CINEMATIQUE DU SOLIDE

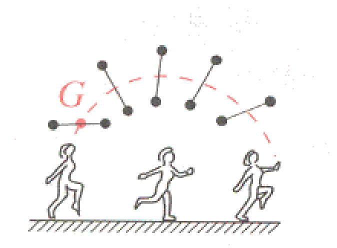
- Coordonnées généralisées (rappels)
- Mouvement du solide et de son centre de masse
- Déplacement continu et déplacement instantané du corps solide
- Champ des vitesses
- Champ des accélérations
- Translation continue, translation instantanée
- Rotation continue, rotation instantanée
- Mouvement hélicoïdal continu, mouvement hélicoïdal instantané
- Composition de mouvements instantanés
- Solide en rotation instantanée autour d'un point. Angles d'Euler

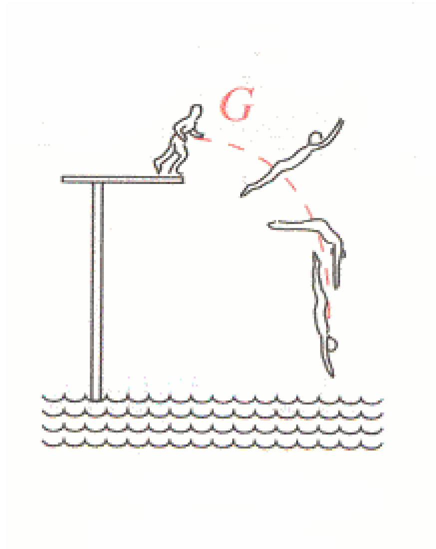
COORDONNES GENERALISEES (Rappels)

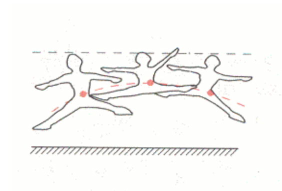
- **Point matériel ≠ système de points matériels**
- **Solide indéformable = système de points matériels tel que les distances mutuelles de ces points demeurent constantes dans tout déplacement.**
- **Repérage exact du solide : coordonnées généralisées** $q_i (i = 1,\ldots,n)$
- **Coordonnée vectorielle de tout point** $P_h : \overline{OP_h} = \bar{r}_h(q_1,\ldots,q_n)$
- **Mouvement continu d'un solide** $\overline{OP_h} = \bar{r}_h(q_i(t),t) \quad (t \in [t_0,t_1])$
- **Liaisons : p relations entre des coordonnées généralisées permettant d'exprimer n-p coordonnées q_i en fonction des p autres. Il existe n-p variables indépendantes : le système est à n-p degrés de liberté.**

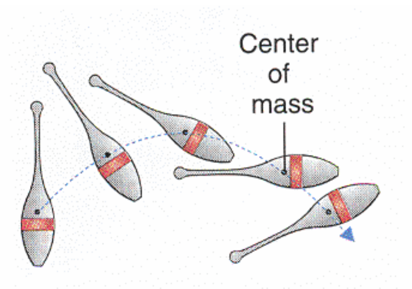
- **<u>Exemples</u> :**
- **le pendule double plan**
- **le corps solide libre**
- **le corps solide soumis à des liaisons**
- **les systèmes de corps solides**

MOUVEMENT DU SOLIDE ET DE SON CENTRE DE MASSE









DEPLACEMENT CONTINU ET DEPLACEMENT INSTANTANE DU CORPS SOLIDE

➔ Mouvement continu :

$$\text{entre} \quad t \quad \text{et} \quad t+\Delta t: \quad \Delta\bar{r}_h = \bar{r}_h(t+\Delta t) - \bar{r}_h(t) = \bar{v}_h \Delta t + \bar{a}_h \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots$$

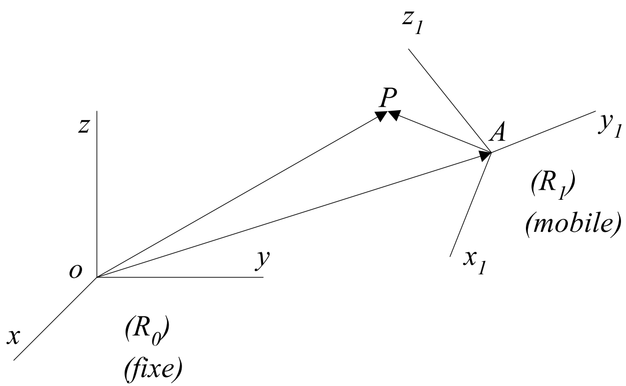
où

$$\bar{v}_h = \frac{d\bar{r}_h}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial t}$$

$$\bar{a}_h = \frac{d^2\bar{r}_h}{dt^2} = \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial t^2} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}_h}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}_h}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_h}{\partial q_i} \ddot{q}_i$$

➔ Déplacement instantané : déplacement tangent au déplacement continu à tout instant de l'intervalle $[t_0, t_1]$

