

GESTION DES STOCKS

INTRODUCTION

1^{ERE} PARTIE : MODELES DETERMINISTES

- §1. MODELE N°1. MODELE DE BASE DE WILSON → par ♥
- §2. MODELE N°2. WILSON MODIFIE. STOCK D'ARGENT
- §3. MODELE N°3. COUTS DE STOCKAGE DEGRESSIFS
- §4. MODELE N°4. ENTREE PROGRESSIVE EN STOCK
- §5. MODELE N°5. PENURIE A VENTES REPORTEES

2^{EME} PARTIE : MODELES STOCHASTIQUES

- §1. MODELE 1. COUTS DE PENURIE ET DE PERTE SUR EXCEDENTS
- §2. MODELE 2. STOCKAGE ET PENURIE
- §3. MODELE 3. HEURISTIQUE A 2 MAGASINS
- §4. MODELE 4. MODELES " α, β, γ " A 2 MAGASINS

INTRODUCTION

1. GENERALITES

- GESTION DES STOCKS : TRES IMPORTANT
BEAUCOUP D'ARGENT INVESTI DANS LES STOCKS
- DANS LE PASSE : GESTION QUALITATIVE.
POSSIBLE. MARCHÉ STABLE. PEU DE PRODUITS
- TRAITEMENT MODERNE :
AUJOURD'HUI GESTION QUALITATIVE IMPOSSIBLE
 - NOMBRE CONSIDÉRABLE DE PIÈCES ET DE PRODUITS
 - PRODUCTION ET MARCHÉ EN ÉVOLUTION RAPIDE
- TRAITEMENT EN AMONT : ATELIERS FLEXIBLES
- TRAITEMENT EN AVAL : GESTION SCIENTIFIQUE DES STOCKS
- GESTION SCIENTIFIQUE → MODELES MATHÉMATIQUES
BONS MODELES SI ACCORD AVEC LA RÉALITÉ
- MODELE GÉNÉRAL : IMPOSSIBLE. TROP DE PARAMÈTRES
- MODELES PARTICULIERS :
 - MODELES A 1 SEUL PRODUIT
 - MODELES A PLUSIEURS PRODUITS
 - CONTRAINTES DE PRODUCTION
 - CONTRAINTES DE TEMPS
 - DE VOLUME
 - DE BUDGET
 - NOMBREUX FACTEURS D'INFLUENCE

2. FACTEURS D'INFLUENCE :

1. DEMANDE: CONTINUE OU DISCRETE ; DETERMINISTE OU ALÉATOIRE
2. COUT DE LANCEMENT : PAR RAFALE, SERIE
3. COUT DE STOCKAGE
4. COUT D'ACHAT, COUT DE REVIENT
5. COUT DE PENURIE
6. COUT DE FABRICATION SUPPLEMENTAIRE
7. COUT DE PERTE DE DEMANDE
8. CYCLE DE REAPPROVISIONNEMENT
9. DELAI DE REAPPROVISIONNEMENT

3. RUPTURE DE STOCK

SYSTEMES A VENTES REPORTEES (BACK. ORDERS)

SYSTEME A VENTES PERDUES (LOST SALES)

4. HORIZON : FINI OU INFINI

5. TYPES DE GESTION

- GESTION CYCLIQUE (SUR CALENDRIER)

EXAMEN PERIODIQUE DU STOCK

- GESTION A INVENTAIRE CONTINU

EXAMEN PERMANENT

EN PRATIQUE : CARTE DE COMMANDE, TWO BINS, ...

6. TYPES DE MODELES

MODELES DETERMINISTES: SURTOUT SUR CALENDRIER

MODELES STOCHASTIQUES: SURTOUT INVENTAIRE CONTINU

1^{ERE} PARTIE: MODELES DETERMINISTES

§1. MODELE N°1. MODELE DE BASE DE WILSON

1. HYPOTHESES

✓ - DEMANDE CONSTANTE ET CONTINUE.

λ PIECES PAR UNITE DE TEMPS

✓ - RAFALE DE n PIECES *rafale = commande*

- HORIZON INFINI

- PAS DE DELAI DE REAPPROVISIONNEMENT ($\delta = 0$)

- PAS DE PENURIE: NI VENTES PERDUES, NI VENTES REPORTEES

✓ - COUTS: COUT DE LANCEMENT: c_l PAR RAFALE *commande*
 $\rightarrow$ *euro/rafale*

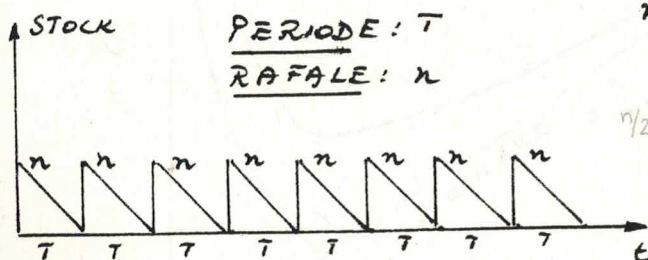
COUT DE STOCKAGE: c_s PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS
 $\rightarrow$ *euro/(piece . tps)*

- GESTION SUR CALENDRIER

2. A CALCULER: $\left\{ \begin{array}{l} - \tilde{n} \text{ NOMBRE OPTIMAL DE PIECES PAR RAFALE} \\ - \tilde{T} \text{ PERIODE OPTIMALE DE REAPPROVISIONNEMENT.} \end{array} \right.$

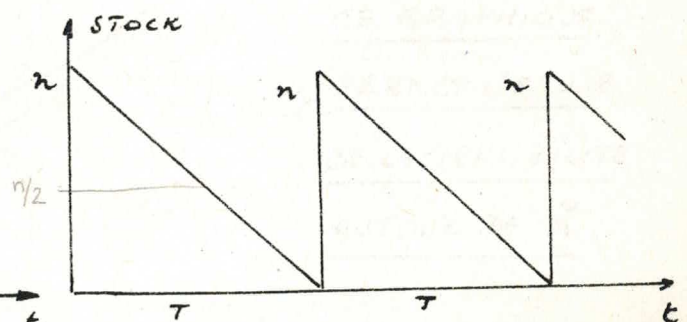
3. ANALYSE

a. GRAPHIQUE



COUT DE LANCEMENT: FAIBLE

COUT DE STOCKAGE: ELEVE



COUT DE LANCEMENT: ELEVE

COUT DE STOCKAGE: FAIBLE

b. ANALYSE DES COUTS

DEMANDE: λ PIÈCES PAR UN. DE TPS:
(totale)

$$\lambda T = n \rightarrow T = \frac{n}{\lambda}$$

COUT DE LANCEMENT PAR UN. DE TPS:

$$\frac{c_l}{T} = c_l \frac{\lambda}{n}$$

COUT DE STOCKAGE PAR UN. DE TPS:

$$c_s \frac{n}{2} = c_s \cdot \frac{nT}{2} \cdot \frac{1}{T}$$

COUT TOTAL PAR UN. DE TPS

en moyenne, on a $n/2$ pièces
en stock (aire d'un $n \cdot T$
 $= \frac{nT}{2}$)

