9 INTERVALLES DE CONFIANCE ET TESTS D'HYPOTHESES

EXERCICE 9.1.

Dix mesures au micromètre d'une même grandeur K donnent $\bar{x} = 4,0759$ et $s = 0,0039$. En supposant les erreurs de mesure normales de moyenne 0 et de même écart-type, construire un intervalle de sécurité à 95 % pour K.

EXERCICE 9.2.

En supposant que le temps de calcul pour résoudre le problème du plus court chemin dans un graphe à 50 sommets suit une loi normale d'écart-type 100 secondes, quel est l'effectif minimum de l'échantillon à tester pour que l'intervalle de sécurité (à 95 %) du temps de calcul moyen ait une longueur inférieure à 20 secondes.

EXERCICE 9.3.

Construire un intervalle de sécurité à 95 % pour la variance d'une population normale sachant que la variance d'un échantillon

1^{e} cas : d'effectif 14 est égale à 7,3

2^{e} cas : d'effectif 80 est égale à 14

EXERCICE 9.4.

(IC pour μ et σ) Une expérience délicate est réalisée en laboratoire avec pour objectif de déterminer la concentration moyenne μ (en microgrammes par litre) d'un polluant donné à partir d'un échantillon d'eau. Par précaution, chaque mesure pouvant être affectée par une erreur aléatoire, on décide d'en réaliser 5 à chaque fois sur base d'un échantillon différent. Si $X_1, ..., X_5$ sont ces mesures, on suppose que les variables aléatoires $X_1, ..., X_5$ sont i.i.d avec $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ (puisque (1) le résultat obtenu pour un échantillon ne peut affecter le résultat pour un autre échantillon, (2) en moyenne, on s'attend à ce que l'écart $|X_i - \mu|$ entre la mesure et la concentration réelle soit nul, (3) ces écarts résultant de sources d'erreurs multiples qui s'additionnent et sont indépendantes, il est raisonnable de poser que leur distribution tend vers une loi normale en vertu du Théorème Central Limite). Les résultats obtenus pour les 5 mesures sont les suivants: 26,1 23,7 20,4 21,3 17,3

Construire un intervalle de confiance à la moyenne et à la variance (à 95%). (De Boeck p.297 ex 9-33)

EXERCICE 9.5.

(IC pour μ) Suite à une exposition considérable de radiation, l'apparition retardée d'affection de la peau est courante. Soit X le temps (en jours) qui s'écoule entre l'exposition et l'apparition des rougeurs de la peau:

6	12	14	16	13	09	15	07
20	19	11	14	09	13	11	03
08	21	16	16	12	16	14	20
07	14	18	14	18	13	11	16
18	16	11	13	14	16	15	15

1. Bien que le temps auquel apparaissent les premières rougeurs est enregistré en terme de jour, le temps est pourtant une variable continue. Dessiner un graphique en bâtonnets de ces données. Ce graphique vous permet-il de faire une hypothèse sur la loi de distribution de X? Si oui, laquelle?

2. Si $\sigma = 4$, construire en fonction de la loi obtenue au point précédent, un intervalle de confiance (à 95%) pour le temps moyen avant l'apparition des rougeurs.

3. Seriez-vous surpris d'entendre que le temps moyen réel est de 17 jours? Expliquez.

(McGraw p.253 ex 48)

EXERCICE 9.6.

On dispose de 2 échantillons de tubes construits avec deux procédés de fabrication A et B, dont on a mesuré les diamètres (en mm).

$$\begin{array}{lccccc} A: & 63,12 & 63,57 & 62,81 & 64,32 & 63,76 \\ B: & 62,51 & 63,24 & 62,31 & 62,21 & \end{array}$$

En supposant que les diamètres soient distribués suivant une normale, tester au niveau 5% s'il y a une différence significative entre les procédés A et B

1) lorsque $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = 0,1$;

2) lorsque $\sigma_1 = \sigma_2 =$ quantité inconnue,

σ_1 et σ_2 étant les écart-types associés respectivement à A et B.

EXERCICE 9.7.

Quelles valeurs de s^2 d'un échantillon d'effectif n issu d'une population normale conduiraient au rejet de l'hypothèse $\sigma^2 = \sigma_0^2$ dans chacun des cas suivants :

1) $n = 15$ $\quad \sigma_0^2 = 18$ $\quad \varepsilon = 0,05$

2) $n = 72$ $\quad \sigma_0^2 = 46$ $\quad \varepsilon = 0,01$

EXERCICE 9.8.

