Exercice 9.6.

1) Nous voulons comparer la moyenne de deux populations normales dont les écart-types σ_1 et σ_2 sont connus

$$\underline{x}_1 = ((x_1)_1, ..., (x_1)_{m_1}) = (63,12 ; 63,57 ; 62,81 ; 64,32 ; 63,76)$$
$$\underline{x}_2 = ((x_2)_1, ..., (x_2)_{m_2}) = (62,51 ; 63,24 ; 62,31 ; 62,21)$$

où $m_1 = 5$ et $m_2 = 4$.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$ au niveau $\alpha = 5\% = 0,05$

Nous savons que dans ce cas,

- la statistique du test est $\dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m_1} + \frac{\sigma_2^2}{m_2}}} = \dfrac{63,516 - 62,5675}{\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(0,1)^2}{4}}} = 2,1078$

- la loi sous H_0 c'est-à-dire pour $\mu_1 = \mu_2$,

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m_1} + \frac{\sigma_2^2}{m_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- la règle de comportement :

$$RH0 \text{ si } |T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > z_{\alpha/2} = z_{0,05/2} = z_{0,025}$$

comme $z_{0,025} = 1,96$,

$$RH0 \text{ si } |T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > 1,96$$

Dans notre cas, $|T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| = 2,1078 > 1,96 \Rightarrow RH_0$

Il y a une différence significative entre les 2 procédés

2) nous voulons comparer la moyenne de 2 populations normales de même écart-type σ_1 et σ_2 inconnus.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$ au niveau $5\% = 0{,}05$

Nous savons que dans ce cas

- <u>la statistique de test</u> est $\dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2} \dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$

nous avons $\bar{x}_1 = 63{,}516$ $\quad n_1 = 5$

$\bar{x}_2 = 62{,}5675$ $\quad n_2 = 4$

$s_1^2 = \dfrac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_1)_i^2 - (\bar{x}_1)^2 = 0{,}2728$

$s_2^2 = \dfrac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (x_2)_i^2 - (\bar{x}_2)^2 = 0{,}1624$

par conséquent $\quad T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 2{,}6363$

- <u>la loi sous H_0</u>, c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2$ est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \sim t_{n_1+n_2-2} = t_7$$

- <u>la règle de comportement</u> est

RH_0 si $|T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > t_{7;\, \alpha/2} = t_{7;\, 0{,}05/2} = t_{7;\, 0{,}025}$

RH_0 si $|T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > 2{,}365$

RH_0 si $2{,}6363 > 2{,}365$ $\quad \Rightarrow RH_0$

Il y a une différence significative entre les deux procédés.

Exercice 9.7.

nous intéressons au test (au niveau de confiance α)

$$\begin{cases} H_0 & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

pour une population normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où μ est inconnu.

1) $n = 15$, $\sigma_0^2 = 18$ et $\alpha = 0{,}05$

- la statistique de test est $T(\underline{x}) = \frac{nS^2}{18} = \frac{5}{6} S^2$
- la loi sous H_0, c'est-à-dire $\sigma^2 = 18$, est

$$T(\underline{x}) \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{14}$$

- la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } T(\underline{x}) \notin \left[\chi^2_{14;\frac{0,05}{2}} ; \chi^2_{14;1-\frac{0,05}{2}}\right]$$

$$RH_0 \text{ si } T(\underline{x}) \notin [5,63 ; 26,12]$$

$$RH_0 \text{ si } \frac{5}{6} S^2 \notin [5,63 ; 26,12]$$

$$RH_0 \text{ si } S^2 \notin [6,756 ; 31,344]$$

Il y a donc rejet de l'hypothèse $\sigma^2 = 18$ lorsque $S^2 \notin [6{,}756 ; 31{,}344]$

2) $n = 72$, $\sigma_0^2 = 46$ et $\alpha = 0{,}01$

Comme $n = 72 > 30$, nous pouvons utiliser le résultat asymptotique $\sqrt{2\chi^2_{n-1}} - \sqrt{2n-3} \approx \mathcal{N}(0,1)$

- la statistique du test est $T(\underline{x}) = \sqrt{\frac{2nS^2}{46}} - \sqrt{2n-3}$

$$\Rightarrow T(\underline{x}) = \sqrt{3{,}1304\, S^2} - 11{,}8743$$

- la loi sous H_0, c'est-à-dire, $\sigma^2 = 46$, est

$$T(\underline{x}) \approx \mathcal{N}(0,1) \quad \left(\text{car } \frac{nS^2}{46} \sim \chi^2_{n-1} \text{ sous } H_0\right)$$

- la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } |T(\underline{x})| > z_{0,005}$$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $|T(\underline{x})| \geq 2,576$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $T(\underline{x}) \notin [-2,576 ; 2,576]$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $\sqrt{3,1304\, S^2} - 11,8743 \notin [-2,576 ; 2,576]$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $3,1304\, S^2 \notin [(9,2983)^2 ; (14,4503)^2]$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $S^2 \notin [27,619 ; 66,7043]$

Exercice 9.8.