à optimiser :

$$\Gamma(n) = c_l \frac{\lambda}{n} + c_s \frac{n}{2}$$

(à l'optimum :

$$c_l \frac{\lambda}{n} = c_s \frac{n}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{cf dessin} \\ \text{bar de la p.} \end{array} \right\}$$

c. RÉSOLUTION : CRITÈRE D'OPTIMALITÉ : MINIMISER COUT $\Gamma(n)$

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = -\frac{c_l \lambda}{n^2} + \frac{c_s}{2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{c_s}{2} = \frac{c_l \lambda}{n^2} \rightarrow n^2 = \frac{2 c_l \lambda}{c_s}$$

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \lambda c_l}{c_s}}$$

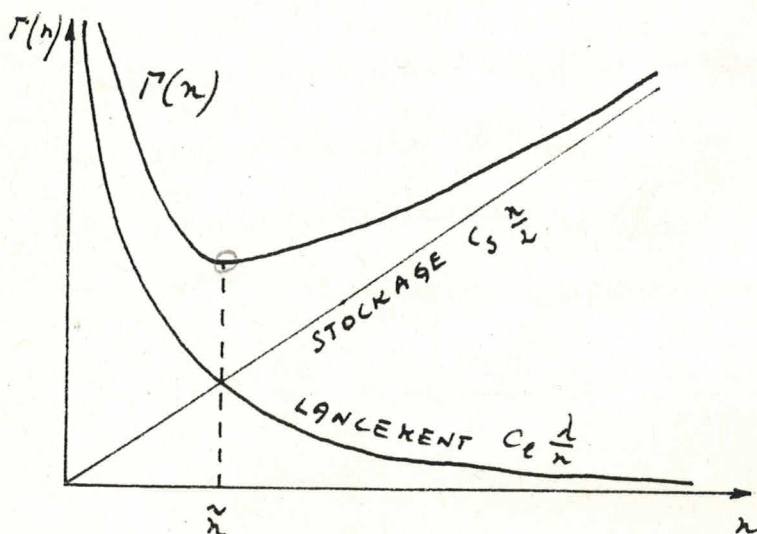
formules de Wilson
(à retenir par ∞)

$$\Gamma(\tilde{n}) = \sqrt{2 \lambda c_l c_s}$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda} = \sqrt{\frac{2 c_l}{\lambda c_s}}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \Gamma(\tilde{n}) &= c_l \frac{\lambda}{\tilde{n}} + c_s \frac{\tilde{n}}{2} \\ &= \frac{c_l \lambda \sqrt{\frac{2 c_s}{\lambda c_l}}}{\sqrt{\frac{2 \lambda c_l}{c_s}}} + \frac{c_s \sqrt{\frac{2 \lambda c_l}{c_s}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 c_l \lambda c_s}}{2} + \frac{\sqrt{c_s 2 \lambda c_l}}{2} \\ &= \sqrt{2 c_l \lambda c_s} \end{aligned}$$

d. INTERPRÉTATION (graphique)



CE GRAPHIQUE

PERMET L'ÉTUDE

DE LA SENSIBILITÉ

AUTOUR DE $\tilde{n}$.

↳ au pt de rencontre des 2 coûts, on a l'optimum

APPLICATION NUMERIQUE

DONNEES:

- DEMANDE: CONTINUE, 144.000 PIECES PAR AN $\rightarrow \lambda$
- $\delta = 0$ (pas de délai de livraison)
- PAS DE PENURIE (pas de rupture de stock)
- $C_e = 80.000$ FR PAR RAFALE
- $C_s = 1$ FR PAR PIECE ET PAR JOUR
- 1 ANNEE = 360 JOURS $\triangle$

Pb = trouver $\tilde{n}$ et $\tilde{T}$

Analyse: $\lambda = \frac{144\,000}{360} = 400$ (on convertit la dem/an en dem/jour)

$$\rightarrow \tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,000 \cdot 144\,000}{1 \cdot 360}} = 8000 \text{ pièces}$$

Comme $C_s = 1$, on va aussi trouver 8000 fr/jour

$$\rightarrow \tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda} = \frac{8000}{400} = 20 \text{ jours}$$

$$\rightarrow \Gamma(\tilde{n}) = \dots$$

Quelle est l'intérêt de gérer exactement bien des stocks?

ici on commande 18x/an car $18 \cdot 8000 = 144\,000$
(ceci car $18 \cdot 20 \text{ jours} = 360 \text{ jours}$)

Mais si on commandait 2x/an

$\rightarrow$ si $T = 180$ jours (approximativement 2x/an)

$$\Gamma(n) = \frac{C_e}{T} + C_s \frac{\lambda T}{2} = \frac{8000}{180} + \frac{1 \cdot 144\,000 \cdot 180}{360 \cdot 2} = 36\,444 \text{ fr/jour}$$

$\rightarrow$ coût annuel = $36\,444 \cdot 360 = 13\,120\,000$ francs!!!

$\rightarrow \approx 6x$ le prix optimum.

§2. MODELE N°2. WILSON MODIFIE. STOCK D'ARGENT

1. HYPOTHESES:

- IDEM MODELE N°1, EXCEPTE C_s .
- COUT DE STOCKAGE: POURCENTAGE DU PRIX DE REVIENT

en fait, C_s représente la perte d'intérêt de l'argent utilisé
(plus à la banque → plus d'intérêts)

$C_s = \alpha \left(C_a + \frac{C_e}{n} \right)$

C_a : PRIX D'ACHAT.

α : taux d'intérêt à la banque

$\frac{C_e}{n}$: coût d'une pièce

$\frac{C_e}{n}$: coût de l'argent d'une pièce

ex: si on doit acheter de la marchandise et si on doit prêter à la banque il faut ajouter le coût financier qu'on peut avoir à la banque

- APPLICATION: COUT DE STOCKAGE NUL. MAIS ON PREND EN COMPTE L'INTERET DE L'ARGENT MOBILISE (α)

2. A CALCULER: $\tilde{n}, \tilde{T}$ OPTIMAUX

3. ANALYSE

a. GRAPHIQUE: IDEM MODELE N°1

b. ANALYSE

demande: $\lambda \tilde{T} = n$

$\tilde{T} = \frac{n}{\lambda}$

COUT DE LANCER ENT PAR UN. DE TPS: $C_e \frac{\lambda}{n}$

COUT DE STOCKAGE PAR UN. DE TPS: $C_s \frac{\lambda}{2} = \alpha \left(C_a + \frac{C_e}{n} \right) \frac{\lambda}{2}$

