MOUVEMENTS PARALLELES A UN PLAN

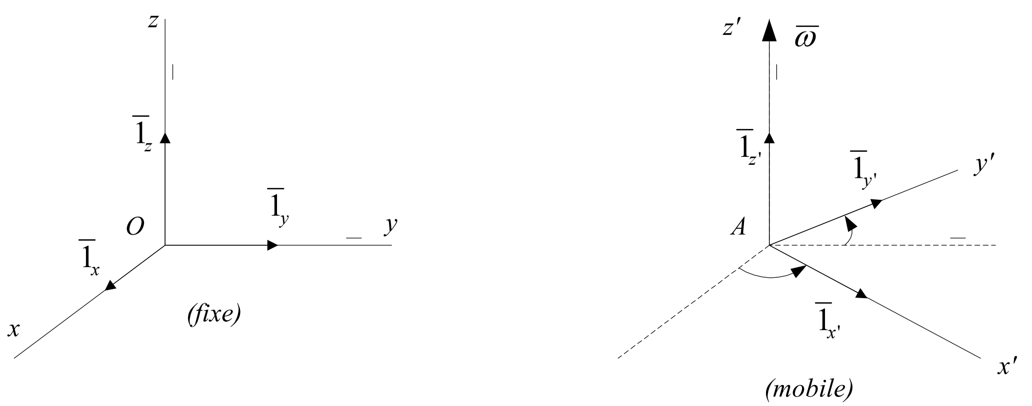
- **Définitions**
- **Centre Instantané de Rotation (C.I.R.)**
- **Détermination des champs de vitesses**
- **Détermination du C.I.R.**
- **Détermination graphique des vecteurs vitesses**
- **Base et roulante**

CENTRE INSTANTANE DE ROTATION (1)

- **Le vecteur de rotation instantané $\overline{\omega}$ est constamment dirigé perpendiculairement au plan du mouvement**

$$\overline{\omega} = \left(\frac{d\overline{1}'_y}{dt}.\overline{1}'_z\right)\overline{1}'_x + \left(\frac{d\overline{1}'_z}{dt}.\overline{1}'_x\right)\overline{1}'_y + \left(\frac{d\overline{1}'_x}{dt}.\overline{1}'_y\right)\overline{1}'_z$$

$$\text{avec :}\quad \frac{d\overline{1}'_z}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\overline{1}'_y}{dt}.\overline{1}'_z = 0$$



CENTRE INSTANTANE DE ROTATION (2)

- **Le mouvement instantané général du solide est un mouvement hélicoïdal**

$$\overline{v}_p = k(t)\overline{\omega}(t) + \overline{\omega} x \overline{QP}$$

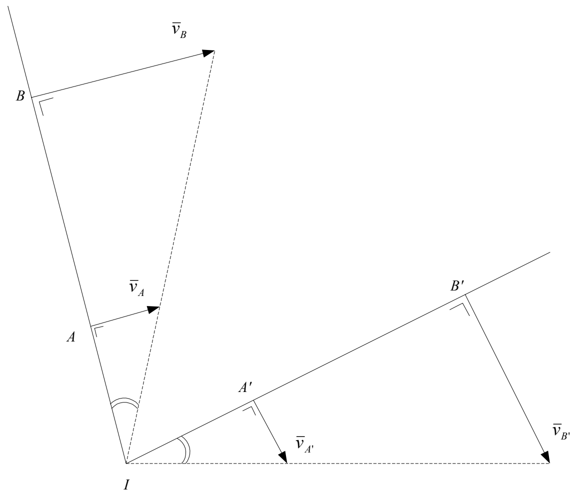
$$\text{Ici, } k(t) = 0 \Rightarrow \overline{v}_p = \overline{\omega} x \overline{QP}$$

- **Centre Instantané de Rotation (C.I.R.) = intersection de l'axe de rotation instantané et du plan de mouvement :** $\overline{v}_I = 0$

- **En particulier :** $\forall P \in \text{solide}:$

$$\overline{v}_P = \overline{v}_I + \overline{\omega} x \overline{IP}$$

$$\overline{v}_P = \overline{\omega} x \overline{IP}$$



DETERMINATION DES CHAMPS DE VITESSES (1)

- Si deux points A et B sont fixes, à l'instant t, tous les points sont fixes à cet instant.

$$\overline{v}_A = \overline{v}_B = 0 \Rightarrow \overline{\omega} x \overline{AB} = 0$$
$$\overline{AB} \neq 0 \text{ et } \overline{AB} \perp \overline{\omega} \Rightarrow \overline{\omega}(t) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{v}_p = \overline{\omega} x \overline{AP} = 0$$

- Si deux points A et B ont des vitesses équipollentes, différentes de zéro, à l'instant t, tous les points ont la même vitesse à cet instant.

$$\overline{v}_B - \overline{v}_A = 0 \Rightarrow \overline{\omega} x \overline{AB} = 0 \Rightarrow \overline{\omega}(t) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{v}_p = \overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AP} = \overline{v}_A$$

DETERMINATION DES CHAMPS DE VITESSES (2)

➔ **Si un point I est fixe et un point A a une vitesse différente de zéro :**

$$\begin{aligned}
\overline{v}_A &= \overline{\omega} x \overline{IA} \\
\overline{IA} x \overline{v}_A &= \overline{IA} x (\overline{\omega} x \overline{IA}) \\
&= (\overline{IA}.\overline{IA})\overline{\omega} - (\overline{IA}.\overline{\omega})\overline{IA} \\
&= (\overline{IA})^2 \overline{\omega}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\omega} = \frac{\overline{IA} x \overline{v}_A}{\overline{IA}.\overline{IA}} \Rightarrow \overline{v}_p = \overline{\omega}(t) x \overline{IP}(t)$$