CHAMP DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS



➔ **Soient :** $(R_0) =$ repère fixe Oxyz

$(R_1) =$ repère mobile $Ax_1y_1z_1$ lié au solide

P appartient au solide

$\overline{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire

➔ **Nous avons :**

$$\overline{v}_p = \left(\frac{d\overline{OP}}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overline{OA}}{dt}\right)_{(R_0)} + \left(\frac{d\overline{AP}}{dt}\right)_{(R_0)}$$

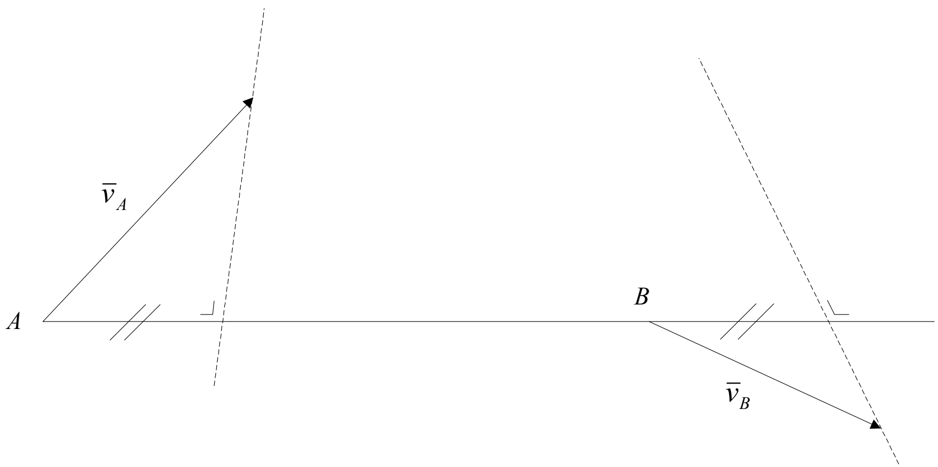
$$\overline{v}_p = \overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AP}$$

$$\overline{a}_p = \left(\frac{d\overline{v}_p}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overline{v}_A}{dt}\right)_{(R_0)} + \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right)_{(R_0)} x\overline{AP} + \overline{\omega} x \left(\frac{d\overline{AP}}{dt}\right)_{(R_0)}$$

$$\overline{a}_p == \overline{a}_a + \overline{\varepsilon} x \overline{AP} + \overline{\omega} x (\overline{\omega} x \overline{AP})$$

THEOREME DE PROJECTION DES VITESSES

➔ **Les projections des vitesses de deux points du solide sur la droite qui joint ces points sont égales.**



$$\overline{\mathbf{v}}_B = \overline{\mathbf{v}}_A + \overline{\omega} \mathbf{x} \overline{\mathbf{AB}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{v}}_B . \overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{v}}_A . \overline{\mathbf{AB}}$$

➔ **Il est donc <u>interdit</u> de se donner arbitrairement la vitesse de deux points du solide.**

TRANSLATION CONTINUE ET TRANSLATION INSTANTANEE

➔ Mouvement continu de translation :

$$\forall t \in [t_0, t_1] : \overline{\omega} = 0$$
$$\Rightarrow \overline{v}_p = \overline{v}_A$$
$$\overline{a}_p = \overline{a}_A$$
$$\left(\frac{d\overline{OP}}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overline{OA}}{dt}\right)_{(R_0)} \Rightarrow \left(\frac{d\overline{AP}}{dt}\right)_{(R_0)} = 0$$

➔ **Si à un instant $t \in [t_0, t_1]$, tous les points du solide ont des vitesses équipollentes, alors le solide est animé d'un mouvement de translation instantanée.**

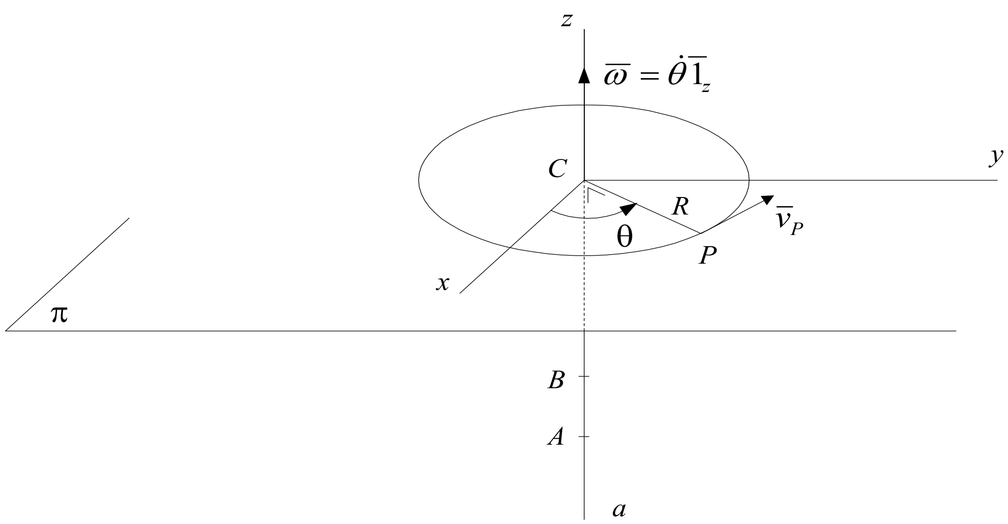
ROTATION CONTINUE ET ROTATION INSTANTANEE (1)