Dans le cas de 2 populations normales, tester à 5 %

1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ sachant que $n_1 = n_2 = 16$, $s_1^2 = 50$, $s_2^2 = 16$

2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ sachant que $n_1 = 60$, $n_2 = 120$, $s_1^2 = 8$, $s_2^2 = 17$

3) $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$ sachant que $n_1 = 25$, $n_2 = 40$, $s_1^2 = 21$, $s_2^2 = 8$

EXERCICE 9.9.

Donner l'expression de la puissance du test relatif à l'hypothèse $\sigma^2 = \sigma_0^2$ pour un échantillon issu d'une population normale.

EXERCICE 9.10.

On effectue 300 mesures d'une variable bidimensionnelle normale et on trouve $s_1 = 2,3$; $s_2 = 1,8$ et $r = 0,36$.

a) Construire un intervalle de sécurité à 95 % pour les coefficients de régression;

b) Tester à 5 % l'hypothèse $\rho = 0,2$;

c) Tester à 1 % l'indépendance des 2 composantes.

EXERCICE 9.11.

Un échantillon d'effectif 60 prélevé dans une population bidimensionnelle normale donne $r = -0,32$. Tester à 5 % les hypothèses $\rho = 0$ et $\rho = -0,21$.

EXERCICE 9.12.

On lance 8000 fois un dé et on obtient 2260 fois "1 ou 2". Tester, à 5 %, si le dé est équilibré.

EXERCICE 9.13.

Dans un échantillon au hasard de 100 automobilistes, on constate que 20 d'entre eux possèdent une voiture de cylindrée supérieure à 1600 cc. Donner un intervalle de sécurité pour la proportion d'automobilistes possédant une voiture de cylindrée supérieure à 1600 cc

a) par la méthode exacte,

b) par l'approximation normale,

c) par la méthode de l'arc sin

Effectuer les calculs

1) pour un coefficient de sécurité de 95 %,

2) pour un coefficient de sécurité de 99 %.

EXERCICE 11.1.

L'étalage d'un horloger contient 500 montres; on note les heures indiquées et on obtient le résultat suivant :

$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	$[10,11)$	$[11,12)$
36	47	41	47	49	45	32	37	40	41	37	48

Tester à 5% que l'heure indiquée est distribuée uniformément.

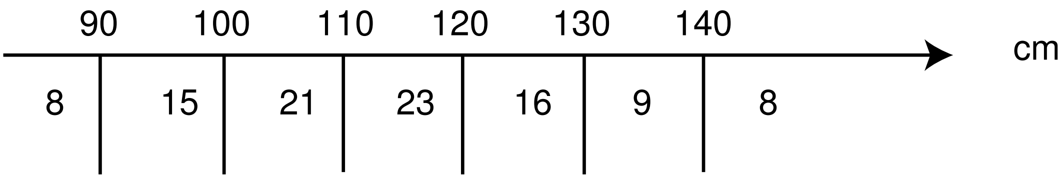
EXERCICE 11.2

Une substance radioactive a été observée pendant 2608 intervalles de temps de 7,5 secondes chacun et on a noté le nombre de particules α atteignant un compteur durant chaque période (cf. tableau). Tester, au niveau 5 % que ces données peuvent être condisérées comme provenant d'une distribution de Poisson.

Nbre de particules	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nbre de périodes	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2

EXERCICE 11.3.

On a mesuré la taille de 100 enfants. Tester au niveau 5% que cette taille a une distribution normale.



EXERCICE 11.4.

Le tableau suivant donne les durées de vie de frigos des marques FROID, FRESCA et COLD. Tester à 5 % que ces 3 marques fournissent des frigos de même durée de vie.

Durée de vie en années	0 ou 1	2 ou 3	4 ou 5	6 ou 7	8 ou 9	plus de 9
FROID	15	37	55	108	118	60
FRESCA	5	13	180	205	386	400
COLD	55	160	300	106	55	40

EXERCICE 11.5.

Les données du tableau ci-dessous proviennent d'échantillons de pièces de 5 producteurs différents.

a) Tester à 5 % que la proportion de pièces défectueuses chez le premier producteur est de 3 %.

b) Tester à 5 % que les proportions de pièces défectueuses des 5 producteurs sont égales.

Producteur	1	2	3	4	5
Nombre de pièces défectueuses	41	15	21	13	19
Nombre de pièces acceptables	259	301	401	304	405

EXERCICE 11.6.

On a interrogé 1505 ménages au hasard et on les a classés

1) suivant la catégorie socio-professionnelle,

2) suivant le nombre d'enfants;

Tester l'indépendance de ces 2 critères de classification

Catégorie	Nombre d'enfants		
	0 ou 1	2 ou 3	plus de 3
A	203	150	6
B	266	112	1
C	258	126	2
D	196	168	17