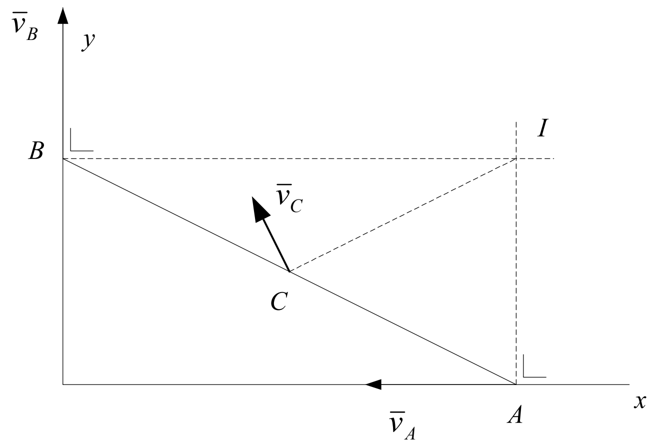
➔ **Si deux points A et B ont des vitesses différentes et non nulles :**

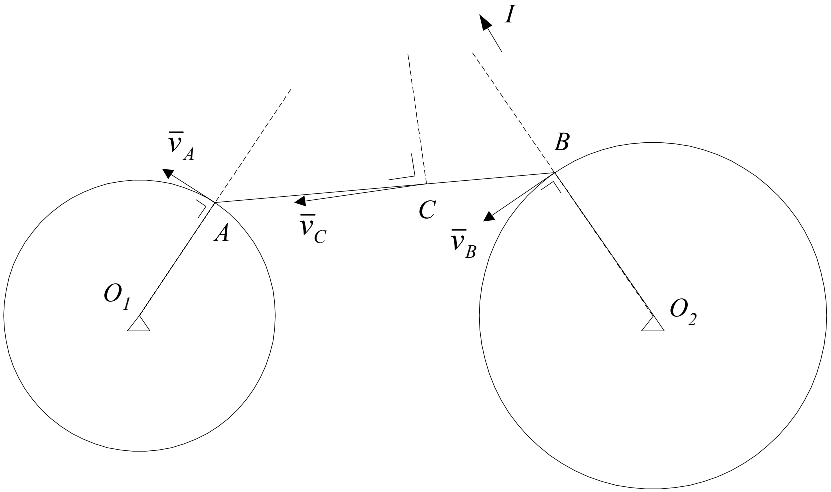
$$\overline{v}_B - \overline{v}_A = \overline{\omega} x \overline{AB}$$

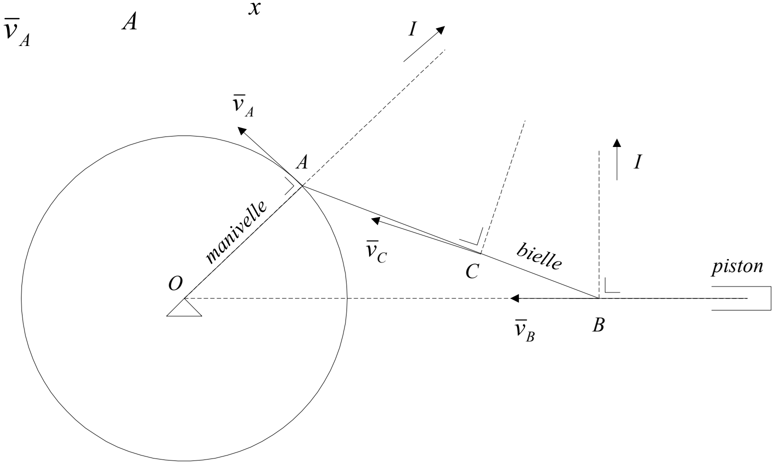
$$\Rightarrow \overline{\omega}(t) = \frac{\overline{AB} x (\overline{v}_B - \overline{v}_A)}{\overline{AB}.\overline{AB}} \Rightarrow \overline{v}_p = \overline{v}_A(t) + \overline{\omega}(t) x \overline{AP}(t)$$

DETERMINATION DU C.I.R. (1)

➔ **Il suffit de connaître les directions des vitesses de deux points du plan: I est à l 'intersection des perpendiculaires de ces vitesses.**

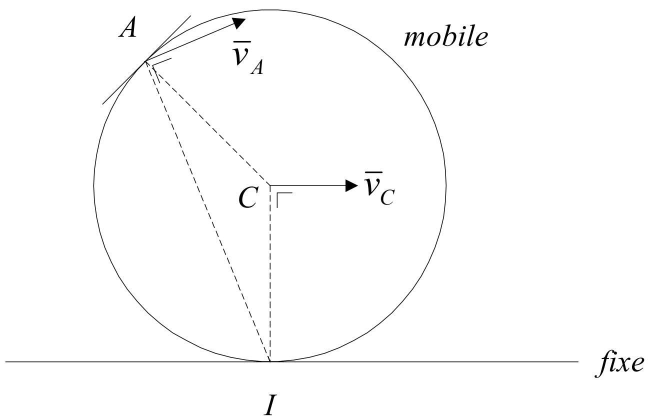


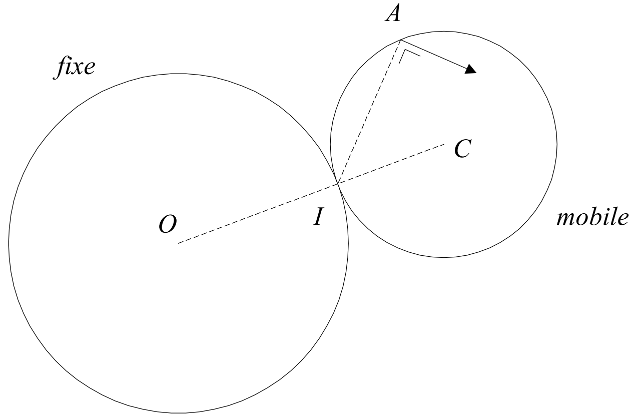




DETERMINATION DU C.I.R. (2)

