10 Choix de questions d'examens

EXERCICE 10.1.(août 2009)

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "statistique"?

2. Une boîte contient trois pièces de monnaie; la première est bien équilibrée, la deuxième est marquée avec deux faces et la troisième est truquée, la probabilité d'obtenir face étant égale à $\frac{2}{3}$. On choisit au hasard une pièce qu'on lance.

   (a) Calculez la probabilité pour que l'on obtienne face.

   (b) Un joueur obtient face. Quelle est la probabilité pour qu'il ait lancé la pièce marquée avec les deux faces?

EXERCICE 10.2.(août 2010)

Des zoologistes ont observé que le kangourou nain pouvait effectuer des sauts de 20 cm avec une probabilité (1-p) et de 40 cm avec une probabilité p. En moyenne, de combien de centimètres se déplace un kangourou nain après 5 sauts consécutifs?

EXERCICE 10.3.(janvier 2010)

Vous utilisez un programme permettant de détecter le courrier électronique indésirable (SPAM). Des tests ont permis de quantifier que cette application détectait un courrier qui était effectivement un SPAM dans 90% des cas et un courrier qui était effectivement non SPAM dans 85% des cas. Le courrier étant considéré par l'application comme étant du SPAM est placé dans un répertoire particulier et est toujours accessible à l'utilisateur. Sachant qu'un e-mail se trouve dans ce répertoire, la probabilité qu'il soit non spam est égale à 4%. Compte tenu de cette information, on vous demande de calculer la probabilité de recevoir un courrier de type SPAM.

EXERCICE 10.4.(août 2009)

A la foire du midi, le tenancier d'une attraction à sensations fortes a remarqué que la fréquentation de son activité dépendait fortement des conditions atmosphériques. En cas de beau temps, le nombre de participants par jour (exprimé en millier) peut être modélisé suivant une variable aléatoire notée X_1. On a

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} at & si\ t \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

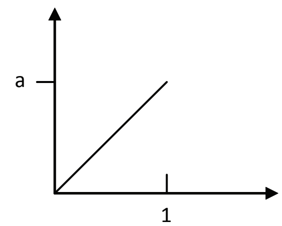

Figure 1: $f_{X_1}(t)$

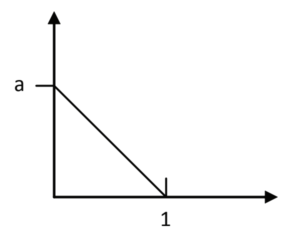

Figure 2: $f_{X_2}(t)$

En cas de mauvais temps, le nombre de participants par jour peut être modélisé suivant une variable aléatoire notée X_2. On a

$$f_{X_2}(t) = \begin{cases} a - at & si\ t \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1. Déterminer a.
2. S'il y a 60% de chance qu'il fasse beau, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 750 visiteurs demain?
3. Sachant qu'il fera beau les deux prochains jours, quelle est la probabilité que au total 500 personnes au moins visitent l'attraction pendant ces deux jours?

EXERCICE 10.5.(août 2010)

On considère un segment unitaire qu'on découpe, au hasard, en deux parties. On suppose que le choix du point de coupe peut être modélisé suivant une loi uniforme. On considère que ces deux sous-segments constituent la longueur et la largeur d'un rectangle. Soit Z la variable aléatoire représentant l'aire de ce rectangle. On vous demande de calculer $P[Z \leq t]$ pour $t = 1/2, 1/4$ et $1/8$.

EXERCICE 10.6.(août 2010)

On cherche à tester si la médiane m d'une variable aléatoire X est égale à une constante m_0. Ce test peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} H_0 \ : \ m = m_0 \\ H_1 \ : \ m \neq m_0 \end{cases} \tag{1}$$

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire simple de taille n prélevé dans la population. Soit N^* le nombre d'observations supérieures à m_0. On vous demande :

1. de déterminer la distribution de probabilité de N^* sous l'hypothèse H_0;

2. d'établir une règle de décision pour (1) au niveau α lorsque n est grand.

EXERCICE 10.7.(janvier 2009)

Dans une urne sont placées b boules blanches et r boules rouges. Une boule est prélevée au hasard. Celle-ci est ensuite replacée dans l'urne avec m boules de la même couleur, $m \in N$. Un deuxième et troisième prélèvements sont alors effectués en suivant la même règle de remplacement. En notant, $A =$"obtenir une boule blanche au premier prélèvement"; $B =$"obtenir une boule blanche au deuxième prélèvement"; $C =$"obtenir une boule blanche au troisième prélèvement"; déterminer $P(B|A)$, $P(A|B)$, $P(C|B)$ et $P(C)$.

EXERCICE 10.8.(janvier 2010)

On considère le polynôme Ax^2+Bx+1 où A et B sont deux variables uniformes sur l'intervalle [0,1] indépendantes. On vous demande de calculer la probabilité que ce polynôme soit toujours strictement positif.