➔ **Mouvement continu de rotation :**

$$\forall t \in [t_0, t_1] : \exists \text{ un point fixe A du solide et } \overline{\omega} \text{ a une direction constante dans } R_1$$

➔ **Il existe une droite de points fixes :** $\forall B \in$ droite parallèle à $\overline{\omega}$ passant par A

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB} = 0$$



ROTATION CONTINUE ET ROTATION INSTANTANEE (2)

$$\overline{v}_p = \overline{\omega} x \overline{AP} = \overline{\omega} x \overline{CP}$$

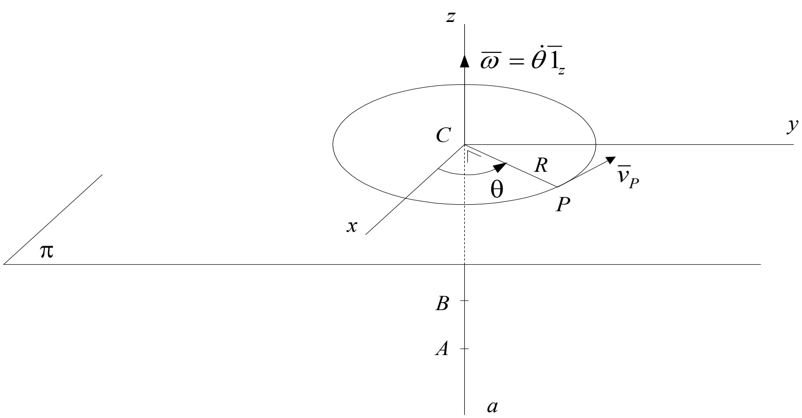
$$\overline{CP} = R\cos\theta \overline{1}_x + R\sin\theta \overline{1}_y$$

$$\overline{v}_p = -R\dot{\theta}\sin\theta \overline{1}_x + R\dot{\theta}\cos\theta \overline{1}_y$$

$$\frac{d}{dt}\overline{CP} = \overline{\omega} x \overline{CP} = -R\omega\sin\theta \overline{1}_x + R\omega\cos\theta \overline{1} y$$

$$\Rightarrow \omega = \dot{\theta}$$

$$\overline{a}_p = \overline{\varepsilon} x \overline{CP} + \overline{\omega} x (\overline{\omega} x \overline{CP}) = \overline{\varepsilon} x \overline{CP} - (\overline{\omega}.\overline{\omega})\overline{CP}$$



- **Mouvement de rotation uniforme**

$$\omega = \text{constante}$$

$$\Rightarrow v_p = R\omega = \text{constante}$$

$$\overline{a}_p = -R\omega^2 \overline{1}_{CP} \quad \text{(centripète)}$$

- **Si à un instant $t \in [t_0, t_1]$, tous les points d'une droite du solide ont une vitesse nulle, le solide est animé d'un mouvement de rotation instantanée**

MOUVEMENT HELICOIDAL CONTINU ET MOUVEMENT HELICOIDAL INSTANTANE (1)

- **Mouvement hélicoïdal continu pendant $[t_0,t_1]$: $\exists$ un point P appartenant au solide tel que $\overline{v}_p$ est parallèle à $\overline{\omega}$ qui a une direction constante.**

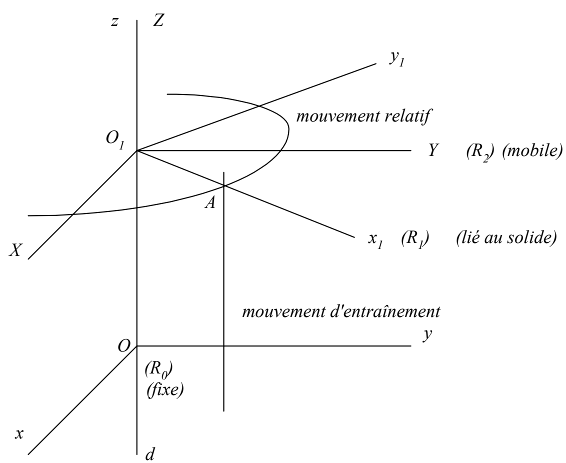
$$\overline{v}_p = \frac{h}{2\pi}\overline{\omega} \qquad h = \text{pas}$$

- **Il existe une droite de points ayant pour vitesse : $\frac{h}{2\pi}\overline{\omega}$**

$$\forall\ \overline{PQ}\ \text{parallèle à}\ \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_P + \overline{\omega}x\overline{PQ} = \overline{v}_p$$

$$\overline{v}_A = \overline{v}_P + \overline{\omega}x\overline{PA} = \frac{h}{2\pi}\overline{\omega} + \overline{\omega}x\overline{PA}$$