➔ **Dans le cas d'une courbe roulant sans glisser sur une autre courbe, le C.I.R. est le point de contact de ces deux courbes.**





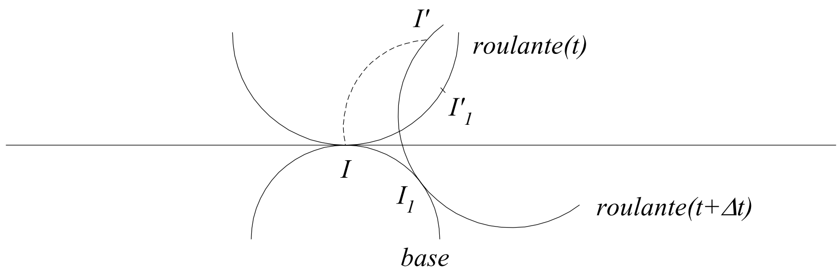
➔ **Analytiquement :**

$$\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\omega}\,\mathbf{x}\,\overline{\mathbf{IP}} \Rightarrow \overline{\mathbf{PI}} = \frac{\bar{\omega}\,\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{v}}_p}{\bar{\omega}^2}$$

BASE ET ROULANTE (1)

➔ **Soient** $\pi_1 = \text{plan fixe}$

$\pi_2 = \text{plan mobile lié au solide}$



➔ **A l 'instant t, considérons trois points qui coïncident en I :**

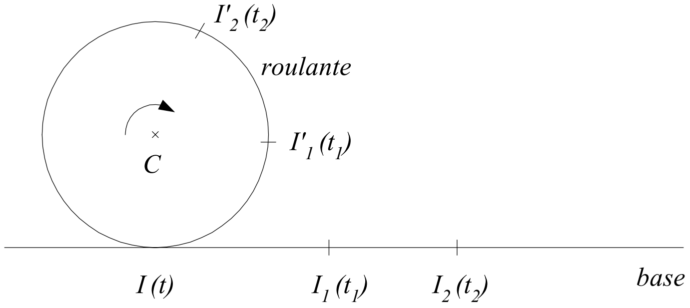
- ➔ **un point lié à** $\pi_1(\overline{v} = 0 \text{ et } \overline{a} = 0)$
- ➔ **un point lié à** $\pi_2(\overline{v} = 0 \text{ et } \overline{a} \neq 0)$
- ➔ **un point géométrique : point fictif (indicateur) qui joue le rôle de C.I.R. et qui change de position dans** π_1 **et** π_2 **quand le temps s'écoule.**

➔ **<u>Base</u> (b) : lieu des points du plan fixe qui servent successivement de C.I.R., trajectoire absolue du point indicateur.**

➔ **<u>Roulante</u> (r) : lieu des points du plan mobile qui viennent successivement se placer sur le C.I.R. : trajectoire relative du point indicateur.**

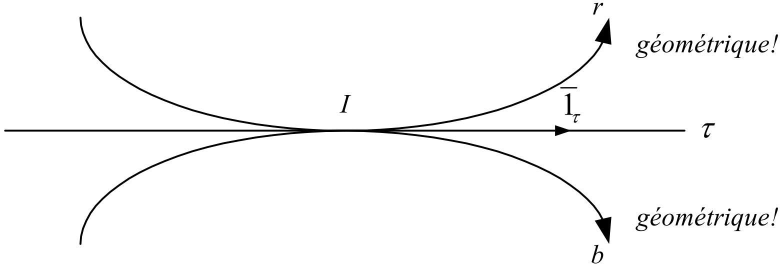
BASE ET ROULANTE (2)

- **Exemple :**



- **Point indicateur :** $\overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{abs}} = \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{rel}} + \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{entr}} \Rightarrow \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{abs}} = \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{rel}} = \overline{\mathbf{u}}$

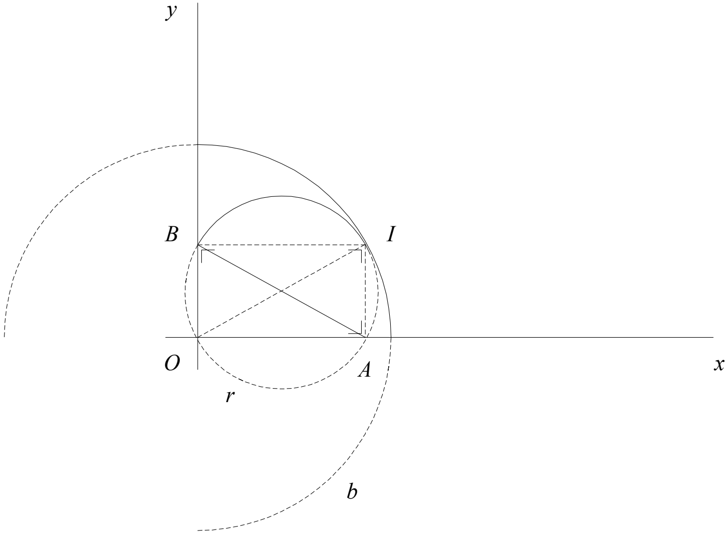
- **la base et la roulante ont à chaque instant une tangente commune en I**



- **la roulante roule sans glisser sur la base en I**

BASE ET ROULANTE (3)

➔**Exemple** : tige AB où A et B sont assujettis à se mouvoir perpendiculairement sur les axes ox et oy.

