TP 8 : APPLICATIONS DES THEOREMES FONDAMENTAUX ET DES RESULTATS ASYMPTOTIQUES

Rappel théorique

Inégalité de Bienayne-Tchebycheff

Pour toute variable aléatoire V de moyenne μ et d'écart-type σ et pour toute constante positive k, on a :

$$P[|V-\mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}.$$

Interprétation : cette propriété montre que, dans toute distribution, la proportion d'individus s'écartant de la moyenne de plus de k fois l'écart-type est toujours inférieure à $\frac{1}{k^2}$.

Théorème de Bernoulli ou loi des grands nombres

Soit n répétitions d'une expérience aléatoire au cours desquelles un événement A peut chaque fois se produire avec une probabilité p ; la probabilité que la fréquence relative de A, au cours de ces n répétitions, diffère de p d'au moins une quantité arbitraire ϵ, tend vers 0 lorsque $n \to \infty$:

$$P[|\frac{F}{n} - p| \geq \epsilon] \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Interprétation : ce résultat n'est rien d'autre que la formalisation du phénomène de régularité statistique puisqu'il montre que la fréquence relative d'un évènement converge vers sa probabilité.

Théorème de Moivre

Lorsque $n \to \infty$, la distribution de probabilité de la binomiale $B(n,p)$ réduite tend vers la densité de probabilité de la normale $N(0,1)$; on dit que la variable binomiale est asymptotiquement normale.

$$\frac{B(n,p)-np}{\sqrt{npq}} \overset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$$

Ce théorème est un cas particulier du Théorème Central-Limite.

Théorème Central-Limite

Sous certaines conditions très générales, la somme de n variables aléatoires indépendantes est une variable asymptotiquement normale :

$$\left.\begin{array}{l} V_1, V_2, \ldots, V_n indpendantes \\ V = \sum_{i=1}^{n} V_n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V-\mu}{\sigma} \overset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$$

où μ et σ sont la moyenne et l'écart-type de V.
Interprétation : il est remarquable de constater que cette propriété est applicable quelles que soient les distributions des variables V_i. Ce théorème montre l'iimportance de la variable N(0,1).