MOUVEMENT HELICOIDAL CONTINU ET MOUVEMENT HELICOIDAL INSTANTANE (2)

- **Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal instantané ou, pour un solide en mouvement, si le vecteur $\overline{\omega} \neq \mathbf{0}$, il existe pour tout t un point P du solide dont la vitesse est parallèle au vecteur $\overline{\omega}$**

- **A et P appartenant au solide :**

$$\overline{\mathbf{v}}_p = \mathbf{k(t)}\overline{\omega}\mathbf{(t)}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_P = \overline{\mathbf{v}}_A + \overline{\omega}\mathbf{x}\overline{\mathbf{AP}}$$

$$\overline{\omega}\mathbf{x}\overline{\mathbf{AP}} = \overline{\mathbf{v}}_p - \overline{\mathbf{v}}_A$$

$$\overline{\omega}\mathbf{x}(\overline{\omega}\mathbf{x}\overline{\mathbf{AP}}) = \overline{\omega}\mathbf{x}(\overline{\mathbf{v}}_p - \overline{\mathbf{v}}_A)$$

$$\overline{\mathbf{AP}} = -\frac{\overline{\omega}\mathbf{x}(\overline{\mathbf{v}}_p - \overline{\mathbf{v}}_A)}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega}$$

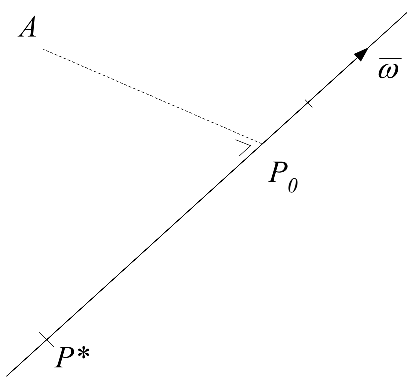
MOUVEMENT HELICOIDAL CONTINU ET MOUVEMENT HELICOIDAL INSTANTANE (3)

- **Choisissons un point P^* du solide tel que :** $\overline{\omega} x \overline{v}_{P^*} = 0$

- $\overline{AP}^* = \dfrac{\overline{\omega} x \overline{v}_A}{\overline{\omega}.\overline{\omega}} + \lambda \overline{\omega}$ **équation vectorielle de l'axe hélicoïdal instantané**

- **Le mouvement hélicoïdal instantané, de direction $\overline{\omega}$ et d'axe passant par P^* est défini. Le mouvement hélicoïdal est tangent à l'instant t au mouvement du solide.**

$$\overline{v}_{P^*} = \overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AP}^* = \frac{\overline{\omega}.\overline{v}_A}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}.\overline{\omega} \Rightarrow k(t) = \frac{\overline{\omega}.\overline{v}_A}{\overline{\omega}.\overline{\omega}}$$



MOUVEMENT HELICOIDAL CONTINU ET MOUVEMENT HELICOIDAL INSTANTANE (4)

- **Cas particuliers :**

- $k(t) = 0 \Rightarrow$ **mouvement à l'instant t est tangent à un mouvement de rotation**
- $\overline{\omega}(t) = 0 \Rightarrow$ **mouvement à l'instant t est tangent à un mouvement de translation**
- $k(t) = 0 \wedge \overline{\omega}(t) = 0 \Rightarrow$ **le solide est immobile à l'instant t**

- **Discussion des différents cas :**

- $A \text{ et } B \in \text{solide :}$

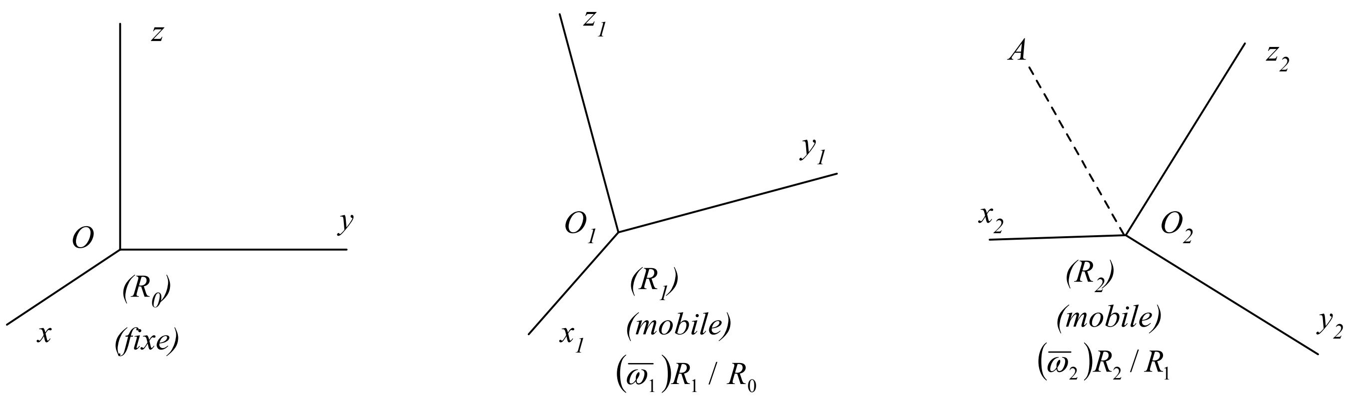
$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} x \overline{AB}$$