COUT TOTAL PAR UN. DE TPS:

$$\Gamma(n) = \frac{C_e \lambda}{n} + \alpha C_a \frac{n}{2} + \alpha \frac{C_e}{2}$$

c. RESOLUTION (on résout $\frac{d\Gamma(n)}{dn} = 0$)

$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = -\frac{C_e \lambda}{n^2} + \alpha \frac{C_a}{2} = 0$

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2 C_e \lambda}{\alpha C_a}} ; \tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda} ; \Gamma(\tilde{n}) = \sqrt{2 \lambda C_e \alpha C_a} + \frac{\alpha C_e}{2}$$

formule de Wilson
où on a remplacé
 C_s par αC_a

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = -\frac{C_e \lambda}{n^2} + \alpha \frac{C_a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{C_e \lambda}{n^2} = \alpha \frac{C_a}{2}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{2 C_e \lambda}{\alpha C_a}$$

§3. MODELE N°3. COUTS DE STOCKAGE DEGRESSIFS

→ on a une réduction sur le prix, si on achète en gros etc.

1. HYPOTHESES: IDEM MODELE N°2. EXCEPTE PR. D'ACHAT DEGRESSIF

$$C_a = \begin{cases} c_1 & 0 < n \leq a \\ c_2 & n \geq a \end{cases} ; C_s = \begin{cases} \alpha (c_1 + \frac{c_e}{n}) & 0 \leq n < a \\ \alpha (c_2 + \frac{c_e}{n}) & n \geq a \end{cases}$$

$$c_1 > c_2.$$

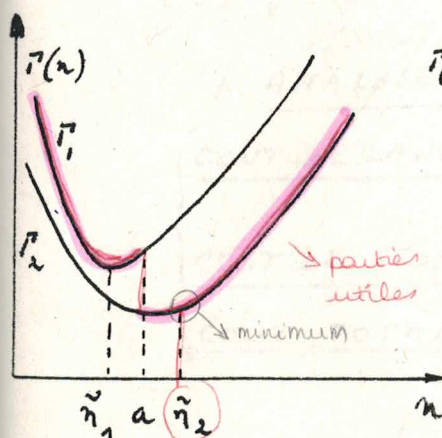
2. A CALCULER: $\tilde{n}, \tilde{T}$ OPTIMAUX. ($\tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda}$)

3. ANALYSE.

$$\begin{cases} \Gamma_1(n) = c_e \frac{\lambda}{n} + \alpha (c_2 + \frac{c_e}{n}) \frac{\lambda}{2} \\ \Gamma_2(n) = c_e \frac{\lambda}{n} + \alpha (c_2 + \frac{c_e}{n}) \frac{n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{n}_1 = \sqrt{\frac{2c_e\lambda}{\alpha c_1}} \\ \tilde{n}_2 = \sqrt{\frac{2c_e\lambda}{\alpha c_2}} \end{cases} \quad \wedge \begin{matrix} \text{car} \\ c_1 > c_2 \end{matrix}$$

1^{er} CAS

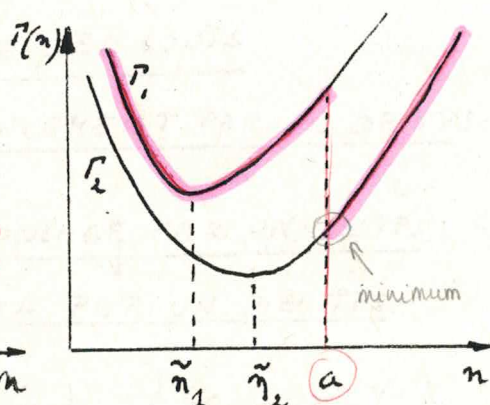
$$a < \tilde{n}_2$$



$$\tilde{n} = \tilde{n}_2 = \sqrt{\frac{2\lambda c_e}{\alpha c_2}}$$

2^e CAS

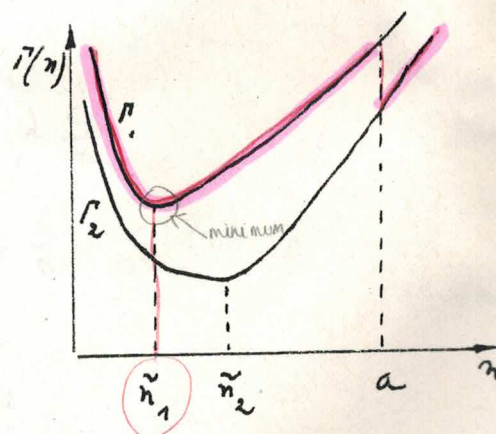
$$\begin{cases} a > \tilde{n}_2 \\ \Gamma_2(a) < \Gamma_1(\tilde{n}_1) \end{cases}$$



$$\tilde{n} = a$$

3^e CAS

$$\begin{cases} a > \tilde{n}_2 \\ \Gamma_2(a) > \Gamma_1(\tilde{n}_1) \end{cases}$$



$$\tilde{n} = \tilde{n}_1 = \sqrt{\frac{2\lambda c_e}{\alpha c_1}}$$

4. APPLICATION NUMERIQUE

$$\begin{cases} c_1 = 1000 \text{ €/pièce} & 0 \leq n < 500 \\ c_2 = 750 \text{ €/pièce} & n \geq 500 \\ c_e = 50.000 \text{ € PAR RAFALE} \\ \lambda = 2400 \text{ PIECES PAR AN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ AN} = 360 \text{ JOURS} \\ \alpha = 0,5 \cdot 10^{-3} / \text{JOUR} \\ (\alpha = 18\% / \text{AN}) \end{cases}$$

RESOLUTION ($\tilde{T} = 200$)

$$\tilde{n}_2 = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 50.000}{360 \times 0,5 \cdot 10^{-3} \times 750}} \approx 1333$$

$$a = 500 < 1333 \rightarrow 1^{\text{er}} \text{ cas}$$

$$\Rightarrow \tilde{n} = \tilde{n}_2 = 1333 \text{ PIECES}$$

(X)

$t \neq 0 \rightarrow$ le rapp. n'est pas instantané ms progressif. 9

§4. MODELE 4: ENTREE PROGRESSIVE EN STOCK

$\rightarrow$ les pièces entrent progressivement de stock
 $\rightarrow v =$ taux de remplissage du stock

