j^\mu \mathbf{I}^{ij}$ avec $\mathbf{x}'^\lambda = \alpha_i^\lambda \mathbf{x}^i$

EXEMPLE DE CHANGEMENT DE SYSTEME DE COORDONNEES

→ Rotation d'angle θ autour de l'axe z :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^1 = \cos \theta & \alpha_2^1 = \sin \theta & \alpha_3^1 = 0 \\ \alpha_1^2 = -\sin \theta & \alpha_2^2 = \cos \theta & \alpha_3^2 = 0 \\ \alpha_1^3 = 0 & \alpha_2^3 = 0 & \alpha_3^3 = 1 \end{pmatrix}$$

$$I'_x = I'^{11} = \alpha_i^1 \alpha_j^1 I^{ij} = \cos^2 \theta I_x + \sin^2 \theta I_y + 2 \sin \theta \cos \theta (-P_{xy})$$

$$I'_y = I'^{22} = \alpha_i^2 \alpha_j^2 I^{ij} = \sin^2 \theta I_x + \cos^2 \theta I_y - 2 \sin \theta \cos \theta (-P_{xy})$$

$$-P'_{xy} = I'^{12} = \alpha_i^1 \alpha_j^2 I^{ij} = \sin \theta \cos \theta (I_y - I_x) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (-P_{xy})$$

$$\Rightarrow P'_{xy} = 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$$

- Tenseur d'inertie I^{ij} = tenseur du second ordre, symétrique
- A tout tenseur symétrique du second ordre, on peut associer une quadrique équation.

$$I^{ij}X^iX^j = 1$$

- Une quadrique admet trois axes de symétrie orthogonaux, appelés axes principaux d'inertie, au point considéré. Si on utilise ces axes :

$$I^{11}(X^1)^2 + I^{22}(X^2)^2 + I^{33}(X^3)^2 = 1$$

- Les trois coefficients de l'équation de la quadrique sont positifs, la quadrique est donc un ellipsoïde.

- ➔ **Examinons le rapport qui peut exister entre les moments du second ordre en un point arbitraire O et ceux au centre de masse G du système.**

→ Désignons par :

→ (x^i) les coordonnées d'un point dans le premier système

→ (X^i) les coordonnées du même point dans des axes parallèles ayant pour origine le centre de masse G (axes centraux)

→ (a^i) les coordonnées du centre de masse G par rapport aux premiers axes.

$$\Rightarrow \mathbf{x}^i = \mathbf{X}^i + \mathbf{a}^i$$

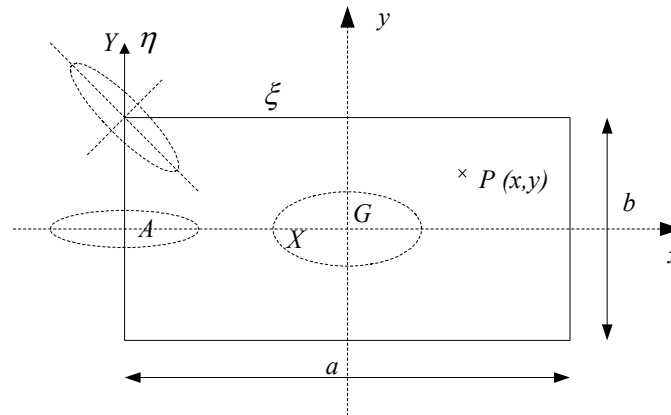
$$\begin{aligned} I_0^{\alpha\beta} &= \int \left\{ (\mathbf{X}^i + \mathbf{a}^i)(\mathbf{X}^i + \mathbf{a}^i)\delta^{\alpha\beta} - (\mathbf{X}^\alpha + \mathbf{a}^\alpha)(\mathbf{X}^\beta + \mathbf{a}^\beta) \right\} dm \\ &= \int (\mathbf{X}^i \mathbf{X}^i \delta^{\alpha\beta} - \mathbf{X}^\alpha \mathbf{X}^\beta) dm + M \mathbf{a}^2 \delta^{\alpha\beta} - M \mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta + 2\delta^{\alpha\beta} \mathbf{a}^i \int \mathbf{X}^i dm - \mathbf{a}^\alpha \int \mathbf{X}^\beta dm - \mathbf{a}^\beta \int \mathbf{X}^\alpha dm \\ &= \int (\mathbf{X}^i \mathbf{X}^i \delta^{\alpha\beta} - \mathbf{X}^\alpha \mathbf{X}^\beta) dm + M \mathbf{a}^2 \delta^{\alpha\beta} - M \mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta \quad (\text{car } \int \mathbf{X}^i dm = 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_0^{\alpha\beta} = I_G^{\alpha\beta} + M(\mathbf{a}^2 \delta^{\alpha\beta} - \mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta)$$