$$\overline{v}_B . \overline{\omega} = \overline{v}_A . \overline{\omega}$$

invariant scalaire

- $\overline{v}.\overline{\omega} \neq 0 \Rightarrow$ **mouvement instantané hélicoïdal autour d'un axe passant par P^***
- $\overline{v}.\overline{\omega} = \overline{0} \wedge \overline{\omega} \neq \overline{0} \Rightarrow$ **mouvement instantané de rotation autour d'un axe passant par P^***
- $\overline{v}.\overline{\omega} = \overline{0} \wedge \overline{\omega} = \overline{0} \wedge \overline{v}_A \neq \overline{0} \Rightarrow$ **mouvement instantané de translation de vitesse $\overline{v}_A$**
- $\overline{v}.\overline{\omega} = 0 \wedge \overline{\omega} = \overline{0} \wedge \overline{v}_A = \overline{0} \Rightarrow$ **le solide est immobile à l'instant t**

COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (1)



- **Soient :**
  - **un trièdre fixe Oxyz** (R_0)
  - **un trièdre mobile** $O_1x_1y_1z_1(R_1)$ **en rotation par rapport au repère R_0, avec le vecteur de rotation** $\overline{\omega}_1$
  - **un trièdre mobile** $O_2x_2y_2z_2(R_2)$ **en rotation par rapport au trièdre mobile R_1, avec le vecteur de rotation** $\overline{\omega}_2$
  - **un solide lié au trièdre R_2**

COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (2)

- **Vitesse relative d'un point A, par rapport au trièdre R_1 :**

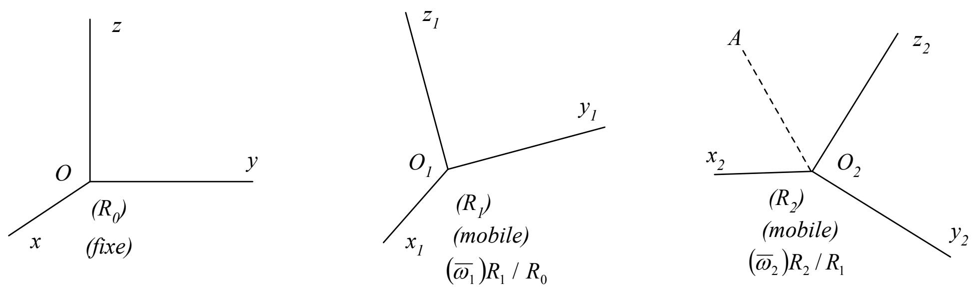
$$\overline{\mathbf{v}}_{A,rel} = \overline{\mathbf{v}}_{0_2} + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O}_2\mathbf{A}}$$

- **Vitesse d'entraînement du point A, attaché au trièdre R_1 :**

$$\overline{\mathbf{v}}_{A,entr} = \overline{\mathbf{v}}_{0_1} + \overline{\omega}_1 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{A}}$$

- **Vitesse absolue du point A :**

$$\overline{\mathbf{v}}_{A,abs} = \overline{\mathbf{v}}_{0_1} + \overline{\omega}_1 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{v}}_{0_2} + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O}_2\mathbf{A}}$$



COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (3)

- **Cas particuliers** :

- **Composition de deux translations instantanées :**

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{v}}_{A,abs} = \overline{\mathbf{v}}_{0_1} + \overline{\mathbf{v}}_{0_2}$$

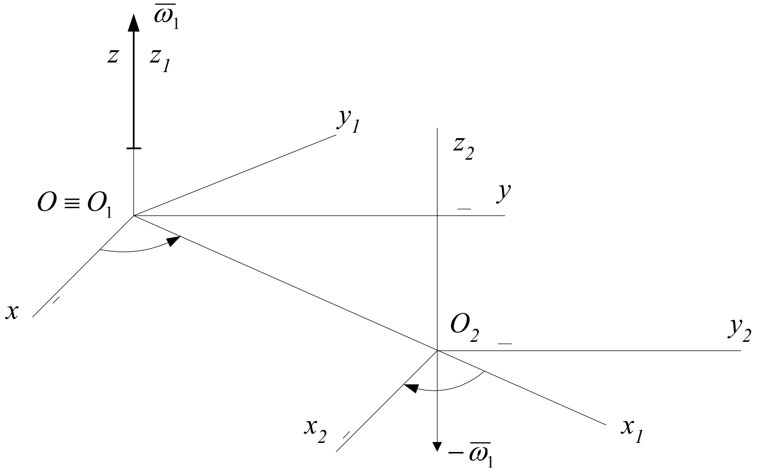
- **Composition d'un couple de rotations instantanées :**