1. HYPOTHESES: IDEM MODELE N°1 SAUF APPROVISIONNEMENT

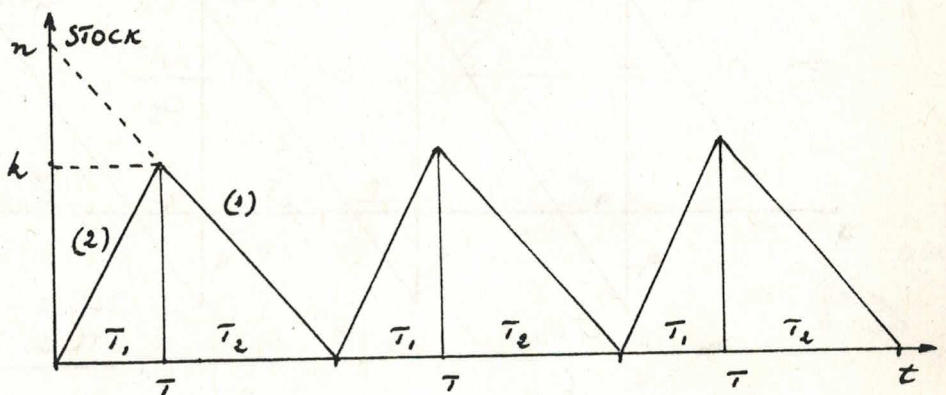
LORSQUE L'ON COMMANDE n PIECES, LE STOCK SE REPLET A RAISON DE v PIECES PAR UNITE DE TEMPS.

$v > \lambda$ (SINON LE STOCK SERAIT TOUJOURS VIDE)

2. A CALCULER: $\tilde{n}$ OPTIMAL. $\tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda}$

3. ANALYSE

a. GRAPHIQUE



$$\begin{cases} (1): y - n = -\lambda t \\ (2): y = (v - \lambda) t \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{v - \lambda}{v} n = k \\ t = \frac{n}{v} = T_1 \end{cases} \rightarrow (T_1, k) = \cap \text{ des droites (1) et (2)}$$

b. ANALYSE DES COUTS

demande: $\lambda T = n \rightarrow T = \frac{n}{\lambda}$

COUT DE LANCEMENT PAR UN. DE TPS: $\lambda \frac{c_c}{n}$

COUT DE STOCKAGE PAR UN. DE TPS: $c_s \frac{k}{2} = c_s \frac{v - \lambda}{v} \frac{n}{2}$

COUT TOTAL PAR UN. DE TPS:

$$\pi(n) = \frac{\lambda c_c}{n} + c_s \frac{v - \lambda}{v} \frac{n}{2}$$

c. RESOLUTION

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \lambda c_c v}{c_s (v - \lambda)}}$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda}$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{\tilde{n}}{v}$$

$$\tilde{T}_2 = \frac{\tilde{n}}{\lambda} \frac{v - \lambda}{v} = \tilde{T} - \tilde{T}_1$$

Wilson ou $c_s := \frac{c_s - \lambda}{\lambda}$

d. REMARQUE: $v \rightarrow \infty \rightarrow \tilde{T} \rightarrow \sqrt{\frac{2 \lambda c_c}{c_s}}$ (WILSON MOD. N°1)

Pour $v \rightarrow \infty$ on retombe sur mod 1

en effet au li dessus, si $v \rightarrow \infty$, l'inclinaison de (2) est

§ 5. MODELE 5. PENURIE A VENTES REPORTEES.

1. HYPOTHESES: IDER MODELE N°1 EXCEPTE POUR LA PENURIE

SI PENURIE: VENTES REPORTEES (PAS DE VENTES PERDUES),

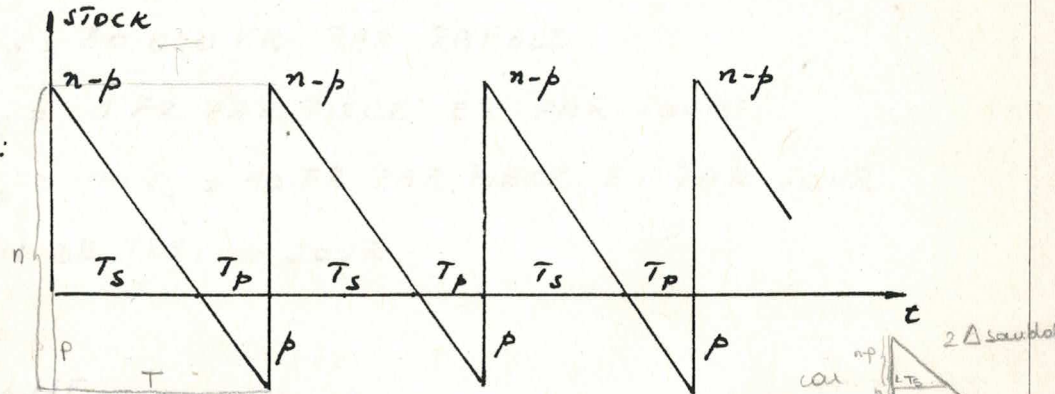
MAIS COUT DE PENURIE C_p PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS.

2. A CALCULER: $\tilde{n}, \tilde{p}$ OPTIMAUX. $\tilde{T}_s, \tilde{T}_p$.

3. ANALYSE

A. GRAPHIQUE:

Au début de chaque période, on commande n pièces mais p de ces n pièces servent à compenser la pénurie de la période précédente.



B. ANALYSE DES COUTS demande: $\lambda T = n$
 $\Rightarrow T = \frac{n}{\lambda}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{COUT DE LANCEMENT PAR UN. DE TPS: } C_e \frac{\lambda}{n} \frac{T_s}{T} \\ \text{COUT DE STOCKAGE PAR UN. DE TPS: } C_s \frac{n-p}{2} \frac{n-p}{n} = C_s \frac{(n-p)^2}{2n} \\ \text{COUT DE PENURIE PAR UN. DE TPS: } C_p \frac{p}{2} \frac{p}{n} = C_p \frac{p^2}{2n} \end{array} \right.$$

COUT TOTAL PAR UN. DE TPS:

$$\Gamma(n, p) = C_e \frac{\lambda}{n} + C_s \frac{(n-p)^2}{2n} + C_p \frac{p^2}{2n}$$

C. RESOLUTION (à calculer Δ exam)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial p} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{n} = \sqrt{\frac{2\lambda C_e}{C_s}} \sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}} ; \tilde{T}_s = \frac{\tilde{n} - \tilde{p}}{\lambda} = \tilde{T} - \tilde{T}_p \\ \tilde{p} = \sqrt{\frac{2\lambda C_e C_s}{C_s + C_p}} = \frac{C_s}{C_s + C_p} \tilde{n} ; \tilde{T}_p = \frac{\tilde{p}}{\lambda} \end{array} \right.$$

faire d'abord ceci puis injecter p dans

d. REMARQUE: $C_p \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n} \rightarrow \text{WILSON MOD. N°1.} \\ \tilde{p} \rightarrow 0 \end{array} \right.$

4. APPLICATION NUMERIQUE.

DONNEES

→ m que pour modèle 3

- DEMANDE : 144.000 PIECES PAR AN
- 1 AN = 360 JOURS
- $z = 0$
- $C_e = 80.000$ FR PAR RAFALE
- $C_s = 1$ FR PAR PIECE ET PAR JOUR
- $C_p = 10 C_s = 10$ FR PAR PIECE ET PAR JOUR
- UN. DE TPS : 1 JOUR.