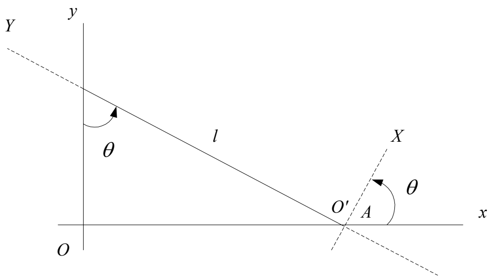


➔**Géométriquement** :

➔**Base** : lieu des points équidistants de 0

➔**Roulante** : lieu des points tels que $\widehat{BIA} = \frac{\pi}{2}$

➔**Analytiquement** : $\begin{cases} x_A = l\sin\theta = x_{0'} \\ y_A = 0 \quad\quad = y_{0'} \end{cases}$



Base : $\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$

Roulante : $\begin{cases} X = l\cos\theta\ \sin\theta \\ Y = l\cos^2\theta \end{cases}$

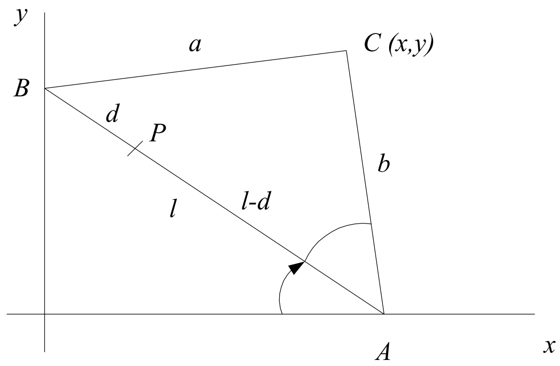
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = l^2$

$\Leftrightarrow X^2 + (Y - \frac{l}{2})^2 = \frac{l^2}{4}$

COMPAS ELLIPTIQUE OU ELLIPSOGRAPHE

➔ **Tout point C lié rigidement à A et B décrit une ellipse dans le plan Oxy :**

$$\begin{cases} x = l\cos\theta - b\cos(\alpha+\theta) \\ y = b\sin(\alpha+\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (l - b\cos\alpha)\cos\theta + b\sin\alpha\sin\theta \\ y = b\sin\alpha\cos\theta + b\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$



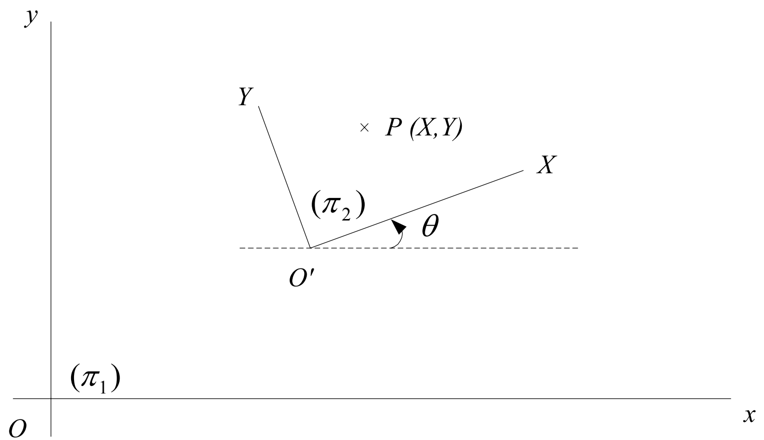
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = k_1 x + k_2 y \\ \sin\theta = k_1' x + k_2' y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (k_1 x + k_2 y)^2 + (k_1' x + k_2' y)^2 = 1$$

$$\text{Si C est sur AB} : \begin{cases} x = d\cos\theta \\ y = (l - d)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{l-d}\right)^2 = 1$$

BASE ET ROULANTE (4)

➔ Détermination analytique de la base et de la roulante :



$$\begin{cases} x = x_{0'} + X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = y_{0'} + X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{dx_0'}{dt} - (X\sin\theta + Y\cos\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \\ 0 = \dfrac{dy_0'}{dt} + (X\cos\theta - Y\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

➔ Equations paramétriques de la roulante :

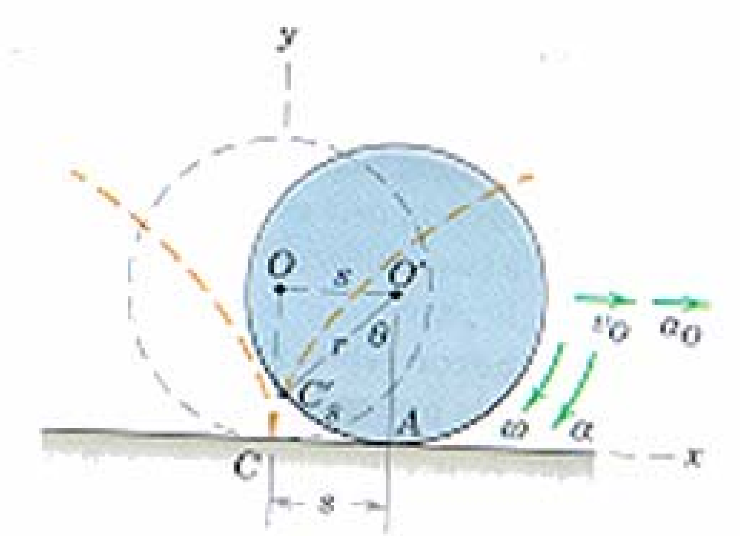
$$\begin{cases} X = \dfrac{x_0'}{d\theta}\sin\theta - \dfrac{dy_0'}{d\theta}\cos\theta \\ Y = \dfrac{dx_c'}{d\theta}\cos\theta + \dfrac{dy_0'}{d\theta}\sin\theta \end{cases}$$

