10 Corrections

EXERCICE 10.1.(août 2009)

1. $\frac{11!}{2!3!2!}$

2. Soient TA ="tirer la pièce bien équilibrée", TB ="tirer la pièce avec deux faces", TC ="tirer la pièce truquée", et F ="obtenir face".

   (a) On a $P[F] = P[F|TA]P[TA] + P[F|TB]P[TB] + P[F|TC]P[TC]$ (théorème des probabilités totales). Et donc, $P[F] = 1/2 * 1/3 + 1 * 1/3 + 1/3 * 2/3 = \frac{13}{18}$.

   (b) $P[TB|F] = \frac{P[F|TB]P[TB]}{P[F]} = \frac{18}{39}$.

EXERCICE 10.2.(août 2010)

Soit X ="Distance parcourue après 5 sauts par la kangourou nain". La variable X prend alors ses valeurs dans $\{200; 180; 160; 140; 120; 100\}$. On a,

$$\begin{aligned} P[X = 200] &= p^5 \\ P[X = 180] &= C_5^1 p^4(1-p) \\ P[X = 160] &= C_5^2 p^3(1-p)^2 \\ P[X = 140] &= C_5^3 p^2(1-p)^3 \\ P[X = 120] &= C_5^4 p(1-p)^4 \\ P[X = 100] &= (1-p)^5. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} E[X] &= 200p^5 + 180 * 5p^4(1-p) + 160 * 10p^3(1-p)^2 + 140 * 10p^2(1-p)^3 + 120 * 5p(1-p)^4 + 100(1-p)^5 \\ E[X] &= 200p^5 + 900p^4(1-p) + 1600p^3(1-p)^2 + 1400p^2(1-p)^3 + 600p(1-p)^4 + 100 * (1-p)^5. \end{aligned}$$

EXERCICE 10.3.(janvier 2010)

Notations :

- S : "le courrier est un spam"
- $\overline{S}$: "le courrier n'est pas un spam"
- DS : "Le courrier est détecté spam"

- $D\overline{S}$: “Le courrier est détecté non spam”

Transcription de l’énoncé :

- $P[DS|S] = 0.9 \Rightarrow P[D\overline{S}|S] = 0.1$
- $P[D\overline{S}|\overline{S}] = 0.85 \Rightarrow P[DS|\overline{S}] = 0.15$
- $P[\overline{S}|DS] = 0.04 \Rightarrow P[S|DS] = 0.96$

Il faut trouver : $P[S]$

On utilise Bayes :

$$P[\overline{S}|DS] = \frac{P[DS|\overline{S}]P[\overline{S}]}{P[DS|\overline{S}]P[\overline{S}] + P[DS|S]P[S]}$$

$$\Updownarrow$$

$$P[\overline{S}|DS] = \frac{P[DS|\overline{S}](1-P[S])}{P[DS|\overline{S}](1-P[S]) + P[DS|S]P[S]}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.04 = \frac{0.15(1-P[S])}{0.15(1-P[S]) + 0.9P[S]}$$

Il suffit alors d’isoler $P[S]$ et on trouve $P[S] = 0.8$.

EXERCICE 10.4.(août 2009)

1. $a = 2$

2. Soit X =“le nombre de personnes attendues demain”, BT =“beau temps demain” et MT =“mauvais temps”. On s’intéresse à :

$$\begin{aligned} P[X > 750] &= P[X > 750|BT]P[BT] + P[X > 750|MT]P[MT] \\ &= 0,6\int_{0,75}^{1} 2tdt + 0,4\int_{0,75}^{1}(2-2t)dt \\ &= \frac{6}{10}\frac{7}{16} + \frac{4}{10}\frac{1}{16} = \frac{46}{160} = \frac{23}{80}. \end{aligned}$$

3. Soit $X_{1;1}$ =“le nombre de visiteurs attendus demain” et $X_{1;2}$ =“le nombre de visiteurs après-demain”. On s’intéresse alors à la variable $X_{1;1} + X_{1;2}$. On à

$$f_{X_{1;1}+X_{1;2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{1;1}}(y) f_{X_{1;2}}(x-y)dy$$

Remarquons que $f_{X_{1;1}}(y)f_{X_{1;2}}(x-y) \neq 0$ si $y \in [0;1]$ et si $y \in [x-1;x]$. De plus,

$$[0;1] \cap [x-1;x] = \begin{cases} \phi & si\ x < 0 \\ [0;x] & si\ 0 \leq x < 1 \\ [x-1;1] & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ \phi & si\ x > 2 \end{cases}.$$

Enfin, $P[X_{1;1}+X_{1;2} \geq 0,5] = 1-P[X_{1;1}+X_{1;2} < 0,5] = 1-\int_{-\infty}^{0,5}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{1;1}}(y)f_{X_{1;2}}(x-y)dydx = 1-\int_0^{0,5}\int_0^x 2y*2(x-y)dydx = 1-4\int_0^{0,5}\int_0^x(xy-y^2)dydx = \frac{95}{96}$

EXERCICE 10.5.(août 2010)