ANALYSE

$\tilde{n}$ de la formule de Wilson

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n} = \tilde{n}_w \sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}} = 8.000 \times \sqrt{\frac{11 C_s}{10 C_s}} = 8.390 \text{ PIECES} \\ \tilde{p} = \tilde{n} \cdot \frac{C_s}{C_s + C_p} = 8.390 \times \frac{1}{11} = 762 \text{ PIECES} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_s = \frac{\tilde{n} - \tilde{p}}{\lambda} = 19 \text{ JOURS} \\ \tilde{T}_p = \frac{\tilde{p}}{\lambda} = 2 \text{ JOURS} \end{array} \right.$$

$$\tilde{T}_s + \tilde{T}_p = \frac{\tilde{n}}{\lambda} = 21 \text{ JOURS}$$

→ se accepte si il y ait 2 jours de pénurie (c'est p cela que $\tilde{n}$ est +gd)

Pue de la pratique, la demande n'est pas connue, c'est une variable stochastique (aléatoire) ms la formule de Wilson reste ed-m utilisable. Ms ed les données devraient être plus précises.

2^{EME} PARTIE. MODELES STOCHASTIQUES

2 TYPES: $\left\{ \begin{array}{l} - \text{GESTION SUR CALENDRIER} \\ - \text{GESTION A INVENTAIRE CONTINU} \end{array} \right.$

§1. MODELE N°1. COÛTS DE PENURIE ET DE PERTE SUR EXCEDENTS (SUR CALENDRIER)

A. CAS CONTINU

→ on a un risque ms on ne sait pas vraiment le calculer car aléat.

1. HYPOTHESES.

ex : vendeurs de journaux

- DEMANDE ALEATOIRE ET CONTINUE PDT PERIODE T

$$\mathcal{S}: \{r, f(r)\}; F(r) = P[\mathcal{S} \leq r]; F'(r) = f(r)$$

DEMANDE MOYENNE:

$$E[\mathcal{S}] = \int_0^{\infty} r f(r) dr$$

ms la période est fixée (journaux = 15 le jour)

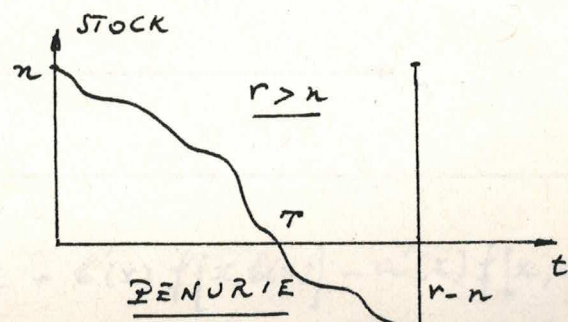
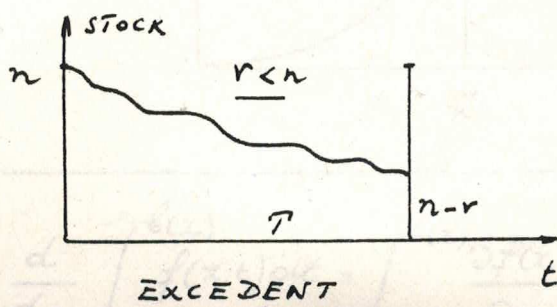
- PERIODE T FIXÉE (GESTION SUR CALENDRIER)

- COÛT D'EXCEDENT EN FIN DE PERIODE: C_1 PAR PIECE

- COÛT DE PENURIE EN FIN DE PERIODE: C_2 PAR PIECE

2. A CALCULER: n OPTIMAL

3. ANALYSE: a. GRAPHIQUE



b. ANALYSE DES COUTS

$$f(r, n) = \begin{cases} c_1 (n - r) & 0 \leq r \leq n \quad (\text{CAS D'EXCEDENTS}) \\ c_2 (r - n) & r \geq n \quad (\text{CAS DE PENURIE}) \end{cases}$$

jours aux demandes
jours aux demandes
alors qu'il en a plus

COUT TOTAL MOYEN

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= E(f(r, n)) = \int_0^{\infty} f(r, n) f(r) dr \\ &= c_1 \int_0^n (n - r) f(r) dr + c_2 \int_n^{\infty} (r - n) f(r) dr \end{aligned}$$

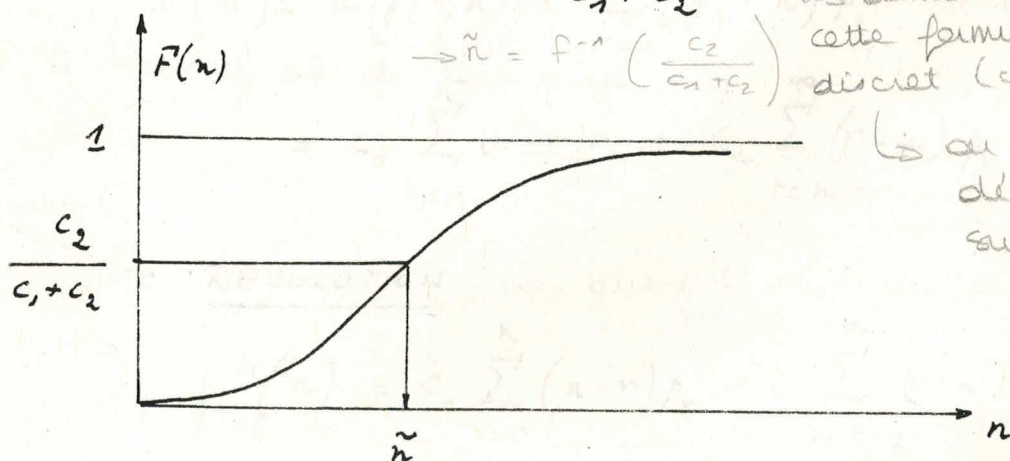
c. RESOLUTION

CRITERE D'OPTIMALITE DE BAYES. MIN. COUT MOYEN

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dn} &\stackrel{\text{formule (bas de page)}}{=} c_1 \int_0^n f(r) dr + 0 - c_2 \int_n^{\infty} f(r) dr + 0 = 0 \\ &= c_1 F(n) - c_2 (1 - F(n)) = 0. \end{aligned}$$

$$P[Z \leq \tilde{n}] = F(\tilde{n}) = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{à l'examen on peut} \\ \text{se demander de retrouver} \\ \text{cette formule du cas} \\ \text{discret (cf p 14)} \end{array} \right)$$

$\rightarrow \tilde{n} = F^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)$



↳ on peut retrouver la démonstration de la formule sur les exercices

formule :