➔ Equations paramétriques de la base :

$$\begin{cases} x = x_0' - \dfrac{dy_0'}{d\theta} \\ y = y_0' + \dfrac{dx_0'}{d\theta} \end{cases}$$

EXEMPLE 1 : MOUVEMENT ABSOLU

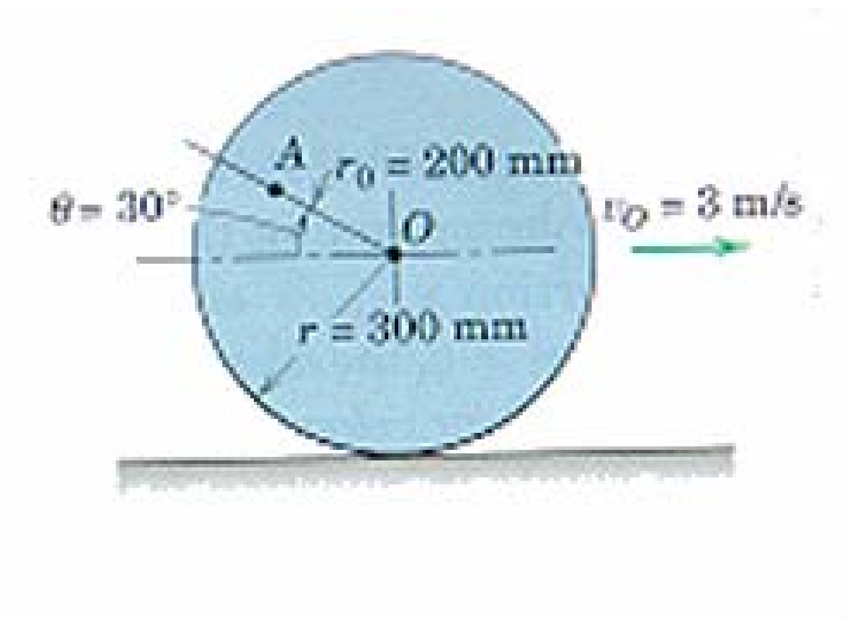
- **Une roue de rayon r roule sans glisser sur une surface plane.**
- **<u>Questions</u> : déterminer**
- **le mouvement angulaire de la roue en fonction du mouvement linéaire de son centre O.**
- **l'accélération d'un point de la circonférence extérieure quand ce point vient en contact avec la surface de roulement.**

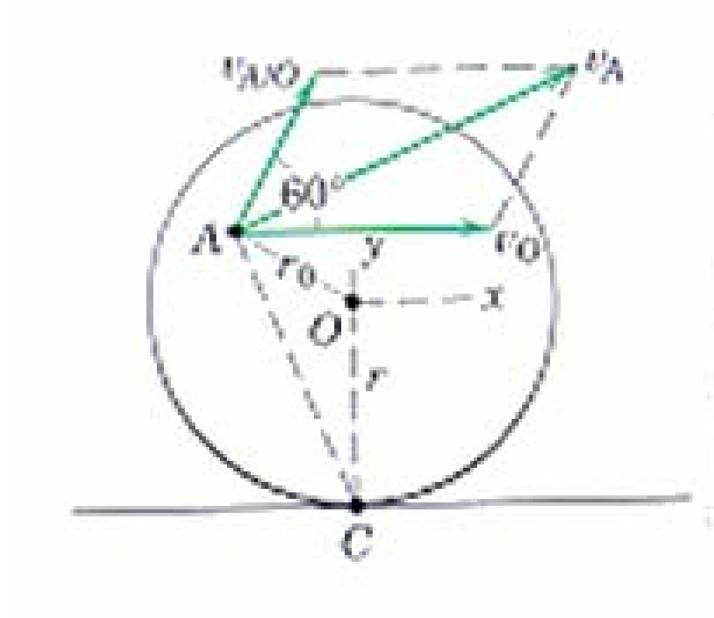


EXEMPLE 2 : MOUVEMENT RELATIF

➔La roue de diamètre r=300 mm roule sans glisser vers la droite. Son centre O a une vitesse de 3 m/s.

➔<u>Question</u> : calculer la vitesse du point A au moment où la roue est à la position représentée ci-dessous.