Nous voulons comparer les variances de 2 populations normales au niveau 5%

1) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$ au niveau $\alpha = 0{,}05$.

• la statistique du test est $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \dfrac{\dfrac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2 (n_1 - 1)}}{\dfrac{n_2 s_2^2}{\sigma_2^2 (n_2 - 1)}}$

$$\Rightarrow T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\dfrac{16\,50}{\sigma_1^2 (15)}}{\dfrac{(16)^2}{\sigma_1^2 (15)}} = \frac{50}{16} = 3{,}125$$

• la loi sous H_0, c'est-à-dire $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \sim F_{(n_1 - 1 ; n_2 - 1)} = F_{(15,15)}$$

• la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \notin \left[F_{(15,15); \frac{0{,}05}{2}} ; F_{(15,15); 1 - 0{,}05/2} \right]$$

$$\Leftrightarrow RH_0 \text{ si } T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \notin \left[F_{(15,15); 0{,}025} ; F_{(15,15); 0{,}975} \right]$$

$F_{(15,15); 0{,}975} = ?$ $\quad F_{F(15,15)}\left(F_{(15,15); 0{,}975} \right) = P\left[F_{(15,15)} \leq F_{(15,15); 0{,}975} \right] = 0{,}975$

$$\Rightarrow F_{(15,15); 0{,}975} = 2{,}86$$

$F_{(15,15); 0{,}025} = ?$ $\quad F_{(15,15)}\left(F_{(15,15); 0{,}025} \right) = P\left[F_{(15,15)} \leq F_{(15,15); 0{,}025} \right]$

$$= P\left[\frac{1}{F_{(15,15)}} \geq \frac{1}{F_{(15,15); 0{,}025}} \right]$$

$$= P\left[F_{(15,15)} \geq \frac{1}{F_{(15,15);0,025}} \right]$$

$$= 1 - P\left[F_{(15,15)} \leq \frac{1}{F_{(15,15);0,025}} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{F(15,15)}\left(\frac{1}{F_{(15,15);0,025}} \right) = 1 - 0,025 = 0,975.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{F_{(15,15);0,025}} = 2,86$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{(15,15);0,025} = 0,3497.$$

$\Rightarrow$ RH_0 si $T(x_1, x_2) \notin [0,3497 ; 2,86]$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $3,125 \notin [0,3457 ; 2,86] \Rightarrow$ RH_0

2) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$ au niveau $\alpha = 0,05$.

- <u>la statistique du test</u> est $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \dfrac{\dfrac{n_1 S_1^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{n_2 - 1}}$

$$\Rightarrow T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\frac{60 \cdot 8}{59}}{\frac{120 \cdot 17}{119}} = 0,4746$$

- <u>la loi sous H_0</u>, c'est-à-dire $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \sim F_{(n_1 - 1, n_2 - 1)} = F_{(59, 119)}$$

- <u>la règle de comportement</u> est

RH_0 si $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \notin \left[F_{(59,119);0,025} , F_{(59,119);0,975} \right]$

$$F_{(59,119);0,975} \simeq 1,53 \quad \text{et} \quad F_{(59,119);0,025} = \frac{1}{F_{(119,59);0,975}} \simeq 0,6329$$

RH_0 si $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \notin [0,6329 ; 1,53]$

$\Leftrightarrow$ RH_0 si $0,4746 \notin [0,6329 ; 1,53] \Rightarrow$ RH_0

3) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq 3\sigma_2^2 \end{cases}$ au niveau $\alpha = 0,05$

- la statistique du test est $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \dfrac{\dfrac{n_1 s_1^2}{3(n_1-1)}}{\dfrac{n_2 s_2^2}{(n_2-1)}}$

$\Rightarrow T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 0,8887$

- la loi sous H_0, c'est-à-dire $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$, est

$$T(x_1, x_2) \sim F_{(n_1-1, n_2-1)} = F_{(24,39)}$$

- la règle de comportement est

RH_0 si $T(x_1, x_2) \notin \left[F_{(24,39)};0,025 ; F_{(24,39)};0,975\right]$

$F_{(24,39)};0,975 \simeq 2,01$

$F_{(24,39)};0,025 = \dfrac{1}{F_{(39,24)};0,975} \simeq \dfrac{1}{2,15} = 0,4651$

$\Rightarrow RH_0$ si $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \notin [0,4651 ; 2,01]$

$\Rightarrow RH_0$ si $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 0,8887 \notin [0,4651 ; 2,01]$

$\Rightarrow \cancel{R}H_0$

Exercice 9.9.