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + b'(x) \cdot f[x, b(x)] - a'(x) \cdot f[x, a(x)]$$

3. CAS DISCRET

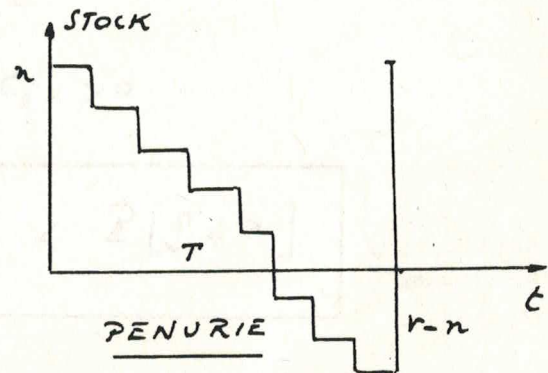
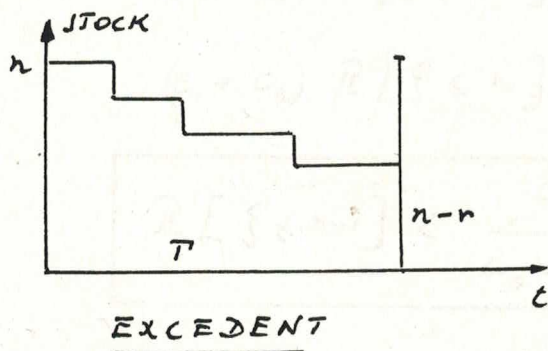
1. HYPOTHESES: IDEM CAS CONTINU SAUF DEMANDE

- DEMANDE ALEATOIRE ET DISCRETE PDT PERIODE T

$$\mathcal{S}: \{r, p_r\} ; p_r = \mathbb{P}[\mathcal{S} = r] ; \sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1$$

2. A CALCULER: n OPTIMAL (n ENTIER)

3. ANALYSE: a. GRAPHIQUE



b. ANALYSE DES COUTS

COUT TOTAL MOYEN

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \mathbb{E}(\gamma(r, n)) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma(r, n) p_r \\ &= c_1 \sum_{r=0}^n (n-r) p_r + c_2 \sum_{r=n+1}^{\infty} (r-n) p_r \quad (*) \end{aligned}$$

où $\gamma = \begin{cases} c_1(n-r) \\ c_2(r-n) \end{cases}$

+ simple!

c. RESOLUTION (voir aussi l'annexe virtuelle)

$$\begin{cases} \Gamma(n) = c_1 \sum_{r=0}^n (n-r) p_r + c_2 \sum_{r=n+1}^{\infty} (r-n) p_r \\ \Gamma(n+1) = c_1 \sum_{r=0}^{n+1} (n+1-r) p_r + c_2 \sum_{r=n+1}^{\infty} (r-n-1) p_r \end{cases}$$

sa devrait être n ms = 0 ou n

car ord n = n+1, ça va être

$$\Delta \Gamma(n) = \Gamma(n+1) - \Gamma(n) = c_1 \sum_{r=0}^n p_r - c_2 \sum_{r=n+1}^{\infty} p_r$$

→ $\sum_{r=n+2}^{\infty} = \sum_{r=n+1}^{\infty} - p_{n+1}$

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1 \rightarrow \sum_{r=0}^n p_r + \sum_{r=n+1}^{\infty} p_r = 1 \rightarrow \sum_{r=0}^n p_r = 1 - \sum_{r=n+1}^{\infty} p_r$$

$$\Delta \Gamma(n) = (c_1 + c_2) \sum_{r=0}^n \underbrace{p_r}_{p[\xi=r]} - c_2$$

$$= (c_1 + c_2) \mathbb{P}[\xi \leq n] - c_2$$

$$\begin{cases} \Delta \Gamma(n) < 0 & \text{COUT DECROIT} \\ \Delta \Gamma(n) > 0 & \text{COUT CROIT} \end{cases}$$

n EST OPTIMAL SI : $\Delta \Gamma(n-1) < 0$, $\Delta \Gamma(n) > 0$. (ceci fournit le min de $\Gamma(n)$)

$$(c_1 + c_2) \mathbb{P}[\xi \leq n-1] - c_2 < 0$$

$$(c_1 + c_2) \mathbb{P}[\xi \leq n] - c_2 > 0$$

$$\mathbb{P}[\xi \leq n-1] < \frac{c_2}{c_1 + c_2} < \mathbb{P}[\xi \leq n]$$

ce cas discute
dout les dem
est sur l'us

$$\text{SI } \mathbb{P}[\xi \leq n] = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \Rightarrow n \text{ ET } (n+1) \text{ OPTIMAUX} \leadsto \tilde{n}$$

ou pourrait aussi une quest. Ége à l'examen

4. APPLICATION NUMERIQUE

$$\begin{cases} c_1 = 5000 \text{ FR} \\ c_2 = 20 c_1 = 100.000 \text{ FR.} \end{cases}$$

n	p_n	$\mathbb{P}[\xi \leq n]$
0	0,90	0,90
1	0,05	0,95
2	0,02	0,97
3	0,01	0,98
4	0,01	0,99
5	0,01	1,00

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{100}{105} = 0,952$$

$$\tilde{n} = 2$$

$$\Gamma(\tilde{n}) = 15.250 \text{ FR.}$$

en ut ⊗ p. 14

Autre applic : p. sur u.v

Application
Librairie

on prend le niveau
de confiance qui
correspond au $\frac{c_1}{c_1 + c_2}$

§2. MODELE N°2. STOCKAGE ET PENURIE (SUR CALENDRIER)

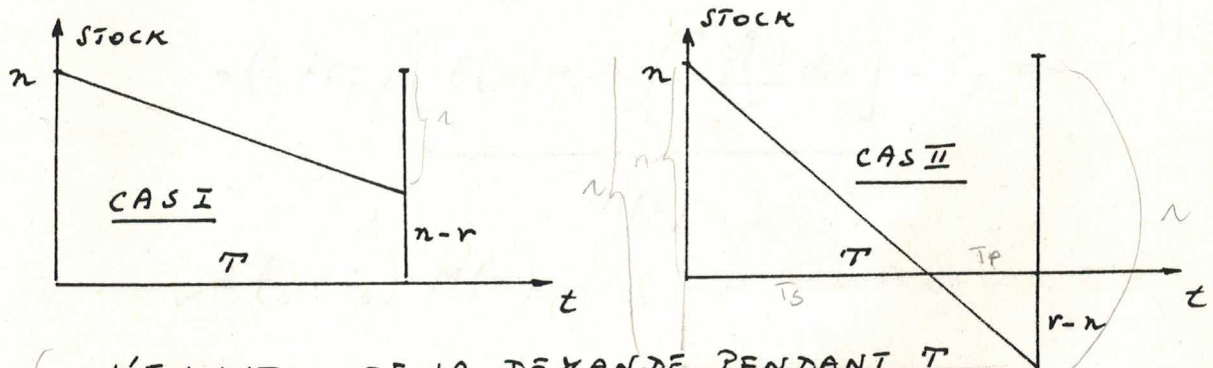
A. CAS CONTINU

1. HYPOTHESES

- DEMANDE ALEATOIRE : $\{z, f(r)\}$; $F(z) = P\{Z \leq z\}$
 $f'(u) = f(u)$
- PERIODE T FIXEE
- COUT DE STOCKAGE : c_s PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS.
- COUT DE PENURIE : c_p PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS.