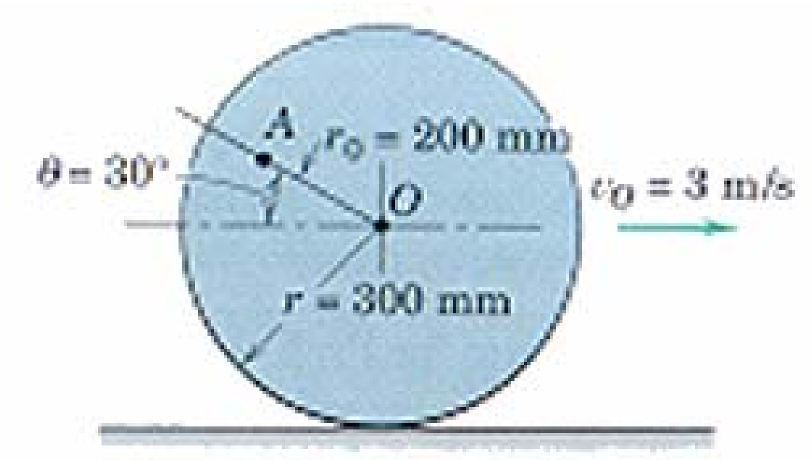


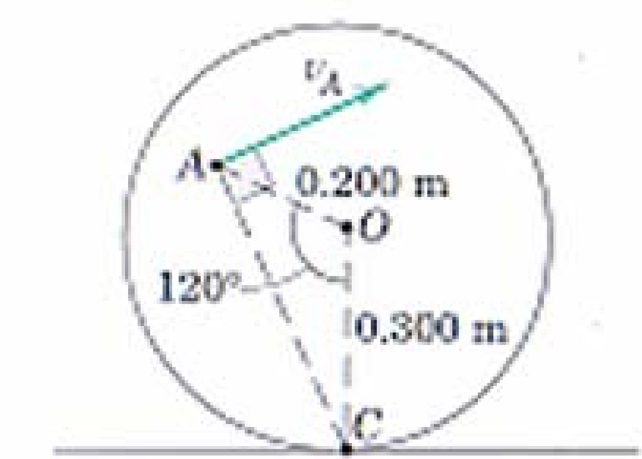
EXEMPLE 3 : CENTRE INSTANTANE DE ROTATION

➔**Prenons le même cas que l'exemple 2 (roue se déplace vers la droite, v_O = 3 m/s).**

➔**<u>Question</u> : utiliser le centre instantané de rotation afin de trouver la vitesse du point A pour la position représentée à la figure ci-dessous.**

➔

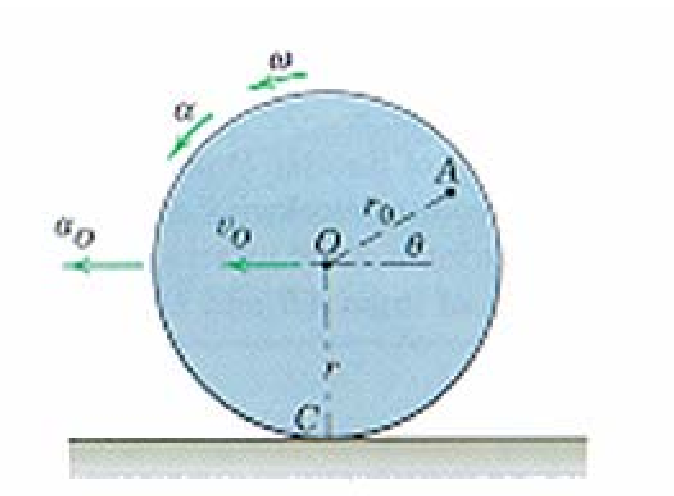


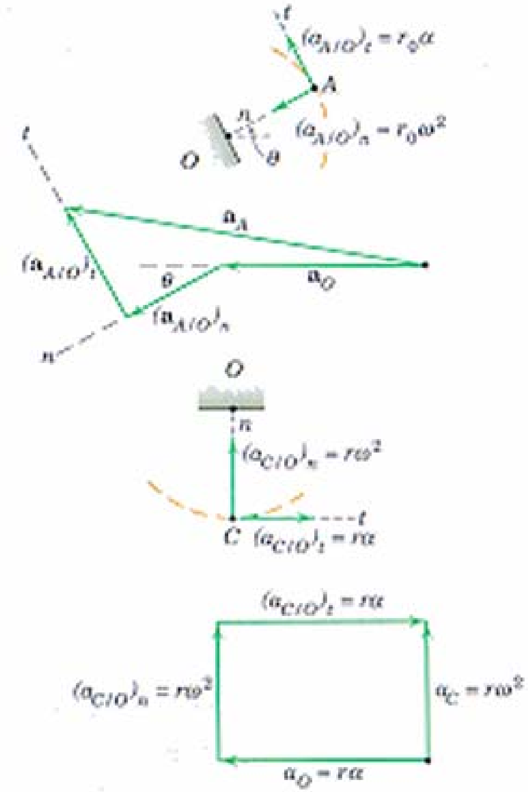


EXEMPLE 4 : ACCELERATIONS

➔**La roue de rayon r roule sans glisser vers la gauche et, à l'instant considéré, le centre O a une vitesse $\bar{v}_o$ et une accélération $\bar{a}_o$, dirigées vers la gauche.**

➔**<u>Question</u> : déterminer l'accélération des points A et C de la roue à l'instant considéré.**