Soit Y ="le point de coupe". Dans ce cas les deux côtés du rectangles L et l sont : $L = Z$ et $l = 1-Z$ et on s'intéresse à

$$P[L.l \leq t] = P[Y(1-Y) \leq t] = P[-Y^2+Y-t \leq 0].$$

Remarquons que $\Delta = 1-4t$. Donc si $t > \frac{1}{4}$, $P[-Y^2+Y-t \leq 0] = 1$. Donc $P[Z \leq \frac{1}{4}] = P[Z \leq \frac{1}{2}] = 1$ et

$$\begin{aligned} P[Z \leq \frac{1}{8}] &= P[-Y^2+Y-\frac{1}{8} \leq 0] = P[Y \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4}] + P[Y \geq \frac{2+\sqrt{2}}{4}] \\ &= P[Y \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4}] + 1 - P[Y \leq \frac{2+\sqrt{2}}{4}] = \frac{2-\sqrt{2}}{4} + 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 10.6.(août 2010)

1. $N^* \sim Bin(n, 0;5)$ car N^* est le nombre d'observations $> m_0$ (comptage) et sous H_0 $P[X_i > m_0] = 1-P[X_i \leq m_0] = 1-\frac{1}{2} = 0,5$.

2. En utilisant le théorème de Moivre, on a que (sous H_0 et qand n est grand) $T = \frac{N^*-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \approx N(0;1)$. On va donc rejeter H_0 quand $|T| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est tel que $P[N(0;1) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}] = 1-\frac{\alpha}{2}$.

EXERCICE 10.7.(janvier 209)

1. $P[B|A] = \frac{b+m}{b+r+m}$

2. $P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}$. Calculons $P[B] = P[B|A]P[A] + P[B|\bar{A}]P[\bar{A}] = \frac{b+m}{b+r+m}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+m}\frac{r}{b+r}$. Dans ce cas, $P[A|B] = \frac{\frac{b+m}{b+r+m}\frac{b}{b+r}}{\frac{b+m}{b+r+m}\frac{b}{b+r}+\frac{b}{b+r+m}\frac{r}{b+r}} = \frac{b+m}{b+m+r}$

3. $P[C|B] = P[C|B,A]P[A|B] + P[C|B,\bar{A}]P[\bar{A}|B] = \frac{b+2m}{b+r+2m}\frac{b+m}{b+m+r} + \frac{b+m}{b+r+2m}\frac{r}{b+m+r}$.

4. $P[C] = P[C|B,A]P[B,A] + P[C|B,\bar{A}]P[B,\bar{A}] + P[C|\bar{B},A]P[\bar{B},A] + P[C|\bar{B},\bar{A}]P[\bar{B},\bar{A}] = P[C|B,A]P[B|A]P[A] + P[C|B,\bar{A}]P[B|\bar{A}]P[\bar{A}] + P[C|\bar{B},A]P[\bar{B}|A]P[A] + P[C|\bar{B},\bar{A}]P[\bar{B}|\bar{A}]P[\bar{A}] = \frac{b+2m}{b+r+2m}\frac{b+m}{b+r+m}\frac{b}{b+r} + \frac{b+m}{b+r+2m}\frac{b}{b+r+m}\frac{r}{b+r} + \frac{b+m}{b+r+2m}\frac{r}{b+r+m}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+2m}\frac{r+m}{b+r+m}\frac{r}{b+r}$.

EXERCICE 10.8.(janvier 2010)

Rappel : comme A et B sont des variabes aléatoires uniformes sur $[0,1]$:

$$F_B(x) = F_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \in [0;1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}.$$

Pour que $Ax^2 + Bx + 1$ soit toujours strictement positif il faut que $B^2 - 4A < 0$. Calculons $F_{B^2}(x)$: $F_{B^2}(x) = P[B^2 \leq x] = P[-\sqrt(x) \leq B \leq \sqrt(x)] = P[B \leq \sqrt(x)] - P[B < -\sqrt(x)] = P[B \leq \sqrt(x)]$. Donc,

$$F_{B^2}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \sqrt{x} & si\ x \in [0;1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

et,

$$f_{B^2}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin [0;1] \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & si\ x \in [0;1] \end{cases}.$$

Ensuite, calculons F_{4A} : $F_{4A} = P[4A \leq x] = P[A \leq \frac{x}{4}]$. Donc,

$$F_{4A}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{4} & si\ x \in [0;4] \\ 1 & si\ x > 4 \end{cases}$$

et,

$$f_{4A}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin [0;4] \\ \frac{1}{4} & si\ x \in [0;4] \end{cases}.$$

Dans ce cas : $B^2 - 4AC$ a comme fonction de densité (voir résultat séance 6 exercice 7) :

$$f_{B^2-4AC}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{B^2}(x+y) f_{4AC}(y) dy$$

Pour que $f_{B^2}(x+y)f_{4AC}(y) \neq 0$, il faut que $x + y \in [0;1]$ et $y \in [0;4]$. Donc $y \in [-x; 1-x]$ et $y \in [0;4]$. Remarquons que

$$[-x;1-x] \cap [0;4] = \begin{cases} \phi & si\ x > 1 \\ [0;1-x] & si\ 0 < x \leq 1 \\ [-x;1-x] & si\ -3 < x \leq 0 \\ [-x;4] & si\ -4 \leq x \leq -3 \\ \phi & si\ x < -4 \end{cases}.$$

On obtient alors : $P[B^2-4AC<0]=\int_{-\infty}^{0} f_{B^2-4AC}(x)dx=\int_{-4}^{0} f_{B^2-4AC}(x)dx=\int_{-3}^{0}\int_{-x}^{1-x} f_{B^2}(x+y)f_{4AC}(y)dydx+\int_{-4}^{-3}\int_{-x}^{4} f_{B^2}(x+y)f_{4AC}(y)dydx=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$.