2. A CALCULER : n OPTIMAL.

3. ANALYSE. a. GRAPHIQUE



L'EVOLUTION DE LA DEMANDE PENDANT T
N'EST PAS CONNUE. POUR UNE DEMANDE r ON SUPPOSE
LA DIMINUTION DU STOCK LINEAIRE. (APPROXIMATION)

b. ANALYSE DES COUTS

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{côté du} \\ \text{STOCK MOYEN CAS I: } c_s \left(n - r + \frac{r}{2} \right) = c_s \left(n - \frac{r}{2} \right) \\ \text{côté du} \\ \text{STOCK MOYEN CAS II: } c_s \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{r} \right) = c_s \left(\frac{n^2}{2r} \right) \\ \text{côté de} \\ \text{PENURIE MOYENNE CAS II: } c_p \left(\frac{r-n}{2} \cdot \frac{r-n}{r} \right) = c_p \left(\frac{(r-n)^2}{2r} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{n}{r} = \frac{T_s}{T} \\ \frac{n-n}{r} = \frac{T_p}{T} \end{array}$$

COUT MOYEN TOTAL:

$$\Gamma(n) = c_s \int_0^n \left(n - \frac{r}{2} \right) f(r) dr + c_s \int_n^\infty \frac{n^2}{2r} f(r) dr + c_p \int_n^\infty \frac{(r-n)^2}{2r} f(r) dr$$

famille (appel)

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + b'(x) f[x, b(x)] - a'(x) f[x, a(x)]$$

C. RESOLUTION

$$\Gamma(n) = c_s \int_0^n \left(n - \frac{r}{2}\right) f(r) dr + c_s \int_n^\infty \frac{n^2}{2r} f(r) dr + c_p \int_n^\infty \frac{(r-n)^2}{2r} f(r) dr$$

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = \underbrace{c_s \int_0^n f(r) dr}_{f(n)} + c_s \frac{n}{2} f(n) + c_s \int_n^\infty \frac{n}{r} f(r) dr - c_s \frac{n}{2} f(n) - c_p \int_n^\infty \frac{r-n}{r} f(r) dr = 0$$

$$= c_s F(n) + c_s n \int_n^\infty \frac{f(r)}{r} dr - c_p (1 - F(n)) + c_p n \int_n^\infty \frac{f(r)}{r} dr = 0$$

$$= (c_s + c_p) \left[F(n) + n \int_n^\infty \frac{f(r)}{r} dr \right] - c_p = 0$$

$M(n)$

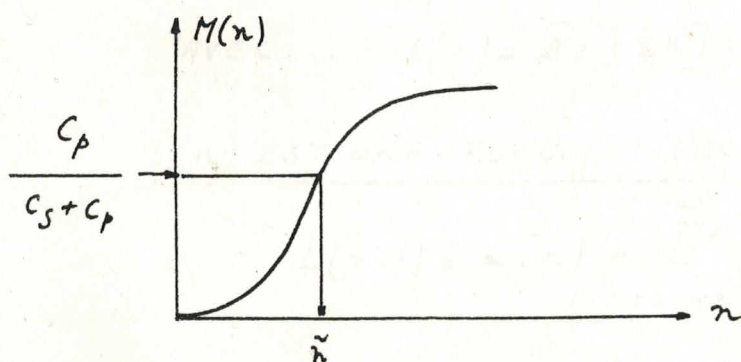
$$= (c_s + c_p) M(n) - c_p = 0 \Leftrightarrow n(n) = \frac{c_p}{c_s + c_p}$$

$M(n)$ EST UNE FONCTION MONOTONE CROISSANTE

en effet

$$M'(n) = f(n) + \int_n^\infty \frac{f(r)}{r} dr - f(n) = \int_n^\infty \frac{f(r)}{r} dr > 0$$

SOLUTION OPTIMALE



n OPTIMAL SI

$$n(n) = \frac{c_p}{c_s + c_p} \rightsquigarrow \tilde{n}$$

B. CAS DISCRET

1. HYPOTHESES: IDEX CAS CONTINU SAUF DEMANDE

- DEMANDE PDT DISCRETE ET ALEATOIRE

$$\mathcal{S}: \{r, p_r\}; p_r = \mathbb{P}[\mathcal{S} = r]; \sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1.$$

2. A CALCULER: n OPTIMAL (n ENTIER)

3. ANALYSE a. GRAPHIQUE: IDEX.

b. ANALYSE DES COUTS

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{STOCK MOYEN CAS I:} & n - \frac{r}{2} \\ \text{STOCK MOYEN CAS II:} & \frac{n^2}{2r} \\ \text{PENURIE MOYENNE CAS II:} & \frac{(r-n)^2}{2r} \end{array} \right.$$

COUT MOYEN TOTAL

$$\Gamma(n) = c_s \sum_{r=0}^n \left(n - \frac{r}{2}\right) p_r + c_s \sum_{r=n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{n^2}{2r} p_r + c_p \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{(r-n)^2}{2r} p_r$$

c. RESOLUTION

$$\Gamma(n+1) = c_s \sum_{r=0}^{n+1} \left(n+1 - \frac{r}{2}\right) p_r + c_s \sum_{r=n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2r} p_r + c_p \sum_{r=n+2}^{\infty} \frac{(r-n-1)^2}{2r} p_r$$

$$\Delta \Gamma(n) = \Gamma(n+1) - \Gamma(n) = (c_s + c_p) L(n) - c_p$$

$$\text{AVEC: } L(n) = \mathbb{P}[\mathcal{S} \leq n] + \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{p_r}{r}$$