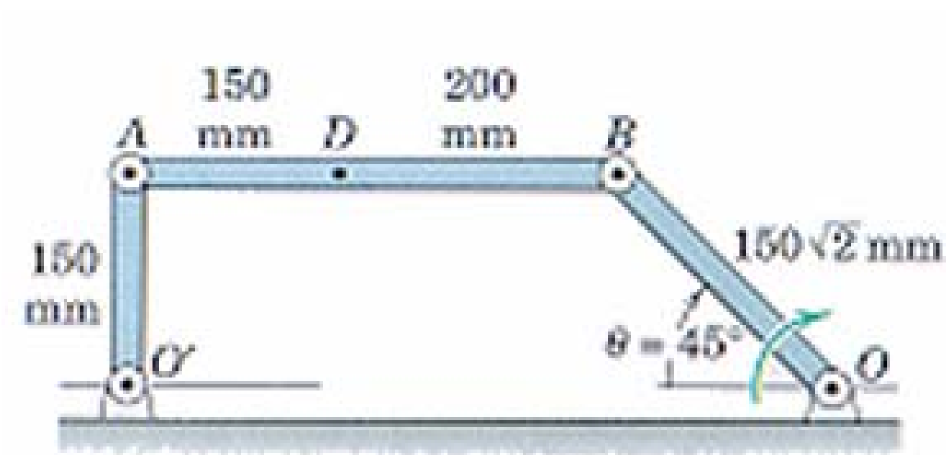


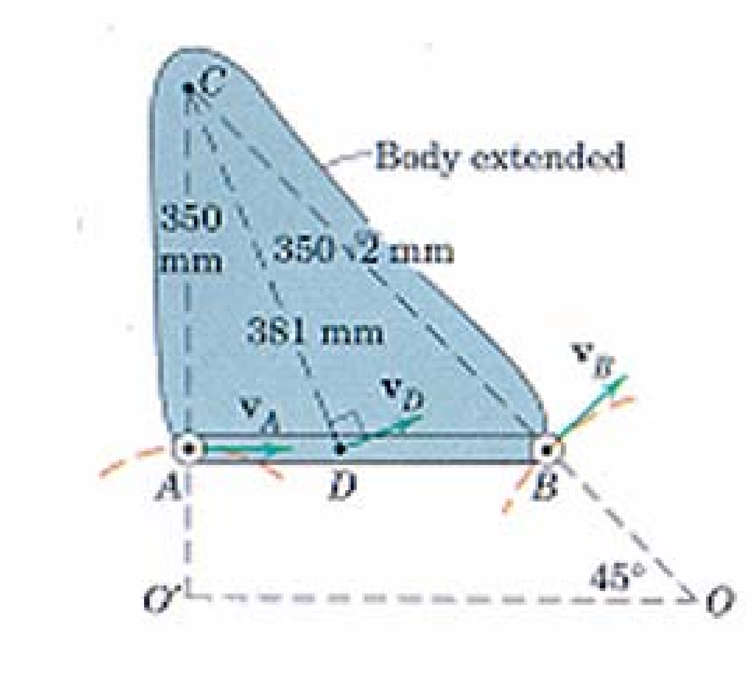


EXEMPLE 5 : CENTRE INSTANTANE DE ROTATION

➔**Le bras OB du mécanisme à 3 barres a une vitesse angulaire de 10 rad/s dans la position représentée ci-dessous (θ = 45°).**

➔**<u>Question</u> : déterminer la vitesse de A, la vitesse de D et la vitesse angulaire du bras AB au moment où le mécanisme est à la position représentée ci-dessous.**

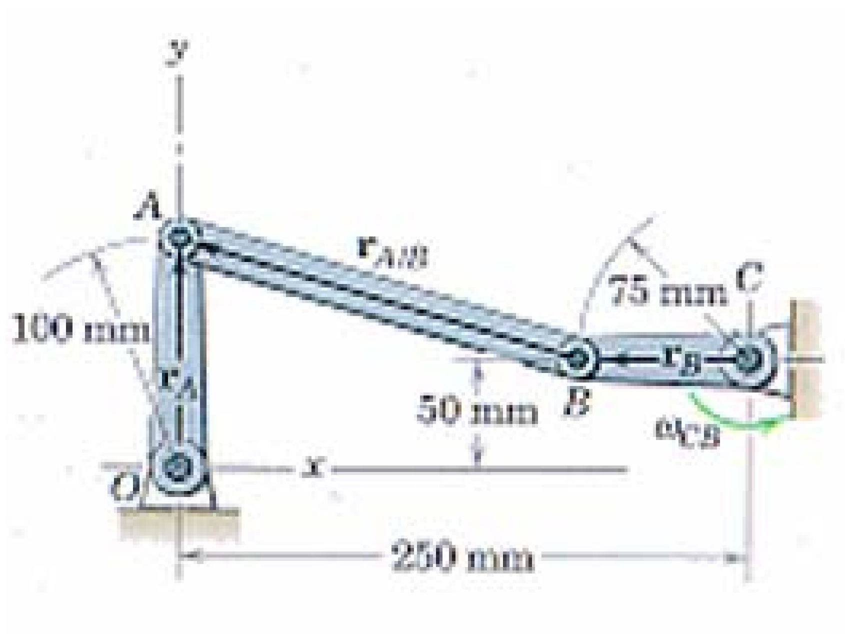


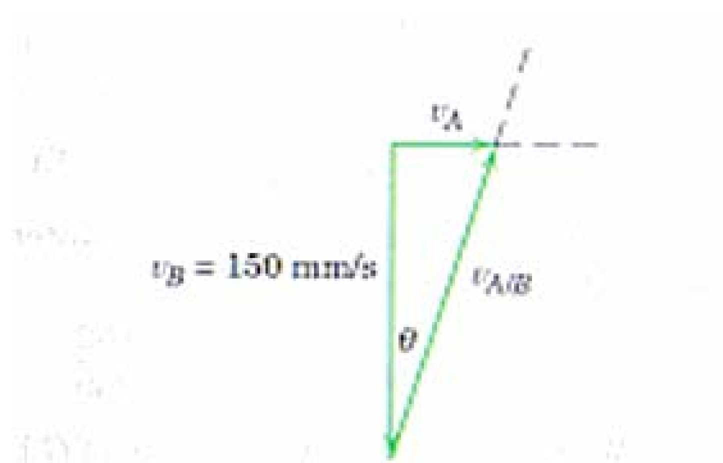


EXEMPLE 6 : MECANISME A 3 BARRES

➔Le bras CB oscille autour de C avec une amplitude limitée, provoquant l'oscillation de OA autour de O. Quand le mécanisme arrive à la position représentée ci-dessous (CB est horizontal et OA vertical), la vitesse angulaire de CB est de 2 rad/s dans le sens anti-horlogique.

➔<u>Question</u> : déterminer les vitesses et les accélérations angulaires de OA et AB à cet instant.