Rotation $(R_1)/(R_0) : \overline{\omega}_1$ **passant par le point** $O_1(\overline{v}_{0_1} = 0)$

Rotation $(R_2)/(R_1) : \overline{\omega}_2$ **passant par le point** $O_2(\overline{v}_{0_2} = 0)$

$$\overline{\omega}_2 = -\overline{\omega}_1$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{A,abs} = \overline{\omega}_1 x \overline{O_1A} + \overline{\omega}_2 x \overline{O_2A} = \overline{\omega}_1 x \overline{O_1O_2}$$



COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (4)

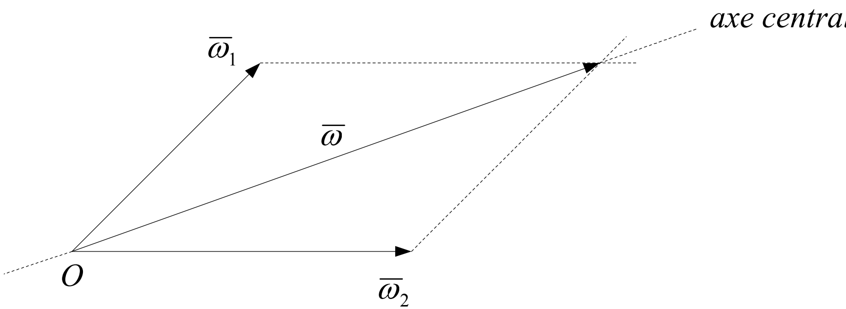
➔ Composition de deux rotations instantanées d'axes sécants :

$$\mathbf{O_1 \equiv O_2}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{0_1} = \overline{\mathbf{v}}_{0_2} = \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{A,abs}} = \overline{\omega}_1 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_1A}} + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_1A}}$$

$$= (\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2) \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_1A}}$$



➔ Composition de deux rotations instantanées d'axes parallèles :

$$\overline{\mathbf{v}}_{0_1} = \mathbf{0}\big|_{\mathbf{R_1/R_0}}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{0_2} = \mathbf{0}\big|_{\mathbf{R_2/R_1}}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{A,abs}} = \overline{\omega}_1 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_1A}} + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_2A}}$$

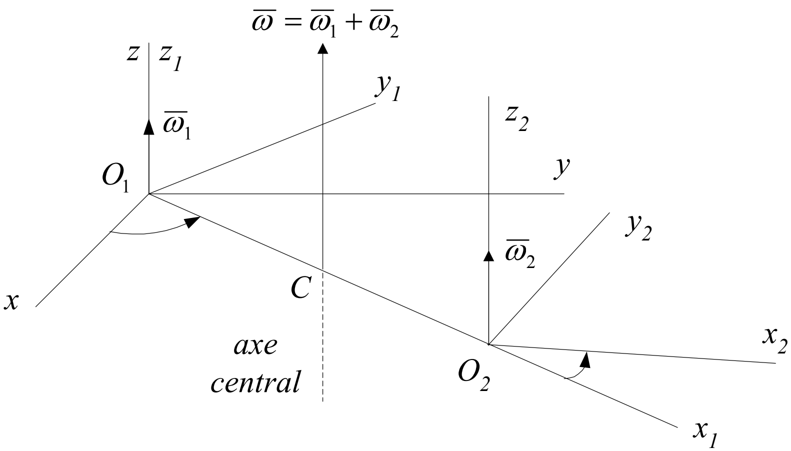
$$= \overline{\omega}_1 \mathbf{x} (\overline{\mathbf{O_1C}} + \overline{\mathbf{CA}}) + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} (\overline{\mathbf{O_2C}} + \overline{\mathbf{CA}})$$