Nous cherchons la puissance du test (au niveau α)

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

pour un échantillon issu d'une population normale. Nou
donc que la statistique de test est

$$T(\underline{x}) = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

et que sous H_0, c'est-à-dire lorsque $\sigma^2 = \sigma_0^2$, $T(\underline{x}) \sim \chi$
La règle de comportement est alors

$$RH_0 \text{ si } T(\underline{x}) \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1}\right.$$

Par définition, la puissance du test est $P(RH_0 \mid H_1)$
c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 sacha
l'hypotèse H_1 est vérifiée.

$$P(RH_0 \mid H_1) = P\left[T(\underline{x}) \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \middle| \sigma\right.$$

$$= P\left[\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \middle| \right.$$

$$= 1 - P\left[\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \in \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \middle| \frac{nS^2}{\sigma_1^2}\right.$$

$$= 1 - P\left[\frac{nS^2}{\sigma_1^2} \in \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;1-}\right.\right.$$

$$= 1 - P\left[\chi^2_{n-1} \in \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$= 1 - P\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;\alpha/2} \leq \chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n}\right.$$

$$= 1 - \left\{ P\left[\chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] - P\left[\chi^2_{n-1}\right.\right.$$

$$= 1 - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right) + F_{\chi^2_{n-1}}\left(\right.$$

Exercice 9.9.

Nous cherchons la puissance du test (au niveau α)

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

pour un échantillon issu d'une population normale. Nous savons donc que la statistique de test est

$$T(\underline{x}) = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

et que sous H_0, c'est-à-dire lorsque $\sigma^2 = \sigma_0^2$, $T(\underline{x}) \sim \chi^2_{n-1}$.
La règle de comportement est alors

$$RH_0 \text{ si } T(\underline{x}) \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} \, ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right]$$

Par définition, la puissance du test est $P(RH_0 \mid H_1)$ c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 sachant que l'hypotèse H_1 est vérifiée.

$$\begin{aligned}
P(RH_0 \mid H_1) &= P\left[T(\underline{x}) \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} \, ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \,\middle|\, \sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2\right] \\
&= P\left[\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \,\middle|\, \frac{nS^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}\right] \\
&= 1 - P\left[\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \in \left[\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \,\middle|\, \frac{nS^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}\right] \\
&= 1 - P\left[\frac{nS^2}{\sigma_1^2} \in \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \,\middle|\, \frac{nS^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}\right] \\
&= 1 - P\left[\chi^2_{n-1} \in \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;\alpha/2} ; \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right]\right] \\
&= 1 - P\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;\alpha/2} \leq \chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] \\
&= 1 - \left\{P\left[\chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right] - P\left[\chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;\alpha/2}\right]\right\} \\
&= 1 - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right) + F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1;\alpha/2}\right)
\end{aligned}$$

Nous savons que pour n grand,

$$\frac{S_2 \sqrt{n-2}}{S_1 \sqrt{1-r^2}} (b_{21} - \beta_{21}) \sim t_{n-2},$$

ce qui implique que l'I.C au niveau de confiance 95% est

$$I.C. = \left[b_{21} \pm t_{n-2;\frac{\alpha}{2}} \frac{S_1 \sqrt{1-r^2}}{S_2 \sqrt{n-2}} \right]$$

$$= \left[0{,}2817 - \frac{(2,3)\sqrt{1-(0,36)^2}}{(1,8)\sqrt{298}}(1,96) ; 0{,}2817 + \frac{(2,3)\sqrt{1-(3,6)^2}}{(1,8)\sqrt{298}}(1,96) \right]$$

$$= [0{,}146 ; 0{,}417]$$

b) Nous savons que pour n grand,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \approx \mathcal{N}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

• <u>la statistique de test</u> est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,2}{1-0,2}}{\frac{1}{\sqrt{300-3}}}$$

$$= \frac{0{,}38 - 0{,}2}{0{,}058} = 3{,}1021$$

• <u>la loi sous H_0</u> est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

• <u>la règle de comportement</u> est

$$R H_0 \text{ si } |T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1{,}96$$

$$R H_0 \text{ si } 3{,}1021 > 1{,}96$$

$$\Rightarrow R H_0$$

c)