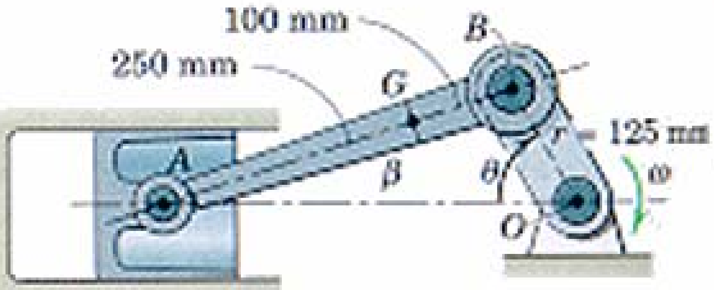


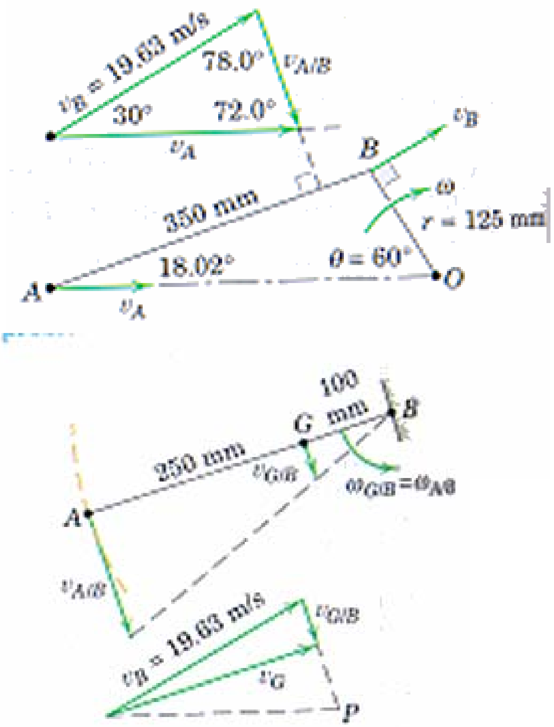


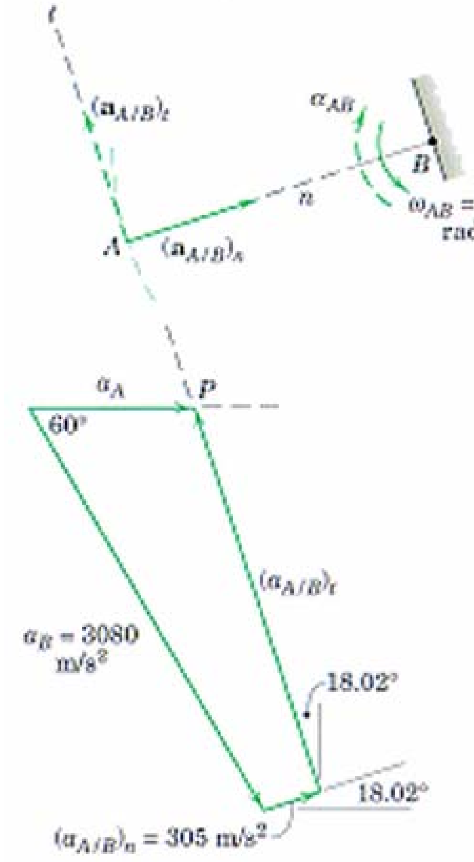
EXEMPLE 7 : SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

➔**La manivelle OB a une vitesse de rotation de 1500 tour/min.**

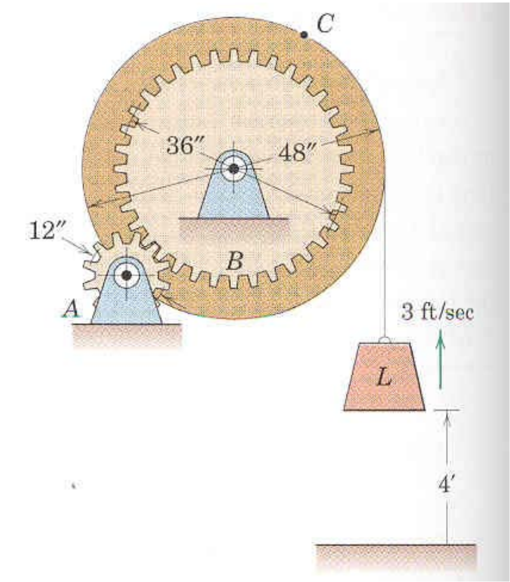
➔**<u>Question</u> : déterminer, pour la position correspondant à θ = 60°, la vitesse du point A, la vitesse du point G et la vitesse angulaire de la bielle ainsi que les accélérations correspondantes.**

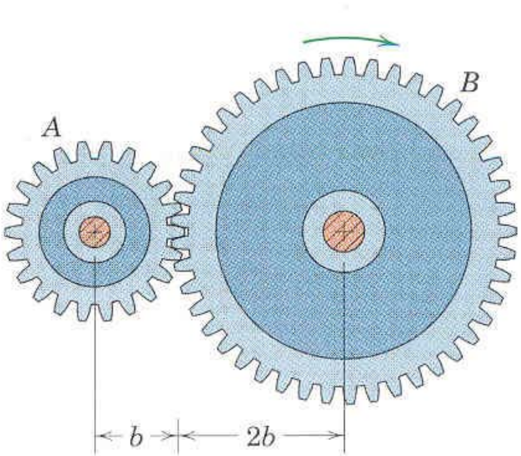


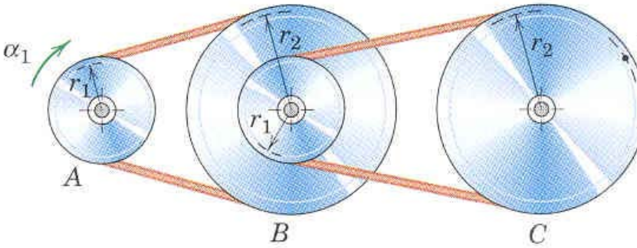




EXAMPLES DE SYSTEMES PLANS (1)







EXAMPLES DE SYSTEMES PLANS (2)