$$= \overline{\omega} \mathbf{x} \overline{\mathbf{CA}}$$

où

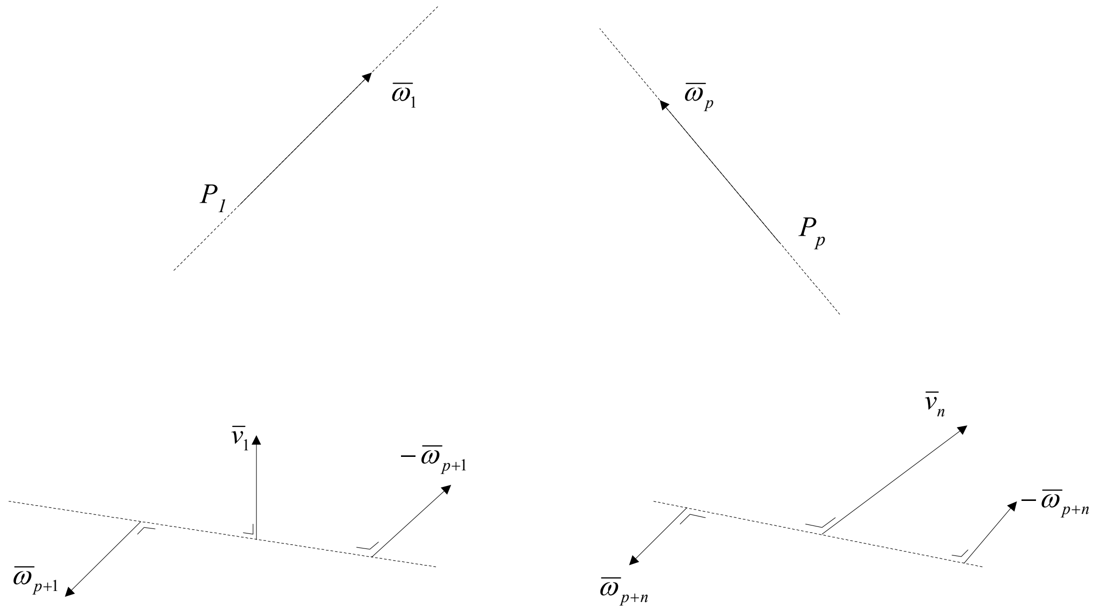
C est tel que : $\overline{\omega}_1 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_1C}} + \overline{\omega}_2 \mathbf{x} \overline{\mathbf{O_2C}} = \mathbf{0}$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$



COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (5)

- **<u>Cas général</u> :**
- **Soit un solide soumis à n translations de vitesses** $\overline{v}_1,...,\overline{v}_n$ **et à p rotations de vecteurs** $\overline{\omega}_1,...,\overline{\omega}_p$

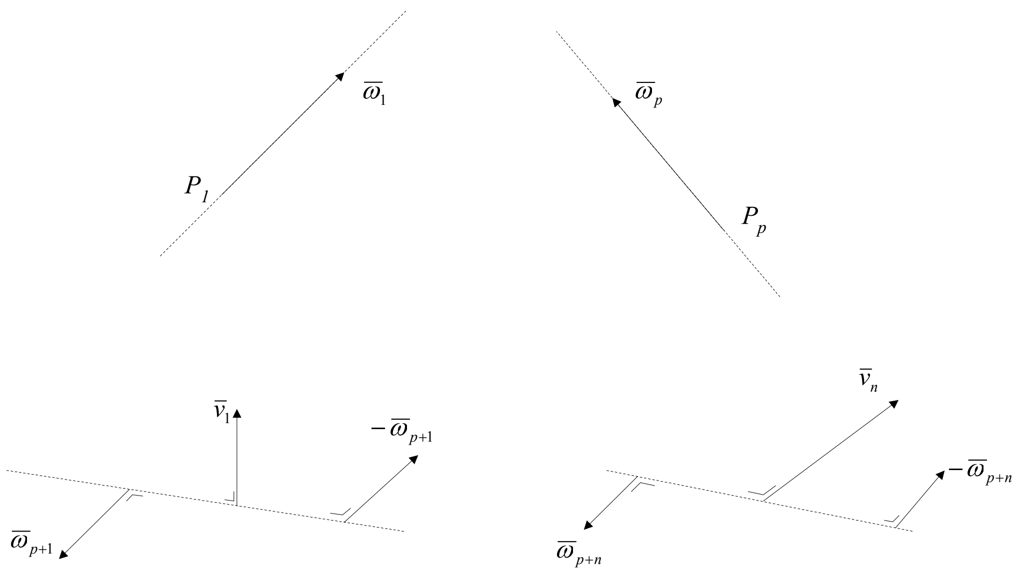


- **Nous pouvons considérer le solide comme étant soumis à (p+2n) rotations :** $\overline{\omega}_1,...,\overline{\omega}_p,\overline{\omega}_{p+1},-\overline{\omega}_{p+1},...,\overline{\omega}_{p+n},-\overline{\omega}_{p+n}$ **glissant sur leurs axes.**