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$ au niveau 1%

• <u>la statistique de test</u> est

$$T(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = \frac{\sqrt{n-2}\, r}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sqrt{298}\,.\,r}{\sqrt{1-r^2}} = 6,6612$$

• <u>la loi sous H_0</u> est

$$T(\underline{X}_1, \underline{X}_2) \sim t_{n-2} = t_{298}$$

• <u>la règle de comportement</u> est

$$RH_0 \text{ si } |T(\underline{X}_1, \underline{X}_2)| > t_{298; \frac{0,01}{2}} = t_{298; 0,005}$$

que vaut $t_{298;0,005}$?

$$t_{n-2} = t_{298} \simeq \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow t_{298;0,005} \simeq z_{0,005} = 2,576$$

$$\Rightarrow RH_0 \text{ si } 6,6612 > 2,546 \Rightarrow RH_0$$

Exercice 9.10.

Nous savons que $n_1 = n_2 = n = 300$, $s_1 = 2,3$, $s_2 = 1,8$ et $r = 0,36$. Nous déduisons donc que

$$r = \frac{m_{11}}{s_1 \, s_2} = \frac{m_{11}}{(2,3).(1,8)} = 0,36$$

$$\Leftrightarrow \quad m_{11} = \text{covariance} = 1,4904.$$

Par conséquent,

$$b_{21} = \frac{m_{11}}{s_1^2} = \frac{1,4904}{(2,3)^2} = 0,2817$$

et

$$b_{12} = \frac{m_{11}}{s_2^2} = \frac{1,4904}{(1,8)^2} = 0,46$$

a) Nous savons que pour n grand,

$$\frac{S_1 \sqrt{n-2}}{S_2 \sqrt{1-r^2}} (b_{12} - \beta_{12}) \sim t_{(n-2)}$$

$$\Rightarrow \quad P\left[-t_{n-2;\, \alpha/2} \leq \frac{S_1 \sqrt{n-2}}{S_2 \sqrt{1-r^2}} (b_{12} - \beta_{12}) \leq t_{n-2;\, \alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left[-t_{n-2;\, \alpha/2} \cdot \frac{S_2 \sqrt{1-r^2}}{S_1 \sqrt{n-2}} \leq (b_{12} - \beta_{12}) \leq t_{n-2;\, \alpha/2} \cdot \frac{S_2 \sqrt{1-r^2}}{S_1 \sqrt{n-2}} \right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left[b_{12} - t_{n-2;\, \alpha/2} \frac{S_2 \sqrt{1-r^2}}{S_1 \sqrt{n-2}} \leq \beta_{12} \leq b_{12} + t_{n-2;\, \alpha/2} \frac{S_2 \sqrt{1-r^2}}{S_1 \sqrt{n-2}} \right] = 1 - \alpha$$

L'I.C. pour β_{12} au niveau de confiance $1-\alpha$ est

$$I.C = \left[b_{12} \pm t_{n-2;\, \alpha/2} \frac{S_2 \sqrt{1-r^2}}{S_1 \sqrt{n-2}} \right]$$

$$= \left[0,46 \pm t_{298;\, 0,025} \underbrace{\frac{(1,8)\sqrt{1-(0,36)^2}}{(2,3)\sqrt{298}}}_{= 0,0423} \right]$$

Comme $t_{298;\, 0,025}$ vérifie

$$P\left[t_{298} \leq t_{298;\, 0,025} \right] = 0,975,$$

$$t_{298;\, 0,025} \simeq \frac{1,972 + 1,965}{2} = 1,9685$$

Par conséquent,

$$IC = \left[0,377 \, ; \, 0,543 \right]$$

Exercice 9.11

$n = 60 \qquad r = -0,32$

1) $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$ au niveau $5\% = 0,05$

- la statistique de test est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\sqrt{n-2}\, r}{\sqrt{1-r^2}} = -2,5723$$

- la loi sous H_0 est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \sim t_{n-2} = t_{58}$$

- la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } |T(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| > t_{58;0,025} \simeq 2$$

$$\Leftrightarrow RH_0 \text{ si } 2,5723 > 2 \Rightarrow RH_0$$

2) $\begin{cases} H_0 : \rho = -0,21 \\ H_1 : \rho \neq -0,21 \end{cases}$ au niveau $\alpha = 5\% = 0,05$

Nous savons que pour n grand, $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- la statistique de test est

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-0,21}{1+0,21}}{\frac{1}{\sqrt{57}}}$$

comme

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+0,32}{1-0,32} \simeq -0,33$$

et $\frac{1}{2} \ln \frac{1-0,21}{1+0,21} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+0,21}{1-0,21} \simeq -0,21$

nous déduisons que

$$T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{-0,33 + 0,21}{\frac{1}{\sqrt{57}}} = -0,906$$