$$\Rightarrow I_d = I_{d^1} + M(\mathbf{d} \mathbf{d}^1)^2$$

- Le moment d'inertie par rapport à un axe d vaut le moment d'inertie par rapport à un axe central d^1 parallèle, augmenté de la masse du système multipliée par le carré de la distance séparant les deux axes. Il en résulte, en particulier, que de tous les axes parallèles entre eux, c'est l'axe central d'inertie pour lequel le moment du système est le plus petit.

EXEMPLES ET APPLICATIONS (1)



→ **Rectangle homogène ($\rho=1$) de côtés a et b :**

$$I_x = \rho \iint y^2 dx dy = \rho \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy = \frac{Mb^2}{12}$$

$$I_y = \frac{Ma^2}{12}$$

$$P_{xy} = 0$$



Ellipse centrale d'inertie :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{12}{Ma^2b^2}$$

EXEMPLES ET APPLICATIONS (2)

→ **Au point A :**

$$I_X = I_x$$

$$I_Y = I_y + M \left(\frac{a^2}{4} \right) = \frac{Ma^2}{3}$$

$$P_{XY} = 0$$

→ **Ellipse d'inertie en A :**

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{4Y^2}{b^2} = \frac{12}{Ma^2b^2}$$

→ **Au point B :**

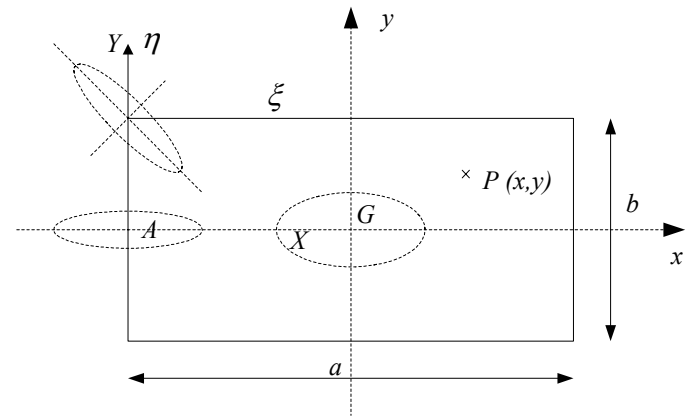
$$I_\xi = I_x + \frac{Mb^2}{4} = \frac{Mb^2}{3}$$

$$I_\eta = I_y = \frac{Ma^2}{3}$$

$$P_{\xi\eta} = \rho \iint xy \, dx \, dy = \frac{Mab}{4}$$

→ **Ellipse d'inertie en B :**

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - \frac{3}{2}ab\xi\eta = \frac{3}{M}$$



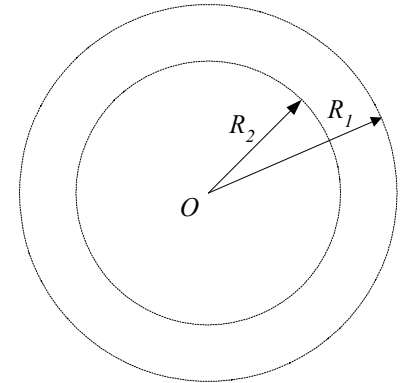
EXEMPLES ET APPLICATIONS (3)

- Cercle homogène de rayon R : moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre et perpendiculaire au plan

$$I_O = \rho \iint r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{M}{2} R^2$$

- Couronne circulaire : par rapport à un axe passant par le centre et perpendiculaire aux axes

$$I_O = \rho \int_{R_2}^{R_1} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$



- Prisme homogène :

- Par rapport au plan de base $I_1 = \frac{Mh^2}{3}$

- Par rapport au plan parallèle à la base, passant par le centre de masse

$$I_2 = \frac{Mh^2}{12}$$

→ Cylindre droit homogène de rayon R :

→ Par rapport à son axe de révolution $I_a = \frac{MR^2}{2}$

→ Par rapport au plan méridien $I = \frac{MR^2}{4}$

→ Tore homogène :

→ Par rapport à l'axe de révolution $I_a = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$