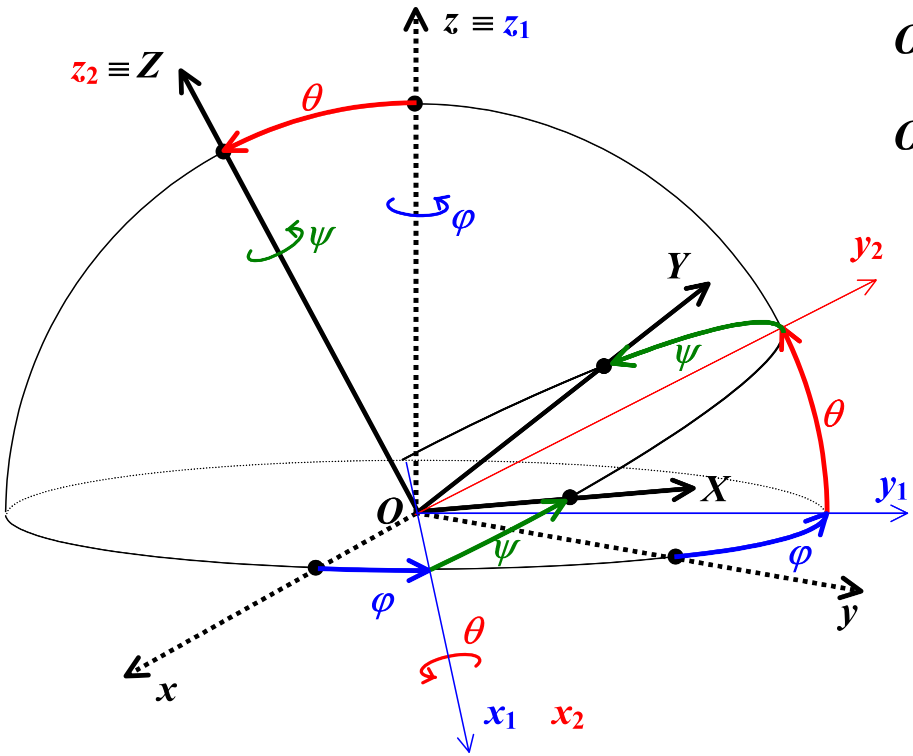
COMPOSITION DE MOUVEMENTS INSTANTANES (6)

- Systèmes équivalent à : une résultante générale : $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{p} \overline{\omega}_i$
- un moment total au point A : $\overline{C}_A = \sum_{i=1}^{p} \overline{\omega}_i x \overline{P_i A} + \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i = \overline{v}_A$

- L'axe central du système de vecteurs $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_p, \overline{\omega}_{p+1}, -\overline{\omega}_{p+1}, \ldots, \overline{\omega}_{p+n}, -\overline{\omega}_{p+n}$ à l'instant t est une droite de points en lesquels la vitesse est parallèle à la résultante $\overline{\omega}$. C'est l'axe hélicoïdal instantané dû aux différentes rotations et translations instantanées.



ANGLES D'EULER



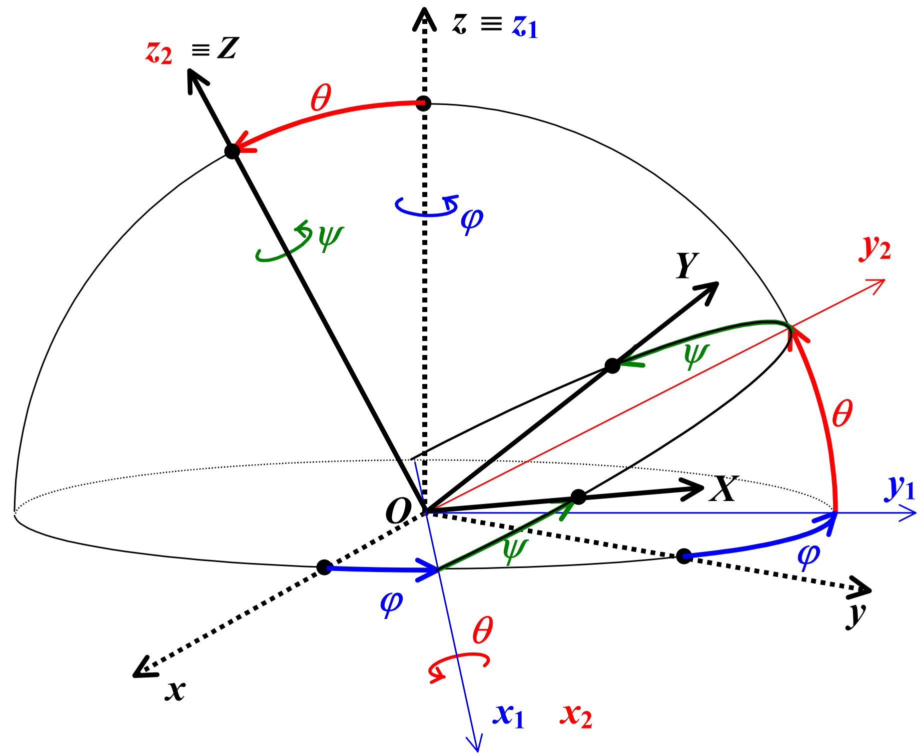
Oxyz **: axes fixes**

OXYZ **: axes attachés au solide**

(par ex. la Terre)

$$Oxyz \underset{R_z^{\varphi}}{\longrightarrow} Ox_1y_1z_1 \underset{R_{x_1}^{\theta}}{\longrightarrow} Ox_2y_2z_2 \underset{R_{z_2}^{\psi}}{\longrightarrow} OXYZ$$

VECTEUR DE DARBOUX DE LA BASE DES ANGLES D'EULER



$$\boxed{\overline{\omega} = \dot{\varphi}\,\overline{1}_z + \dot{\theta}\,\overline{1}_{x_1} + \dot{\psi}\,\overline{1}_Z}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\overline{1}_X + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\overline{1}_Y + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\overline{1}_Z$$