- la loi sous H_0 est

$$T(\underline{X}_1, \underline{X}_2) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } |T(x_1, x_2)| > z_{0,025} = 1,96$$

$$RH_0 \text{ si } 0,906 > 1,96 \Rightarrow \cancel{R}H_0 .$$

Exercice 9.12.

on lance 8000 fois un dé et on obtient 2260 "1 ou 2".
Nous voulons tester, à 5%, si le dé est équilibré.
Soit X la variable représentant le résultat du jet du dé.
Si le dé est équilibré, alors

$$P(X=k) = 1/6 \qquad k=1,\dots,6.$$

$$\Rightarrow P\big((X=1)\cup(X=2)\big) = P(X=1)+P(X=2)$$
$$= 1/6 + 1/6 = 1/3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_0 : p = 1/3 \\ H_1 : p \neq 1/3 \end{cases} \quad \text{au niveau } 5\%$$

- la statistique de test est

$$T(\underline{x}) = \frac{\bar{x} - 1/3}{\sqrt{\dfrac{1/3 - 1/9}{8000}}} = -9,6449 \qquad \left(\bar{x} = \frac{2260}{8000}\right)$$

- la loi sous H_0 est

$$T(\underline{x}) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- la règle de comportement est

$$RH_0 \text{ si } |T(\underline{x})| > z_{0,025} = 1,96$$
$$RH_0 \text{ si } |-9,6449| > 1,96$$

$$\Rightarrow RH_0$$

Exercice 9.13.

$n = 100$

$\bar{x} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

p = proportion d'automobilistes possédant une voiture de cylindrée supérieure à 1600 cc.

Méthode exacte

Notons $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ personne possède une voiture de cylindrée supérieure à 1600 cc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $i = 1, \dots, 100$

$= \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \\ 0 & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$

$\Rightarrow X_i \perp\!\!\!\perp$ et $X_i \sim Bin(1,p)$

$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim Bin(100, p)$

I.C. pour p au niveau de confiance $\begin{cases} 95\% : [0,126 ; 0,292] \\ 99\% : [0,109 ; 0,321] \end{cases}$

Approximation normale

$$\frac{\frac{F}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1ère approximation normale

I.C. pour p au niveau de confiance $1-\alpha$:

$$\frac{n}{n + z_{\alpha/2}^2}\left[\frac{F}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{F(n-F)}{n^3} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}\right]$$

IC pour p au niveau de confiance

$$\begin{cases} 95\% : \frac{100}{100+(1,96)^2}\left[\frac{20}{100} + \frac{(1,96)^2}{200} \pm (1,96)\sqrt{\frac{20 \cdot 80}{(100)^3} + \frac{(1,96)^2}{4(100)^2}}\right] \\ 99\% = \frac{100}{100+(2,576)^2}\left[\frac{20}{100} + \frac{(2,576)^2}{200} \pm (2,576)\sqrt{\frac{20 \cdot 80}{(100)^3} + \frac{(2,576)^2}{4(100)^2}}\right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 95\% & [0,1334 ; 0,2888] \\ 99\% & [0,1172 ; 0,3202] \end{cases}$$

$2^{ème}$ approximation normale

I.C. pour p au niveau de confiance $1-\alpha$,

$$\left[\frac{F}{n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{F(n-F)}{n^3}}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 95\% : \left[\frac{20}{100} \pm (1,96)\sqrt{\frac{20.80}{(100)^3}}\right] = \left[0,1216 \,;\, 0,2784\right] \\ 99\% : \left[\frac{20}{100} \pm (2,576)\sqrt{\frac{20.80}{(100)^3}}\right] = \left[0,097 \,;\, 0,303\right] \end{cases}$$

Méthode de l'arc sin

$$2 \arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} \sim \mathcal{N}\left(2\arcsin\sqrt{p}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} - 2\arcsin\sqrt{p}}{1/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{2\arcsin\sqrt{F/n} - 2\arcsin\sqrt{p}}{1/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(2\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} \leq 2\arcsin\sqrt{p} \leq 2\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2} \leq \arcsin\sqrt{p} \leq \arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\sin\left\{\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} \leq \sqrt{p} \leq \sin\left\{\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\left[\sin\left\{\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}\right]^2 \leq p \leq \left[\sin\left\{\arcsin\sqrt{\frac{F}{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}\right]^2\right) = 1-\alpha$$

I.C. pour p au niveau de confiance

$$\begin{cases} 95\% : \left[0,128 \,;\, 0,28\right] \\ 99\% : \left[0,103 \,;\, 0,3118\right] \end{cases}$$