L(n) EST UNE FONCTION CROISSANTE CAR:

$$L(n+1) = L(n) + \sum_{r=n+2}^{\infty} \frac{p_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{p_{n+1}}{n+1}$$

n EST OPTIMAL SI :

$$\begin{cases} \Delta \Gamma(n-1) = \Gamma(n) - \Gamma(n-1) < 0 \\ \Delta \Gamma(n) = \Gamma(n+1) - \Gamma(n) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (C_s + C_p) L(n-1) - C_p < 0 \\ (C_s + C_p) L(n) - C_p > 0 \end{cases}$$

$$L(n-1) < \frac{C_p}{C_s + C_p} < L(n) \quad \rightsquigarrow \tilde{n}$$

4. APPLICATION NUMERIQUE

$$C_s = 10.000 \text{ FR} ; C_p = 19 C_s = 190.000 \text{ FR.}$$

r	p_r	$\frac{p_r}{r}$	$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{p_r}{r}$	$(n+\frac{1}{2}) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{p_r}{r}$	$P[S \leq n]$	$L(n)$
0	0,1	∞	0,492	0,246	0,1	0,346
1	0,2	0,2	0,292	0,488	0,3	0,738
2	0,4	0,2	0,092	0,230	0,7	0,930
3	0,2	0,067	0,025	0,088	0,9	0,988
4	0,1	0,025	-	0,000	1	1.000

$$\leftarrow \frac{C_p}{C_s + C_p}$$

$$\frac{C_p}{C_s + C_p} = \frac{19 C_s}{20 C_s} = 0,95 \quad \Rightarrow \quad \tilde{n} = 3 ; \Gamma(3) = 22.500 \text{ FR}$$

5. REMARQUE : ON PEUT MODIFIER LA PERIODE, PRENDRE $2T, 3T, \dots$

IL FAUT ALORS RECALCULER LES PROBABILITES

CAS DE L'EXEMPLE :

$$\begin{cases} p_{2T}(0) = 0,1 \times 0,1 = 0,01 \\ p_{2T}(1) = 0,1 \times 0,2 + 0,2 \times 0,1 = 0,04 \\ p_{2T}(2) = 0,1 \times 0,4 + 0,2 \times 0,2 + 0,4 \times 0,1 = 0,12 \\ \dots \end{cases}$$

CALCULER LE $\tilde{n}$ POUR PERIODE $2T$, VOIR SI LE COUT N'EST PAS PLUS FAVORABLE.

§3. MODELE N°3. HEURISTIQUE A 2 MAGASINS (A INVENTAIRE CONTINU)

MODELE A 2 MAGASINS

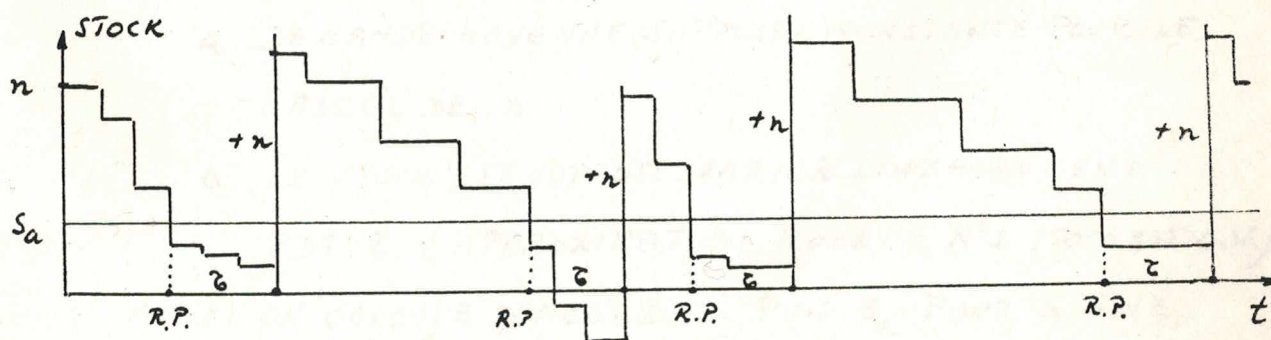
- ON CONSOMME D'ABORD LE STOCK DU 1^{ER} MAGASIN
- LORSQUE LE 1^{ER} MAGASIN EST VIDE, ON LANCE UNE COMMANDE
- PENDANT LE DELAI DE REAPPROVISIONNEMENT τ , ON DISPOSE D'UN SECOND MAGASIN DE STOCK S_a (RESERVE)

1. HYPOTHESES

- MODELE A 2 MAGASINS. PENURIE A VENTES REPORTEES
- DELAÏ DE REAPPROVISIONNEMENT τ FIXE.
- DEMANDE :
 - $\bar{D}$: DEMANDE MOYENNE SUR LONGUE PERIODE θ .
 - PENDANT PERIODE τ : DEMANDE ALEATOIRE
 - CONTINUE : $\xi : \{v, f(v)\}$; $F(v) = P[\xi \leq v]$
 - DISCRETE : $\xi : \{v, p_v\}$; $\sum_{v=0}^{\infty} p_v = 1$. $p_n = P[\xi = n]$
- COUT DE STOCKAGE : C_s PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS.
- COUT DE PENURIE : C_p PAR PIECE ET PAR UN. DE TPS.
- COUT DE LANCEMENT : C_o PAR RAFALE.

2. A CALCULER : n, S_a .

3. ANALYSE : a. GRAPHIQUE



R.P. : "REORDER POINT". n : QUANTITE "OPTIMALE" DE COMMANDE

S_a : STOCK DE SECURITE PDT DELAI REAPPROVISIONNEMENT τ .

b. ANALYSE ET RESOLUTION

1^o. CALCUL DE n : QUANTITE "OPTIMALE" DE COMMANDE
FAIRE L'HYPOTHESE D'UNE DEMANDE CONSTANTE

$$\lambda = \frac{\bar{D}}{\theta}$$

ALORS MODELE DETERMINISTE N^o 5. AVEC PENURIE
A VENTES REPORTEES (Cfr. Tr. 10)

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2c_e \bar{D}}{\theta c_s}} \sqrt{\frac{c_s + c_p}{c_f}}$$

2^o. CALCUL DE s_a : (CAS DEMANDE DISCRETE)

PDT LE DELAI DE REAPPROVISIONNEMENT τ , LES
HYPOTHESES DU MODELE N^o 2 STOCHASTIQUE, CAS
DISCRET (STOCKAGE ET PENURIE, SUR CALENDRIER)
SONT REPLIES (Cfr. Tr. 18, 19)

$$L(s_a) = P[\xi \leq s_a] + (s_a + \frac{1}{2}) \sum_{r=s_a+1}^{\infty} \frac{p_r}{r}$$

$$\tilde{s}_a \text{ TEL QUE: } L(s_a - 1) < \frac{c_p}{c_s + c_p} < L(s_a)$$

c. REMARQUES:

CE MODELE EST HEURISTIQUE CAR:

a. DEMANDE MOYENNE SUPPOSEE CONSTANTE POUR LE
CALCUL DE n .

b. LE STOCK EST SUPPOSE VARIER LINEAIREMENT
PDT τ (APPROXIMATION MODELE N^o 2 STOCHASTIQUE)

c. ON CALCULE D'ABORD n , PUIS s_a POUR n FIXE.

MAIS IL S'AGIT EN FAIT D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION
A 2 VARIABLES.